КВАНТ
ЖУРНАЛ

1991

1 - 12

НОМЕР
1

Квант

1 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 К нашим читателям
8 *А. Шур.* Спутниковое телевидение
10 *В. Овсиенко.* Сколько на Земле кривых?

Задачник «Кванта»

18 Задачи М1261—М1265, Ф1268—Ф1272
19 Решения задач М1236—М1240, Ф1248—Ф1252
29 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

30 Задачи
31 *С. Тихомирова.* Задачи про свет и цвет

Школа в «Кванте»
Физика 9, 10, 11:

35 Гроза и грозоотвод
38 За пределы таблицы
44 Избранные школьные задачи по физике

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Качественные задачи по физике

45 «Велосипедная» задача

Математический кружок

47 *Н. Васильев.* Геометрические вероятности

Практикум абитуриента

54 *В. Уроев, М. Шабунин.* Об углах и окружностях

Информация

53 Конкурс «Математика 6—8»
58 Малый мехмат
59 Всесоюзная заочная многопредметная школа
62 «Дружба—90»
63 ФМШ при МГУ и НГУ
64 Участникам Научно-технической конференции в МФТИ
65 Конкурс «KQ—91»

Игры и головоломки

66 Реверси

71 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**
75 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(9)*
Реклама *(34)*

Наша обложка

1, 2 Фотография «следов» ядерных частиц и картина Сальвадора Дали «Ядерная голова ангела» (1952) — так мы решили проиллюстрировать заметку «За пределы таблицы».
3 Шахматная страничка.
4 Еще раз о головоломке «Цветные фишки на треугольном поле».

© «Квант», 1991

Дорогие читатели!

Перед вами — 253 номер «Кванта». За два десятилетия своего существования журнал, несомненно, менялся — от чего-то мы отказывались, появлялись новые рубрики... Мы старались и стараемся следить за жизнью, наукой, школой. Но свой облик журнал приобрел, и мы намерены сохранить его и в этом году.

Что же ждет вас в «Кванте»?

Рассказы об истории и достижениях науки, о проблемах, над которыми работают физики и математики, о современных открытиях, интервью с крупными учеными, их размышления о науке и о путях ее развития — эти материалы помещаются на первых страницах журнала.

Наш «Задачник» — это раздел, который ведется из номера в номер. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, *выходящих за рамки школьной* программы. Ежегодно мы проводим конкурс на лучшее решение этих задач. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Материалы, связанные со школьной программой, разъясняющие наиболее трудные вопросы школьного курса,— содержание рубрики «Школа в «Кванте».

Те, кто собираются поступать в вузы, найдут для себя полезные материалы в разделах «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов».

«Квант» для младших школьников» — это раздел, в котором публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, умения мыслить логически. Статьи, помещаемые в этом разделе, мы надеемся, доступны и интересны всем школьникам — любителям математики и физики.

Тем, кто любит физические опыты,— материалы рубрики «Лаборатория «Кванта». Они помогут вам развить наблюдательность, научиться ставить эксперимент, делать простые приборы.

«Математический кружок» — для участников математических кружков, сегодняшних и завтрашних.

Тем, для кого «Р — значит ракета», предназначаются материалы о теории космических полетов, а также о развитии и проблемах космонавтики, об исследовании космического пространства, о работе Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества.

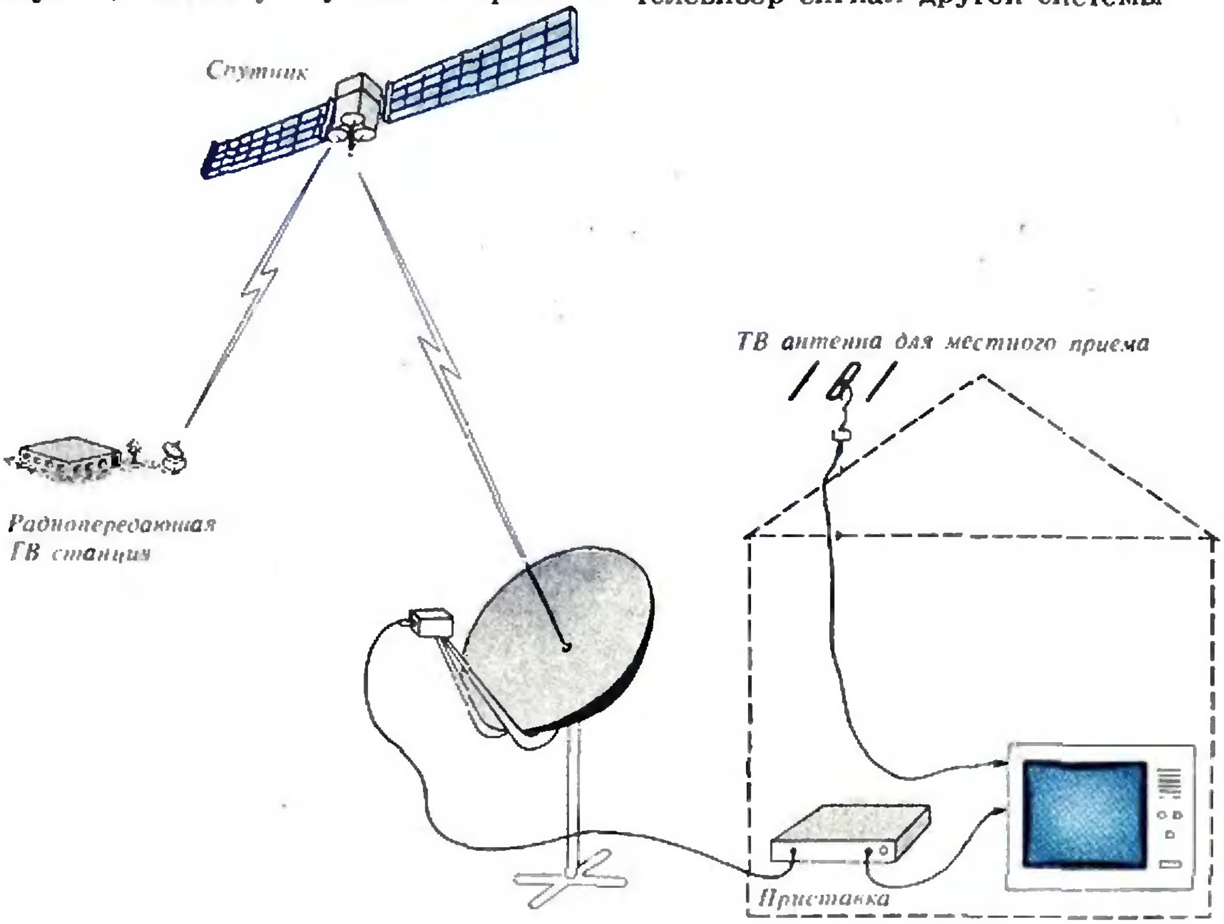
Что еще? «Калейдоскоп», «Фантастика», «Игры и головоломки», «Шахматная страничка», «Олимпиады»...

Понравится ли вам журнал? Что для вас будет наиболее занимательным, полезным? Нам очень важно знать ваше мнение. Поэтому раз в квартал мы помещаем нашу «Анкету».

И ждем ваших писем!

TV — ТВ

Телевидение в наше время очень популярно. Даже весьма далекие от техники люди живо интересуются состоянием дел в этой области и хотят знать, когда же можно будет принимать на домашний телевизор программы со всего света. В этом уже нет ничего плохого, и дело теперь за техникой. Однако тут и возникают *серьезные проблемы — если* телезритель не хочет ждать, пока государство все решит и подготовит и будет достаточно только включить соответствующий канал у своего телевизора, ему придется изрядно потрудиться самому. При этом он должен более или менее четко представлять себе суть возникающих проблем. Часть их связана собственно с приемом сигналов от спутника — эти сигналы слабые и могут утонуть в шумах, антенну нужно направить на спутник, а это не так просто, да и диапазон частот очень уж непривычен для радиолюбителей, на таких высоких частотах обычные транзисторы не работают и нужно применять экзотические приборы (диоды Ганна, например). Другая часть проблем возникает после того, как сигнал удалось принять. Дело в том, что *в настоящее время используется* множество разных систем цветного телевидения. Основные из них—это SECAM, PAL и NTSC. Советско-французская система SECAM используется еще в нескольких странах, в Европе применяют систему PAL, а в США и Японии работают с системой NTSC. На обычные отечественные телевизоры можно принимать полноценно только передачи в системе SECAM; если подать на такой телевизор сигнал другой системы



(например, с видеомагнитофона), получится только черно-белая картинка, да и звука может не быть. Телевизоры новых поколений у нас в стране будут многостандартными, а пока приходится подключать к ним специальный декодер.

Тут нужно сказать, что ни одна из перечисленных систем не превосходит по всем параметрам остальных — в чем-то лучше одна, в чем-то — другая. Плохое качество изображения, которое еще кое-где порой встречается на экранах отдельных отечественных телевизоров, связано вовсе не с пороками системы SECAM. Хотя, справедливости ради, заметим, что принятие у нас в стране этой системы было продиктовано не только техническими, но и политическими соображениями.

Телевидение — это очень интересная область техники, в этой области работали и работают и серьезные ученые, и хорошие инженеры. Многие технические решения в ТВ очень остроумны и эффективны, а решенные и решаемые задачи находятся на грани возможного при нынешнем состоянии техники. Еще совсем недавно любой грамотный инженер, услышав рассказ о том, как устроен современный кинескоп для цветного телевизора, счел бы это за первоапрельский розыгрыш, а разговор о возможностях современного бытового видеомагнитофона еще 10—15 лет назад вызвал бы насмешки у всякого специалиста по передаче информации. Однако ведь работает! И у каждого из вас есть возможность внести свой вклад в дело посрамления осторожных технических прогнозов, которые делают современные ученые и инженеры.

СПУТНИКОВОЕ ТЕЛЕВИДЕНИЕ

Кандидат технических наук
А. ШУР

Наземное телевидение известно всем. В наземном телевидении антенны наших домашних телевизоров направлены на местную радиопередающую телевизионную (ТВ) станцию. Но, вероятно, еще не все знают, что уже появилось спутниковое телевидение, где антенны направляются прямо на искусственный спутник Земли. На спутнике устанавливается приемник, принимающий ТВ сигнал от наземной передающей станции, и передатчик, излучающий его в сторону Земли.

Спутниковое телевидение охватывает весь земной шар. Оно вызывает большой интерес, поскольку предоставляет возможность принимать ТВ программы любой страны мира. Наземное телевидение удобно и более доступно для местных программ. Уже в настоящее время в США и Западной Европе миллионы телезрителей, используя ту и другую систему телевидения, могут принимать 15—20 ТВ программ.

Частота сигнала

Принцип телевидения, как известно, заключается в последовательной передаче электрических сигналов, соответствующих яркости элементов (точек) изображения. При амплитудной модуляции мощность полезного сигнала изменяется вместе с яркостью элемента. Обычно полоса частот сигнала изображения составляет 6,25 МГц. Для звукового сопровождения также требуется полоса частот до нескольких сот килогерц. В результате один частотный канал (одна ТВ программа) занимает полосу частот 8 МГц. При частотной модуляции мощность сигнала остается неизменной. Пропорционально яркости элемента изображения (и громкости звука) изменяется частота сигнала. Этот вид модуляции имеет некоторые преимущества, но один канал занимает полосу частот в 3—4 раза шире, чем при амплитудной модуляции.

Передача сигналов с такой широкой полосой частот возможна только в диапазоне высоких частот. В диапазоне метровых и дециметровых волн для телевидения выделены полосы частот от 50 до 230 МГц (длина волны λ=6—13 м) и от 470 до 1000 МГц (λ=0,63—0,3 м). Развитие телевидения привело сейчас к тому, что почти все эти частоты уже использованы и даже многократно. Всемирной административной конференцией по радио (ВАКР) специально для спутникового телевидения выделена еще одна полоса частот от 11,7 до 12,5 ГГц. Эта полоса относится к сантиметровому диапазону волн ($\lambda \approx$ 2,5 см). В полосе размещается 60 каналов шириной 27 МГц.

Радиоволны сантиметрового диапазона, так же, как и радиоволны других ТВ диапазонов, распространяются в свободном пространстве прямолинейно, как луч света. В зоне прямой видимости (т. е. при отсутствии преград между приемником и передатчиком) потери энергии сигнала минимальны. При «закрытии» луча зданием, деревьями или выпуклостью Земли прием практически прекращается. На радиоволнах короче примерно 5 см начинают сказываться потери сигнала в мокрых осадках, особенно в дожде. В спутниковых системах для индивидуального приема дождь в течение двух-трех часов может сильно ухудшить или даже «сорвать» изображение.

Антенны

На сантиметровых волнах представляется возможность использовать параболические антенны, позволяющие концентрировать и направлять энергию довольно узким пучком. По сравнению с «изотропной» антенной, которая излучает такую же энергию во все стороны равномерно, параболическая антенна обладает бо́льшим «усилением». Такая антенна работает как прожектор. Как показано на рисунке 1, сферическая волна, которая излучается из конца облучателя, после отражения от металлического зеркала, имеющего форму параболоида, превращается в плоскую. Иначе говоря, расходящийся пучок лучей собирается в параллельный.*)

Облучателем антенны служит открытый конец волновода. Волновод представляет собой трубу круглого или прямоугольного сечения и служит для передачи энергии. Использование для этой цели кабелей на сан-

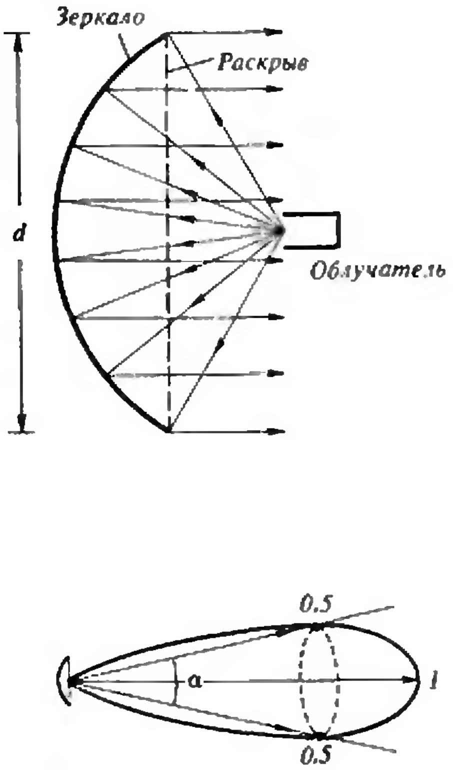


Рис. 1. Диаграмма направленности

---

*) Это свойство параболического зеркала вы сможете легко объяснить, если вспомните, что парабола — это геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от некоторой точки (фокуса) и прямой (директрисы).

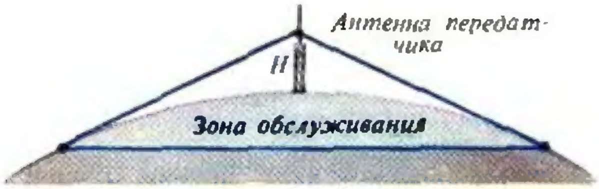


Рис. 2.

тиметровых волнах приводит к большим потерям сигнала. Направленность параболической антенны в пространстве характеризует диаграмма на рисунке 1. Максимум мощности излучается вблизи оси зеркала. По мере удаления от оси излучаемая мощность снижается. Под шириной диаграммы направленности понимают угол α, определенный по точкам, где мощность снижается вдвое относительно максимума. В область диаграммы направленности (внутрь конуса с углом α) антенна излучает примерно 60 % всей мощности. Ширина диаграммы будет тем у́же, чем больше диаметр зеркала d (диаметр раскрыва) и чем меньше длина волны λ:

$$\alpha \approx 1{,}2\lambda/d.$$

Например, при $d=100$ см для $\lambda=2{,}5$ см имеем $\alpha \approx 0{,}3$ рад. При подключении антенны к приемнику антенна «собирает» энергию радиоволн из окружающего пространства. Выигрыш по сравнению с «изотропной» антенной сстается (как и при передаче). Узкая диаграмма направленности хороша еще тем, что ослабляет сигналы от посторонних (мешающих) станций. Для индивидуального приема применяют антенны с диаметром зеркала до 1—1,5 м. Антенны большего диаметра (3 м и более) слишком громоздки и очень дороги. В небольших антеннах облучатель, чтобы не затенять зеркало, выносится в сторону от него. При этом зеркало делают несимметричным. Оно представляет собой несимметричную часть параболы.

Зоны обслуживания

Наличие прямой видимости определяет зону обслуживания передающей ТВ станции, точнее говоря, территорию, где станция обеспечивает уверенный прием. Над земной поверхностью расстояние прямой видимости, в общем случае, зависит от высоты антенн и рельефа местности. Над ровной сферической земной поверхностью, когда высота антенны передатчика H намного больше высоты приемной антенны, расстояние прямой видимости (см. рис. 2)

$$D \approx \sqrt{2RH} \approx 3{,}6 \cdot 10^3 \sqrt{H} \text{ (м)}$$

(R — радиус Земли).

Зона обслуживания станции ограничивается видимым горизонтом. На мощных ТВ станциях высота антенн обычно не превышает 300 м, поэтому радиус зон обслуживания не превосходит 70 км. Для охвата телевидением всей страны построена обширная сеть многочисленных мощных и маломощных (с радиусом зоны несколько километров) станций. Однако есть еще населенные пункты, где, в силу их отдаленности или сложности рельефа местности, наземное телевидение отсутствует.

С появлением искусственных спутников Земли, естественно, возникла мысль — для расширения зоны обслуживания установить ТВ передатчик на спутнике. Спутник запускается на геостационарную орбиту, которая проходит строго над экватором на высо-

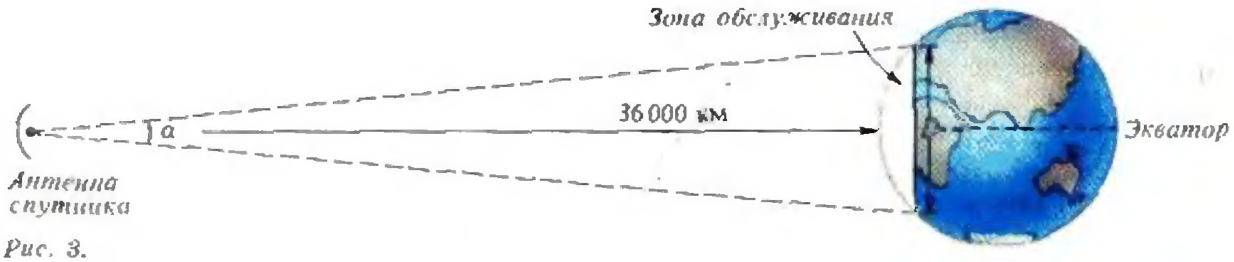


Рис. 3.

те $h\approx 36\,000$ км (т. е. радиус орбиты спутника $\sim 42\,400$ км). Спутник вращается с такой же угловой скоростью, что и Земля вокруг своей оси, поэтому кажется с Земли неподвижным. Благодаря этому могут быть неподвижны антенны как на спутнике, так и на Земле. Если антенна бортового передатчика нацелена вертикально вниз, на подспутниковую точку, зона обслуживания будет ограничена окружностью, диаметр которой зависит, в основном, от ширины диаграммы направленности антенн (рис. 3):

$$D\approx \alpha h.$$

При $\alpha=1/57$ рад $=1^\circ$ имеем $D\approx\approx 630$ км. При $\alpha=0{,}3$ рад зона обслуживания охватывает почти все полушарие Земли (диаметр Земли $\sim 12\,800$ км). Если нацелить антенну на какую-либо другую точку земного шара, то форма зоны приобретает вид искаженного эллипса (рис. 4).

Мощность сигнала

Для оценки мощности сигнала от спутника представим себе, что через центр зоны обслуживания, перпендикулярно направлению прихода волны, проходит диск. Диаметр диска D приближенно будем считать равным диаметру зоны обслуживания. Антенна, как мы уже говорили, излучает в область диаграммы направленности только 60 % мощности передатчика P. Поэтому на единицу площади диска падает мощность $p=0{,}6P/(\pi D^2/4)$, а на приемную антенну с диаметром раскрыва d — мощность $p(\pi d^2/4)$. Но нужно еще учесть, что антенна извлекает только 60 % падающей на нее мощности. В результате в центре зоны

$$P_c\approx 0{,}36P\left(\frac{d}{D}\right)^2.$$

Мощность сигнала, как видим, прямо пропорциональна мощности передатчика и площади раскрыва приемной *антенны и обратно* пропорциональна площади зоны обслуживания. По мере удаления точки приема от центра зоны мощность сигнала будет уменьшаться в соответствии с диаграммой направленности передающей антенны.

На спутнике питание аппаратуры происходит от солнечных батарей. Солнечные батареи обычно не позволяют иметь мощность передатчика более 200 Вт. Для иллюстрации формулы предположим $P=100$ Вт, $D=700$ км и $d=1$ м. Расчет дает мощность сигнала в центре зоны $P_c\approx 0{,}7\cdot 10^{-10}$ Вт, на краю — $0{,}35\times\times 10^{-10}$ Вт. Много это или мало? Ответить на этот вопрос можно лишь тогда, когда известна чувствительность приемника.

Чувствительность приемника

Эта характеристика приемника определяет его способность обеспечивать нормальный прием при минимальной мощности сигнала. Чувствительность тем выше, чем меньшей величиной сигнала она оценивается. Может показаться, будто, увеличивая усиление, можно неограниченно улучшать чувствительность приемника и делать его способным принимать все более слабые сигналы. Однако предел чувствительности ставится наличием шумов. При недостаточной мощности сигнала на экране телевизора видны шумы в виде хаотически блуждающих черточек и точек. Изображение смотрится как бы за пеленой снега. Нормальный прием наступает лишь при определенном превышении сигнала над шумом.

Происхождение шумов двоякое: одни шумы возникают в самом приемнике, другие принимаются антенной из окружающего пространства. В приемнике шумы рождаются из хаотического теплового движения электро-

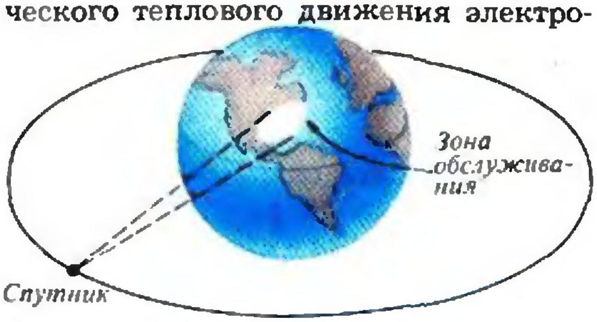


Рис. 4.

нов в проводниках и при сложных процессах распределения токов в транзисторах. Чем выше температура проводника, тем сильнее шум. Наибольший шум вносят первые каскады приемника, поскольку он усиливается всеми последующими каскадами. Антенна принимает шумы, которые вызываются тепловым движением частиц атмосферы Земли, и шумы, связанные с радиоизлучением небесных тел. Шумы наблюдаются на всех частотах, полная их мощность зависит от полосы частот и возрастает с увеличением полосы пропускания приемника. Поэтому полоса пропускания не берется шире полосы, минимально необходимой для передачи сигнала. В результате на мощность шума самого приемника влияет только его схема и конструкция входных каскадов.

При частотной модуляции мощность принятого сигнала должна быть в 15—20 раз больше мощности шумов, при амплитудной — еще в несколько раз больше (по этой причине в спутниковых системах чаще всего выбирается частотная модуляция). Опыт показывает, что чувствительность приемного устройства должна быть выше еще в 2 раза для уменьшения влияния дождя. Надежность приема будет обеспечена примерно в 99 % времени, если использовать приемники, у которых мощность шума в 30—40 раз меньше мощности сигнала.

Особенности приема

Для спутникового приема обычный домашний телевизор может быть применен только с помощью специальной приставки. Приставка необходима для переноса сигнала из сантиметрового диапазона в дециметровый, для повышения чувствительности телевизора и для преобразования частотно-модулированного сигнала в амплитудно-модулированный. Первые «малошумящие» каскады и каскады, служащие для переноса сигнала на другую частоту, выполнены отдельно в выносной головке. Головка совмещена с облучателем. Благодаря такой конструкции, уровень шумов сводится к минимуму; отпадает необходимость в длинном волноводе. Помимо аппаратуры спутникового приема, владелец телевизора может иметь антенны метрового и дециметрового диапазонов для приема местного телецентра.

Спутники, рассчитанные на индивидуальный ТВ прием, обслуживают «небольшие» зоны, чтобы получить приемлемый уровень сигнала и, соответственно, умеренное по цене приемное устройство с антенной диаметром около 1 м. На территории Советского Союза, с пяти позиций на орбите, будет создано пять таких зон. Программа для зон будет формироваться со сдвигом во времени относительно московского.

При коллективном приеме используют антенны большого диаметра и высокочувствительный усилитель. Благодаря возможности приема слабых сигналов спутники могут обслуживать большие территории. Например, советская система «Экран-М» передает программы Центрального телевидения на сеть наземных передающих станций в районах Сибири и Крайнего Востока. Система «Москва Глобальная» обеспечивает прием советского телевидения на территории почти всех стран мира. Антенна, работающая на сантиметровых волнах, здесь имеет диаметр 4 м!

Прием с западноевропейских спутников на территории Советского Союза затруднителен. Это связано не только с низким уровнем сигнала. У этих спутников используется другой стандарт телевидения, некоторые сигналы закодированы, чтобы препятствовать бесплатному просмотру. Интересное сообщение прессы: по договоренности с иностранными фирмами в Москве будет организован коллективный прием западноевропейских ТВ спутников по существующей кабельной сети.

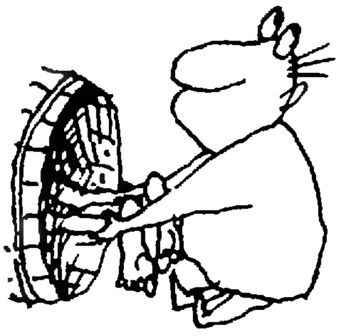
Спутниковое телевидение интенсивно развивается во всех странах. Оно только на старте и, образно говоря, у порога нашего дома.

„Квант" улыбается

Забавные высказывания

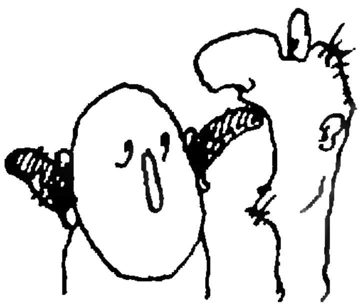
Изучение научной литературы — тяжелый труд, напоминающий подъем на высокую горную вершину. Поэтому каждый «человеколюбивый» автор считает себя обязанным позаботиться и об интеллектуальном отдыхе читателей. Темы для таких «площадок отдыха» подсказывают исторические сведения, фантастические аналогии, остроумные замечания и т. д. Приведем некоторые примеры, снабдив их для завязки абстрактным вопросом.

1. Почему Диогена не смогли убедить переселиться в добротный дом?



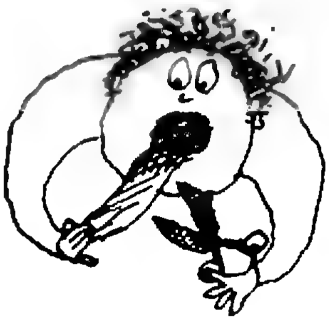
«На самом деле по любому вопросу, вероятно, здравого человека можно в чем-то, как-то убедить. По жилищному вопросу — это дело совершенно безнадежное» (Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, с. 154).

2. Играют ли взрослые в «испорченный телефон»? Это подтверждает В. И. Арнольд.



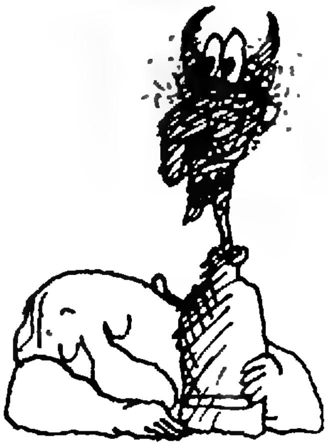
«Рассмотренная выше теорема в сущности была известна Пуанкаре; явная формулировка и доказательство даны А. А. Андроновым. Р. Том, которого я обучил этой теории в 1965 году, стал широко пропагандировать ее под именем «бифуркация Э. Хопфа» (Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, с. 247).

3. Целесообразно ли создать кооператив по написанию лаконичных телеграмм? Советуем это сделать!



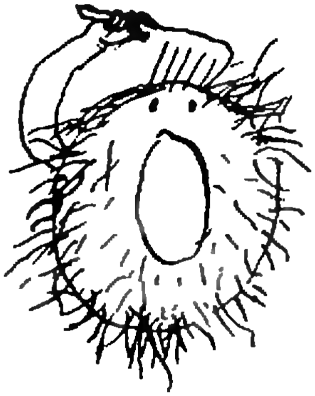
«Вообще, естественные языки отличаются чрезвычайной избыточностью. Даж есл нсклко бкв вбрсть, эт прдлжн ещ мжн прчть» (Уэзерелл Ч. Этюды для программистов, с. 63).

4. Бог создал мир, но, может быть, некоторые его части помогал строить дьявол?



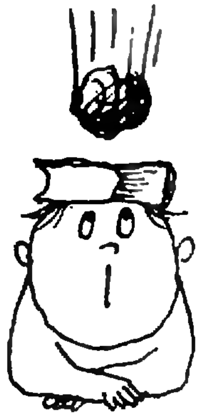
«Хромосома ведет себя как та ЭВМ, которая библейское изречение «Плоть немощна, но дух бодр» перевела с английского (The spirit is sound, but the flesh is weak) на русский следующим образом: «Водка крепкая, но мясо размякло» (Медников Б. М. Аксиомы биологии, с. 58).

5. Может ли тор породить радиофобию? Это не исключено.



«Отметим, однако, что волосатый тор можно причесать гладко. Этот факт имеет важное значение для термоядерных установок будущего» (Косиевски Ч. Начальный курс алгебраической топологии, с. 290).

6. О чем мечтает автор, приступая к написанию книги?



«Лучше всего, если бы читатель знал все, что содержится в этой книге, еще не начав читать ее!» (Пианка Э. Эволюционная экология, с. 6).

В. Ильичев

СКОЛЬКО НА ЗЕМЛЕ КРИВЫХ?

Кандидат физико-математических наук
В. ОВСИЕНКО

Этот вопрос кажется странным. Можно нарисовать неописуемое множество разнообразных кривых. Договоримся сначала, какие кривые мы будем рассматривать. Здесь нам должен помочь повседневный опыт. Хорошая упругая веревка или проволока не имеет острых углов. Поэтому мы будем изучать только *гладкие* кривые (без каких бы то ни было изломов), начерченные на земной поверхности. Таким кривым разрешается иметь сколько угодно точек самопересечения.

Гладких кривых тоже слишком много. Пересчитать их все невозможно. Единственный способ разобраться в нашем вопросе — условиться считать одинаковыми кривые, которые «не очень сильно» отличаются друг от друга.

Типы кривых

Кривая — популярный математический объект, имеющий много интересных характеристик: кривизну, длину, число точек самопересечения, перегиба и т. д. Все они заслуживают изучения. (О некоторых из них рассказано в статье С. Табачникова «О плоских кривых» в «Кванте» № 11 за 1988 г.) А какие важны для нас? Может быть длина? Но кривых одинаковой длины все равно слишком много. Считать одинаковыми кривые, у которых одинаковая кривизна? Тогда различных кривых будет больше, чем функций,— многовато... Чтобы больше не гадать, забудем сразу обо всех характеристиках кривой.

Будем понимать выражение «кривые не очень сильно отличаются друг от друга» буквально и считать одинаковыми кривые, которые отличаются «малым шевелением». Теперь нам придется считать *одинаковыми любые две кривые, которые можно продеформировать (перетянуть) друг в друга так, чтобы они все время оставались гладкими* (рис. 1). Ведь такую деформацию можно разбить на серию «малых шевелений». Будем называть такие кривые *кривыми одного типа* (математикам кажется более красивым термин *гомотопные кривые*).

Мы отбросили все видимые различия между кривыми. Естественно предположить, что при таком наивном соглашении все кривые — одного типа. Для незамкнутых кривых так оно и есть. Представим себе лежащую на земле веревку, начинающую распрямляться с одного из концов. Такая веревка плавно развернется в прямую линию (рис. 2). Итак, интересно рассматривать только *замкнутые* кривые.

Теперь все готово, чтобы сформулировать строгий математический вопрос:

Сколько на Земле различных типов замкнутых кривых?

Этот вопрос имеет много разновидностей и дополнений, приводящих нас в весьма популярную область современной математики. Об этом речь впереди, а пока давайте считать Землю плоской.

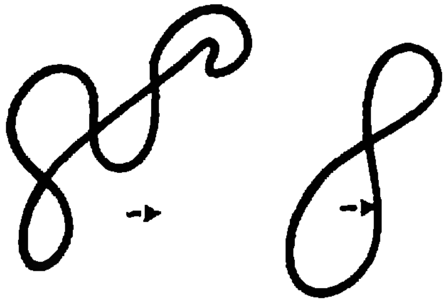


Рис. 1.

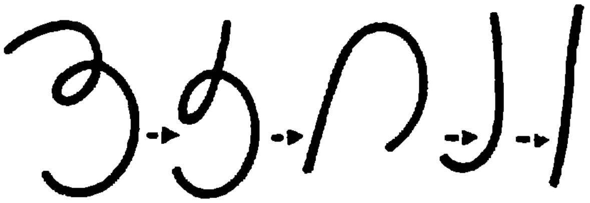


Рис. 2.

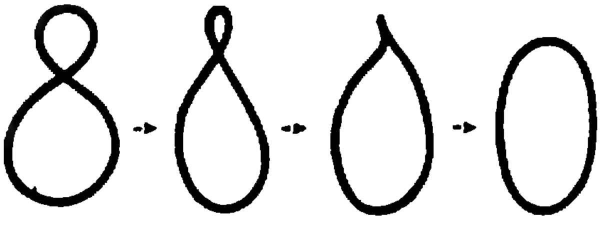


Рис. 3.

Число оборотов

Попробуйте продеформировать «восьмерку» в «нолик». Получилось? Тогда по дороге у вас обязательно возникло острие (рис. 3). А можно ли продеформировать так, чтобы кривая оставалась гладкой? Похоже, что нельзя. Как это строго доказать? Первая мысль — посчитать число самопересечений кривой или число областей, на которые кривая делит плоскость. Но эти числа могут меняться. Мы уже видели на рисунке 1, как кривая типа «восьмерки» потеряла пару точек самопересечения. Вот как, *пару*! Это значит, что *четность числа самопересечений* осталась без изменения. (Правда, в первый момент две точки превратились в одну, но ее следует рассматривать как слившуюся пару.) Точно так же обстоит дело с числом областей: они образуются и исчезают парами. Итак, «восьмерка» и «нолик» относятся к разным типам. Может быть, существует только два типа кривых? Ничего подобного.

На плоскости существует бесконечно много различных типов замкнутых кривых.

Чтобы доказать эту нашу первую теорему, каждой замкнутой кривой на плоскости поставим в соответствие натуральное число. Рассмотрим точку, движущуюся вдоль кривой (вектор ее скорости касается кривой в каждый момент времени). Пусть за некоторое время точка обежит всю кривую и вернется в начальное положение. *Числом оборотов кривой* мы будем называть число полных оборотов, которые совершает вектор скорости этой точки. (Неважно, в каком направлении поворачивается вектор. Это зависит от направления движения точки вдоль кривой.)

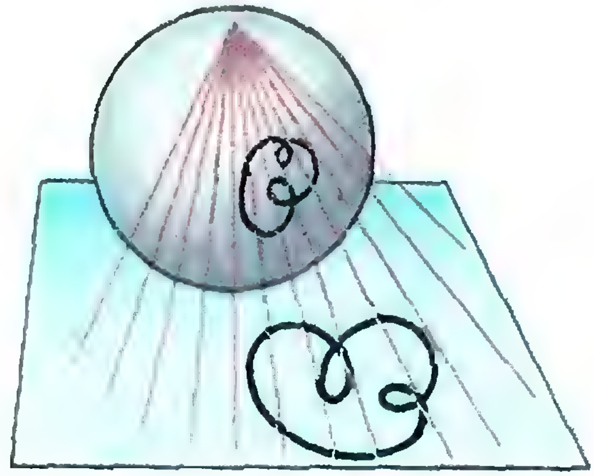


Рис. 4.

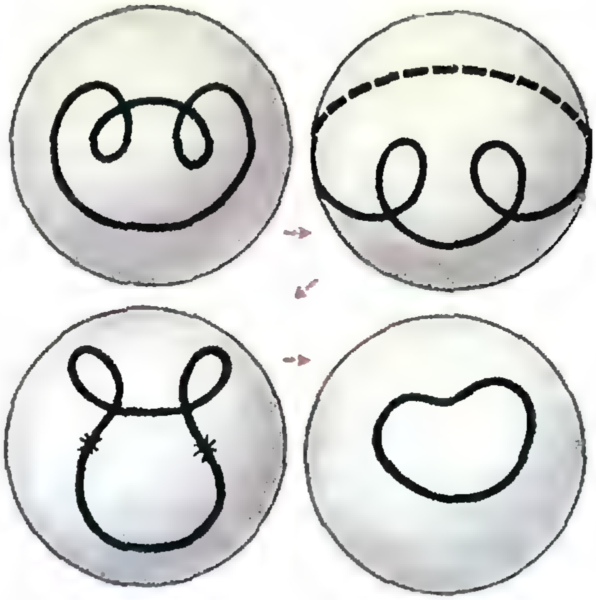


Рис. 5.

Число оборотов — инвариант, т. е. оно не меняется при деформации кривой. Ведь это число не может измениться скачком при «малом шевелении» кривой, а деформация — цепочка таких «шевелений». Следовательно, кривые с разным числом оборотов относятся к разным типам.

Упражнение 1. Придумайте кривую для каждого наперед заданного числа оборотов.

Разных чисел бесконечно много, значит, и кривых — тоже. Теорема доказана.

На самом деле, *число оборотов — единственный инвариант* плоской кривой. Это значит, что две кривые с одинаковыми числами оборотов принадлежат к одному типу. Попробуйте сами придумать доказательство, а если не получится — поэкспериментируйте. В крайнем случае, прочтите «Квант» № 4 за 1983 г. А мы лучше вспомним, что Земля — шар.

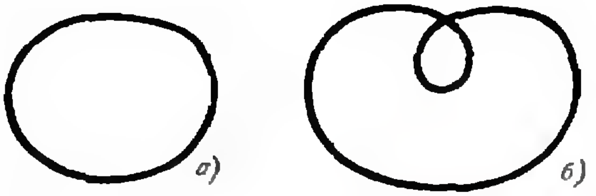


Рис. 6.

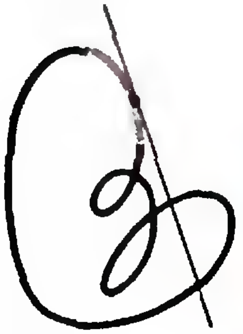


Рис. 7.

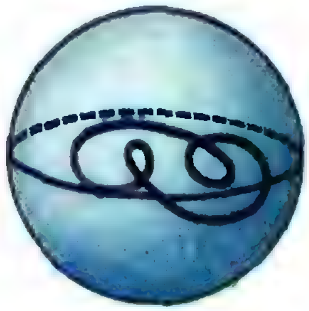


Рис. 8.

И все-таки она вертится...

Поверхность Земли — сфера. Сколько же на ней кривых? Сфера — это плоскость плюс еще одна точка (рис. 4). Рисунок 4 называется *стереографической проекцией*. Сделаем стереографическую проекцию из точки, не лежащей на кривой. Тогда эта кривая попадет на плоскость. Значит, на сфере столько же типов кривых, сколько на плоскости? Да, недалеко мы ушли от тех, кто и в правду считает Землю плоской. Вот правильный ответ.

На сфере существует ровно два различных типа замкнутых кривых.

Доказательство начнем с картинки (рис. 5). Как видите, число оборотов больше не сохраняется. Вот, что отличает кривые на сфере от кривых на плоскости. «Обернувшись» вокруг сферы, кривая потеряла два оборота. Теперь легко проделать такую же операцию над кривой с любым числом оборотов (надо только дорисовать у кривых на рисунке 5 несколько петелек в любом месте). Мы получили, что любую кривую можно продеформировать в одну из кривых на рисунке 6. В какую именно — зависит от четности числа оборотов.

Упражнение 2. Перетяните «восьмерку» в кривую, изображенную на рисунке 6, *б*.

Но как доказать, что кривые *а*) и *б*) — разных типов не только на плоскости, но и на сфере? Ведь, строго говоря, число оборотов в этом случае вообще не определено. Выручает уже знакомая нам четность числа самопересечений. У кривой *б*) это число нечетно, а у кривой *а*) — четно (равно нулю).

Выпуклость

Среди всех гладких кривых на плоскости выделяется класс кривых, не имеющих точек перегиба. Такие кривые мы будем называть *выпуклыми*. Маленькая окрестность любой точки на выпуклой кривой лежит по одну сторону от своей касательной и может пересекаться с любой прямой не более чем в двух точках (рис. 7).

Понятие выпуклости легко и естественно обобщается для сферы. «Прямыми» на сфере будем называть большие окружности (экваторы). *Кривая на сфере называется выпуклой в данной точке, если окрестность кривой в этой точке лежит по одну сторону от касательного экватора* (рис. 8).

Выпуклые кривые встречаются в природе, когда заряженная частица мчится поперек линий магнитного поля. Согласно правилу буравчика, она будет закручиваться все время в одну и ту же сторону (рис. 9).

Будем говорить, что выпуклые кривые — *одного типа*, если их можно продеформировать друг в друга так,

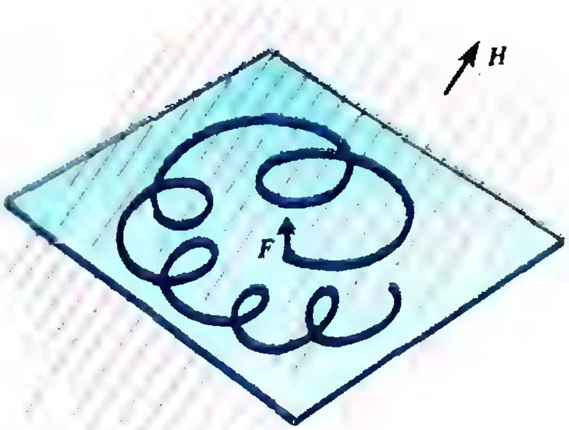


Рис. 9.

чтобы они оставались не только *гладкими*, но и *выпуклыми* в каждой точке. Это условие сильнее, чем то, что было раньше. Две однотипные в старом смысле кривые могут оказаться совершенно различными, если принять во внимание их выпуклость.

Самый большой вопрос

Любознательные математики, конечно же не могли пропустить вопрос:

Сколько бывает различных типов замкнутых выпуклых кривых на сфере?

Более того, для математиков он оказался значительно более важным, чем вопрос о кривых без условия выпуклости. Интерес к нему и различным его обобщениям неожиданно подскочил за последние два года...

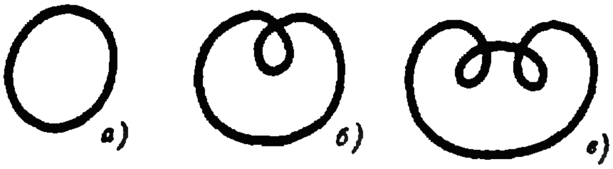


Рис. 10.

Требование выпуклости очень существенно и полностью меняет ответ. Удивительно, однако, не это, а то, что ответ этот был получен лишь двадцать лет тому назад.

Теорема. *Существует ровно три различных типа замкнутых выпуклых кривых на сфере* (рис. 10).

Этот красивый результат был опубликован американским математиком Дж. Литтлом*) в 1970 году в журнале по дифференциальной геометрии. Остается загадкой, как этот интересный геометрический вопрос мог укрыться от внимания классиков еще в прошлом веке.

Сравним рисунки 10 и 6. На первый взгляд, к кривым *а*) и *б*) добавилась дополнительная кривая *в*). Мы увидим, что в действительности кривая *а*) «отщепилась» от других кривых с нечетным числом оборотов в важный самостоятельный класс. Кривую *а*) нельзя перетянуть в кривую с точками самопересечения, любой экватор пересекает ее не более двух раз.

Прежде чем серьезно браться за доказательство, поговорим немного о мотивировках. Почему полезно изучать выпуклые кривые? Во-первых, рассматриваемый нами вопрос — один из тех редких геометрических вопросов, которые благодаря своей простоте и наглядности превращают математику в красивую науку, и этого вполне достаточно для того, чтобы он был интересен сам по себе. Во-вторых, кривая — простейший геометрический объект, связанный со многими другими важными математическими понятиями. Поэтому любой разумный вопрос о кривых должен иметь те или иные приложения. Именно так обстоит дело и с вопросом о выпуклых кривых на сфере. Позже мы поговорим об этом немного подробнее.

Мультфильм Литтла

Может ли мультфильм быть доказательством математической теоремы? Не верите — смотрите сами (рис. 11). На ваших глазах кривая, совершающая 4 оборота, превращается в кривую *б*) на рисунке 9 с числом оборотов 2, *оставаясь по дороге выпуклой в каждой точке*. Тем, кому мультфильм кажется недостаточно убедительным, не остается ничего другого, как последовать совету Феликса Клейна и сделать гипсовую модель, но при этом доказательство станет гораздо тяжелее (во всяком случае — по весу). Мультфильм — основное и вместе с тем самое красивое место в доказательстве теоремы Литтла. Теперь, дорисовав несколько петелек, каждый сам сможет продеформировать кривую с большим числом оборотов в кривую *б*) или *в*) в зависимости от четности этого числа.

Итак, любую выпуклую кривую на сфере можно продеформировать в одну из трех кривых на рисунке 9. Кривые *а*) и *б*), а также *б*) и *в*) принадлежат к различным типам даже без

---

*) Его фамилия так и пишется *Little* (по-английски — маленький).

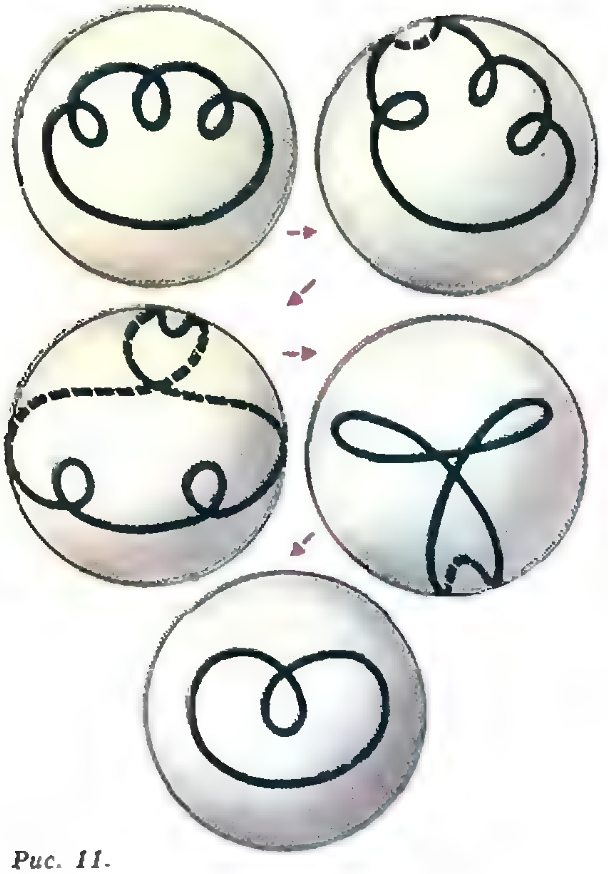


Рис. 11.

условия гладкости. Нам остается доказать, что кривую *в*) нельзя перетянуть в кривую *а*).

Что же мешает кривой *в*) «обернуться» вокруг сферы, потерять 2 оборота и превратиться в *а*)? В самом деле, это уже происходило на рисунке 5 (кривая *в*) перешла в кривую *а*), но при этом у нее сначала возникли, а затем пропали две точки перегиба). Чтобы убедиться, что дело здесь *не в дефекте мультфильма* и кривые *а*) и *в*) действительно *различны* как выпуклые кривые, проще всего начать с кривой *а*), а не с *в*).

Выпуклая несамопересекающаяся кривая на сфере лежит на полусфере, т. е. целиком по одну сторону от некоторого экватора.

Это простое утверждение было доказано еще в 20-х годах. Прежде всего поясним его смысл. Утверждение означает, что кривая *а*) лежит на некоторой полусфере. Такая кривая ничем не отличается от кривой на плоскости. Действительно, существует простой способ переделать кривую на полусфере в плоскую — спроецировать ее из центра сферы на плоскость (рис. 12). При этом, в отличие от стереографической проекции, *диаметры* (точнее — полудиаметры, принадлежащие полусфере) переходят в прямые на плоскости. Поэтому выпуклая кривая на полусфере переходит *в выпуклую кривую* на плоскости. Кривая *а*) на рисунке 10 при любой деформации вынуждена оставаться на полусфере (неважно, что полусфера может меняться; при этом точка приложения плоскости, на которую происходит проекция, «прокатывается» по сфере). Кривая на плоскости не может перейти в кривую с бо́льшим числом оборотов. Поэтому кривая *а*) не может перейти в кривую *в*).

Для доказательства утверждения проведем касательный экватор к любой точке кривой. Выпуклая кривая без самопересечений не может пересекать *этот экватор в другой точке* (и, стало быть, лежит по отношению к нему на одной из полусфер). В самом деле, если допустить такое пересечение, то на кривой найдется точка, в которой кривая выпукла в противоположную сторону (рис. 13). Значит, у кривой есть и пара перегибов.

Доказательство теоремы Литтла закончено. Пора признаться, что при доказательстве теоремы мы допустили-таки один небольшой пробел

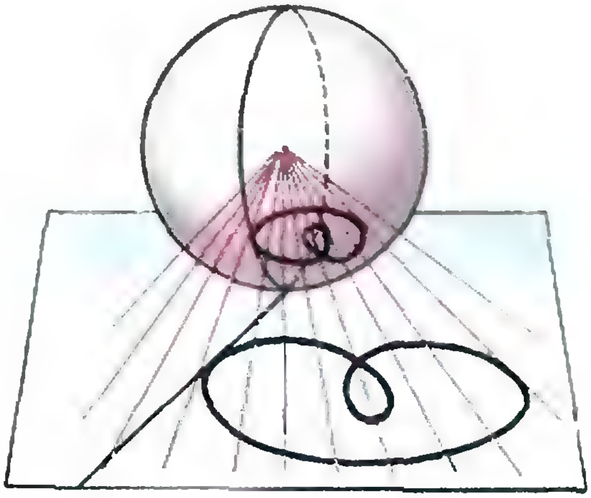


Рис. 12.

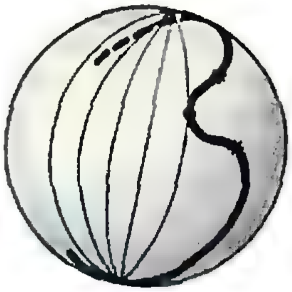


Рис. 13.

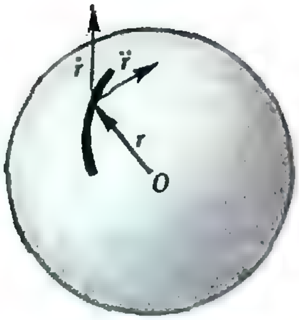


Рис. 14.

(попробуйте его найти!). Преодоление этого пробела — дело техники (и поэтому требует еще много возни). Вообще, доказательство теоремы Литтла производит впечатление очень «ручного» и даже кустарного. Поэтому оно трудно поддается обобщениям и многие схожие вопросы о кривых до сих пор не решены. Но что делать, другого доказательства пока неизвестно. Вся надежда здесь — на наших читателей.

Разговор о кривых на этом мы закончили. Мне остается выполнить свое обещание и рассказать немного о применении этой теории. Правда, потребуется несколько более основательная математическая подготовка.

Однажды на своем семинаре профессор В. И. Арнольд, знакомый читателям «Кванта» (интервью с ним опубликовано в № 8 за 1990 г.), предположил, что Земля — тор.

Упражнение 3. а) Сколько различных замкнутых кривых на торе? б) Как в этом случае обстоит дело с выпуклостью?

Кривые и уравнения

В заключение поговорим о связи кривых с дифференциальными уравнениями. Вспомним, что кривая лежит на сфере, а сфера находится в трехмерном пространстве. Пусть как и раньше вдоль кривой движется точка, которая за некоторое время пробегает всю кривую. Так как в каждый момент времени проведенный из центра радиус-вектор $\vec r(t)$ перпендикулярен сфере, а вектор скорости $\dot{\vec r}(t)$ касается кривой, а значит, и сферы. Эти векторы не могут быть коллинеарными. Если кривая — выпуклая, то вектор ускорения $\ddot{\vec r}(t)$ не лежит в плоскости, натянутой на векторы $\vec r(t)$, $\dot{\vec r}(t)$, так как проекция ускорения на касательную плоскость к сфере направлена в сторону «вогнутости» кривой и не коллинеарна $\dot{\vec r}(t)$ (рис. 14). Поэтому радиус-вектор, скорость и ускорение — три независимых вектора, т. е. любой вектор можно разложить по ним.

Рассмотрим вектор $\dddot{\vec r}(t)$, т. е. вектор, координаты которого — производные от координат $\vec r(t)$: если $\vec r(t)=(r_1(t);$ $r_2(t);\ r_3(t))$, то $\dddot{\vec r}(t)=(\dddot r_1(t);\ \dddot r_2(t);\ \dddot r_3(t))$.

Разложим вектор $\dddot{\vec r}(t)$ по $\vec r(t)$, $\dot{\vec r}(t)$, $\ddot{\vec r}(t)$ (разумеется, коэффициенты разложения зависят от времени):

$$\dddot{\vec r}(t)=a(t)\ddot{\vec r}(t)+b(t)\dot{\vec r}(t)+c(t)\vec r(t).$$

Но тогда каждая координата $r_i(t)$ $(i=1, 2, 3)$ — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dddot r_i(t)=a(t)\ddot r_i(t)+b(t)\dot r_i(t)+c(t)r_i(t).$$

Итак, каждой выпуклой кривой на сфере мы поставили в соответствие уравнение. Возможно, некоторые читатели найдут сходство между этой конструкцией и рассуждениями средневекового мыслителя Деногардуса (см. статью «О великом числе Деногардуса и законе Гука», опубликованную в № 8 за 1989 г.) о движении небесных тел.

Еще одно важное замечание: замкнутой кривой соответствует уравнение, у которого все коэффициенты и все решения — периодические функции.

А теперь — несколько примеров.

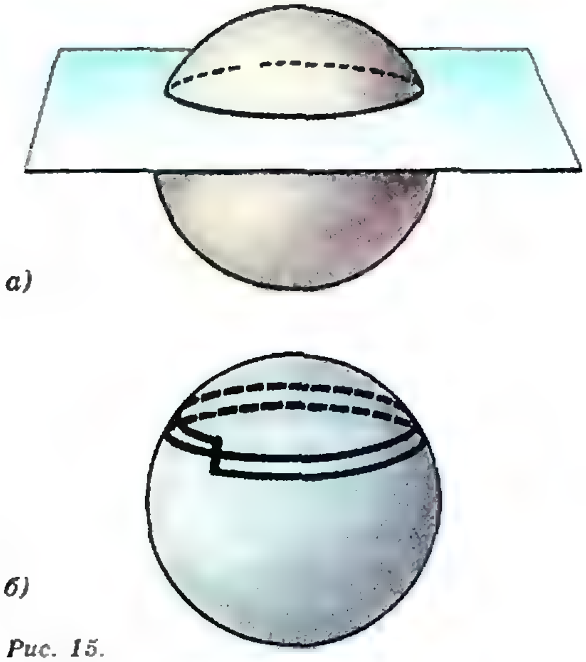


Рис. 15.

1) Уравнение $\dddot{r}(t) = -r(t)$ имеет периодические решения $r_1(t) = 1$, $r_2(t) = \sin t$, $r_3(t) = \cos t$.

2) Уравнение $\dddot{r}(t) = -4\dot{r}(t)$ имеет периодические решения $r_1(t) = 1$, $r_2(t) = \sin 2t$, $r_3(t) = \cos 2t$.

3) Уравнение $\dddot{r}(t) = 0$ имеет решения $r_1(t) = 1$, $r_2(t) = t$, $r_3(t) = t^2$, из которых только одно — периодическое. Такое уравнение нам не подходит.

Уравнение 1) соответствует кривой на рисунке 15, *а* (пересечение сферы и плоскости), т. е. кривой *а*) на рисунке 9. Точка на кривой движется равномерно с постоянной скоростью и пробегает всю окружность за время $T = 2\pi$. Уравнение 2) относится к другому типу. На первый взгляд, оно соответствует той же кривой. Но за время $T = 2\pi$ точка пробегает кривую два раза, т. е. совершает два оборота (см. рис. 15, *б*). При «малом шевелении» эта «два раза пройденная кривая» *переходит в кривую б*) на рисунке 5, *б*.

Будем считать уравнения одинаковыми, если их можно перевести друг в друга, изменяя их коэффициенты, но так, чтобы решения оставались *периодическими*.

Сколько существует разных уравнений порядка 3 с периодическими решениями?

Этот вопрос оказывается переформулировкой вопроса о выпуклых кривых на сфере, и ответ на него дается теоремой Литтла: *их три*. Первые два *уравнения уже указаны* в примерах 1) и 2).

Упражнение 4. Найдите третье.

Указание. Придумайте уравнение, соответствующее три раза пройденной окружности.

На примере связи кривых и уравнений мы проиллюстрировали лишь одно из применений теоремы Литтла. Следующее упражнение для тех, кому это применение показалось интересным.

Упражнение 5. Сколько существует различных уравнений порядка 2 с периодическими решениями.

Ответ. Бесконечное число.

Указание. Вспомните о кривых на плоскости.

Еще одно последнее замечание.

Мы видели, что кривая *а*) на рисунке 9 *явно отличается* от кривых *б*) и *в*). Как это отражается на свойствах соответствующего уравнения?

Пусть снова точка пробегает кривую. Любое решение уравнения — это *координата этой точки как функция от времени* (т. е. проекция точки на прямую, выходящую из центра). Рассмотрим экватор, перпендикулярный данной оси. Пересечения экватора с кривой — это точки, в которых координата обращается в нуль. Их не более двух. Поэтому решения нашего уравнения на периоде (т. е. когда t меняется от 0 до T) не могут иметь более двух нулей. Мы получили очень важный класс уравнений, которые математики называют изящным словом *неосциллирующие* уравнения.

Если бы мы начали эту статью с вопросов об уравнениях порядка 3, то, вероятно, многие профессиональные математики затруднились бы дать на них ответ и даже указать способ решения. Как мы видим, игрушечный вопрос о кривых может привести к самым серьезным последствиям.

Задачник „Кванта"

Задачи

M1261 — M1265, Ф1268 — Ф1272

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 марта 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1261» или «Ф1268». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

М1261. На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точками.

С. Генкин

М1262. Пусть d_1, d_2, d_3 — попарные разности длин сторон треугольника (по абсолютной величине), P — его периметр. Докажите неравенство

$$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1\leqslant P^2/4.$$

Л. Курляндчик

М1263. Внутри окружности лежит еще две окружности, касающиеся внешней окружности в точках A и B соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке AB, то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?

А. Веселое

М1264*. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги квадрат 2×2 клетки нужно закрасить в черный цвет. Можно ли это сделать несколькими операциями, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате 3×3 или 4×4 клетки?

И. Кан

М1265*. а) Докажите, что среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встретится не более 12 раз.

б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

Н. Седракян

Ф1268. Сферический стеклянный аквариум заполнен водой и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. После того как оболочку мгновенно затормозили и отпустили, угловая скорость вращения установилась в 1,5 раз меньшей, чем была вначале. Какую часть массы аквариума составляет вода? Считать, что стекло имеет плотность в три раза бо́льшую, чем вода.

О. Нидерландский

Ф1269. Вагон массой M и длиной L может без трения двигаться по рельсам. Он заполнен газом и разделен

посередине подвижной невесомой вертикальной перегородкой. Вначале температура газа равна T. В правой половине вагона включают нагреватель и доводят температуру газа до $2T$, в левой части температура остается прежней. Найти перемещение вагона, если масса всего газа m.

А. Выцко

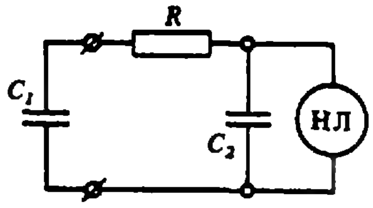


Рис. 1.

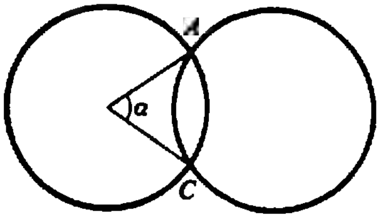


Рис. 2.

Ф1270. Неоновая лампа НЛ (рис. 1) «вспыхивает» при увеличении напряжения до $U_1=80$ В и гаснет при уменьшении напряжения до $U_2=25$ В. Конденсатор C_1 емкостью 10 мкФ заряжают до напряжения $U_0=300$ В и подключают к схеме (генератору пилообразного напряжения). Сколько раз вспыхнет неоновая лампа? Какое количество теплоты выделится в системе? $C_2=0{,}1$ мкФ, $R=1$ МОм.

Н. Павлов

Ф1271. Два одинаковых проволочных кольца радиусом R и массой m каждое находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна B_0 и направлена перпендикулярно плоскости колец (рис. 2). В точках соприкосновения A и C кольца имеют хороший электрический контакт. Угол $\alpha=\pi/3$. Какую скорость приобретет каждое из колец, если выключить магнитное поле? Электрическое сопротивление куска проволоки, из которого сделано кольцо, равно r. Индуктивность колец не учитывать. Смещением колец за время выключения поля пренебречь. Трения нет.

В. Можаев

Ф1272. Электрическая лампочка включена в сеть 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определить его емкость.

А. Зильберман

Решения задач

М1236 — М1240, Ф1248 — Ф1252

М1236. *Найти множество точек O внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром O, пересекающая стороны квадрата в 8 точках.*

Условие, что окружность с центром C и радиусом r пересекает стороны квадрата в 8 точках, эквивалентно тому, что расстояние от C до всех вершин больше r, а до всех сторон — меньше r.

Ясно, что искомое множество имеет те же 4 оси симметрии, что и квадрат. Поэтому достаточно найти все точки этого множества в одном из 8 углов, на которые эти оси делят плоскость. Проще всего сделать это с помощью метода координат.

Пусть наш квадрат задается условиями $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, а центр C окружности радиуса r имеет координаты $(x;\,y)$ и лежит в треугольнике $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1/2$

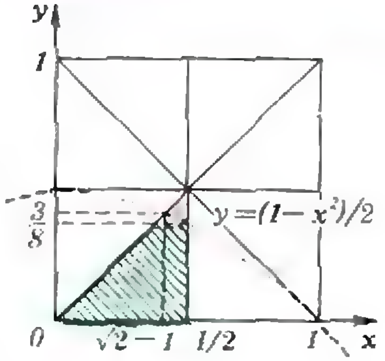


Рис. 1.

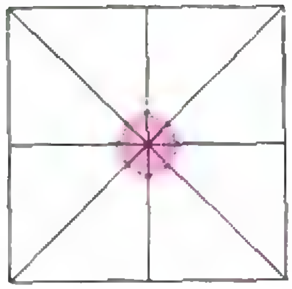


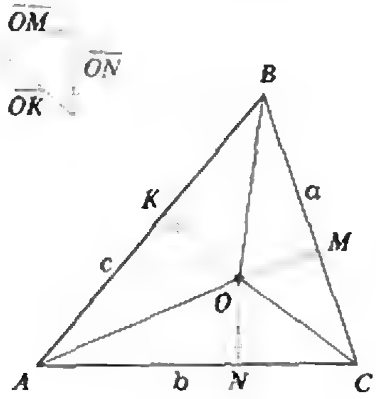
Рис. 2.

(рис. 1). Тогда самой близкой к C вершиной квадрата будет точка (0; 0) и расстояние до нее равно $\sqrt{x^2+y^2}$, а самой далекой от C стороной квадрата будет сторона, лежащая на прямой $y=1$, и расстояние до нее равно $1-y$. Точка C принадлежит искомому множеству, если для некоторого r выполнены неравенства $\sqrt{x^2+y^2}>r>1-y$, т. е. если $\sqrt{x^2+y^2}>1-y$. Это неравенство выделяет из треугольника $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1/2$ кусочек, где $x^2+y^2>1-2y+y^2$, т. е. $2y>1-x^2$; он ограничен параболой $y=(1-x^2)/2$. Все множество — «снежинка» — изображено на рисунке 2.

А. Толпыго

М1237. *Пусть точка O внутри треугольника ABC такова, что $\overline{OK}+\overline{OM}+\overline{ON}=\overline{0}$, где K, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA треугольника. Докажите неравенство*

$$\frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$



В силу условия на точку O отрезки OK, OM, ON можно параллельно передвинуть так, чтобы составился треугольник (см. рисунок). После поворота на 90° стороны этого треугольника станут параллельны сторонам треугольника ABC, следовательно, эти треугольники подобны. Коэффициент подобия обозначим через k: $k=OK/AB=OM/BC=ON/CA$. Тогда левая часть доказываемого неравенства равна k. С другой стороны, представляя площадь S треугольника ABC как сумму площадей треугольников AOB, BOC и COA, получим

$$2S=a\cdot OK+b\cdot OM+c\cdot ON=k(a^2+b^2+c^2),$$

где a, b, c — длины сторон $\triangle ABC$. Таким образом, задача сводится к доказательству неравенства

$$S\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}.$$

Приведем одно из доказательств этого довольно известного неравенства, использующее формулу Герона и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел (буквой p, как обычно, обозначен полупериметр):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{p((p-a+p-b+p-c)/3)^3}=p^2/3\sqrt{3}\leqslant$$
$$\leqslant(a^2+b^2+c^2)/4\sqrt{3}$$

(последнее неравенство следует из соотношений $4p^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ и $2xy\leqslant x^2+y^2$).

Отметим, что точка O в этой задаче определена однозначно. Она называется точкой Лемуана треугольника ABC и является точкой пересечения его *симедиан*, т. е. прямых, симметричных медианам относительно соответствующих биссектрис.

А. Магадеев

М1238. *Множество натуральных чисел разбито на две части. В одной из них нет трехчленных арифметических прогрессий. Обязательно ли в другой есть бесконечная арифметическая прогрессия?*

Ответ: не обязательно. Арифметическая прогрессия из натуральных чисел однозначно задается парой (a, d), где a — ее первый член, d — разность. Поэтому все такие прогрессии можно занумеровать. (Пары (a, d) разбиваются на группы с постоянной суммой $a+d$, а затем нумеруются внутри каждой группы, скажем, по возрастанию a. Этот метод нумерации даст такую последовательность пар: (1,1); (1,2); (2,1); (1,3); (2,2); (3,1); (1,4), ...) Пусть A_i, $i=1, 2, \ldots$ — i-я прогрессия по нашей нумерации. Начав с любого числа p_1 из A_1, будем последовательно выбирать числа p_2 из A_2, p_3 из A_3 и т. д. так, чтобы p_{i+1} было больше чем $2p_i$. Тогда множество $P=\{p_1, p_2, \ldots\}$ не содержит трехчленных арифметических прогрессий, поскольку $p_k-p_j>p_j>p_j-p_i$ для любых $k>j>i$. В то же время множество натуральных чисел, не входящих в P, не содержит ни одной бесконечной прогрессии, так как хотя бы один элемент каждой такой прогрессии входит в P.

А. Скопенков

М1239. *Даны две пересекающиеся окружности и точка P (рис. 1). Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую AB так, чтобы угол APB имел заданную величину.*

Построение основано на следующем полезном утверждении:

в обозначениях рисунков 2 и 3 треугольник CAB подобен треугольнику CO_1O_2, где O_1 и O_2 — центры окружностей, AB — произвольная секущая, проходящая через их точку пересечения D, отличную от C.

(Для доказательства достаточно заметить, что $\angle CAB=(1/2)\angle CO_1D=\angle CO_1O_2$, а $\angle CBA=(1/2)\angle CO_2D=\angle CO_2O_1$; обратите внимание на необходимость отдельного рассмотрения разных расположений точек A и B: см., например, рис. 2.)

Обозначим через α заданную величину угла APB, через φ — угол O_1CO_2 (C — точка пересечения окружностей, не принадлежащая искомой секущей). Построим точку Q так, чтобы треугольники CPQ и CO_1O_2 были подобны и направления обхода вершин у них совпадали. В силу приведенного выше утверждения при преобразовании подобия, состоящем из поворота на угол φ вокруг

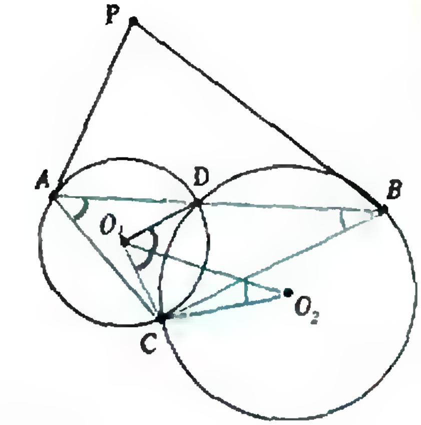


Рис. 1.

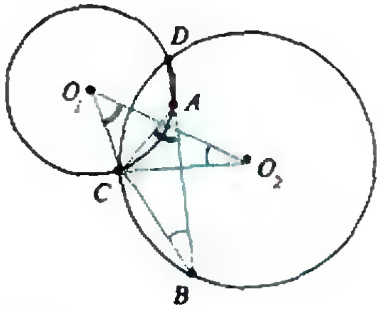


Рис. 2.

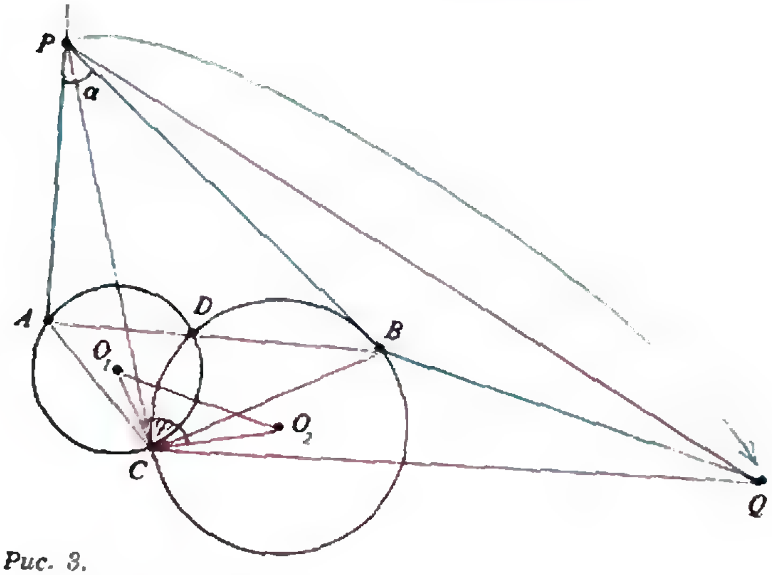


Рис. 3.

центра C и последующей гомотетии с коэффициентом $CB/CA = CQ/CP = CO_2/CO_1$, точки A и P перейдут соответственно в B и Q (см. рис. 3). Следовательно, угол между лучами AP и BQ равен φ (угол между любым лучом и его образом при повороте равен углу поворота, гомотетия переводит любой луч в сонаправленный). В то же время угол между лучами BP и AP равен $\alpha = \angle APB$. Поэтому угол PBQ между лучами BP и BQ, в зависимости от конкретных данных задачи, может быть равен $\alpha + \varphi$, $2\pi - (\alpha + \varphi)$ или $|\alpha - \varphi|$ (рис. 4).

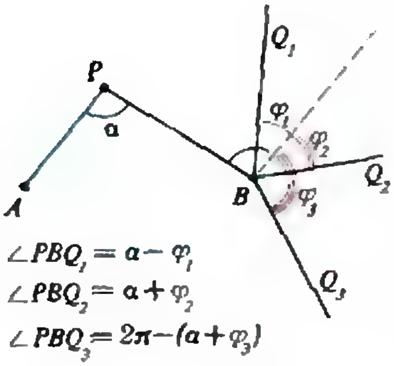

P
α
A
B
Q_1
Q_2
Q_3
φ_1
φ_2
φ_3
$\angle PBQ_1 = \alpha - \varphi_1$
$\angle PBQ_2 = \alpha + \varphi_2$
$\angle PBQ_3 = 2\pi - (\alpha + \varphi_3)$

Рис. 4.

Итак, *для нахождения точки B достаточно построить на отрезке PQ дуги, из точек которых этот отрезок виден под указанными углами: все возможные положения точки B находятся среди точек пересечения этих дуг с окружностью O_2*. Конечно, при построении дуг из двух значений $\alpha + \varphi$ и $2\pi - (\alpha + \varphi)$ нужно выбрать то, которое меньше π; если $\alpha + \varphi = \pi$ или $\alpha - \varphi = 0$, то соответствующие дуги вырождаются в интервал PQ или множество точек прямой PQ, не принадлежащих отрезку PQ.

Подчеркнем, что не все получившиеся точки пересечения обязаны давать решение задачи. Полное ее исследование мы оставляем заинтересованному читателю.

В. Дубровский

M1240. *На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квадрат $ABCD$ $n \times n$ клеток. Из вершины A в C по линиям сетки проводится случайная ло-*

Ответ: вероятность того, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной, равна $1/2^{n-1}$.

Мы докажем эквивалентное утверждение: вероятность того, что все n звездочек лежат ниже ломаной, равна $1/2^n$. Приведем два доказательства.

Первое — по индукции — основано на прямом вычислении числа L_n ломаных, числа P_n всевозможных *маная длиной 2n. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?)*

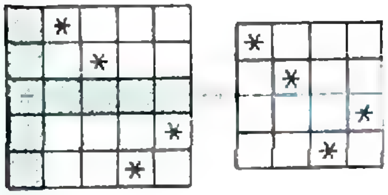


Рис. 1.

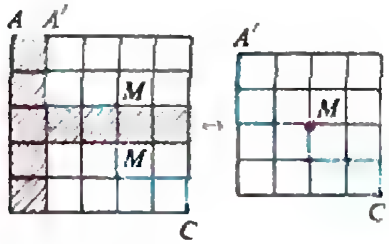


Рис. 2.

расстановок n звездочек (в разных строках и столбцах) и числа Π_n таких пар «ломаная, расстановка», в которых звездочки лежат ниже ломаной (при этом искомая вероятность равна Π_n/P_nL_n).

Для тех, кто знаком с началами комбинаторики, найти L_n и P_n не составляет труда: $L_n=C_{2n}^n=(2n)!/(n!)^2$ (каждая ломаная определяется последовательностью длиной $2n$ из стрелок двух направлений → и ↓, причем стрелок каждого типа ровно n), а $P_n=n!$ (каждая расстановка определяется перестановкой из n номеров, указывающих, в каких строках стоят звездочки в 1-м, 2-м,..., n-м столбце). Но мы не будем опираться на эти формулы, а докажем рекуррентные соотношения

$$P_n=nP_{n-1}, \tag{1}$$

$$L_n=\frac{2(2n-1)}{n}L_{n-1}, \tag{2}$$

$$\Pi_n=(2n-1)\Pi_{n-1}. \tag{3}$$

Из них по индукции сразу получается нужный результат. (Проверка для $n=1$ и $n=2$ не составляет труда.) Если доказано, что для таблицы $(n-1)\times(n-1)$ нужная вероятность равна

$$\frac{\Pi_{n-1}}{L_nP_{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}},$$

то для таблицы $n\times n$ она равна

$$\frac{\Pi_n}{L_nP_n}=\frac{(2n-1)\Pi_{n-1}\cdot n}{2(2n-1)L_{n-1}\cdot nP_{n-1}}=\frac{1}{2^n}.$$

Доказательства формул (1)—(3) аналогичны. Мы устанавливаем необходимое соответствие, отрезая от таблицы $n\times n$ первый столбец и одну из строк (мы считаем, что ломаная идет из левого верхнего в правый нижний угол). Соотношение (1) почти очевидно. Из каждой расстановки звездочек в таблице $n\times n$ удалением первого столбца и строки, содержащей звездочку из этого столбца, получается некоторая расстановка в таблице $(n-1)\times(n-1)$ (рис. 1). При этом к каждой из P_{n-1} таких расстановок мы можем добавить первый столбец и любую (1-ю, 2-ю,..., n-ю) строку, поставив на их пересечении звездочку. Таким способом мы установили соответствие, при котором каждой из P_{n-1} расстановок в таблице $(n-1)\times(n-1)$ отвечает n расстановок в таблице $n\times n$, откуда следует (1).

Докажем формулу (2). Рассмотрим лишь половину из L_n ломаных, а именно те, у которых первое (выходящее из вершины A) звено AA' горизонтально (рис. 2). Пометим красным цветом любое вертикальное звено MM' ломаной (его можно выбрать n способами). Удалив звено AA' вместе с первым столбцом и звено MM' вместе с содержащей его строкой, мы получим ломаную $A'C$ в таблице $(n-1)\times(n-1)$, в которой оставим помеченную «красную» точку M (на месте звена MM'). Обратно, по каждой из L_{n-1} ломаных с любой помеченной вершиной (а вершин у нее $2n-1$, поскольку звеньев $2(n-1)=2n-2$) однозначно восстанавливается ломаная $A'C$. Отсюда $n\cdot L_n/2=(2n-1)L_{n-1}$ — это и есть (2).

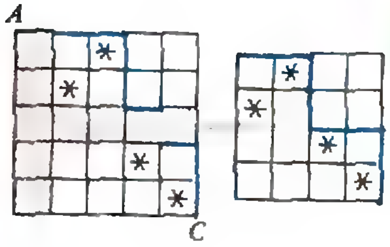


Рис. 3.

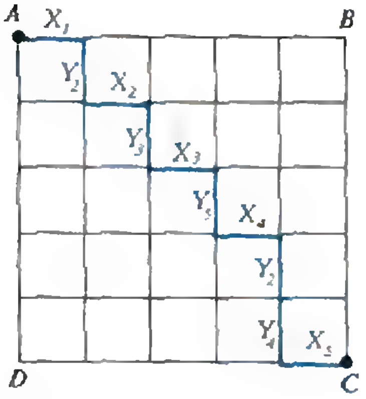


Рис. 4.

Наконец, докажем (3). Заметим, что среди Π_n пар «ломаная, расстановка» первое звено ломаной обязательно горизонтально (иначе в первой строке не будет звездочек ниже ломаной). Удалив первый столбец, а также строку, в которой стоит содержащаяся в нем звездочка, мы получим одну из Π_{n-1} пар «ломаная, расстановка» в таблице $(n-1)\times(n-1)$ (рис. 3). Обратно, пометив любую из $2n-1$ вершин такой ломаной и заменив ее вертикальным звеном и новой строкой, начинающейся со звездочки, мы однозначно восстановим пару «расстановка, ломаная» в таблице $n\times n$. Отсюда следует равенство (3).

Второе доказательство объясняет, почему в этой задаче получается столь простой ответ, но требует знакомства с некоторыми понятиями теории вероятностей, которые мы не будем здесь детально объяснять.

Сначала опишем правило, которое произвольному набору из n точек в квадрате $K=\{(x;\ y): 0\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$, все $2n$ координат которых различны, сопоставляет пару «ломаная, расстановка».

Точки нумеруются слева направо. Затем все $2n$ координат точек располагаются в порядке возрастания, абсцисса i-й точки заменяется символом X_i, а ордината — Y_i. В итоге получится последовательность из символов $X_1, \dots X_n$ и $Y_1, \dots Y_n$, в которой символы идут в порядке возрастания индексов. Теперь двинемся по полученной последовательности слева направо и одновременно будем рисовать ломаную, начиная с точки A, и ставить звездочки: если очередная символ последовательности — X_i, то делаем шаг вправо (горизонтальное звено ломаной), если это символ Y_j, то делаем шаг вниз (вертикальное звено) и в строке, которую мы при этом пересекаем, ставим звездочку на j-м месте, т. е. на пересечении столбца X_j и строки Y_j. (Вся эта процедура проиллюстрирована на рисунке 4.) Для того чтобы эта звездочка оказалась под ломаной, необходимо и достаточно, чтобы звено Y_j было правее звездочки, т. е. чтобы к тому моменту, когда проводится это звено, ломаная успела сделать не менее j шагов вправо $(X_1, X_2, \dots, X_j)$. Другими словами, в нашей последовательности буква Y_j должна стоять правее X_j. А это значит, что *ордината j-й точки должна быть больше ее абсциссы*. Если мы хотим, чтобы все звездочки попали под ломаную, то последнее условие должно выполняться для всех точек: на рисунке 5, где ось ординат направлена вниз, *все точки должны попасть под диагональ $x=y$ квадрата K*.

Теперь допустим, что точки в квадрате K выбираются наугад, т. е. по строгой терминологии, каждая из их $2n$ координат равномерно распределена на отрезке $[0;\ 1]$ и не зависит от остальных координат (вероятность совпадения координат при этом равна 0). Тогда все возможные порядки координат на $[0;\ 1]$ будут равновероятны. Следовательно, равновероятны все соответствующие им последовательности символов X_i и Y_j, т. е. все пары «ломаная, расстановка». Остается найти вероятность того, что все точки окажутся под диагональю квадрата. Для одной точки эта вероятность равна 1/2, для n точек,

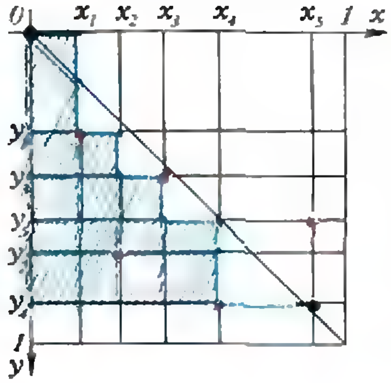


Рис. 5.

в силу независимости их выбора,— произведению вероятностей для каждой из них, т. е. $1/2^n$. (Последний результат можно получить и иначе, не прибегая к понятию независимости. Представим, что точки выбираются поочередно. Выбор каждой из них характеризуется для нас двумя возможными исходами — выше или ниже диагонали она попала. Для n точек число исходов равно 2^n, нас устраивает только один из них — все точки ниже диагонали. Все исходы равновероятны, поэтому искомая вероятность — $1/2^n$.

Д. Фомин, С. Фомин

Ф1248. *На горизонтальной доске лежит кусок мела. Доске мгновенно придают горизонтальную скорость V_0 и останавливают доску тоже мгновенно через время τ после первого толчка. Коэффициент трения между мелом и доской равен μ. Найти длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.*

Если за время τ мел успевает остановиться, то длина его следа на доске равна

$$l_1=\frac{V_0^2}{2\mu g},$$

а полное смещение относительно доски —

$$s_1=0.$$

Если же время τ меньше времени $t=V_0/(\mu g)$ остановки мела относительно доски, то к моменту остановки доски скорость мела равна

$$v=\mu g\tau,$$

длина пути и смещение равны

$$l_2'=s_2'=V_0\tau-\frac{\mu g\tau^2}{2}.$$

После остановки доски мел поедет в обратном направлеиии и пройдет путь

$$l_2''=s_2''=\frac{v^2}{2\mu g}=\frac{\mu g\tau^2}{2}.$$

Следовательно, *полная длина следа мела в этом случае* равна

$$l_2=l_2'+l_2''=V_0\tau,$$

а полное смещение —

$$s_2=s_2'-s_2''=V_0\tau-\mu g\tau^2.$$

А. Зильберман

Ф1249. *Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0{,}5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря*

Запишем условие равновесия пластинки в проекциях на вертикальное направление:

$$mg-\Delta p\,S-F=0,$$

где mg — сила тяжести, Δp — разность давлений на *поверхностному натяжению она осталась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90° (рис. 1). Определить плотность материала пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.*

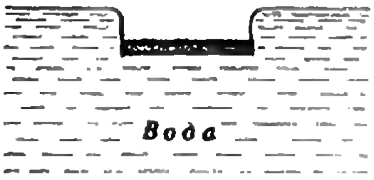


Рис. 1.

пластинку снизу и сверху, F — сила поверхностного натяжения. Рассмотрим каждую силу в отдельности.

Сила тяжести связана с искомой плотностью ρ материала пластинки соотношением

$$mg=\rho(\pi d^2/4)ag.$$

Сила поверхностного натяжения, действующая на пластинку со стороны воды, равна

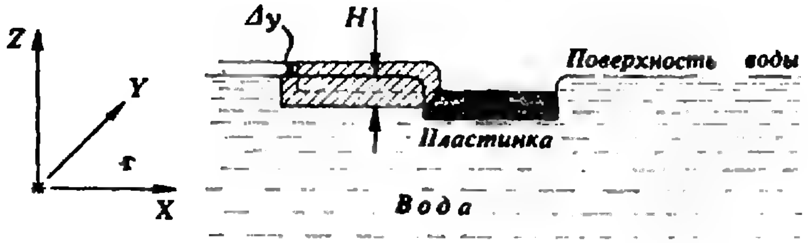


Рис. 2.

$$F=\sigma\pi d.$$

Разность сил давления на пластинку обусловлена «падением» уровня воды под пластинкой и равна

$$\Delta pS=\rho_в g(H+a)(\pi d^2/4),$$

где $\rho_в$ — плотность воды, H — глубина погружения верхнего края пластинки. Эту величину определим из условия равновесия выделенного на рисунке 2 объема воды «шириной» Δy ($\Delta y \ll d$), записав его в проекциях на горизонтальную ось Y:

$$\sigma\Delta y=p_{ср}\Delta S=\rho_в g(H/2)H\Delta y,$$

откуда

$$H=\sqrt{2\sigma/(\rho_в g)}.$$

Итак, перепишем условие равновесия пластинки в виде

$$\rho\frac{\pi d^2}{4}ag-\rho_в g\left(\sqrt{\frac{2\sigma}{\rho_в g}}+a\right)\frac{\pi d^2}{4}-\sigma\pi d=0$$

и найдем плотность ρ пластинки:

$$\rho=\rho_в+\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\sigma\rho_в}{g}}+\frac{4\sigma}{adg}\approx 10^4\ кг/м^3.$$

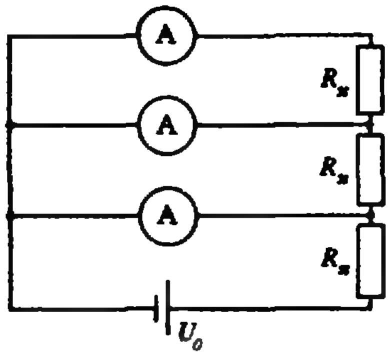
М. Гаврилов

Ф1250. *В схеме на рисунке все амперметры одинаковые и все резисторы R_x одинаковые. Верхний амперметр показывает ток $I_в=1$ мА, средний — ток $I_с=4$ мА. Напряжение ба-*

Верхние амперметр и резистор соединены последовательно, и параллельно им подключен средний амперметр. По условию ток, текущий через средний амперметр, в 4 раза больше тока, текущего через верхний амперметр. Это означает, что сопротивление амперметра r в 3 раза меньше сопротивления резистора R_x:

$$r=R_x/3.$$

тарейки $U_0=4{,}5$ В. Что показывает нижний амперметр? Чему равно R_x?



Теперь легко найти ток, текущий через нижний амперметр:

$$I_{н}r=I_{c}r+(I_{в}+I_{c})R_x,$$

откуда

$$I_{н}=3I_{в}+4I_{c}=19\ \text{мА}.$$

Зная все токи и напряжение батарейки, можно определить величину сопротивления резистора, воспользовавшись законом Ома

$$I_{н}r+(I_{н}+I_{c}+I_{в})R_x=U_0,$$

откуда

$$R_x=\frac{U_0}{{}^4\!/_3 I_{н}+I_{c}+I_{в}}=148{,}3\ \text{Ом}.$$

А. Зильберман

Ф1251. *В схеме, приведенной на рисунке 1, после установки токов мгновенно перебрасывают ключ из положения 1 в положение 2. Считая катушки идеальными, определить количество теплоты, которое выделится на резисторе R после переключения. ЭДС источника $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r.*

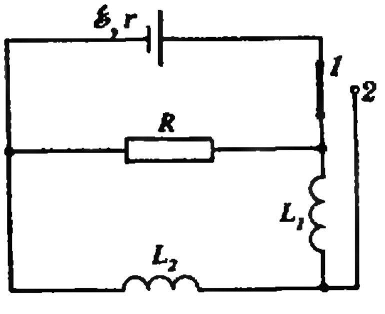


Рис. 1.

После установления токов перед перебрасыванием ключа через катушки L_1 и L_2 течет ток

$$I=\mathcal{E}/r.$$

Поскольку катушки идеальные (омическое сопротивление их обмоток равно нулю), падение напряжения на резисторе R и, следовательно, величина тока через резистор равны нулю. Мгновенность переброски ключа из положения *1* в положение *2* означает, что за время переброски ток в катушках практически не успевает измениться.

После переброски ключа действующая электрическая схема имеет вид, изображенный на рисунке 2. Начальные значения токов равны:

$$I_1(0)=I_2(0)=I=\mathcal{E}/r,$$

$$I_3(0)=0.$$

Из закона Ома для замкнутого контура *abcd* (для произвольного момента времени t) имеем

$$L_1\frac{dI_1}{dt}=0 \Rightarrow I_1=\text{const}.$$

Поскольку $I_1=I_2+I_3$, получаем

$$\frac{dI_1}{dt}=\frac{dI_2}{dt}+\frac{dI_3}{dt}=0.$$

Из-за наличия резистора R ток I_2 будет уменьшаться, т. е. затухать. При этом уменьшение тока I_2 будет численно равно приращению тока I_3 (поскольку $dI_2=-dI_3$). Когда ток I_2 упадет до нуля, ток I_3 будет равен начальному значению тока I_2 ($I_2(0)=\mathcal{E}/r$).

В новом установившемся режиме в цепи текут токи

$$I_1(\infty)=I_3(\infty)=\mathcal{E}/r,\ I_2(\infty)=0.$$

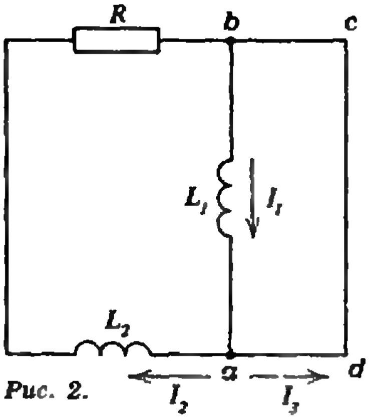


Рис. 2.

Следовательно, по закону сохранения энергии, энергия магнитного поля катушки L_2 выделится в виде тепла на резисторе R:

$$Q = \frac{L_2 I_2^2(0)}{2} = \frac{L_2 \mathcal{E}^2}{2r^2}.$$

В. Можаев

Ф1252. *Вертикальную спицу двигают перед дисплеем слева направо со скоростью $v_0 = 1$ м/с, при этом на светящемся экране отчетливо видна наклонная «тень» спицы. Почему это происходит? Чему равен угол наклона «тени» к вертикали? Электронный луч рисует полный кадр за время $t = 0{,}02$ с, число строк в кадре примите равным $n = 512$. Будет ли угол таким же, если двигать спицу перед телеэкраном?*

Под воздействием попадающих на экран электронов светится флюоресцент, покрывающий внутреннюю поверхность передней части кинескопа. Это свечение гаснет почти мгновенно, но глаз (точнее — мозг) сохраняет изображение в течение долей секунды. За это время пучок электронов успевает обежать весь экран, и «тень» на экране составляется из точек, которые спица заслоняла от глаза в разные моменты времени.

Пусть спица закрывает некоторую точку на данной строке. Тогда на следующей строке спица заслонит точку, смещенную на расстояние (по горизонтали) $l = v_0 t$, где t — время прохождения лучом одной строки (на самом деле это время немного больше — ведь с учетом смещения луч пройдет немного больше, чем строку). Примем размер кадра равным 20×15 см. Одну строку луч проходит за время 0,02 с/512=39 мкс. За это время спица сдвинется на 39 мкм. Расстояние между строками составляет 0,15 м/512=0,29 мм. Таким образом, угол «тени» с вертикалью приблизительно равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{0{,}039}{0{,}29} \approx 7{,}7^\circ.$$

Видно, что смещение мало́ по сравнению с длиной строки, так что наше приближение оказалось вполне разумным.

Случай с телеэкраном немного отличается от рассмотренного. Дело в том, что в телевидении применяют так называемую чересстрочную развертку луча, при которой за 0,02 с луч рисует только нечетные строки кадра, а затем в следующие 0,02 с рисуются четные строки — между нечетными. Делается это для того, чтобы передавать 25 полных кадров в секунду (как и в кино), но рисовать их вдвое чаще — при этом нет заметного на глаз «мигания». Значит, при расчете угла число строк за 0,02 с нужно взять равным 512/2.

А. Кожевников

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1216—М1230, Ф1223—Ф1237, справились с задачами М1216, М1217, М1221, М1226, Ф1226. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

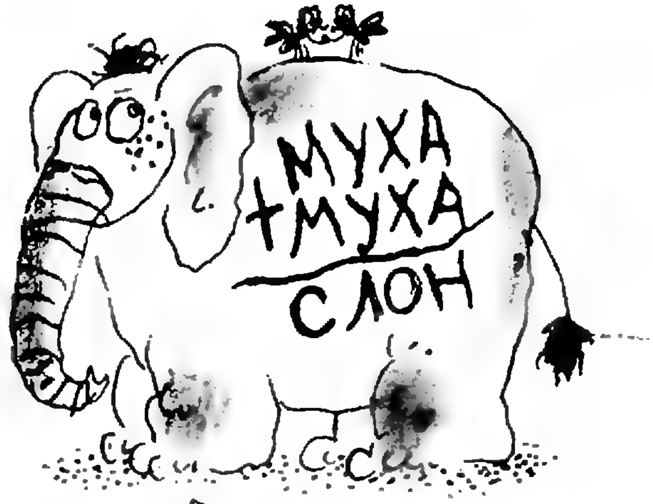
П. Андреева (п. Чериоголовка Московской обл.) 18, 24; *Д. Андриенко* (Киев) 18, 22—24, 29; *Б. Арясов* (Киев) 18; *А. Ахмедов* (Баку) 22—25, 28—30; *А. Ахунова* (Москва) 29; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 22—25, 28—30; *В. Беляев* (Тихвин) 28, 29; *А. Бениаминов* (Москва) 24; *Л. Беркович* (Киев) 18; *А. Бобков* (Балаково) 22, 25; *А. Бородин* (Донецк) 22—25, 28—30; *В. Бринюк* (Донецк) 18, 19, 22—24, 29, 30; *А. Бурков* (Киров) 22, 23; *И. Буссукойа* (Москва) 24; *С. Василькевич* (Киев) 18, 28, 30; *М. Волошина* (Москва) 30; *К. Волченко* (Донецк) 18, 19, 22—25, 27—30; *О. Гайдай* (Львов) 24; *М. Гельбанд* (Одесса) 18, 19, 22—25, 28—30; *С. Гетун* (Киев) 18, 22—25, 28—30; *С. Гнедков* (п. Палатка Магаданской обл.) 23; *С. Голубчик* (Харьков) 30; *А. Гордиященко* (п. Рогань Харьковской обл.) 24, 28, 29; *С. Гудзенко* (Павлоград) 23, 24; *Э. Давиджан* (Белореченск) 23, 24; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 29; *А. Днестранский* (Рязань) 27—30; *И. Егорова* (Ленинград) 20; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 22; *А. Ермошко* (Орша) 24; *Д. Жалковский* (Донецк) 23, 24, 30; *А. Жеглов* (Москва) 18, 19; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 23, 24; *К. Зарьков* (Минск) 22—24, 29, 30; *А. Зимин* (Иваново) 18, 23; *А. Зингер* (Москва) 22, 23, 30; *С. Злотников* (Гомель) 22; *М. Иванов* (Тула) 29, 30; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 18, 19, 22—25, 28—30; *А. Ионес* (Ленинград) 24; *Т. Калита* (Киев) 24, 28, 29; *Г. Каминский* (Киев) 18, 23, 24; *И. Кацман* (Киев) 18; *С. Коваценко* (Виниица) 18—20, 22—25, 28—30; *П. Кожевников* (Калуга) 22—24, 30; *А. Козачко* (Винница) 18—20, 22—25, 28—30; *М. Коников* (Москва) 24, 30; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 22—25, 28—30; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 29; *С. Корсак* (п. Суворово, Молдова) 28, 30; *А. Котов* (Одесса) 29; *Ю. Крвавич* (Киев) 24; *А. Криволуцкий* (Новосибирск) 28; *А. Кудрявцева* (Киев) 18, 20, 22, 24, 25, 29, 30; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 24; *Е. Лазарева* (Запорожье) 24; *А. Лебедев* (Краснодар) 22—25, 27—29; *И. Левин* (Москва) 24, 30; *М. Лейчкис* (Киев) 22; *А. Львов* (Москва) 22, 27, 30; *А. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 22, 23; *А. Малафеев* (Белорецк) 24; *В. Мергель* (Корюковка) 28—30; *К. Мильштейн* (Киев) 18, 19, 23—25, 28—30; *К. Мишачев* (Липецк) 18—20, 22—25, 27, 29, 30; *А. Мкртчан* (с. Вазмаберд АрмССР) 28, 30; *Р. Мучник* (Винница) 19, 20, 22—25; *А. Наврузов* (Ургенч) 24; *В. Наимов* (Ура-Тюбе) 28; *И. Найденов* (София, Волгария) 24; *А. Насыров* (Обнинск) 20, 22—24, 28—30; *А. Наумович* (Минск) 28—30; *Н. Немировская* (Киев) 18, 24; *А. Ноаров* (Москва) 18; *И. Новак* (Житомир) 18, 28, 29; *Д. Номировский* (Черкассы) 22—24, 28—30; *С. Павличков* (Евпатория) 22—24; *Т. Панов* (Киев) 18, 22—25, 28—30; *В. Пасхавер* (Киев) 18; *О. Пелязов* (Уфа) 28; *Е. Перельман* (Ленинград) 18, 23, 25, 27, 29, 30; *А. Петросян* (Ереван) 18, 23, 24, 28—30; *Л. Пиковская* (Киев) 28; *А. Погребняк* (Киев) 23; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 18, 23, 24; *Н. Пошевенчук* (Пинск) 24; *М. Прибытько* (Чернигов) 28, 30; *И. Приешкина* (Антрацит) 24; *А. Разин* (Одесса) 18, 19, 22—25, 27—30; *Д. Рекалов* (Киев) 23, 24; *В. Рычков* (Куйбышев) 24, 27—30; *К. Саввиди* (Ереван) 18, 19, 22—24; *А. Сарсембаев* (Аркалык) 28, 29; *М. Сатимов* (Шават) 24; *А. Сафронов* (Томск) 22—24, 28—30; *С. Сафронов* (Псков) 23; *В. Севриновский* (Москва) 25, 28, 30; *Г. Сироткин* (Харьков) 18, 22—25, 28, 30; *М. Славкин* (Минск) 22—24, 28—30; *В. Сластинов* (Киев) 18, 24; *А. Солодов* (Воронеж) 18, 22, 23, 29, 30; *А. Солодушкин* (Томск) 18, 20, 22—24, 28—30; *И. Сперанский* (Донецк) 23, 24; *А. Таратин* (Северодвинск) 24; *М. Темкин* (Москва) 22—25, 27—30; *А. Титаренко* (Видное) 27—30; *С. Трегубенко* (Красногорск Московской обл.) 18, 24; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 24; *П. Ушаков* (Москва) 24, 28; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 20, 22—24, 27—30; *Р. Ханмагомедов* (Дербент) 24, 28; *М. Хасин* (Донецк) 18, 22—25, 30; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 28, 30; *А. Шиндлер* (Феодосня) 18, 22—24, 29; *Д. Щукин* (Саратов) 18; *О. Яцун* (Киев) 19, 24.

Физика

М. Абдуллаев (Баку) 29; *Е. Агеева* (Донецк) 25, 27; *Е. Алабердин* (Ташкент) 32; *Г. Астахов* (Ленииград) 24, 27; *С. Атанасян* (Ленинград) 28; *Я. Бабкин* (Киев) 24, 27—33, 36; *С. Базылько* (Северодвинск) 25, 32; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 28, 29, 32—34, 36; *М. Барашков* (д. Осниновка Могилевской обл.) 24, 25, 27—30, 32, 33, 36, 37; *Б. Барышников* (Новгород) 24, 29, 32; *Д. Баско* (Москва) 23, 24, 27; *С. Белов* (Старый Оскол) 28, 32, 33; *М. Беломытцев* (Москва) 28, 36; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 28, 32; *Л. Васильев* (Салават) 23, 27—30, 32; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 28, 29, 32; *П. Волынец* (Брест) 25, 29; *А. Воронин* (Старый Оскол) 24, 27; *И. Воскобойник* (Киев) 24—28, 32, 36; *К. Галичский* (Северодвинск) 23—25, 27—32; *А. Гвозденко* (Нежии) 25; *К. Генинг* (Павлодар) 28; *В. Глазков* (Коломна) 25, 32; *А. Гледзер* (Одинцово) 24, 27—29, 34; *С. Головко* (Горловка) 28, 35; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 24, 27—32, 34—37; *В. Грибок* (с. Долинское Одесской обл.) 24; *В. Гузовский* (Могилев) 24, 28; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 24, 25, 27—33, 35—37; *О. Гусар* (Канев) 24, 27, 28, 30—32, 36, 37; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 24, 25, 27—33, 36; *А. Дементьев* (Чебоксары) 24, 25, 27—33, 36, 37; *В. Демчик* (Ровно) 25; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 23—25, 27—30, 32, 33, 35—37; *С. Джосюк* (Виниица) 23—25, 27—29, 31—33, 36; *С. Дибров* (Киев) 23—25, 27, 28,

(Окончание см. на с. 46)

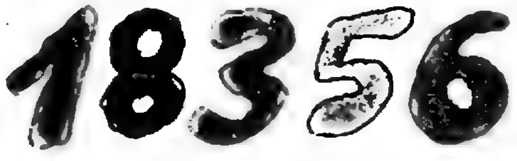
Задачи



1. Решите арифметический ребус, который вы видите на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные; все гласные буквы соответствуют цифрам одной четности, а согласные — другой.

2. Покажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то хотя бы одна из них делится на 2 и хотя бы одна делится на 3.

3. На пяти островах завтракали 30 аистов. На каждом острове аисты поделили лягушек поровну, причем каждый аист с первого острова съел больше, чем каждый аист со второго, со второго — больше, чем с третьего, и т. д. Сколько лягушек было съедено на каждом из островов, если всего было съедено 40 лягушек и каждый аист съел хотя бы одну лягушку?



4. Расшифруйте слово, записанное разноцветными цифрами (см. рисунок).

5. На первом этаже большого дома у лифта встретились пятеро друзей. Женя сказал: «Если считать отсюда, то я живу выше, чем ты, Вова, в два раза, выше Пети в три раза, выше Андрея в четыре раза и выше Тани в шесть раз». «Ты это здорово подметил,— отозвался Андрей,— а ты, Петя, потише стучи своими гантелями у меня над головой». На каком этаже живет Андрей?

Эти задачи нам предложили А. Домашенко, А. Савин, Г. Гальперин, А. Швецов, М. Роллова.

ЗАДАЧИ ПРО СВЕТ И ЦВЕТ

Кандидат педагогических наук
С. ТИХОМИРОВА

В ноябрьском номере журнала за прошлый год мы предложили нашим читателям несколько задач на тему «Световые явления», взятых из художественной литературы («Квант», 1990, № 11, с. 34). Сегодня, как и обещали, мы возвращаемся к этим задачам. Их обсуждение позволит более широко рассмотреть ряд физических явлений, знакомых вам по учебникам.

Начнем с прямолинейного распространения света и образования теней. Почему вечером тени удлиняются? Причина этого в том, что высота Солнца над горизонтом в течение суток изменяется — до полудня она растет, а к вечеру уменьшается. Из-за этого и длина тени меняется, но «в обратном порядке». Писатель И. Соколов-Микитов наблюдал восход солнца в тундре, когда при появлении солнечных лучей тени от ног «протянулись почти на километр». (Надеемся, что вы без труда смогли объяснить, почему в рассказе Ф. Искандера мальчик, который определял время по тени, опоздал.)

В эпизоде из повести Н. Гоголя вы, конечно, узнали явление прохождения света сквозь малые отверстия. При этом на стене (на экране) получилось перевернутое изображение расположенных перед отверстием предметов. На основе этого явления действует прибор под названием камера-обскура, или «дырочная» камера. Он был изобретен в середине XVI века и в свое время широко применялся для точных натуральных зарисовок.

Поэт А. Прасолов писал о видимой сходимости вдали рельсов железной дороги. Это явление кажущееся, иллюзия зрения. Как можно объяснить ее возникновение? Дело в том, что наше зрительное восприятие не всегда правильно отражает истинные размеры предметов и расстояния между ними. Например, чем дальше находится предмет от наблюдателя, тем меньшим он представляется. Это связано с тем, что кажущаяся величина предмета зависит от угла зрения, под которым он рассматривается. Наглядно это показывает рисунок 1. Наблюдатель, глаз которого изображен на рисунке, длину одной и той же вертикальной палочки оценит по-разному в зависимости от расстояния до нее, т. е. в зависимости от ее углового размера. В крайнем левом положении она ему представляется большей. (Да и нам, читатель, эта палочка кажется больше остальных. В чем же дело? Дело в тонких линиях на рисунке, которые «задают» угловые размеры и для нас. Тут мы должны были бы говорить о той роли, которую играет наш *мозг в восприятии внешних образов*, в «переводе» этих образов в наши зрительные ощущения. Но это отдельная и довольно сложная тема, которой мы сегодня не будем касаться)

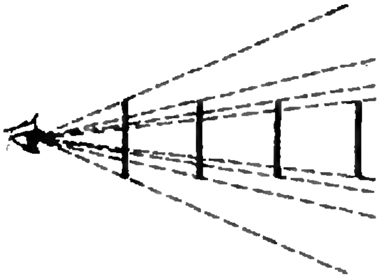


Рис. 1.

Теперь нетрудно понять, почему кажется, что рельсы вдали сходятся: по мере удаления от наблюдателя уменьшается угловой размер расстояния между рельсами (угловой размер шпалы). Явление видимой сходимости параллельных линий вдали называется перспективой. Перспективное восприятие пространства было выработано в ходе длительной эволюции зрения у человека.

Писатель В. Короленко заметил, что во время солнечного затмения, когда от дневного светила остался лишь узкий светящийся серпик, тени на земле стали «бледные, неясные». Почему? Дело в том, что при слабом освещении ухудшается контрастная чувствительность глаза, т. е. глаз хуже различает границы между областями с различной освещенностью.

Обсудим еще, какие формы приобретают тени от разных предметов во время частного затмения Солнца. Вы, наверное, замечали, что в солнечный день тень от небольших предметов, независимо от их формы (бабочка, птица, шарик), имеет форму круга. Это — теневое изображение Солнца. (А солнечные лучи, проходящие сквозь листву дерева, образуют на земле множество круглых пятен, хотя лучи «пробивались» через самые разнообразные отверстия неправильной формы между листьями. Эти пятна — изображения Солнца.) Когда при затмении Солнце приобретает серповидную форму, все маленькие предметы дают серповидную тень. (И солнечные светлые пятна на тени деревьев получаются такой же формы — маленькие серпики, но повернутые в обратную сторону.)

Что можно сказать о тени тел, имеющих немаленькие размеры? Во время затмения они также будут изменяться. Всякий протяженный объект можно представить как сумму маленьких тел. Тень от каждого маленького тела серповидна, и тень большого тела будет состоять из множества серпов.

В отрывке из романа Г. Хаггарда «Копи царя Соломона» вы, конечно, узнали картину лунного затмения. Писатель заметил, что во время затмения Луна приобретает медно-красный оттенок. Это явление можно объяснить с точки зрения физики. Луна, как известно, сияет отраженным солнечным светом; затмение наступает тогда, когда Земля «загораживает» Луну от Солнца. Но, как показывают тщательные исследования, и при затмении Луна освещается Солнцем: из-за преломления в нижних слоях атмосферы Земли солнечные лучи искривляются, как бы «огибают» Землю и попадают на Луну, так что четкой геометрической тени Земли на Луне не получается. Однако в земном воздухе из белых солнечных лучей «теряются» синие цвета — как говорят физики, синие цвета в большей степени рассеиваются а атмосфере. (Этим явлением, кстати, объясняется голубой цвет неба.) В прошедшем же свете остаются желто-красные цвета. Чем толще воздушный слой, который проходят лучи света, тем больше они теряют сине-голубые цвета и тем интенсивнее краснеют.(Вспомните, какими красными бывают Солнце и Луна у горизонта.) А во время затмения Луны световые лучи проходят земную атмосферу дважды: до Луны и обратно к нам на Землю.

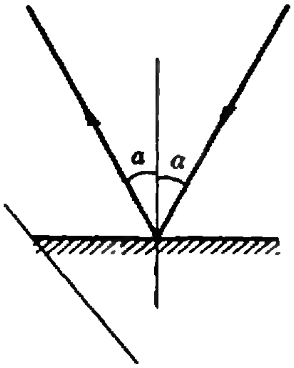


Рис. 2.

Теперь поговорим об отражении света. В рассказе М. Пришвина собака Лада перепутала живого кулика с его изображением в воде, так они были похожи. Однако, несмотря на большое сходство, различие между предметом и его изображением имеется. В зеркальном отражении, как вы знаете, правое и левое меняются местами. Кроме того, пейзаж и его изображение в воде также различаются. Отраженный пейзаж виден так, как если бы мы смотрели на него из точки, расположенной под поверхностью воды.

В фантастическом произведении А. Беляева «Последний человек из Атлантиды» жрецы использовали плоские зеркала для освещения подземных помещений солнечным светом. Как расположить три зеркала, чтобы повернуть луч на 90°? Из рисунка 2 видно, что при отражении от зеркала угол поворота луча будет равен двум углам падения. Исходя из этого, можно предположить различные комбинации зеркал, позволяющие повернуть луч на 90°. Два возможных варианта — на рисунке 3. Таким образом с помощью нескольких зеркал можно «провести» луч по подземным переходам различной формы. Правда, чем больше зеркал, тем бóльшая доля света будет теряться при отражении от них.

Вы, наверное, наблюдали, как искрится поверхность реки в солнечный

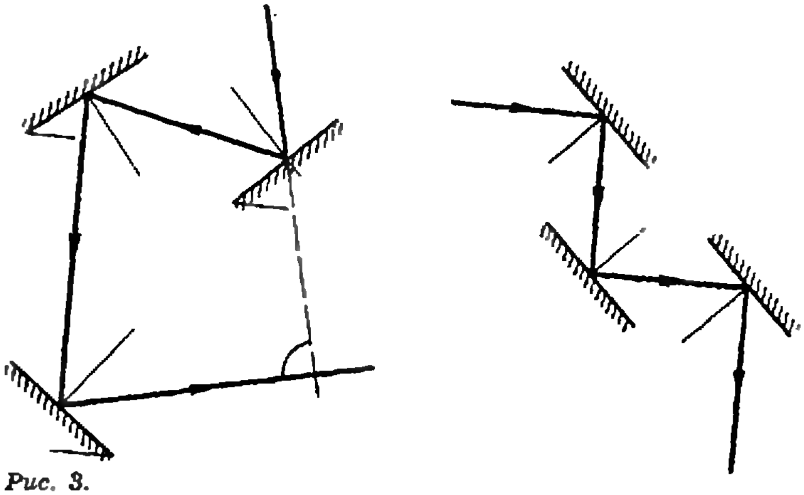


Рис. 3.

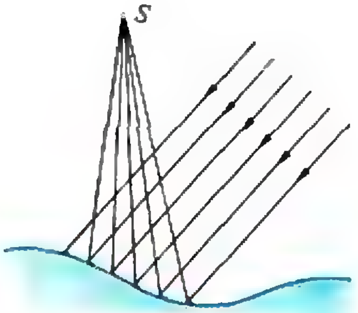


Рис. 4.

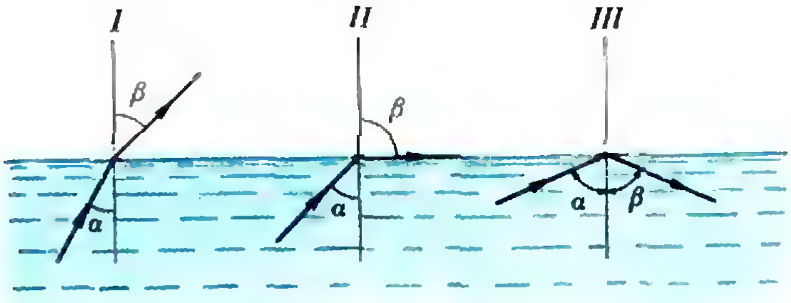


Рис. 5.

день. Множество мелких искр вспыхивает, гаснет и опять загорается. Как объяснить это воспетое Ф. Тютчевым явление? На поверхности воды всегда есть волнение, рябь, маленькие водовороты. Водную поверхность можно представить как совокупность вогнутых и выпуклых зеркал. Вогнутые поверхности фокусируют солнечные лучи, поэтому на воде появляется множество ярких искорок (рис. 4). Волны на поверхности все время перемещаются, поэтому искорки вспыхивают и гаснут.

Мир, который увидел *из-под воды* Ихтиандр, «Человек-амфибия», трудно себе представить. Физика объясняет подобные видения явлением полного внутреннего отражения.

Вспомните: когда луч света переходит из оптически более плотной среды в менее плотную, он преломляется и в большей степени отклоняется от вертикали. На рисунке 5 можно проследить за ходом лучей, переходящих из воды в воздух. Когда угол падения составит примерно 48,5°, луч не выйдет из воды совсем. Это для воды предельный угол. Для всех углов падения, бо́льших предельного, лучи не выйдут из-под воды, а отразятся от ее поверхности, как от зеркала. *Говорят, что луч* претерпевает полное внутреннее отражение. Соответственно и предельный угол называют углом полного внутреннего отражения.

Как видится водная поверхность из глубины? Она представляется в форме конуса или воронки, в вершине которой вы находитесь. Бока конуса наклонены друг к другу под углом, равным двум предельным углам (97°). *Весь надводный мир* заключается внутри этого конуса, правда, в искаженном виде. За краями конуса расстилается блестящая поверхность воды, *в которой, как в зеркале,* отражается подводный мир.

А теперь разберемся, каким видится из воды рыбак, зашедший в воду. Ноги рыбака видны непосредственно в воде. Но кроме этого наблюдается еще и отражение ног от зеркальной поверхности воды (рис. 6). Верхняя часть тела рыбака видна через границу вода — воздух. Здесь луч зрения подводного *наблюдателя* преломляется. И что же он видит? Верхняя часть тела рыбака висит в воздухе без ног! Именно такое изображение возникает на *сетчатке* глаза.

Теперь поясним, почему края конуса окружены разноцветными каемками. Белый солнечный свет — это «смесь» лучей разных цветов. Каждый род лучей имеет свой показатель преломления, а потому и свой предельный угол. Поэтому края конуса и имеют радужную окраску.

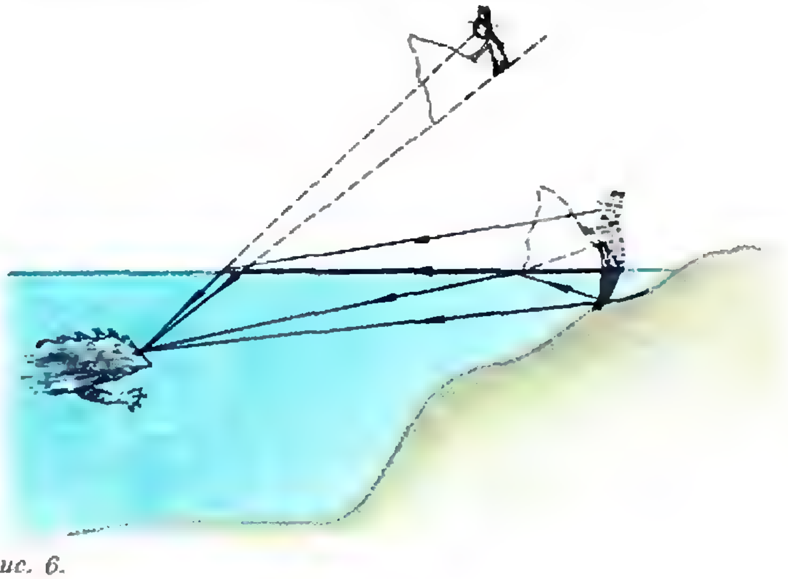


Рис. 6.

В одном из отрывков из «Фауста» также описана картина «подводного зрения».

Серебряный свет в аквамарине, о котором идет речь в повести К. Паустовского «Золотая роза», объясняется тем же явлением полного внутреннего отражения...

На этом мы остановимся. Читателю, которого заинтересовала тема «Световые явления», рекомендуем посмотреть следующие книги и статьи из «Кванта»:

Артамонов И. Д. *Иллюзии зрения.* М.: Наука, 1969;
Миннарт М. *Свет и цвет в природе.* М.: Наука, 1969;
Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга 2, 22-е изд., перераб. и доп.— М.: Наука, 1986;
Асламазов Л. Г. *Лунные дорожки.* Квант, 1971, № 9, с. 18;
Гринева Г. И., Розенберг Г. В. *Дела и проделки феи Морганы.* Квант, 1984, № 8, с. 20;
Буздин А. И., Кротов С. С. *Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...* Квант, 1987, № 12, с. 32;
Буздин А. И., Кротов С. С. *Что и как мы видим.* Квант, 1988, № 3, с. 34.

В них вы найдете решения многих задач из статьи «Световые явления» и узнаете много нового для вас и интересного из этой области физики.

МАТЕМАТИКА ● ФИЗИКА ● ХИМИЯ ● БИОЛОГИЯ ● ЛИТЕРАТУРА ● МАТЕМАТИКА

АБИТУРИЕНТ-91

Заочные курсы с оригинальными методиками обучения помогут Вам стать студентом одного из ведущих вузов страны.

Приглашаются учащиеся и выпускники школ, техникумов, ПТУ, медицинских училищ и уволенные в запас воины.

Квалифицированные преподаватели, применяя индивидуальный подход и учитывая уровень Вашей начальной подготовки, сделают все возможное для того, чтобы Ваше поступление в вуз стало реальностью.

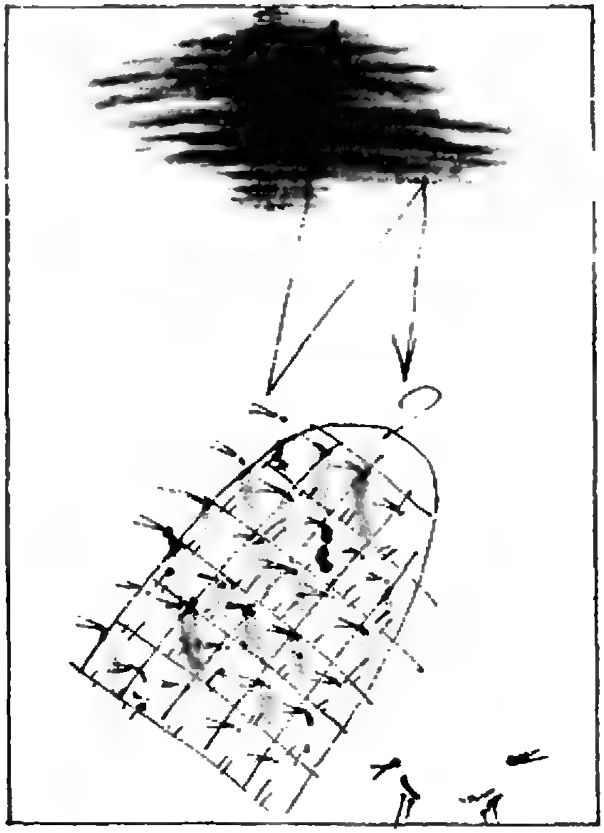
В течение 4—5 месяцев Вы получите 5 методических разработок по каждому предмету, в которых содержится теоретический материал, разбор вопросов и задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, и контрольные работы.

Для поступающих в московские вузы во время вступительных экзаменов проводятся очные консультации.

Стоимость курса обучения по одному предмету — 73 рубля. Для инвалидов, детей-сирот и воинов-интернационалистов предоставляется скидка 50 %. Оплата производится после получения уведомления о зачислении на курсы.

Для поступления на курсы Вы должны прислать заявление на имя зав. курсами, где будет указан предмет, выбранный вуз, Ваши фамилия, имя и отчество, учебное заведение, в котором Вы учитесь или которое окончили, и 2 конверта с написанным на них Вашим почтовым адресом.

Наш адрес:
129081, г. Москва, а/я № 118,
Советский фонд
милосердия и здоровья,
ТПО «АГАФО»,
Учебно-методический сектор.



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Гроза и грозоотвод» предназначена десятиклассникам (впрочем, она будет интересной и девятиклассникам тоже), заметка «За пределы таблицы» предназначена одиннадцатиклассникам.
Публикуем также подборку «Избранных школьных задач по физике».

Гроза и грозоотвод

Гроза — очень часто наблюдаемое атмосферное явление. Каждую секунду на земном шаре происходят около сотни гроз. Есть даже такие места (центральная Америка, Индонезия), где грозы происходят так регулярно, что люди договариваются о свидании примерно такими словами: «встретимся в среду после грозы».

Гроза и неразлучные с ней молния и громовые раскаты — не только эффектное, но и устрашающее явление. И небезопасное. Недаром одного корня с этим словом слова «грозить», «угроза», «грозный» и т. п. С грозой и в самом деле связаны немалые опасности — для людей и для лесов, для электрических устройств и средств связи. Отсюда — необходимость в средствах защиты от грозы.

Но что же такое гроза?

Гроза — это грандиозный искровой разряд в атмосферном воздухе, который возникает между электрически заряженными облаками или между заряженным облаком и землей. Длина канала, по которому прокладывает себе путь разряд, может достигать многих километров. Сила тока в нем — сотни тысяч ампер. Температура газа в грозовом канале — многие тысячи градусов. Соответственно очень высоко и давление газа в нем. Чтобы такой разряд мог произойти, необходимо электрическое напряжение (например, между облаком и землей) — до миллиарда вольт, а напряженность электрического поля — до миллиона вольт на метр.

Если на пути грозового разряда встречается препятствие — дерево, здание и т. п., то высокое давление может привести к механическому разрушению, а высокая температура — к пожару. Возможно, что первый огонь, с которым познакомился человек, и был огонь, вызванный грозой, зажегшей дерево. Не случайно ведь в мифе о Прометее говорится о похищении огня с неба.

Как же бороться с этой опасностью? Как ее устранить?

Впервые идею защиты от грозы предложил американский физик Бенджамин Франклин еще в середине XVIII века. Им же была установлена и электрическая природа молнии. Идея защиты, используемая и в наше время, основана на свойствах проводящего острия.

Проводник с острием. Известно, что электрические заряды на проводнике располагаются на его поверхности. Если проводник имеет форму сферы или шара, заряд распределяется по его поверхности равномерно — на каждую единицу площади поверхности приходится одинаковый заряд.

Как говорят, поверхностная плотность заряда всюду одинакова. Это связано с тем, что у сферы одинакова кривизна во всех точках поверхности, т. е. одинакова величина, характеризующая отклонение кривой поверхности от плоской.

На поверхности произвольной формы кривизна в разных местах может быть различной. Ясно, что в этом случае электрический заряд распределяется по поверхности неравномерно — ведь заряды всегда располагаются так, чтобы внутри проводника напряженность электрического поля равнялась нулю. Для этого в тех местах, где «меньше места», заряды должны располагаться с большей поверхностной плотностью. Вот почему напряженность поля вокруг проводника особенно велика около тех участков его поверхности, где большая кривизна поверхности.

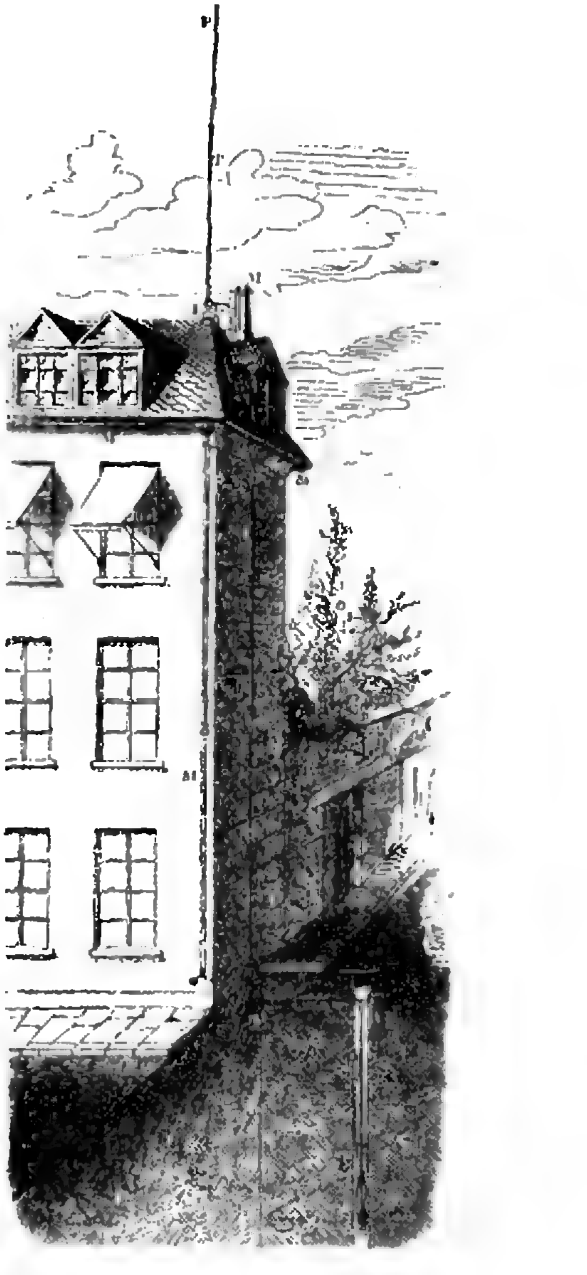
Острие на поверхности — это место наибольшей кривизны. Соответственно здесь наибольшая поверхностная плотность зарядов, а около острия — особенно сильное электростатическое поле. Это и используется в грозозащитном устройстве — грозоотводе.

Грозоотвод. Он представляет собой металлический стержень, один конец которого приведен в хороший контакт с землей (надежно заземлен), а другой, снабженный заостренным штырем, возвышается над защищаемым сооружением. Стержень вместе с землей — это гигантский проводник, а штырь грозоотвода — острие на нем.

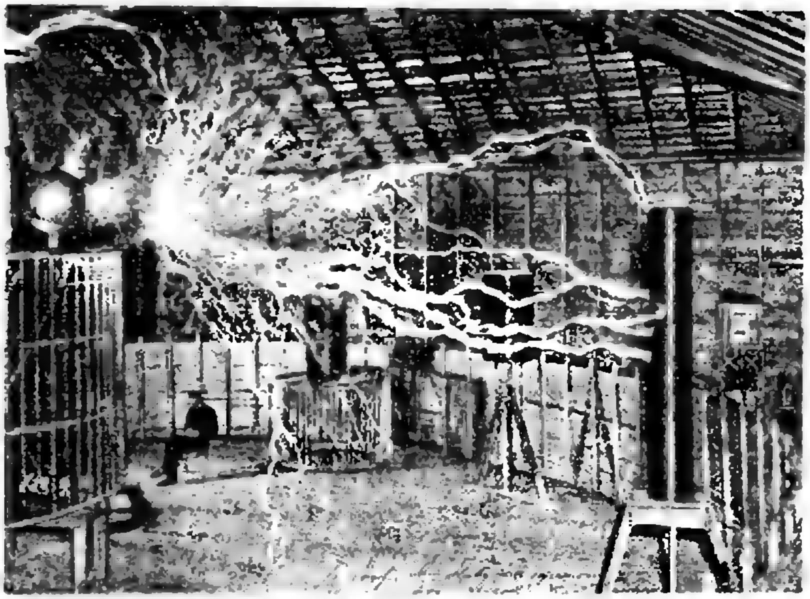
Как же действует это простое устройство?

Предположим, что вблизи грозоотвода оказалось грозовое облако. Пусть, например, заряд на нем положительный. Тогда электростатическое поле облака вызовет разделение зарядов на проводнике, состоящем из земли и грозоотвода, так, что на грозоотводе появится отрицательный заряд. Причем, поскольку на штыре будет очень большая поверхностная плотность заряда, вокруг него возникает очень сильное электростатическое поле.

В атмосферном воздухе всегда есть небольшое число (порядка нескольких сотен в одном кубическом сантиметре) положительно и отрицательно заряженных частиц — ионов и свободных электронов. Обычно они не мешают воздуху быть отличным изолятором. Но в сильном поле — около штыря грозоотвода — ионы и электроны приобретают такие большие скорости, что, сталкиваясь с нейтральными молекулами воздуха, они ионизируют их. Получившиеся новые электроны и



Американское правительство самым энергичным образом поддерживало идею Франклина о громоотводе. Так, в 1782 году Филадельфия на своих 1300 домах имела уже свыше 400 громоотводов.



Искусственная молния длиной около 4 метров, полученная Н. Тесла в своей лаборатории в горах Колорадо.

ионы тоже ускоряются и в свою очередь создают все больше и больше пар заряженных частиц, число их растет, как снежный ком. Воздух становится в какой-то мере проводящим.

В настоящем проводнике электростатическое поле, как известно, отсутствует. В воздухе же вокруг грозоотвода оно, во всяком случае, ослабляется, и искровой разряд становится менее вероятным. Можно сказать и так, что отрицательные частицы движутся к положительно заряженному облаку и, по крайней мере частично, нейтрализуют его. Если же разряд всетаки происходит, то стержень грозоотвода будет служить безопасной для окружающих объектов «дорожкой» для разряда.

Молния и гром. Итак, грозовой разряд представляет собой гигантский электрический разряд в газе. Но электрический ток, как известно, не виден и не слышен. Как же объяснить такие впечатляющие грозовые явления, как вспышки молнии и раскаты грома?

Начнем по порядку. Оказывается, образующиеся в канале разряда (его ширина достигает нескольких сантиметров) ионы и электроны, притягиваясь друг к другу, воссоединяются и образуют нейтральные молекулы воздуха. Такой процесс называется рекомбинацией. При этой-то рекомбинации и выделяется свет (происходит вспышка молнии).

Гром же возникает вот почему. При разряде давление газа в грозовом канале становится очень высоким. Быстрое понижение его сопровождается образованием мощной ударной звуковой волны, которую мы и называем громом. Раскаты грома объясняются многократными отражениями звука от облаков и других объектов.

Таким образом, молния и гром — это как бы последствия грозового разряда. Опасности же, о которых мы говорили, связаны с самим разрядом, который не виден и не слышен. Заметим, кстати, что весь процесс разряда, на описание которого мы потратили так много слов и времени, происходит практически мгновенно — в тысячные доли секунды.

Громоотвод? Молниеотвод? Грозоотвод? Мы назвали грозозащитное устройство грозоотводом. Но очень долго его называли громоотводом. Затем его стали называть молниеотводом, часто так его называют и теперь. Однако из того, что мы рассказали, следует, что ни грома, ни молнии «отвести» нельзя — они лишь неизбежные следствия грозового разряда. Задача же грозозащиты — отвести грозу, вот почему слово «грозоотвод», с нашей точки зрения, точнее всего отражает свое назначение.

А. Кикоин

За пределы таблицы

В 1871 году Д. И. Менделеев предложил периодическую систему химических элементов в виде таблицы, выражающей открытый им же за два года до того периодический закон. В первой таблице не было привычных теперь клеток, а около каждого элемента стояло одно число — относительная атомная масса (тогда она называлась атомным весом). Не было также номера элемента в таблице, а число элементов было немногим — чуть более 60, хотя для некоторых еще не открытых элементов с самого начала были оставлены места.

Проходили годы, таблица изменялась. Появились клетки-«убежища» для каждого элемента, а в них — порядковый номер, который так и понимался как порядковый, вроде номера дома на улице или номера документа в канцелярии.

Периодическим законом и таблицей широко пользовались и химики, и физики, но ни тем, ни другим не была известна причина периодичности свойств элементов, а значит, не был известен и смысл таблицы. Положение изменилось только через сорок с лишним лет.

В 1911 году опыты Э. Резерфорда показали, что атом состоит из положительно заряженного ядра и электронной оболочки вокруг него. А голландский юрист (?!) Ван дер Брук выяснил, что заряд ядра атома (если принять за единицу электрического заряда заряд электрона) как раз равен порядковому номеру элемента.

В 1913 году Н. Бор предложил новую, квантовую в своей основе, теорию строения атома, которая дала возможность, наконец, понять причину перио-

Д. И. Менделеев — известный во всем мире за исключением России — во время одного из визитов в Манчестер.

дичности свойств элементов в периодической таблице. Связанный с этой теорией закон — закон Мозли — позволял прямо из опыта определять значение порядкового номера элемента. Теперь он перестал быть «порядковым» и стал атомным номером.

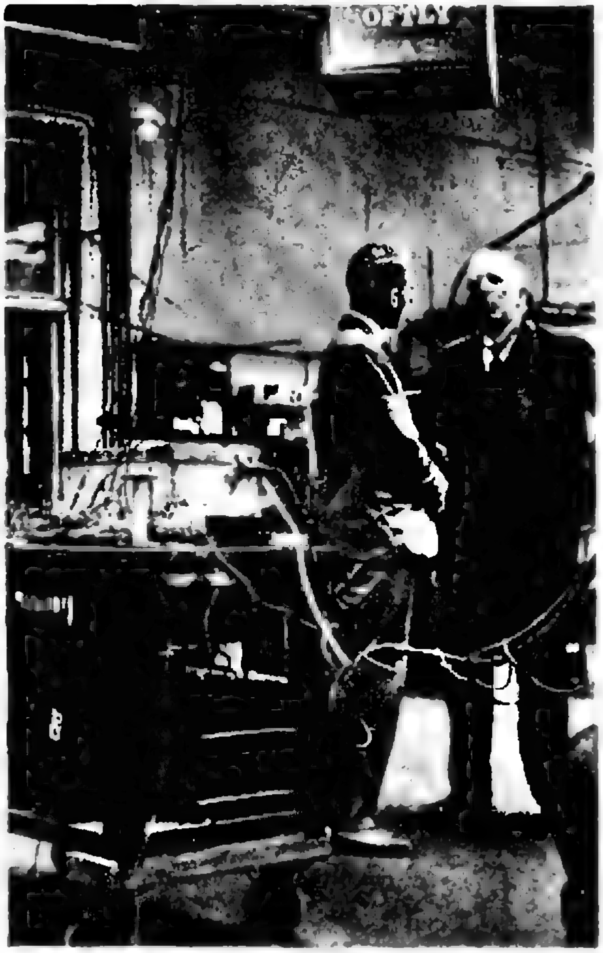
В 1932 году был установлен состав атомных ядер: ядро атома состоит из положительно заряженных частиц — протонов и электрически нейтральных частиц — нейтронов, масса которых почти равна массе протонов. Следовательно, атомный номер элемента (бывший порядковый) — это число протонов в его ядре и, соответственно, число электронов в электронной оболочке его атома.

К этому времени в таблице Менделеева было заполнено уже 92 клетки — от водорода до урана, правда 4 клетки еще пустовали. Четыре элемента никак не удавалось обнаружить ни в земной коре, ни в воде, ни в атмосфере. Правда, щедрость природы сказалась в том, что многие клетки таблицы оказались «убежищем» не для одного атома, а для многих — для изотопов одного и того же химического элемента, так что различных атомов оказалось много больше, чем 88 и даже 92. А не могут ли существовать химические элементы и за пределами таблицы Менделеева — влево от начала или вправо от ее конца?

Слева от начала таблицы. Еще в 1920 году Э. Резерфорд высказал предположение, что может существовать элемент с нулевым номером. И когда в 1932 году был открыт нейтрон, стало ясно, что на роль «обитателя» нулевой клетки таблицы подходит именно он. Это и в самом деле химический элемент с нулевым атомным номером, хотя даже в самых современных таблицах рисовать нулевую клетку с нейтроном в ней не принято.

С расширением таблицы «влево» было, казалось, покончено — влево от нуля вроде бы идти некуда.

Вправо от конца таблицы. После открытия нейтрона и создания первых источников нейтронов они стали применяться для облучения различных веществ и изучения происходящих при этом ядерных реакций.



Эрнест Реферфорд — директор Кавендишской лаборатории в Кембридже.

Оказалось, например, что очень часто происходят реакции типа такой:

$${}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na} + \gamma.$$

Это так называемый радиационный захват нейтрона — нейтрон «захватывается» ядром натрия с испусканием (радиацией) гамма-кванта. Но изотоп ${}^{24}_{11}\mathrm{Na}$ радиоактивен и с периодом $T \approx 14$ часов распадается с испусканием β-частицы (электрона ${}^{0}_{-1}e$):

$${}^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + \beta. \qquad (*)$$

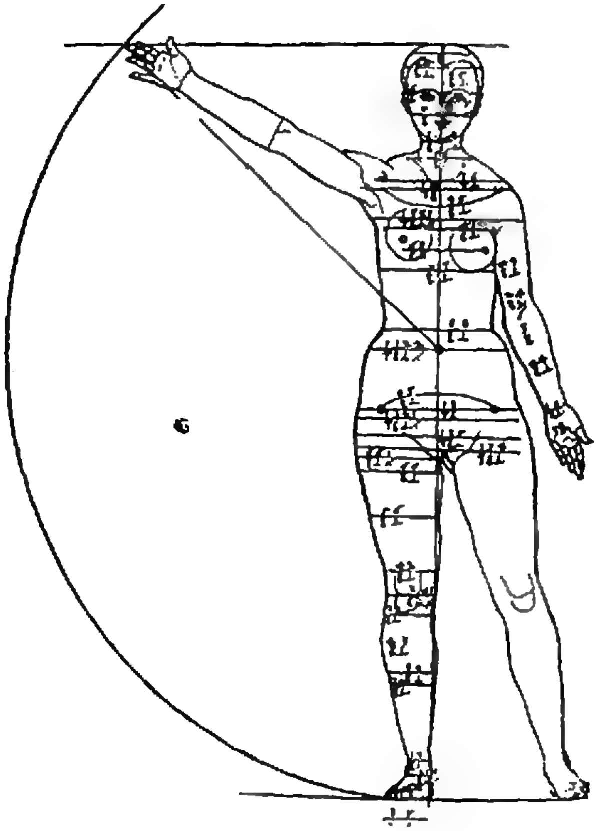
Таким образом, конечный результат облучения нейтронами состоит в том, что натрий превращается в своего соседа справа — в магний.

Аналогичные реакции наблюдались на очень многих элементах. Это навело Э. Ферми на счастливую мысль — поставить опыт с облучением нейтро-

(Окончание см. на с. 42)

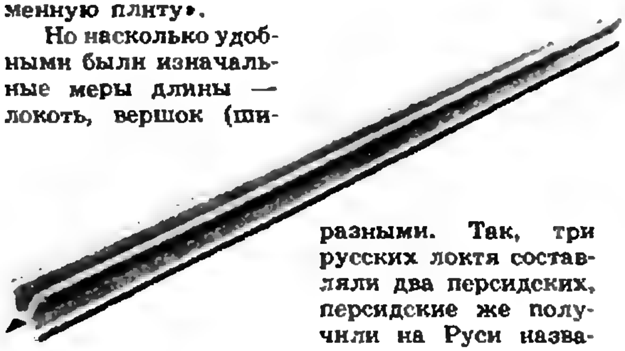
Калейдоскоп „Кванта"

Длина



Длина — одно из первых геометрических понятий, с которым столкнулось человечество. Первые меры длины были самыми естественными и поэтому сохранились до нашего времени. Действительно, в газетах можно прочесть такие фразы: «Избушка находилась от поселка на расстоянии двух дневных переходов», «Трещина шириной в ладонь пересекала каменную плиту».

Но насколько удобными были изначальные меры длины — локоть, вершок (ширина ладони на уровне пальцев), сажень (расстояние между концами пальцев разведенных в стороны рук) — ведь они всегда при себе,— настолько они были неточными; у разных людей, эти единицы различны. Государствам приходилось вводить эталоны длины — образцовые единицы измерения. Но в разных странах эти единицы оказывались



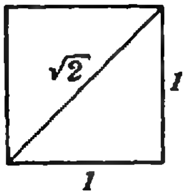
разными. Так, три русских локтя составляли два персидских, персидские же получили на Руси название аршин (от «арш» — «локоть» в группе тюркских языков).

Естественно, что соотношения между различными единицами длины даже в одной стране были довольно причудливы. Указ Петра I, призванный упорядочить систему мер в России, вводил довольно сложные соотношения между бытовавшими в то время единицами: 1 миля = 7 верст = 3500 саженей = 10500 аршин = 168 000 вершков = 294 000 дюймов = 2 940 000 линий = 29 400 000 точек.

Заметим, что в последних соотношениях прослеживается идея десятичной системы мер, но привычные меры настолько трудно искоренимы, что для введения новых требуется революция, притом Великая, как Великая французская революция, в результате которой во Франции появились метр, километр, сантиметр, дециметр, миллиметр... и Великая Октябрьская социалистическая революция, после которой эти единицы были введены у нас. А США, Англия и многие другие страны обходятся еще средневековыми мерами.

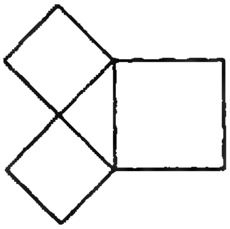
Понятие длины отрезка сыграло огромную роль в становлении математики. Ведь, собственно, что такое длина отрезка? Это — число, которое указывает, сколько раз укладывается на этом отрезке выбранная единица длины. Если этот эталон не помещается целое число раз, то приходится вводить дробную длину в точном соответствии с алгоритмом Евклида.

Еще древние греки знали, что диагональ



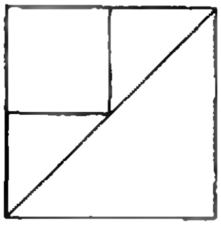
квадрата несоизмерима с его стороной, т. е. не может быть выражена через его сторону в виде обыкновенной дроби. В результате появились иррациональные числа, так, через понятие длины оказались связанными алгебра и геометрия.

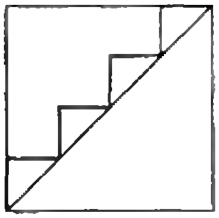
Еще сильнее «связал» их французский математик Рене Декарт, создавший аналитическую геометрию на основе прямоугольной системы координат. В результате любую геометрическую задачу можно сформулировать как алгебраическую. Вспомним знаменитую теорему Пифагора — квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов. Этот за-

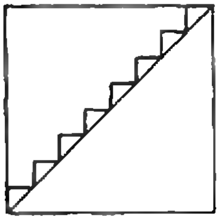


мечательный факт имеет массу обобщений и в геометрии, и в алгебре, и в теории чисел (пифагоровы тройки, Великая теорема Ферма).

Стремление измерять длины дуг кривых привело к целому ряду открытий. Длину окружности научились измерять еще в древности (приближая ее ломаными), хотя вопрос о природе числа «пи» мучил математиков сотни лет и был решен лишь в прошлом веке. Подход к определению длины дуги кривой был тот же, что и в случае окружности. Правда, здесь нужна осторожность, так как при неаккуратном обращении с предельным переходом можно столкнуться с парадоксом. Рассмотрим диагональ квадрата и

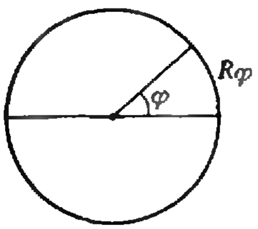


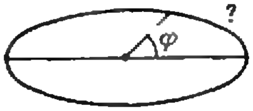




начнем приближать ее ступенчатыми ломаными. Все эти ломаные имеют длину, равную удвоенной длине стороны квадрата. В пределе такая ломаная стремится к диагонали, а длина диагонали равна $\sqrt{2}$, умноженному на длину стороны квадрата. Отсюда $2=\sqrt{2}$ — противоречие. Проблемы измерения длин стимулировали развитие теории пределов дифференциального и интегрального исчислений.

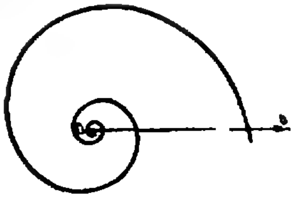
Любопытно, что длина дуги окружности прямо пропорциональна углу φ, определяющему эту дугу, а вот выразить





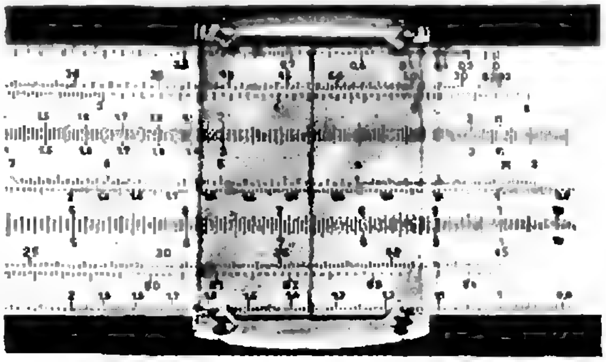
длину дуги эллипса — «сплюснутой окружности» — через такой угол φ уже невозможно даже с помощью всех известных вам функций (они называются элементарными функциями). Пришлось вводить новые функции — «эллиптические», которые оказались полезными во многих других задачах математики.

Интересно рассмотреть длины дуг спиралей, делающих бесконечное число витков вокруг своего центра. Так называемая «гиперболическая спираль», которая задается уравнением $\rho=\frac{a}{\varphi}$, где ρ — расстояние точки на спирали от центра, при изменении угла φ на отрезке $[0;1]$ совершает бесконечное число витков и длина полученной дуги оказывается бесконечно большой.



«Логарифмическая спираль», задаваемая уравнением $\rho=e^{\varphi}$, при изменении угла φ на интервале $(-\infty;0)$ тоже совершает бесконечное число витков, а их общая длина оказывается равной 3.

Говоря о длине, нельзя не сказать об инструментах с помощью которых длина измеряется. В первую очередь — это линейка с делениями, которая, как правило, лежит у каждого из вас в портфеле. На ней отмечены сантиметры и миллиметры. Если взять две линейки, то с их помощью можно складывать числа. Отметим на одной линейке 8 см и приставим к этому делению начало второй линейки. После этого найдем на ней число 6 и посмотрим какое число находится рядом с ним на первой линейке. Оказывается 14. Значит, $8+6=14$. Этот же метод удалось применить и для умножения чисел, только шкала на линейке должна быть не равномерной, а логарифмической, поэтому такая линейка называется логарифмической. У нее часто бывает еще несколько шкал на неподвижной части и на движущейся, с помощью которых можно определять синусы и косинусы углов и другие функции.



Когда мы говорим о длине пути между пунктами, а не о расстоянии между ними, то не всегда километры являются лучшей единицей. Для пассажиров важнее знать не километраж, а время в пути, и мы измеряем расстояние часами лета на самолете, езды на автобусе или поезде. Таким образом, мы вводим совсем другую «метрику» для пунктов на Земле, в которой, скажем, расстояние от Москвы до Углича может оказаться бóльшим расстояния от Москвы до Марселя. А у владельца автомобиля своя «метрика». Что их объединяет? Во-первых, что расстояние от пункта A до пункта B равно расстоянию от пункта B до пункта A, во-вторых, что все расстояния неотрицательны, и в-третьих, то, что сумма расстояний между пунктами A и B и пунктами B и C не меньше расстояния между пунктами A и C (аксиома треугольника). Еще одно свойство: если расстояние между двумя пунктами равно нулю, то это один и тот же пункт. Так мы и пришли к важному в современной математике понятию метрического пространства. Таким пространством может быть не только глобус, но и, например, множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке.

В заключение еще несколько слов о фразе «Избушка находилась от поселка на расстоянии двух дневных переходов». Ясно, что для путника эта информация гораздо важнее, чем о расстоянии в километрах, поскольку дорога может идти через горы и леса.

нами последнего тогда элемента таблицы Менделеева — урана. Быть может, и он превратится в своего реально не существующего в природе соседа справа, т. е. в элемент с атомным номером 93? Ферми с сотрудниками такой опыт поставили, но не смогли доказать, что «зaурановый» элемент действительно был получен, хотя в осторожной форме и указали на такую возможность. Впоследствии выяснилось, что в их опытах получался не один даже, а по крайней мере два заурановых элемента.

Во-первых, происходит то, что и ожидал Ферми, — реакция, как две капли воды похожая на реакцию (*):

$$^{238}_{92}U+^{1}_{0}n\to^{239}_{92}U+\gamma,$$
$$^{239}_{92}U\to^{239}_{93}Np+\beta.$$

Период полураспада $^{239}_{92}U$ всего 2,3 минуты. Получившийся новый элемент нептуний тоже бета-радиоактивен, и с периодом полураспада $T\approx 2{,}3$ дня он превращается в элемент с новым атомным номером — 94, названный плутонием:

$$^{239}_{93}Np\to^{239}_{94}Pu+\beta.$$

Так были «открыты» первые два заурановых элемента — Np и Pu. Слово «открыты» поставлено в кавычки потому, что они были не открыты, а созданы. Открыть ведь можно то, что существует, но еще не обнаружено, здесь же была открыта лишь возможность создания новых элементов.

В дальнейшем было «приготовлено» более десятка изотопов нептуния. Наиболее стабильный из них — $^{237}_{93}Np$, у которого период полураспада около 2,2 миллионов лет. Сохранись он на Земле, он был бы «отцом» радиоактивного семейства, конечным продуктом распада которого был бы $^{209}_{83}Bi$. Получено много изотопов и плутония. Огромное практическое значение имеет один из них — $^{239}_{94}Pu$, который наряду с $^{235}_{92}U$ служит топливом в ядерных реакторах.

Настала очередь создания и следующих заурановых элементов.

Элемент номер 95 — америций (Am). Этот элемент в атомных реакторах получается «сам собой»: один из изотопов плутония бета-радиоактивен и по правилу смещения превращается в америций:

$$^{241}_{94}Pu\to^{241}_{95}Am+\beta.$$

Элемент номер 96 — кюрий (Cm). Впервые этот элемент был получен облучением $^{239}_{94}Pu$ альфа-частицами высокой энергии по реакции

$$^{239}_{94}Pu+^{4}_{2}He\to^{242}_{96}Cm+^{1}_{0}n.$$

Известно более десяти изотопов кюрия. Самый стабильный из них — $^{249}_{96}Cm$, у которого период полураспада равен 16 миллионам лет.

Элемент номер 97 — берклий (Bk). Чтобы получить этот элемент, облучению альфа-частицами был подвергнут один из изотопов америция:

$$^{241}_{95}Am+^{4}_{2}He\to^{243}_{97}Bk+2^{1}_{0}n.$$

Период полураспада этого изотопа берклия 4,5 часа, но есть и более долго живущие изотопы. Например, $^{247}_{97}Bk$, у которого $T=7000$ лет.

Элемент номер 98 — калифорний (Cf). «Открыт» почти одновременно с берклием путем облучения альфа-частицами изотопа кюрия:

$$^{242}_{96}Cm+^{4}_{2}He\to^{245}_{98}Cf+^{1}_{0}n.$$

У этого элемента тоже есть изотоп со значительным периодом полураспада. Это $^{251}_{98}Cf$ с $T=800$ лет.

Элемент номер 99 — эйнштейний (Es). Для создания этого элемента потребовалось воздействие на ядра не легких альфа-частиц, а ускоренных ионов более тяжелых элементов — ионов азота с энергией около 100 МэВ:

$$^{238}_{92}U+^{14}_{7}N\to^{246}_{99}Es+6^{1}_{0}n.$$

Элемент номер 100 — фермий (Fm). Этот элемент был получен почти таким же способом, как и предыдущий, с тем только различием, что здесь были использованы ионы кислорода, ускоренные до энергии 180 МэВ:

$$^{238}_{92}U+^{16}_{8}O\to^{250}_{100}Fm+4^{1}_{0}n.$$

Элемент номер 101 — менделевий (Md). Он получен так:

$$^{253}_{99}Es+^{4}_{2}He\to^{256}_{101}Md+^{1}_{0}n.$$

У самого стабильного изотопа менделевия $^{258}_{101}Md$ период полураспада около 5 часов.

Элемент номер 102 — нобелий (No). Перечисленные выше заурановые элементы были синтезированы усилиями главным образом американских ученых во главе с Г. Сиборгом. В создании 102-го элемента впервые участвовали и советские физики группы академика Г. Н. Флёрова. Ими было показано, что нобелий может быть получен облучением $^{238}_{92}\mathrm{U}$ ускоренными ионами неона:

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + ^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow ^{256}_{102}\mathrm{No} + 4^{1}_{0}n.$$

Все изотопы этого элемента имеют небольшие периоды полураспада — от одной секунды до трех минут.

Элемент номер 103 — лоуренсий (Lr). Для его получения была использована реакция облучения калифорния быстрыми ионами бора:

$$^{252}_{98}\mathrm{Cf} + ^{10}_{5}\mathrm{B} \rightarrow ^{257}_{103}\mathrm{Lr} + 5^{1}_{0}n.$$

Периоды полураспада всех известных изотопов лоуренсия исчисляются секундами.

Элемент номер 104 — курчатовий (Ku). При синтезе этого элемента снова были использованы быстрые ионы неона, которыми облучали плутоний:

$$^{242}_{94}\mathrm{Pu} + ^{22}_{10}\mathrm{Ne} \rightarrow ^{260}_{104}\mathrm{Ku} + 4^{1}_{0}n.$$

Позже были синтезированы и другие изотопы курчатовия, периоды полураспада у всех у них очень малые.

Были сообщения о синтезе и элементов с более высокими атомными номерами — вплоть до 107. Получение таких элементов сильно затрудняется тем, что их периоды полураспада столь малы, что элементы распадаются почти тотчас после образования. К тому же радиоактивные ядра заурановых элементов распадаются не только с испусканием альфа- или бета-частиц, но и путем самопроизвольного деления ядер. Ясно, что при делении ядра зауранового элемента заурановый же элемент не получится.

Все это ограничивает возможность дальнейшего расширения таблицы Менделеева вправо. Существуют, однако, теоретические соображения, позволяющие надеяться на то, что некоторые ядра с высокими атомными номерами могут оказаться долгоживущими (например, ядра с номерами 114, 126). Проверить это было бы, конечно, очень интересно.

Энрико Ферми (1901—1954).

Еще раз к вопросу о ... «слева». Выяснив, что нейтрон — нулевой элемент, мы, казалось бы, пришли к выводу, что с вопросом о выходе за пределы таблицы влево покончено. Однако есть основания для того, чтобы еще раз к нему вернуться.

Дело в том, что наряду с известными элементарными частицами — электронами, протонами и нейтронами могут существовать и так называемые античастицы. Так, если считать электрон частицей, то существует его античастица — позитрон, отличающаяся от электрона только знаком электрического заряда. Наблюдались и антипротоны — такие же, как протоны, но только отрицательно заряженные частицы. Наблюдались даже антинейтроны — частицы такие же нейтральные, как и нейтроны, но все же «анти». В таком случае возможны и антиядра, состоящие из антипротонов и антинейтронов, и антиатомы, в которых антиядра окружены не электронной, а позитронной оболочкой. А поскольку атомный номер элемента в таблице Менделеева определяет положительный заряд его ядра, то антиэлементы должны располагаться слева от нулевого элемента.

Заурановые элементы в природе не существуют, однако, их можно «сделать». Антиэлементов в природе тоже нет, но и их, по крайней мере в принципе, тоже можно «сделать». Правда это очень трудная задача, потому что вещество и антивещество, атомы и антиатомы, частицы и античастицы не могут мирно сосуществовать. При близком соседстве они, как говорят, аннигилируют, исчезают. Но... не бесследно — при аннигиляции выделяется огромная энергия. В расчете на единицу массы она примерно в 1000 раз больше энергии, выделяющейся при обычных ядерных реакциях. Кто знает, не станет ли когда-нибудь аннигиляция «вещество — антивещество» управляемым и безопасным видом энергии? Пока это чистая фантазия, но ведь многое из того, чем мы сейчас пользуемся, когда-то тоже было фантазией.

А. Кикоин

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Брусок массой M лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может двигаться без трения (рис. 1). На бруске лежит тело массой m. Коэффициент трения между телом и бруском μ. При каком значении силы F, приложенной к бруску в горизонтальном направлении, тело начнет скользить по бруску?

2. Найдите относительное изменение веса тела, вызванное суточным вращением Земли вокруг своей оси, при измерении веса на экваторе и на полюсе. Землю можно считать шаром радиусом $R=6400$ км.

3. Найдите ускорения тел, массы которых m_1 и m_2, и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке 2. Массой блоков и нитей, а также трением в блоках можно пренебречь.

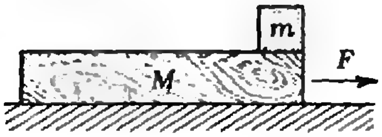


Рис. 1.

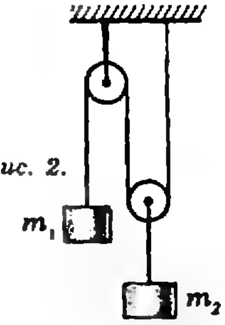


Рис. 2.

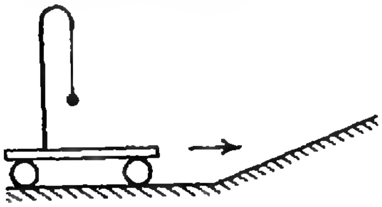


Рис. 3.

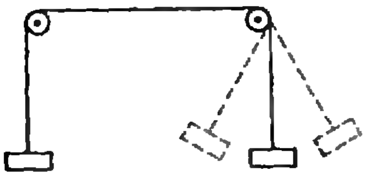


Рис. 4.

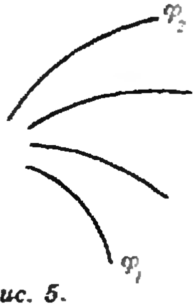


Рис. 5.

4. Легкая тележка с подвешенным на нити шариком подъезжает к наклонной плоскости (рис. 3). В какую сторону от вертикали отклонится нить с шариком, когда тележка начнет въезжать на наклонную плоскость?

5. Два одинаковых невесовых блока с параллельными осями установлены на одинаковой высоте. Через оба блока перекинута нерастяжимая и невесомая нить, на концах которой висят два одинаковых груза (рис. 4). Один из грузов отводят в сторону и отпускают. Сохранится ли при этом равновесие системы?

10 класс

6. В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре заряда: два из них равны по $+q$ и два по $-q$. Определите напряженность электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата. Рассмотрите все возможные случаи.

7. Два одинаковых точечных заряда находятся на расстоянии $r_1=1$ м друг от друга. Величина каждого заряда $q=10^{-10}$ Кл. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2=10$ см?

8. Дана картина расположения эквипотенциальных поверхностей некоторого электростатического поля (рис. 5). Известно также, что $\varphi_1>\varphi_2$. Восстановите по этой картине примерную картину линий напряженности этого поля и укажите их направления. В какой области напряженность поля больше?

9. Три одинаковые заряженные частицы массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-8}$ Кл каждая поместили в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=10$ см. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите максимальное значение скорости частиц.

10. Конденсатор подключен к аккумулятору. Раздвигая пластины конденсатора, мы преодолеваем силы электростатического притяжения между его пластинами и, следовательно, совершаем положительную работу. На что идет эта работа? Что происходит с энергией конденсатора?

11 класс

11. Если смотреть на светящуюся рекламу (например из газосветных трубок), то красные буквы всегда кажутся выступающими вперед

по отношению к синим или зеленым. Чем это можно объяснить?

12. Известно, что скорость света c и длина световой волны λ связаны с частотой колебаний ν соотношением $c=\lambda\nu$. На сколько изменится длина волны красного света при переходе из вакуума в стекло, если показатель преломления стекла $n=1{,}5$, а частота колебаний, соответствующая красному свету, $\nu=4\cdot10^{14}$ Гц?

13. В каком случае кольца Ньютона видны более отчетливо: в отраженном свете или в проходящем?

14. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка наблюдается под углом $\varphi_2=14^\circ$. На какой угол отклонен максимум третьего порядка?

15. Найдите скорость фотоэлектронов, вылетающих из цинка, при освещении его ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм. Работа выхода электронов из цинка $A=4$ эВ.

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Качественная задача по физике

«Велосипедная» задача

Вишь ты,— сказал один другому,— вон какое колесо! Что ты думаешь, доедет то колесо, если б случилось, в Москву или не доедет?

Н. В. Гоголь

Обычный двухколесный велосипед выдерживает более ста шестидесяти килограммов. Именно таков общий вес автора и двух его младших друзей, которые провели чрезвычайно сложный — почти цирковой — эксперимент, проехав втроем шесть километров на одном велосипеде. Велосипеде автора.

Однако, если вытащить спицы — эти тоненькие стальные прутики — из обода, то их можно согнуть двумя пальцами, что и сделали друзья автора после экспериментальной прогулки*). Как же велосипед выдерживает такой огромный вес, почему во время езды спицы не гнутся?

Не спешите отвечать, что, мол, велосипедист «стоит» не на одной, а на нескольких нижних спицах колеса. Даже все спицы колеса, сложенные в один пучок, согнуть не стоит труда.

Итак, почему спицы в колесе не гнутся?

Е. Гурович

От редакции. Авторские соображения на этот счет мы поместим в одном из следующих номеров.

---

* Я их уже простил.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

32; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 23—25, 27—34, 36, 37; *А. Дубовик* (Брест) 24, 25, 34, 36; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 24; *М. Дьяк* (Владимир) 24, 25, 28, 29, 32; *М. Егоров* (Старый Оскол) 28, 32, 33; *И. Егорова* (Ленинград) 24, 27; *П. Еник* (Воронеж) 25; *Н. Ефремов* (Свердловск) 25, 28; *А. Жуков* (Воронеж) 23; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 31—33, 37; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 24, 27; *А. Зайцев* (Железногорск) 28—34; *В. Злобов* (Старый Оскол) 24, 27; *И. Зозуля* (Одесса) 25, 27, 28, 32; *М. А. Иванов* (Тула) 28, 29; *М. Г. Иванов* (Тула) 23—25, 28—36; *Н. Ивченко* (Киев) 24, 27—33, 36; *Т. Калита* (Киев) 24, 25, 27, 28, 30, 36, 37; *К. Калюжный* (Одесса) 25, 27—29, 31—33, 36, 37; *Г. Каминский* (Киев) 24, 25, 28, 30; *С. Карасев* (Киев) 28; *И. Кацман* (Киев) 24, 25, 27, 36, 37; *А. Каширин* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 32; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 24, 27—29, 31, 32, 34, 36, 37; *В. Ковшевный* (Пушкино Московской обл). 28, 32; *О. Ковылин* (Волгоград) 32; *Д. Кожевников* (Омутнинск) 28, 29, 31, 32; *А. Козлов* (Старый Оскол) 32; *В. Козлов* (Старый Оскол) 24, 27—29, 32, 33; *Т. Колесникова* (Вишневое) 25; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 24, 25, 27, 29—37; *В. Кордюк* (Киев) 24, 28, 32; *А. Короновский* (Саратов) 32; *Д. Коротков* (Астрахань) 27—29, 36; *Ю. Крвавич* (с. Княжполь Львовской обл.) 25, 27; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 27—29, 31, 33, 36; *Д. Кример* (Брест) 25; *А. Кузнецов* (Жуковский) 28, 32; *Д. Кузнецов* (Белорецк) 25; *И. Кузнецова* (Краснодар) 28, 29; *Ю. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 24, 25, 27, 30; *П. Куприн* (Северодвинск) 24, 27, 29, 32; *М. Лазарев* (Никель) 28; *В. Легостаев* (Кустанай) 24, 25, 27—30, 36; *В. Леонтьев* (Канаш) 27—29; *Д. Логинов* (Тула) 24, 25, 27, 28, 33—36; *А. Лозовой* (Вольск) 28, 33, 34; *В. Макаров* (Кировское) 24, 25, 27—29; *А. Мальцев* (Курчатов) 24; *Ю. Маравин* (Евпатория) 27—29, 32, 35, 36; *М. Махмудов* (Исфара) 29, 33; *Н. Мацко* (Киев) 24, 27, 28, 30—33; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 24, 27, 28, 32; *В. Меркер* (Старый Оскол) 34—36; *В. Мирошниченко* (Пенза) 24, 25, 27—30, 32; *С. Мурин* (Брест) 24, 28—30; *Ю. Мусатенко* (Киев) 24, 27—29, 31, 32; *М. Мячин* (Баку) 36; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 29, 32; *А. Нежуренко* (Киев) 24, 25, 27—29, 32, 36; *М. Немировский* (Одесса) 32; *И. Николаенко* (Армавир) 24, 25, 27—32; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 24, 25, 27—29, 31—33, 36; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 25, 28, 30, 32, 34, 36; *А. Ольховец* (Киев) 24, 25, 27, 28, 32; *Д. Островский* (Ленинград) 23, 25; *Ю. Пайвин* (Харьков) 24, 25, 27; *Д. Пастухов* (Витебск) 23, 25, 27—33, 36; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 28, 29; *А. Перекрест* (Киев) 28, 31; *А. Петросян* (Ереван) 25; *Е. Пехман* (Армавир) 29; *В. Писляков* (Тверь) 25, 28, 32; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 24, 25, 28, 32; *А. Погребняк* (Киев) 24; *И. Полищук* (Москва) 24, 25, 27—36; *С. Польшин* (Харьков) 23, 25, 27, 29, 31—33; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 24—27, 29, 36; *В. Попов* (Жуковский) 25, 27; *А. Потапов* (Саратов) 28, 29, 31, 32; *Д. Потишко* (Харьков) 24, 36; *Ю. Радченко* (Волжский) 25, 29; *С. Рассадин* (Минск) 25, 29; *И. Рассказов* (Брест) 25, 27; *У. Рахимов* (Шават) 28, 29; *В. Репин* (Невинномысск) 28, 29; *Г. Рубаненко* (Артемовск Донецкой обл.) 28—32; *Л. Рубчинский* (Нижний Новгород) 25, 27; *А. Рыбалочка* (Киев) 23, 24, 27; *Н. Савельев* (Кузнецовск) 24, 27—29, 31, 34, 36; *С. Самсонов* (Старый Оскол) 32; *Р. Сенков* (Москва) 28, 29, 32, 34, 36; *В. Сергиенко* (Брест) 25; *Д. Скотников* (Владимир) 24, 27—29, 31, 32; *В. Сластиков* (Киев) 24, 25, 28, 30; *А. Снежко* (Киев) 23—32, 36; *А. Соклаков* (Брест) 25; *В. Солдаткин* (Ростов-на-Дону) 25; *Ю. Спектор* (Киев) 23, 27—31, 33; *А. Столповская* (Днепрорудный) 28; *Д. Субботун* (Москва) 28, 30, 31, 36; *Д. Супрун* (Минск) 24, 25, 29, 30, 33, 34; *С. Суслов* (Северодвинск) 24, 25; *М. Сущук* (Братск) 25; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 24, 25, 28, 30, 32, 33; *А. Таратин* (Северодвинск) 35; *С. Телков* (Старый Оскол) 24, 27; *Д. Тимофеев* (Константиновка) 27—29, 32; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 25, 27—29, 32; *М. Томилко* (Брест) 24, 28—30; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 24, 25, 27, 28, 30—33, 36; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 24, 25, 27—33, 36; *В. Тыртычко* (Кустанай) 24, 25, 27—30, 36; *О. Устинов* (Старый Оскол) 24, 27; *А. Федоренко* (Омск) 25, 27, 28, 32; *А. Филатов* (Кузнецовск) 24, 28; *К. Фотев* (София, Болгария) 25, 27, 28, 30—32, 36; *А. Хацкевич* (Брест) 25; *А. Хмелев* (Свердловск) 29, 32, 37; *Р. Храбров* (Северодвинск) 23—25, 28—31, 33, 35, 36; *В. Чернявский* (Павлодар) 24, 25; *А. Чистый* (Брест) 25, 29, 30; *О. Чунихин* (Енисейск) 32; *С. Чупахин* (Ростов-на-Дону) 24, 27—30, 36; *Е. Шагаров* (Грозный) 23, 24, 27, 28—30, 32; *Г. Шаповалов* (Киев) 23—25, 27—32, 36; *С. Шаракин* (Солигорск) 23—25, 27—31, 34—37; *А. Шехтер* (Бельцы) 24, 27—32; *С. Шинкевич* (Березники) 24, 25, 28—32; *А. Шпагин* (Мариуполь) 24, 27—29, 32, 33; *О. Шпырко* (Киев) 28, 29, 33; *И. Шуляк* (Киев) 24, 27—29, 31, 32, 34, 36; *К. Шурунов* (Куйбышев) 25, 27—29, 32; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 24, 28, 29, 31—37; *А. Юмагузин* (Уфа) 25; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 24, 28, 29, 31, 32, 34, 37; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 28, 32, 37.

Математический кружок

Геометрические вероятности

Кандидат физико-математических наук
Н. ВАСИЛЬЕВ

В этой статье мы не будем заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

Задача о встрече. *Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от 12 до 13 часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет 15 минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?*

Задача об остроугольном треугольнике. *На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках — остроугольный?*

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями — игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, ..., 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность. Скажем, вероятность выпадения шестерки равна 1/6, вероятность, что выпадет число не меньшее 3, равна $4/6=2/3$, вероятность, что выпадет нечетное число оч-

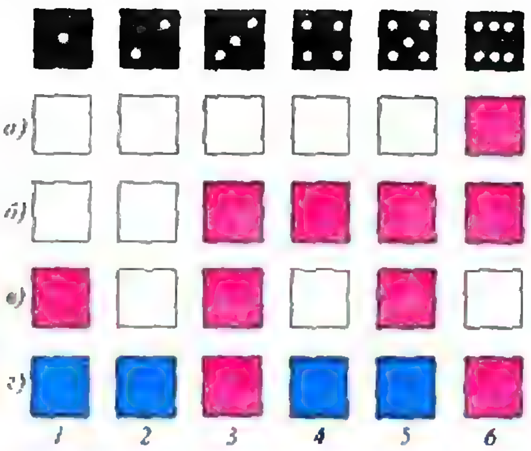


Рис. 1.

ков, равна 1/2. (Соответствующие *события* — множества «благоприятных исходов» — показаны красным цветом на рисунках 1 *а, б, в*.)

Если под рукой нет игрального кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный карандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, ..., 6. Легко представить себе карандаш не с 6, а с любым числом n боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение n равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна $1/n$, а вероятность каждого события A, состоящего из k вариантов, равна k/n.

При $n=6$, конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов n велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события A через $p(A)$. События у нас — это просто некоторое подмножество множества E всех возможных вариантов, причем $p(E)=1$. Для бросаний кубика множество E состоит из шести элементов 1, 2, ..., 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между множествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события $\bar{A}$, *дополнительного* к A (в него входят все элементы E, не входящие в A), равна

$$p(\bar{A})=1-p(A). \qquad (1)$$

Например, если A состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то $\bar{A}$ — числа, не делящиеся на 3; $p(A)=1/3$, $p(\bar{A})=1-1/3=2/3$ (рис. 1, *г*).

Объединение $A\cup B$ — событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий: A **или** B. Если события A и B *несовместны*, т. е. два множества A и B не пересекаются, то

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B). \qquad (2)$$

Если же события A и B *совместны*, то есть имеется непустое пересечение AB, то

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(AB). \qquad (3)$$

(Пересечение двух множеств A и B — событие, состоящее в том, что выполняются одновременно A **и** B — мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто AB.)

Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или — что сразу бросили два кубика); это — два независимых испытания.

Задача 1. Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором — не меньше 4?

Теперь множество E — это множество всех пар (x, y), где x и y — числа от 1 до 6 (x означает число очков, выпавшее на первом кубике, y — на втором). Все пары (x, y) равновероятны, их число равно $6\cdot 6=36$. Удобно изобразить их в виде квадрата 6×6 клеток: клеточка с координатами x и y изображает пару (x, y) (рис. 2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи: $x\leqslant 5$, $y\leqslant 4$. Они заполняют прямоугольник 2×3 клетки. Итак, среди $6\cdot 6$ пар выбрано $2\cdot 3$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{2\cdot 3}{6\cdot 6}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Вообще, если событие A определяется по результату первого испытания, а B — по второму испытанию (то есть A — это некоторый набор столбцов, а B — некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения A и B равна

$$p(AB)=p(A)\cdot p(B). \qquad (4)$$

В этом случае события A и B называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна $(1/3)^3=1/27$.

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т. е. E — множество пар (x, y), но интересующее нас событие зависит от x и y более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполнено.

Задача 2. *Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?*

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна $20/36=5/9$.

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения: $(2/3)\times(2/3)=4/9$, поэтому искомая вероятность равна $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Задача 3. *Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на 1?*

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали $x=y$ и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна $16/36=4/9$.

Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате... Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш — цилиндр. Пусть его поверхность желтая, но некоторая полоска (или несколько полосок) ширины α покрашены в красный цвет (рис. 5); какова вероятность, что карандаш остановится на красной, а не на желтой линии? (Здесь α — угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней n, из которых k закрашены в красный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению k/n. Для круглого карандаша множество «элементарных событий» E — окружность, и вероятность каждого отдельного элемента — вероятность остановки на одной определенной линии — равна 0; но вероятность события «остановка на одной из красных линий» естественно считать равной отношению $\alpha/360°$.

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины L, будем считать, что вероятность ее попадания в любой отре-

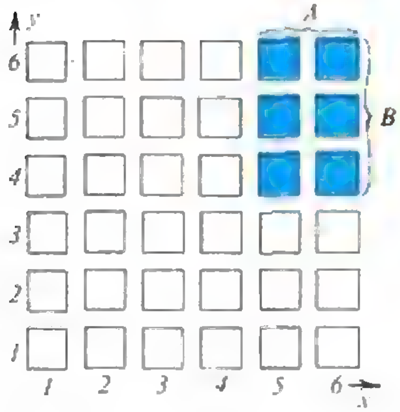


Рис. 2.

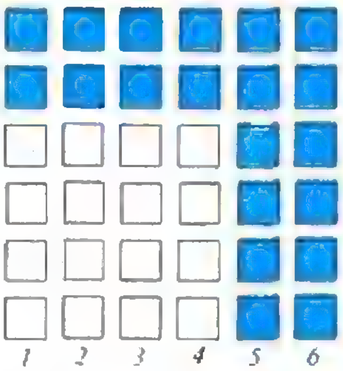


Рис. 3.

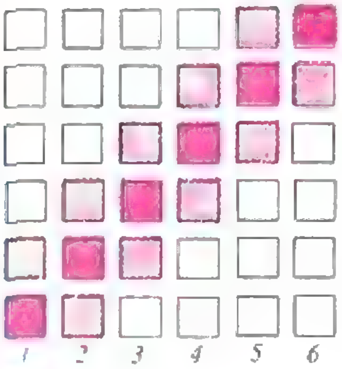


Рис. 4.

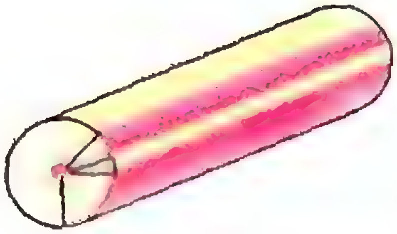


Рис. 5.

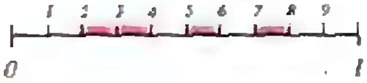


Рис. 6.

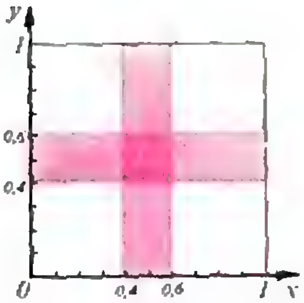


Рис. 7.

зок (или на дугу) длины d равна d/L. В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины d равна d/L. Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке $[0; 1]$ — простое число, т. е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис. 6), равна $4/10=2/5$.

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или другой фигуре площади S, мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади s равна s/S. Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа x и y на отрезке $[0; 1]$, можно считать, что (x, y) — это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки (x, y) в прямоугольник со сторонами a и b, параллельными осям Ox и Oy, равна произведению ab, т. е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке $[0; 1]$, находится на расстоянии не более 0,1 от середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если x и y — два случайных числа на отрезке $[0; 1]$, вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1 равна $0{,}2^2=0{,}04$, а вероятность того, что *хотя бы одно* из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис. 7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно — перейдя к «дополнительным событиям» — по формуле $(1-0{,}8^2)$.

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке $[0; 45]$ (в течение первых 45 минут условленного часа) и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами x и y их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате $0\leqslant x\leqslant 45$, $0\leqslant y\leqslant 45$ множество точек (x, y), в которых $|x-y|\leqslant 15$ — оно ограничено прямыми $y-x=15$ и $y-x=-15$, параллельными диагонали $x=y$ (рис. 8). Площадь этого множества равна 45^2-30^2 (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата 45×45:

$$1-\frac{30^2}{45^2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}\,.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку (x, y).

Задача 4. *Найдите вероятность $p=p(a)$ того, что сумма $x+y$, где x, y — случайные числа на отрезке $[0; 1]$, больше данного числа a.*

Уравнение $x+y=a$ задает прямую, параллельную диагонали $x+y=1$ квадрата. Искомая вероятность — площадь части квадрата, лежащей выше этой прямой. (При $a>1$ это треугольник, при $a<1$ — пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p=\begin{cases}(2-a)^2/2 & \text{при } a\geqslant 1,\\ 1-a^2/2 & \text{при } a\leqslant 1.\end{cases}$$

Соображения симметрии. Точки на окружности

Заметим, что при $a=1$ в предыдущей задаче получается ответ $p=1/2$. (Соответствующие точки (x, y) лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если x, y — числа, случайно выбираемые на отрезке $[0;\ 1]$, то условие $x+y\leqslant 1$ можно записать в виде $x\leqslant 1-y$ и прочесть так: «x ближе к 0, чем y к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой x на y и имеет ту же вероятность: ведь роли x и y, а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

Задача 5. *На отрезке $[0;\ 1]$ случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последним число наибольшее? б) числа идут в порядке возрастания?*

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах x, y, z. Тройки (x, y, z) можно было бы рассматривать как координаты точки в кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел: $x<y<z$, $y<x<z$, $x<z<y$, $y<z<x$, $z<x<y$, $z<y<x$ совершенно равноправны, и имеют одинаковую вероятность по $1/6$. Таким образом, ответ на вопрос б) $1/6$, а на вопрос а) $1/3$ (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин A, B, C — скажем, C — фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг $CA=\alpha$, $CB=\beta$, отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара (α, β) — это точка в квадрате $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника ABC равны $\pi-\beta/2$, $\alpha/2$ и $(\beta-\alpha)/2$ (мы считаем, что $\beta>\alpha$ (рис. 9); случай $\alpha>\beta$ совершенно аналогичен — α и β меняются ролями). Точки (α, β) в треугольнике $\alpha<\beta<2\pi$, для которых все три угла A, B, C меньше $\pi/2$, т. е. $\beta>\pi$, $\alpha<\pi$ и $\beta-\alpha<\pi$, заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис. 10). Ситуация в нижнем треугольнике $\beta<\alpha<2\pi$ симметрична относительно диагонали $\alpha=\beta$ квадрата. Поэтому искомая вероятность равна $1/4$.

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для n точек (см. задачу 9 в конце); мы узнали его от физика В. В. Фока и математика Ю. В. Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность, что три точки A, B, C являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки M окружности диаметрально противоположную ей точку M' и полукруг, для которого M' служит серединой дуги. Тройка A, B, C «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам A, B и C, пере-

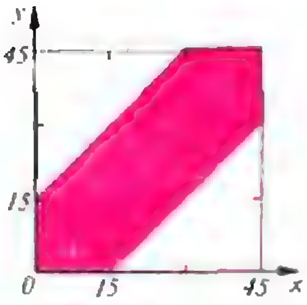


Рис. 8.

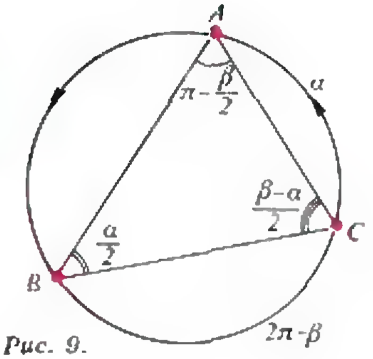


Рис. 9.

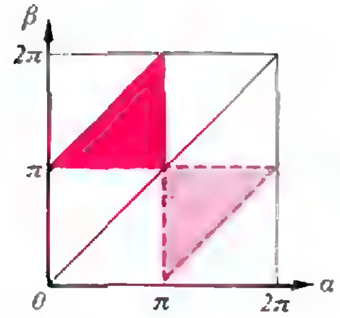


Рис. 10.

секаются по некоторому сектору (рис. 11). (Для каждого радиуса OD в выделенном секторе все углы DOA, DOB, DOC — тупые; такой радиус OD существует, если A, B, C лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична. А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью $1/2$) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка A, B, C. В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек A, B, C. Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна $6/8=3/4$, а значит дополнительная вероятность равна $1/4$.

Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность — это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число π. Первая почти очевидна.

Задача 6. На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1 случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на расстоянии меньше $1/2$ от центра некоторой клетки?

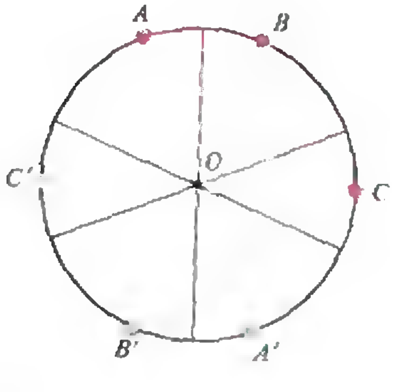


Рис. 11.

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более $1/2$ от ее центра, заполняют круг площади $\pi/4$. Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна $\pi/4$.

Задача 7 (задача Бюффона об игле)

Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На нее бросают иглу (отрезок) длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?

У этой задачи удивительный ответ: $2/\pi$. Откуда же берется π, если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием y конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал $0<y<1$, и углом α иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис. 12, *а*). Можно считать, по соображениям симметрии, что $\alpha<\pi/2$. Условие, при котором игла пересекает край полосы: $y<\cos\alpha$. Итак, среди точек (α, y) в прямоугольнике $0<\alpha<\pi/2$, $0<y<1$ мы должны выбрать лежащие ниже линии $y=\cos\alpha$ (рис. 12, *б*) и найти отношение площади S полученной фигуры к площади прямоугольника ($\pi/2$). Для тех, кто знаком с понятием интеграла (его изучают в старшем классе), эта задача нетрудная: $\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha=1$. Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу AB в $1/4$ круга радиуса 1 (рис. 12, *в*). Когда точка M находится в положении α на дуге $(0<\alpha<\pi/2)$, скорость ее проекции M' на радиус OB равна как раз $\cos\alpha$. Так что рисунок 12, *б* — это график скорости точки M', а площадь S под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т. е. $S=OB=1$.

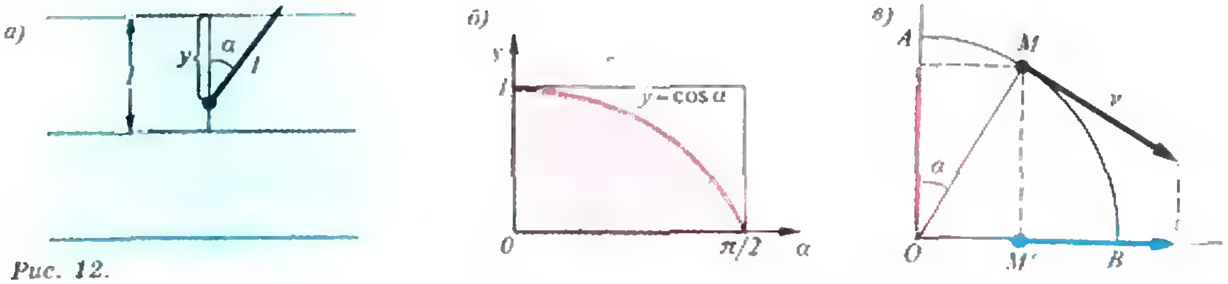


Рис. 12.

В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.

Упражнения

1. Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут

а) два числа с суммой не меньше 10?

б) два числа, из которых первое делится на второе?

2. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность $p=p(t)$ того, что ему придется ждать не менее t минут.

3. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разные кусочка?

4. На окружности случайно выбраны четыре точки A, B, C, D. Какова вероятность того, что отрезки AC и BD пересекаются?

5. а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины $r\sqrt{3}$, где r — радиус.

Замечание. Задачи а), б), в) как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

6. На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках: а) есть угол больше 30°? б) все углы больше 30°? в) все углы меньше 120°?

7. На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

8. Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

9. Найдите вероятность того, что

а) выпуклый n-угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр?

б) Докажите, что вероятность того, что n случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга) равна $(n^2-n+2)/2^n$.

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журнала «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 марта 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

13. Бабушка раздавала внукам яблоки. Первому внуку она дала 1 яблоко и 1/10 часть оставшихся, второму — 2 яблока и 1/10 часть оставшихся, третьему — 3 яблока и 1/10 часть оставшихся и т. д. до тех пор, пока яблоки не кончились. Оказалось, что все внуки получили яблок поровну. Сколько было внуков и по сколько яблок они получили?

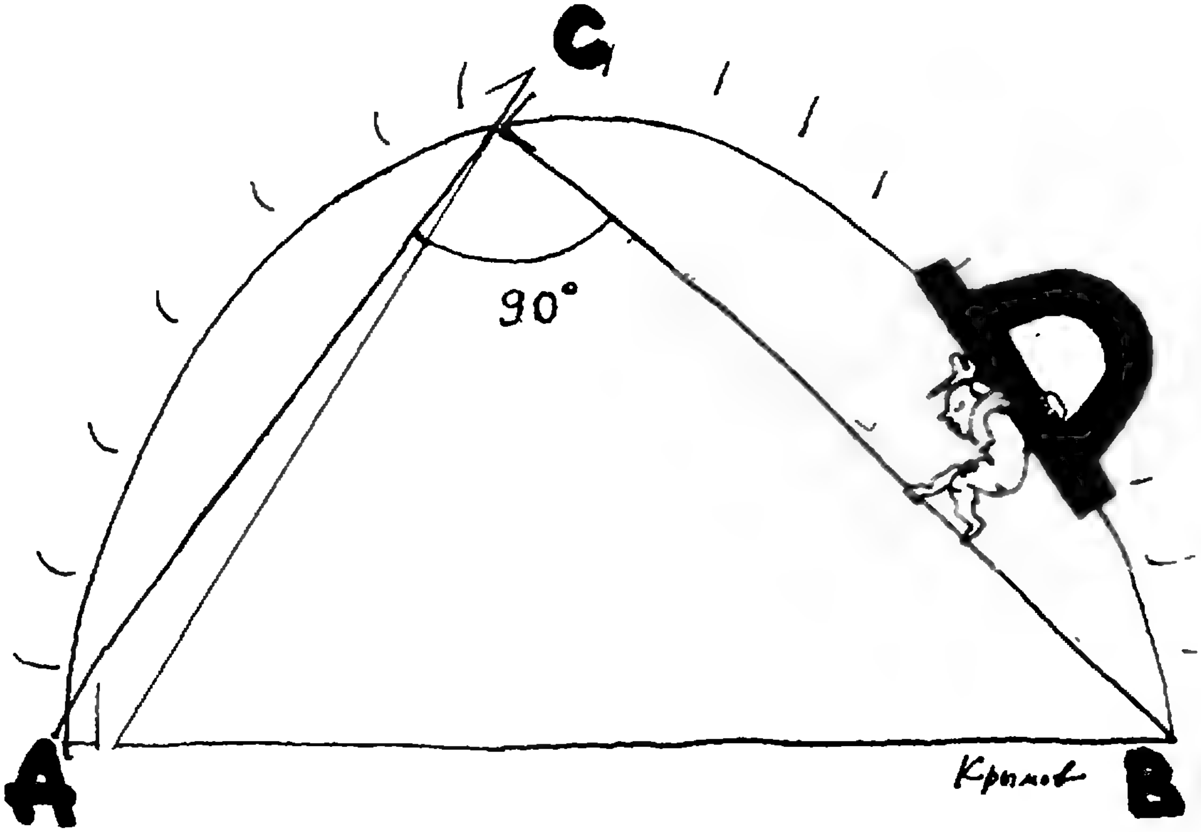
А. Кючуков, Х. Христов

14. Телефонные номера в городе N состоят из пяти цифр, причем первая цифра не является нулем. Счастливым называется такой номер, в котором все цифры различны и расположены в убывающем или возрастающем порядке. (Например, 12345 — счастливый номер, а 11234 или 10234 — нет.) Найдите число всех счастливых номеров в городе N.

П. Кошлуков

15. Найдите все натуральные числа n, обладающие следующим свойством: если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенству $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$, то $x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n-n\cdot x_1x_2\ldots x_n=0$.

П. Кошлуков



Практикум абитуриента

Об углах и окружностях

Кандидат физико-математических наук
В. УРОЕВ,
кандидат физико-математических наук
М. ШАБУНИН

> *...Иль треугольник в поле полукружья,*
> *Но не прямоугольный начертить.*
>
> Данте. Божественная комедия. Рай.

Треугольник, о котором пишет Данте, построить нельзя (рис. 1). Этот факт автор бессмертной поэмы приводит наряду с другими научными истинами, которые, видимо, считались общеизвестными в кругу образованных современников. Здесь уместно напомнить годы жизни великого Данте Алигьери — 1265—1321, а также заметить, что математикой Данте не занимался и вошел в историю как поэт и философ, создатель итальянского литературного языка.

В нашей статье пойдет речь как о треугольниках, вписанных «в поле полукружья», так и о других конфигурациях, для изучения которых необходима

Теорема 1 (о вписанном угле). *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Часто пользуются эквивалентной формулировкой теоремы 1:

Пусть α — центральный угол, опирающийся на дугу AnB данной окружности (рис. 2). Тогда из точек, принадлежащих дуге AmB, хорда AB видна под углом $\alpha/2$.

Заметим, что в силу этой теоремы угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому вписанный «в поле полукружья» треугольник обязательно прямоугольный. Этим удобно воспользоваться, например, в следующей задаче.

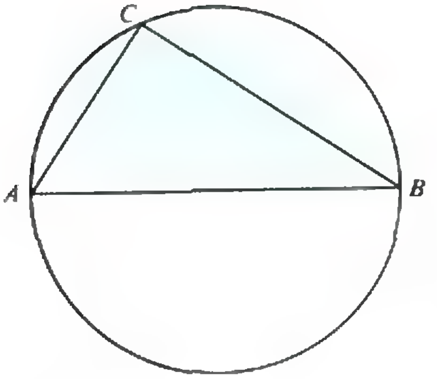


Рис. 1.

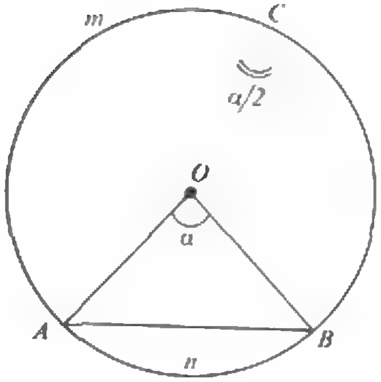


Рис. 2.

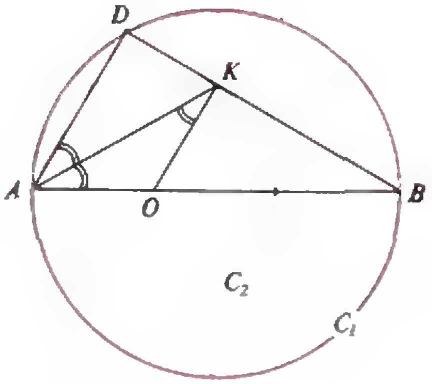


Рис. 3.

Задача 1. *На отрезке AB как на диаметре построена окружность C_1, BD — ее хорда. Окружность C_2 касается C_1 в точке A и отрезка BD в точке K. Докажите, что AK — биссектриса угла DAB (рис. 3).*

Решение. Центр O окружности C_2 лежит на диаметре AB окружности C_1. Радиус OK, проведенный в точку касания, перпендикулярен BD. Угол ADB прямой, т. к. опирается на диаметр, поэтому отрезки AD и OK параллельны, а углы DAK и AKO равны как накрест лежащие. В равнобедренном треугольнике AOK углы AKO и KAO равны, следовательно, AK делит угол DAB пополам.

Однако чаще приходится пользоваться простым следствием теоремы 1:

Углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги, равны.

Общий принцип подхода к решению задач, в которых участвуют окружности, такой: искать всевозможные вписанные углы, для чего проводить различные хорды. Чем больше найдем равных вписанных углов, тем яснее будет виден путь, ведущий к решению.

Задача 2. *В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины A, B и точку P пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Докажите, что если $AB=AD$, то $CD=CE$ (рис. 4).*

Решение. Проведем хорду AE и найдем равные вписанные углы. Такими углами в одной окружности будут DAC и DBC, а в другой — PAE и PBE. Следовательно, $\angle DAC=\angle CAE$. Кроме того, равны опирающиеся на равные дуги углы DCA и ACB. Отсюда следует равенство треугольников DCA и ECA и, соответственно, их сторон DC и EC.

Упражнение 1. Докажите следующую теорему о хордах. Пусть хорды AB и CD данной окружности пересекаются в точке M. Тогда $AM\cdot MB=CM\cdot MD$. (Это произведение, не зависящее от выбора хорды, называется степенью точки M относительно данной окружности.)

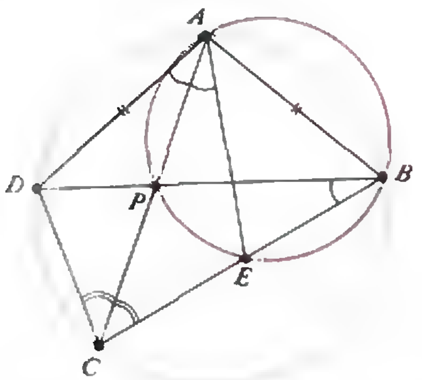


Рис. 4.

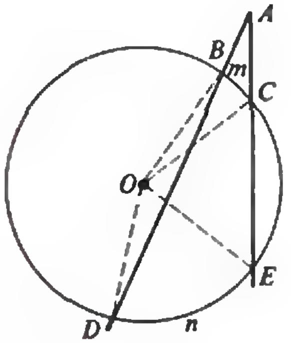


Рис. 5.

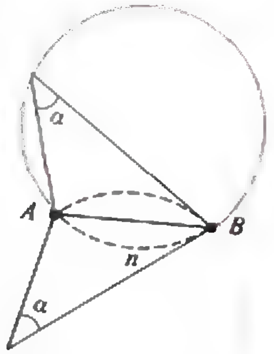


Рис. 6.

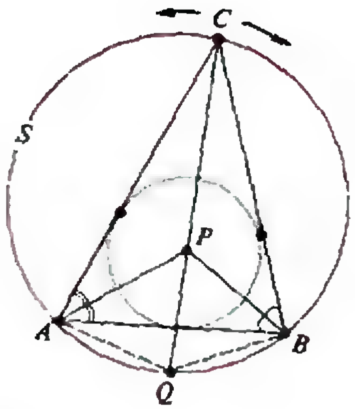


Рис. 7.

Часто оказывается полезной формула для величины угла с вершиной вне или внутри окружности.

Упражнение 2. а) Пусть угол с вершиной A, лежащей вне окружности, высекает на ней дуги BmC и DnE (рис. 5). Докажите, что в этом случае величина угла равна половине разности центральных углов, опирающихся на эти дуги, т. е. $\angle DAE={}^1/_2(\angle DOE-\angle BOC)$.

б) Самостоятельно сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для угла с вершиной внутри окружности.

Теорема 1 доказывается в школьном курсе. Нам потребуется существенно более общая теорема.

Теорема 2. *Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под некоторым углом α, состоит из двух дуг окружностей, симметричных друг другу* (рис. 6).

Доказательство. То, что из любой точки, лежащей на одной из дуг, отрезок AB виден под углом α, вытекает из теоремы 1. Надо доказать *обратное* утверждение, т. е., что *любая* такая точка лежит на одной из дуг. Но это следует из упражнения 2. В самом деле, если точка C лежит вне фигуры, ограниченной дугами, то $\angle ACB<\alpha$, а если внутри, то $\angle ACB>\alpha$. Теорема доказана.

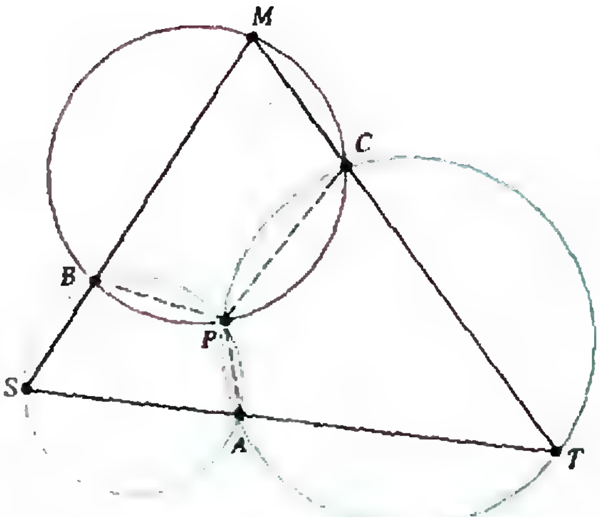


Рис. 8.

Теорема 2 часто используется в задачах на построение.

Упражнение 3. Постройте треугольник а) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней высоте;

б) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней медиане.

Задача 3. *Точка C движется по дуге окружности S, стягиваемой хордой AB. Найти траекторию движения точки P, являющейся центром вписанной в треугольник ABC окружности.*

Решение. Точка P лежит на пересечении биссектрис треугольника ABC (рис. 7). Следовательно, из треугольника ABP получим следующие соотношения:

$$\angle APB=$$

$$=180^\circ-\left(\frac{1}{2}\angle CAB+\frac{1}{2}\angle CBA\right)=$$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=$$

$$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB.$$

Величина угла ACB не меняется (по теореме 1), поэтому величина угла APB также постоянна. В таком случае, согласно теореме 2, точка P целиком пробегает дугу окружности, проходящей через точки A и P. Позже будет установлено, что центром этой окружности является точка Q — середина дуги AB.

Теорема 2 позволяет выяснить, принадлежит ли какое-либо множество точек одной окружности.

Из теоремы 2, в частности, вытекает важное следствие:

Вершина прямоугольного треугольника лежит на окружности, построенной на его гипотенузе как на диаметре.

Упражнения

4. *Диаметры AB и CD окружности радиусом R пересекаются под углом α. Из произвольной точки M окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры MP и MQ. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M, и найдите PQ.*

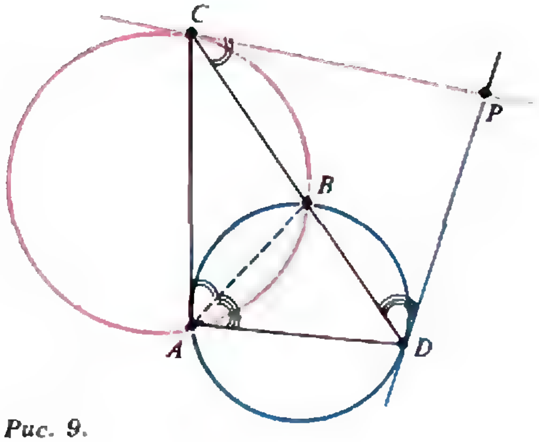


Рис. 9.

5. Вершины A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите траекторию движения вершины C прямого угла.

В следующих двух упражнениях следует воспользоваться тем, что основания высот BD и CE треугольника ABC лежат на окружности, построенной на стороне BC как на диаметре.

Упражнения

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF=DG$.

7. Докажите, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEK, образованного основаниями высот треугольника ABC.

Задача 4. *На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.*

Решение. Если бы внутри четырехугольника нашлась точка, не принадлежащая ни одному из четырех кругов, то каждая сторона была бы видна из этой точки под острым углом. А это невозможно, т. к. сумма всех четырех углов равна 360°.

Следствием теорем 1 и 2 является следующий признак вписанного четырехугольника:

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Задача 5. *Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A, B и C. Из произвольной точки M первой окружности через точки B и C проводятся прямые, пересекающиеся с другими окружностями в точках S и T (рис. 8). Докажите, что отрезок ST проходит через точку A.*

Решение. Из свойств вписанных четырехугольников $MBPC$, $BPAS$, $CPAT$ вытекают следующие соотношения:

$$\angle BPC=180^\circ-\angle M,$$
$$\angle BPA=180^\circ-\angle S,$$
$$\angle CPA=180^\circ-\angle T.$$

Суммируя полученные равенства, получаем

$$360^\circ=\angle BPC+\angle BPA+\angle CPA=$$
$$=180^\circ\cdot 3-(\angle M+\angle S+\angle T),$$

откуда $\angle M+\angle S+\angle T=180^\circ$. Следовательно, четырехугольник $MSAT$ является треугольником, т. е. угол SAT — развернутый.

Для решения следующей задачи недостаточно знать, когда четырехугольник является вписанным. Нужна еще чрезвычайно полезная

Теорема 3. *Угол между хордой и касательной измеряется половиной заключенной между ними дуги.*

Упражнение 8. Докажите теорему 3.

Задача 6. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям (рис. 9). Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.*

Решение. Проведем хорду AB и заметим, что, согласно теоремам 1 и 3, следующие углы попарно равны: $\angle BAD=\angle BDP$, $\angle CAB=\angle BCP$, откуда $\angle CAD=\angle BAD+\angle CAB=\angle BDP+$ $+\angle BCP=180^\circ-\angle CPD$. Таким образом, выполняется критерий существования описанной окружности.

Упражнения

9. Прямые l_1 и l_2 касаются окружности в точках A и B. Точка M окружности удалена от прямых l_1 и l_2 на расстояния a и b соответственно. Докажите, что M находится на расстоянии $\sqrt{ab}$ от прямой AB.

10. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке D. Прямая касается одной из этих окружностей в точке A и пересекает другую в точках B и C. Докажите, что точка A равноудалена от прямых BD и CD.

11. Доказать теорему о касательной и секущей. Пусть прямая AP касается данной окружности в точке P; а прямая AB пересекает эту

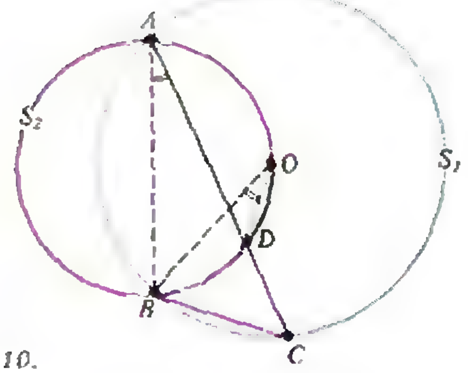


Рис. 10.

окружность в точках B и C. Тогда $AP^2 = AB \cdot AC$ (это произведение, не зависящее от выбора секущей, называется индексом точки относительно окружности; сравните с упражнением 1).

12. Докажите, что центр окружности, по которой вынуждена двигаться точка P в задаче 3, является серединой Q дуги AB (рис. 7).

Задача 7. *Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2. Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D (рис. 10). Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны.*

Решение. Углы BAD и BOD равны как вписанные в окружность S_2, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ как вписанный и центральный углы в окружности S_1. Следовательно, $\angle BOD = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOC$, поэтому OD — биссектриса угла BOC. В равнобедренном треугольнике BOC биссектриса является высотой.

Задача 8. *В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в два раза меньше угла ACB, $BC = AC = 5$, $AD = 6$. Найдите площадь S трапеции.*

Ответ: $S = 22$.

Указание. Задачу можно решать стандартным способом, например, обращаясь к теореме косинусов. Однако задача решается значительно быстрее, если заметить, что по теореме 2 точка D лежит на окружности с центром в точке C, проведенной через точки A и B.

Информация

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетней общеобразовательной школы, на заочное отделение. Зачисление на Малый мехмат производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого механико-математического факультета (МММФ) является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ. Учащиеся, успешно закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета МГУ. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1991 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все предложенные задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс;

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и вышлите по адресу: 119899, Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечание

Для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по тел. 939-39-43.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1991 году

1. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{28}$ или $\sqrt[4]{85}$?

2. Имеет ли уравнение

$$x^2+\frac{p_1+p_2}{2}x+\frac{q_1+q_2}{2}=0$$

хотя бы одно решение, если каждое из уравнений $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ решений не имеет?

3. Даны семь чисел. Сумма любых трех из них равна 0. Что это за числа?

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки правильного шестиугольника до его вершин не меньше его периметра.

5. Докажите, что для любых целых чисел $n_1, \ldots, n_{1991}$ число

$$|n_1-n_2|+|n_2-n_3|+\ldots+|n_{1990}-n_{1991}|+|n_{1991}-n_1|$$

является четным.

6. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из $5n$ единиц, делится на 41.

7. Одновременно навстречу друг другу выехали из двух пунктов два автомобиля. Через какое время они встретятся, если известно, что при увеличении скорости первого в два раза они встретились бы на четверть часа раньше, а при неизменной первоначальной скорости первого и удвоенной второго — на 24 минуты раньше?

8. Можно ли расположить на плоскости 7 точек и так соединить некоторые из них отрезками, чтобы отрезки не пересекались и из каждой точки выходило ровно 3 отрезка?

9. Найдите все пары натуральных m и n, удовлетворяющих уравнению $19m+91n=1991$.

10. Команды *А* и *Б* играют в волейбол. Спонсор соревнований учредил специальный приз, который получит команда, сделавшая так, что при подаче команды *А* 26-е касание мяча придется на другую команду (считаем, что после подачи мяч достаточно долго находится в игре). Может ли *А* так играть, чтобы обязательно выиграть специальный приз? Напомним, что при подаче производится одно касание, на стороне одной команды производится до передачи на другую от 1 до 3 касаний.

Новый прием во Всесоюзную заочную многопредметную школу на отделения «Математика» и «Языки и литература»

Всесоюзная заочная многопредметная школа Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова*) принимает на индивидуальное обучение учащихся восьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом соответствующих предметов, научить решать интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо хорошо выполнить вступительную контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществами поступления пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1977
Класс и школа	8 класс «В» школы № 2
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Орлов Борис Петрович
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра Городской больницы № 1
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2	3	4	5	6а	6б	7	8	9	10а	10б	Всего

---

*) Так теперь называется бывшая Всесоюзная заочная математическая школа, которая имеет сейчас 3 отделения: «Математика», «Биология», «Языки и литература».

В тетрадь вложите два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным Вашим адресом (включая индекс), фамилией и именем, а также конверт с адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас; запишите сначала условие, потом — решение.

Срок отправки вступительной работы — не позднее 15 марта 1991 года (по почтовому штемпелю).

Если Вы выдержите конкурс, то начиная с сентября 1991 года будете получить наши задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70 465; журнал распространяется только по подписке).

Для поступающих на отделение «Математика»

Вступительную работу надо выслать по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Математика» или по адресу соответствующего филиала.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Запорожье, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136, Ленинград, Чкаловский пр., $25^{а}$, С-3 ЗМШ (на прием).

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик».

Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1991 года на два потока: для тех, кто с сентября 1991 года начнет учиться в 9 классе, и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса, в котором они будут учиться в 1991/92 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканской, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Для поступающих на отделение «Языки и литература»

Все поступающие на отделение «Языки и литература» независимо от места проживания высылают решения вступительной работы по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Языки и литература».

Принимаются также группы «Коллективный ученик» под руководством учителя русского языка и литературы, родного языка или иностранного языка.

Вступительная работа («Математика»)

1. Расстояние от деревни Воробьево до деревни Грачево составляет целое число километров. Чему может быть равно это расстояние, если известно, что от Воробьева до деревни Дроздово — 2,5 километра, а от Грачева до Дроздова — 1,3 километра?

2. В равнобочной трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ — большему. Найдите углы трапеции.

3. В библиотеке не более 5000 книг. Если их связывать по 5, по 6 или по 7 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 11 книг, то лишних книг не остается. Сколько книг в библиотеке?

4. Найдите все пары целых положительных чисел (x, y) таких, что

$$xy = x + y + 1990.$$

5. Из двух концов A и B шоссейной дороги одновременно стартуют два велосипедиста навстречу друг другу. Один проезжает весь путь AB за 21 минуту, другой — за 19 минут. Доезжая до A или B, каждый из них мгновенно разворачивается и едет в обратном направлении. Сколько раз они встретятся лицом к лицу, прежде чем второй нагонит первого сзади?

6. Два круга, радиусы которых R и r, касаются одной и той же прямой в точках A и B соответственно, а также друг друга.

а) Найдите отрезок *AB*.

б) Найдите радиус круга, касающегося обоих данных кругов и их общей касательной.

7. Про 7 московских математиков известно, что каждый из них в течение 1991 года не менее 210 дней проведет за рубежом. Докажите, что в какой-нибудь день 1991 года в Москве будет не более двух математиков из этих семи.

8. В стране Плюралии некоторые жители всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Как-то собрались четыре жителя этой страны, и между ними произошел такой разговор:

1-й: По крайней мере один из нас — лжец.
2-й: По крайней мере двое из нас — лжецы.
3-й: По крайней мере трое из нас — лжецы.
4-й: Среди нас нет лжецов.

Кто из них четверых — лжец, а кто всегда говорит правду?

9. Про некоторое число сделано шесть утверждений:

а) число делится на 3;
б) число делится на 5;
в) число делится на 9;
г) число делится на 15;
д) число делится на 25;
е) число делится на 45.

Перечислите все двузначные числа, для которых три из этих утверждений истинны, а три — ложны.

10. а) Можно ли замостить плоскость равными пятиугольниками?

б) Тот же вопрос про пятиугольники, у которых нет параллельных сторон.

Вступительная работа («Языки и литература»)

1. Даны следующие высказывания:

Мальчик исправил полученную двойку.
Многое в тот вечер было им рассказано.
В комнате стояла одна кровать.
Ты его больше слушай: старик — мастер рассказывать сказки.

Задание. Объясните, почему возникла двусмысленность высказываний. Укажите, что нужно сделать для ее устранения.

2. Даны пять синонимов: бегло, торопливо, мимоходом, мельком, наспех.

Задание. Придумайте с каждым из пяти синонимов такое предложение, в котором это слово нельзя было бы заменить ни одним из четырех остальных. Синонимы являются неполными, так как для каждого из них возможно подобрать такое предложение, что замена одного слова другим будет невозможна.

3. Иностранец (англичанин, немец, француз) в разговоре с Вами допустил ошибку в русском языке, сказав: «Я буду пойти гулять».

Задание. Объясните ему, в чем состоит его ошибка. Почему он ее допустил?

4. Одна из наиболее известных работ К. Маркса называется «Восемнадцатое брюмера Луи Бонапарта».

Задание. Укажите, что обозначает в этом заглавии слово *брюмера* (укажите родовое понятие). Как это сделать, не прибегая к историческим сведениям?

Примечание. Пример родового понятия: кошка, собака, лиса — животные, понедельник, вторник, среда — дни недели.

5. Даны следующие слова: глубина, горошина, тишина, писанина, ширина, соломина, кружковщина, бисерина, свинина, долина, молодчина, быстрина, баранина, машина, ветчина, льдина.

Задание. Разберите данные слова по составу. Слова, в которых можно выделить суффикс *ин*, объедините в группы в зависимости от значения этого суффикса.

6. Даны следующие русские слова, восходящие к латинским или построенные из латинских корней, суффиксов, приставок:

традиция — обычай, передаваемый из поколения в поколение,
контракция — сжатие (например, жидкости),
контрадикция — противоречивое высказывание,
экстрадиция — выдача иностранному государству лица, нарушившего его законы,
диктор — лицо, читающее перед микрофоном текст (радио- или телепередачи),
акция — действие, предпринимаемое для достижения какой-либо цели,
экстрактор — аппарат для удаления, извлечения,
дикция — манера произношения.

Задание 1. Разделите каждое слово на те значащие части (корень, приставку, суффикс), из которых оно состоит, и укажите значение каждой значащей части.

Задание 2. Укажите еще 2—3 русских слова, состоящих из выделенных вами значащих частей. Для каждого из этих новых слов укажите значащие части, из которых оно составлено.

7. Даны выражения на языке одного из народов Мексики с их переводами на русский язык:

pan — мужчина
pənt'am — мужчины
pənkotoya — для мужчины
pənhi'ŋ — с мужчиной
yomo — женщина
nanah — мать
nanaht'am — матери
nanakotoya — для матери

'unehi'ŋ — с ребенком
'unehi'ŋta'm — с детьми
yomohi'ŋ — с женщиной
te'pən — этот мужчина
maŋute'pən — этот мужчина шел
maŋpate'pan — этот мужчина идет
minpate''une — этот ребенок приходит
minute''une — этот ребенок пришел

Задание 1. Переведите на русский язык: 'unekotoya; yomohi'ŋta'm; maŋpatə'yomo. Поясните ваше решение.

Задание 2. Переведите на язык народа Мексики: эта женщина, для женщин, эта женщина пришла. Ваши решения обязательно поясните.

8. Даны некоторые числа и их обозначения в системе, разработанной знаменитым математиком VI века н. э. Ариабхатой и встре-

чающейся в математических и астрономических трактатах того времени (Ариабхата, разумеется, пользовался знаками древнеиндийского письма; здесь они переданы русскими буквами):

2 — кха
214 — дхакхи
1423 —

2311 — таби
230011 — таку
111400 — дхиту

141102 — кхатидху
230023 — бабу
230211 —

Задание 1. Заполните пропуски и объясните ваше решение.

Задание 2. Какие числа передают в системе Ариабхаты записи бхатхи и даки, если известно, что запись кабхи обозначает 2401, а тхаку — 10012? Объясните ваше решение.

Примечание. Сочетание согласного с x обозначает единый звук, отличающийся от соответствующего простого только тем, что произносится с придыханием.

9. Какова композиция поэмы М. Ю. Лермонтова «Мцыри»?

10. Кто, по вашему мнению, является главным героем повести А. С. Пушкина «Капитанская дочка». Аргументируйте свой ответ.

11. Назовите несколько произведений, написанных на один и тот же сюжет. Почему разные авторы прибегали к одному сюжету?

12. Что сближает Василия Теркина с героями народных сказок и былин? Назовите эти сказки и былины.

Ряд заданий предлагался в разные годы на олимпиадах по лингвистике и математике.

Четвертый международный турнир по математике «Дружба — 90»

С 26 по 31 мая 1990 года на курорте Старозагорские минеральные источники проходил IV турнир по математике «Дружба — 90», в котором приняли участие 65 учащихся 8—11 классов из Болгарии (Стара-Загора, Казанлык, Хасково, Шумен, Кырджали, Габрово и Велико-Тырново), Польши (Легница), СССР (Сосновый Бор, Белорецк, Евпатория, Ереван, Алма-Ата) и Румынии (Брашов). Право выступить в турнире участники получили по результатам двух заочных туров конкурса «Дружба — 90». Организатором турнира является школьный центр по математике и информатике в городе Стара-Загора.

Турнир проходил два дня, отдельно для 8—9 и 10—11 классов. В первый день победили Иван Дайков (8 кл., Казанлык), Николетта Войку (9 кл., Брашов), Казимира Георгиева (11 кл., Хасково), Ольга Дубова (11 кл., Белорецк).

Победителями второго дня стали Надежда Христова (8 кл., Хасково), Богдан Соцеа (8 кл., Брашов), Камен Лозев (9 кл., Хасково), Евгений Цыганов (9 кл., Белорецк), Михай Паску (11 кл., Брашов) и Стефан Станчиу (11 кл., Брашов).

В общем зачете победили: Михай Паску, 41 очко из 42, Стефан Станчиу — 40, Евгений Цыганов — 39 и Камен Лозев — 39.

Следующий турнир предполагается провести в польском городе Легнице.

Предлагаем вам несколько задач IV турнира.

1 (8 кл.). Точка M — середина стороны квадрата $ABCD$, а P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на прямую BM. Докажите, что $DP=DC$.

2 (8 кл.). Числа a, b, c — целые взаимно простые и

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}.$$

Докажите, что $a-b$, $a-c$, $b-c$ — квадраты целых чисел.

3 (8 кл.). Докажите, что не существует натуральных чисел x, y, для которых

$$7^x-1=12(2y+1)^2.$$

4 (9 кл.). Найдите наибольшее натуральное число n, для которого $n^2+1990n$ есть квадрат целого числа.

5 (9 кл.). В угол с вершиной O вписана окружность и на ней выбраны две диаметрально противоположные точки A и B, отличные от точек касания со сторонами угла. Через B проведена касательная к окружности, которая пересекает стороны угла в точках C и D. Прямая OA пересекает CD в точке E. Докажите, что $BC=DE$.

6 (9 кл.). Докажите, что не существует положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), для которых

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{x_2}{2^2}+\dfrac{x_3}{3^2}+\ldots+\dfrac{x_n}{n^2}=\dfrac{n-2}{n+1}, \\ \dfrac{1}{2^2x_1}+\dfrac{1}{3^2x_2}+\dfrac{1}{4^2x_3}+\ldots \\ \qquad \ldots+\dfrac{1}{(n+1)^2x_n}=\dfrac{n+2}{n+1}. \end{cases}$$

7 (10 кл.). Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ составляют арифметическую прогрессию. Числа $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n$ также образуют арифметическую прогрессию. Известно, что

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \cos\alpha_n=-\frac{1}{2}.$$

Найдите n.

8 (10 кл.). Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, одна из сторон которого d, а две его медианы пересекаются под прямым углом?

9 (10 кл.). Найдите все целые чисел a, b, c, для которых $a^2+b^2+c^2=1990abc$.

Л. Любенов (Болгария)

Заочный вступительный экзамен в ФМШ при МГУ и НГУ

Специализированные учебно-научные центры МГУ им. М. В. Ломоносова и НГУ им. М. А. Лаврентьева, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах, проводят заочные вступительные экзамены по математике и физике для учащихся 9-х и 10-х классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой. По решению приемной комиссии успешно выдержавшие заочный экзамен будут приглашены на очный устный экзамен, который будет проходить в мае 1991 года в областных центрах СССР. Работу необходимо выполнить в тетради. На первой странице укажите данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью);
2. Домашний адрес (подробный), индекс;
3. Подробное наименование школы и класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями. Школьникам, проживающим в Европейской части СССР, следует высылать свои работы по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 11, ФМШ МГУ, приемная комиссия, заочный экзамен. Школьники, проживающие в Сибири, на Дальнем Востоке и в Средней Азии, высылают свои работы по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет. Срок отправки работ — не позднее 15 марта 1991 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. Если вы не сможете решить все задачи, не огорчайтесь — будут рассматриваться работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

9 класс

1. Докажите, что среди чисел 2, 8, 14, ..., $2+6n$, ... (n — натуральное) нет ни одного квадрата натуральных чисел.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x(y+z)=35, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=27. \end{cases}$$

3. На сторонах или на продолжении сторон квадрата $ABCD$ расположены точки P, Q, R, S так, что $AP/PB=BQ/QC=RC/DR=DS/SA=1/3$. Отрезки AQ, BR, SC, DP ограничивают четырехугольник $KLMN$. Вычислите площадь четырехугольника $KLMN$.

4. Высота прямоугольного треугольника равна 2, разность между проекциями катетов на гипотенузу равна 3. Найдите гипотенузу и катеты этого треугольника.

5. Найдите все простые числа p, для которых число $20p^2+1$ также будет простым.

6. С башни вертикально вниз с некоторой начальной скоростью бросают камень. Первый метр пути камень пролетает за время $t_1=0{,}2$ с, а последний — за $t_2=0{,}1$ с. Какова высота башни h? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. Человек, масса которого $M=72$ кг, бежит по длинной доске с ускорением $a_0=0{,}5$ м/с^2 относительно доски. Доска лежит на гладком полу. Ее масса $m=18$ кг. С каким ускорением доска движется относительно пола?

8. На горизонтальной поверхности лежат два тела с массами $m_1=2{,}5$ кг и $m_2=3{,}5$ кг, прикрепленные к концам пружины с коэффициентом жесткости $k=50$ Н/м. Длина пружины в недеформированном состоянии $l_0=0{,}2$ м. На какое максимальное расстояние x друг от друга могут быть удалены тела, чтобы они оставались в покое, если коэффициент трения между телами и поверхностью $\mu=0{,}2$?

9. Три электровоза идут по трем параллельным путям, отстоящим друг от друга на равных расстояниях. Электровозы, идущие по крайним путям, движутся в противоположных направлениях со скоростями $v_1=80$ км/ч и $v_2=40$ км/ч. С какой скоростью v должен двигаться электровоз, идущий по среднему пути, чтобы во время движения он все время находился на одной прямой с двумя другими?

10 класс

1. Докажите, что среди чисел 3, 9, 15, 21, ..., $3+6n$, ..., (n — натуральное) содержится бесконечно много квадратов натуральных чисел.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+xy=19, \\ y+z+yz=11, \\ z+x+zx=14. \end{cases}$$

3. Найдите все пары действительных чисел (x, y), удовлетворяющих условию

$$x^{[y]}\cdot y^{[x]}=x\cdot y$$

($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x).

4. На сторонах или продолжениях сторон квадрата $ABCD$ расположены точки P, Q, R, S так, что $AP/BP=BQ/QC=RC/DR=DS/SA=\lambda/\mu$. Отрезки AQ, BR, SC и DP ограничивают четырехугольник $KLMN$. При каких λ, μ площадь четырехугольника $KLMN$ максимальна?

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точки M, N, K — середины сторон BC, AC и AB соответственно. Найдите величину угла C, если известно, что центр окружности, описанной около треугольника MNK, лежит на биссектрисе угла C.

6. На какую величину Δm уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от температуры $t_1=0$ °C до температуры $t_2=100$ °C? Начальная масса воздуха $m_1=100$ г. Изменением объема сосуда при нагревании пренебречь.

7. 56 г азота, находящегося под давлением $5\cdot 10^5$ Па в объеме 10 л, сначала изохорически нагрели, а затем изобарически сжали до объема 5 л, совершив при этом работу $A=6700$ Дж. Определите разность температур газа в конечном и начальном состояниях. Молярная масса азота $M=0{,}028$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

8. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально, пробивает насквозь шар массой $M=1$ кг, подвешенный на нити длиной $l=3$ м, проходя через его центр, и вылетает

из шара со скоростью $v_1=150$ м/с. В результате шар начинает раскачиваться. При этих колебаниях наибольшее натяжение нити $T=12{,}8$ Н. Найдите скорость пули v_0 перед ее попаданием в шар.

9. По наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$ тело соскальзывает с постоянной скоростью. Какую кинетическую энергию E_k приобретает это тело, соскользнув без начальной скорости по такой же поверхности с высоты $H=2$м при угле наклона $\beta=45°$? Масса тела $m=1$ кг.

Участникам Научно-технической конференции школьников в МФТИ

(секция «Физика»)

Что такое физическая научная работа, представляемая на конференцию? Как выбрать тему такой работы? С чего начать исследования или как довести до научного уровня уже имеющиеся? Опыт проведения предыдущих конференций показал необходимость некоторых разъяснений этих и аналогичных вопросов. Вот несколько советов.

Основой выбора подходящей темы для самостоятельного изучения для Вас может стать внимательный взгляд на реальные физические ситуации из окружающего нас мира. (Именно так родились известные задачи Капицы — см. книгу: Капица П. Л. Физические задачи.— М.: Знание, 1972.) Например, такие:

1. Заряженные водяные капли играют существенную роль в самых разных физических явлениях. Попробуйте изучить количественно процесс испарения (конденсации) таких капель в зависимости от их радиуса и заряда (потенциала). Что происходит, если рядом испаряются две разные капли?

2. Как Вы знаете, закон Гука, связывающий механическое напряжение σ с относительным удлинением ε —

$$\sigma=E\varepsilon, \text{ где } E=\text{const},$$

верен лишь для малых ε. Попытайтесь «расширить» этот закон, т. е. получить зависимость $\sigma(\varepsilon)$ вплоть до предела текучести для веществ, допускающих большие удлинения (например, для резины).

3. Известно, что при трении о стекло некоторых материалов возникают резкие, порой неприятные звуки. Определите частоты и соответствующие им интенсивности таких звуков. Чем можно объяснить тот факт, что для большинства людей эти звуки вызывают именно неприятные ощущения?

4. Одним из известных способов сортировки мелких синтетических алмазов является продувка алмазного порошка потоком воздуха. Выберите параметры, характеризующие форму частиц, и оцените эффективность такого способа сортировки. (Например, найдите долю частиц неправильной, по Вашим параметрам, формы, оставшихся в заданном объеме к определенному моменту времени.)

5. Рассмотрите движение модели корабля по поверхности воды. Попробуйте описать количественно возникающую при этом волновую картину и ее изменение в зависимости от скорости корабля.

6. Предложите способ ускорения небольших нейтральных частиц (пылинок, песчинок) до больших скоростей и оцените его возможности. Как реализовать Ваше предложение?

7. Можно ли использовать тепло водяной батареи центрального отопления для кипячения воды? Попытайтесь придумать наиболее эффективный способ.

8. Как нужно бросить в воду плоский камешек, чтобы он совершил возможно большее число отражений от поверхности воды? Подумайте, как провести такой эксперимент, чтобы он не превратился просто в упражнение по бросанию.

Разумеется, темой исследования может быть и часть обширной задачи, уже разрабатываемой специалистами. В этом случае, конечно, нужен научный руководитель, который введет Вас в курс дела и поможет организовать Вашу работу.

Исследования на выбранную тему могут быть как теоретическими, так и экспериментальными. Первые требуют склонности к логическим рассуждениям и вычислениям, вторые — умения делать что-то своими руками, но оба способа объединяет использование физической интуиции — способности находить оптимальные пути для решения задачи.

Непременным атрибутом научного исследования являются выводы, содержащие ясную формулировку полученных результатов. При этом даже если результаты не отвечают на исходный вопрос, они могут стать отправной точкой для новой задачи.

Внимание! У Вас еще есть время воспользоваться нашими советами и принять участие в VI Научно-технической конференции — срок отправки рефератов по физике продлен до 1 марта с. г.

Желаем успехов!

Оргкомитет секции «Физика» НТКШ

Конкурс продолжается!

В октябрьском номере прошлого года наш журнал сообщил о начале Советско-американского конкурса юных любителей астрономии и космонавтики.

Инициаторами конкурса стали журналы «Квант» (СССР) и «Quantum» (США—СССР), Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз» и International Educational Network (США).

Победители конкурса летом нынешнего года примут участие в советско-американских школах. Одна из школ будет проведена в июле в США, другая (в том же месяце) — в СССР (в пионерском лагере «Орленок» на Черном море).

Несколько слов о I туре.

Мы получили сотни писем с решениями заданий. И хотя не все участники справились с ними, редакция надеется, что время не было потеряно напрасно.

Сразу оговоримся — и в первом туре, и в последующих главным для нас является не скрупулезность проведенных вычислений (хотя это тоже высоко ценится), а способность ухватить суть задачи, сделать необходимые допущения и затем произвести расчеты.

При решении первой задачи часть участников забыла о том, что зонд сначала летит с ускорением, равным ускорению свободного падения на Марсе. Правильный ответ: зонд удалится на 12,5 километра.

Во второй задаче некоторые участники конкурса (очевидно, прежде всего из числа постоянных читателей «Кванта») заметили, что маяки могут находиться на дуге окружности радиусом 15 м. Мы поздравляем тех, кто обратил на это внимание и провел исследование этих случаев. Ну а для случая, когда маяки находятся на одном перпендикуляре к серединам стен базы (как это поняло большинство читателей), ответ такой: объем лунной базы равен $4{,}5 \cdot 10^4$ м^3.

Для ответа на третью задачу совсем не обязательно было читать роман А. Кларка. Нам было интересно познакомиться с вашими предложениями одиссеи. Некоторые участники не ограничились прогнозами, а прислали даже целые рассказы.

В этом номере мы предлагаем вам задания II тура. Срок отсылки решений — не позднее 15 марта 1991 г. Наш адрес: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, журнал «Квант» (Конкурс «KQ—91»).

Внимание! Просим в письме указывать не только номер школы и класса, но и степень владения английским языком, так как при отборе в школу, которая будет проходить в США, знание английского языка (в пределах, позволяющих слушать лекции и участвовать в занятиях) обязательно. Напоминаем, что в школах не смогут, к сожалению, участвовать школьники выпускных классов.

Итак,

Задания II тура

Задача 1. Космическая станция движется вокруг Земли по экваториальной круговой орбите, высота которой $H = 3000$ км. Оцените, сколько времени длится «ночь» на борту станции, т. е. станция находится в тени Земли.

Задача 2. Из наблюдений известно, что в земных условиях арбуз не раскалывается, если его уронить с высоты $h \leqslant 30$ см (считая от его нижней точки). С какой высоты в таком случае можно ронять арбузы на Луне? Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

Задача 3. Для исследования верхних слоев атмосферы Венеры в проекте «Вега» использовался аэростатный зонд. Определите объем зонда, если давление на исследуемых высотах $p = 50\,000$ Па, а температура $t = 10$ °C. Можно считать, что атмосфера Венеры целиком состоит из двуокиси углерода CO_2, а зонд наполнен гелием He. Массу зонда вместе с аппаратурой принять равной $m = 20$ кг.

Игры и головоломки

Реверси

Игра реверси (от английского to reverse — обращать) популярна во многих странах. В США она вышла на второе место после шахмат, а в Японии — после го. Проводятся разнообразные турниры, матчи, в том числе чемпионаты мира. Игра привлекает простотой правил — они проще шахматных и шашечных — и удивительной динамичностью. Обстановка на доске меняется мгновенно, и все завоевания игрока за один ход могут перейти к противнику.

Реверси были известны с незапамятных времен, а в начале 70-х годов XX века их как бы заново открыл японец Хаседжава. Коварные ловушки и непредвиденные ситуации, отличающие игру, вызвали у него ассоциацию с шекспировским «Отелло», и в результате реверси получили еще одно название— «Отелло».

Атрибутами игры служат доска 8×8 и 64 фишки (по 32 у каждого игрока), окрашенные с одной стороны в белый цвет, а с другой — в черный. Можно взять и обычную шахматную доску, раскраска ее полей значения не имеет. Фишки можно сделать, приклеив друг к другу обычные белые и черные шашки или окрасив в два цвета 64 одинаковые пуговицы.

Опишем правила игры в реверси. Играющий белыми ставит свои фишки белой стороной вверх, а играющий черными — черной. Прежде всего партнеры располагают в центре доски по две своих фишки, как показано на рисунке 1 (в реверси, в отличие от шахмат, горизонтали доски нумеруются сверху вниз).

Первый ход делают черные (как в го и рэндзю, но в отличие от шахмат и шашек). Соперники по очереди выставляют по одной своей фишке на свободные поля доски, рядом с одной из фишек противника и так, чтобы вместе с какой-нибудь своей фишкой окаймить (окружить) одну или несколько фишек противника по горизонтали, вертикали или диагонали (или по нескольким линиям сразу). Другими словами, фишка ставится на одну линию с другой фишкой того же цвета, уже находящейся на доске, и между ними должен стоять ряд фишек противника, а пустых полей нет. Окруженные с двух сторон фишки попадают в плен, но не снимаются с доски, а переворачиваются другой стороной, меняя свой цвет. Если окружение происходит одновременно по нескольким линиям, то переворачиваются все цепочки захваченных фишек. Итак, любая фишка, попав на доску, до конца игры остается на ней, хотя переворачиваться может сколько угодно раз.

Для иллюстрации рассмотрим симметричную позицию на рисунке 2. Сейчас ход черных, и, ставя фишку на угловое поле а8, они окружают сразу 18 белых фишек в трех возможных направлениях. Фишки вертикали «а», с а2 до а7, окружены фишками а1 и а8, фишки последней горизонтали, с b8 до g8,— фишками a8 и h8, наконец, фишки большой диагонали, с b7 до g2,— фишками a8 и h1. Этот пример является рекордным — наибольшее число фишек, которые могут быть захвачены и перевернуты за один ход, равно 18.

Если в какой-то момент один из игроков не может сделать ход (не в состоянии окружить ни одной неприятельской фишки), то он пропускает его.

Если один из игроков использовал все свои фишки, то он может взять фишку из запаса противника. Впрочем, в комплекте игры и белые, и черные имеют по две дополнительных фишки, и этого, как правило, достаточно, чтобы обойтись собственными фишками.

Ходы обеих сторон считаются в реверси не парами, как в шахматах, а отдельно (за редким случаем нечетные номера соответствуют ходам черных, четные — белых). До начала игры четыре поля доски уже заняты, и поэтому она продолжается не более 60 ходов. Заканчивается партия тогда, когда ни один из партнеров не в состоянии сделать очередной ход, в частности, если все 64 поля доски уже заполнены фишками. Победителем становится тот, чьих фишек в данный момент на доске больше, а при равенстве — ничья (разумеется, учитывается «видимая» на доске сторона фишек).

Возвращаясь к рисунку 2, заметим, что ход черных a8 был последним в партии,— вся доска заполнена фишками. Перевернув рекордное число фишек — 18, черные чудом спаслись — игра закончилась вничью — 32:32!

Рассмотрим теперь для примера десять ходов партии в реверси (по пять с каждой стороны).

1. c5. Черные окружили своими фишками c5 и e5 белую фишку d5, и она переворачивается черной стороной вверх (для простоты будем говорить — меняет цвет).

2. c6. Теперь переворачивается и становится белой фишкой d5.

3. d6. Фишка d6 вновь становится черной.

4. e6. Окружены фишки d6 и e5, обе переворачиваются и становятся белыми.

5. f6. Фишка e5 меняет цвет с белого на черный.

6. c4. Фишки c5, d4 и d5 — белые.

7. b6. Ряд фишек — c6, d6, e6 — переворачивается, и все они становятся черными.

8. e7. Фишки d6, e5 и e6 — белые.

9. f3. Фишки d5 и e4 — черные.

10. e3. Фишка e4 — белая.

Возникла позиция, показанная на рисунке 3. Инициатива у белых, у которых больше фишек. Но радоваться рано: ситуации в реверси меняются, как в калейдоскопе, фишки-хамелеоны то и дело «перекрашиваются», и важно, какими они будут в конце партии.

В большинстве игр, например в шахматах и шашках, материальное превосходство обычно определяет и общий перевес, а в реверси игрок, имеющий значительно большее число фишек своего цвета, может за один ход

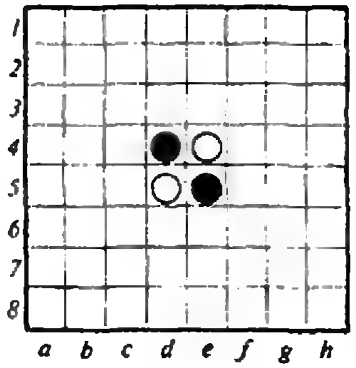


Рис. 1.

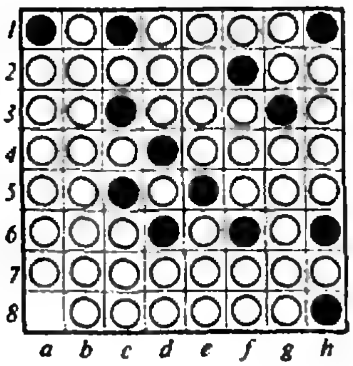


Рис. 2.

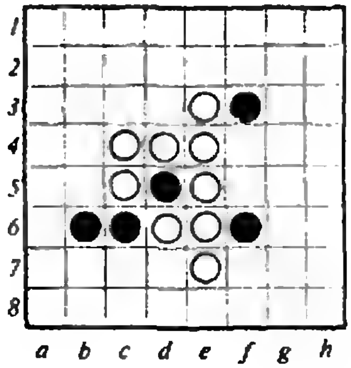


Рис. 3.

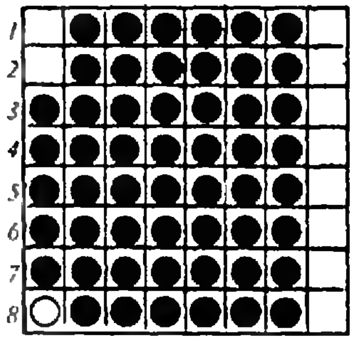


Рис. 4.

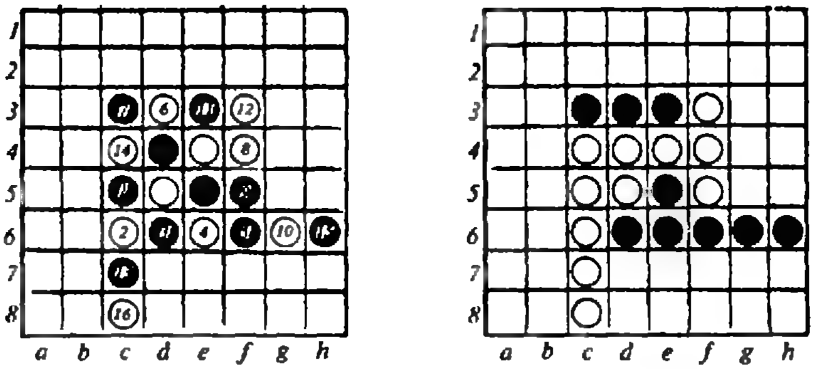


Рис. 5. а) б)

потерять все завоевания (см., например, рис. 2).

Очевидно, если в какой-то момент у одного из игроков оказываются «съеденными» все фишки, партия сразу завершается его поражением. Кратчайший поединок с таким финалом («детский мат» для реверси) состоит из девяти ходов: 1. c5 2. c4 3. e3 4. e6 5. e7 6. d3 7. c3 8. f5 9. g5!, и на доске остались одни черные фишки. Игра закончилась их победой со счетом 13:0.

Рассмотрим некоторые элементарные принципы игры. Поскольку фишки противника, расположенные в центре доски, захватить проще, чем на краю, всегда следует стремиться занять крайние поля доски и препятствовать в этом противнику. Особенно выгоден захват угловых полей. Фишки, попавшие на них, никогда не могут быть перевернуты (их просто нечем захватить) и сохраняют первоначальный цвет до конца партии. Тот, кто прорывается в один из углов доски, получает серьезное преимущество, а если это происходит в начале игры, то — решающее. Поэтому, кстати, весьма опасно ставить свои фишки рядом с угловыми полями, особенно на b2, b7, g2, g7, противник может провести несложную комбинацию и занять угол. Вот яркий пример, иллюстрирующий силу угловых фишек (рис. 4).

Как будто белым впору сдаваться — у них всего одна фишка против 53 фишек противника! Тем не менее они легко берут верх, да еще с «сухим» счетом! Приведем эффектное окончание этой партии.

1. a2. При своем ходе черные все равно вынуждены были бы пропустить его. Теперь вся вертикаль «a» стала белой (пока кроме поля a1). У черных по-прежнему нет ходов, как, впрочем, не будет и до конца партии. 2. h8. Последняя горизонталь окрасилась в белый цвет. 3. h7. 4. h6. 5. h5. 6. h4. 7. h3. 8. a1. 9. h2. 10. h1. Итак, вся доска заполнена белыми фишками, 64:0!

Опытные игроки в дебюте ведут борьбу в центре доски — в квадрате c3 — c6 —f6 — f3, стремясь как можно дольше не выпускать фишки противника на край доски. Затем белые и черные фишки одна за другой занимают край доски, и надо следить за тем, чтобы не пропустить неприятельские фишки в угол. К концу игры вариантов становится меньше, и искусные игроки просчитывают их чуть ли не до конца. Теперь уступка углов уже не так опасна.

Стоит сказать, что игра реверси привлекает к себе большое внимание любителей компьютерных игр, создано немало программ, достойно соперничающих с человеком. В 1989 году на первой компьютерной Олимпиаде в Лондоне именно турнир по реверси собрал наибольшее число программ из разных стран — 15.

Приведем теперь для иллюстрации одну интересную партию в реверси между человеком (черные) и компьютером (белые). Номера ходов для удобства ставятся прямо на полях доски.

На рисунке 5, *а* указаны первые 16 ходов, причем цвет фишек показывает лишь, кто именно — белые или черные — делал ход с данным номером. В результате возникает позиция, которую вы видите на рисунке 5, *б* (чтобы убедиться в этом, нужно, конечно, разыграть партию на доске).

Сначала игроки заняли весь центр доски (12 ходов, квадрат 4×4), а затем вышли на ее край (15-м ходом черные и 16-м — белые). На этом дебют партии можно считать законченным. Миттельшпиль партии, ходы 17—42 можно проследить по рисунку 6. Здесь цвет занумерованных фишек также отвечает последовательности ходов, а цвет фишек, не имеющих номеров, сохранен тот же, что и на рисунке 5, *б*.

Все больше и больше фишек появляется на границах доски, но к ее углам соперники по-прежнему друг друга не подпускают. Позиция после 42-х ходов показана на рисунке 7, *а* (со всех фишек, уже выставленных на доску, сняты номера).

Инициатива сейчас принадлежит компьютеру (25:21), но в эндшпиле человек сумел создать решающую атаку (ходы 43—60). Для этого он пошел на хитрость — отдал левый нижний угол (машина заняла его ходом 46), но ходами 47, 49 проник в соседний правый угол, завоевал значительное пространство в нижней части доски. Шансы уравнялись, но на 50 ходу компьютер ошибся, и черные захватили еще один угол, правый верхний. После их 53-го хода белые не в состоянии поставить на доску новую фишку и вынуждены пропустить ход, а за ним и второй (поэтому фишки с номерами 53, 54 и 55 на рисунке 7, *а* окрашены в черный цвет). Через несколько ходов партия закончилась победой черных с минимальным перевесом 33:31 (рис. 7, *б*).

Остановимся на некоторых стратегических принципах игры. В миттельшпиле игроку следует создавать такие ситуации на доске, чтобы возникали поля, на которые он может пойти, а его противник — нет. Четыре основных случая с возможным ходом белых на краю доски — *А*, *Б*, *В*, *Г* показаны на рисунке 8.

При наличии второй опорной фишки в центре доски (на рисунке центральные поля заштрихованы) белые всегда могут поставить фишку на одно из этих полей; для черных же они недоступны при любом положении в центре. Очевидно, наличие таких «резервных» полей для одной из сторон, в данном случае белых, является очень важным; выражаясь шахматным языком, это позволяет выиграть темп.

Не следует считать, что самое главное в реверси — далекий расчет вариантов. Нередко возникают положения, в которых борьба носит локальный характер, затрагивается лишь некоторая часть доски. Рассмотрим рисунок 9.

Белые плохо разыграли дебют, и черные, ставя фишку на поле *А*, получают резервное поле. Они как можно дольше не занимают поле *В*, а если в какой-то момент белые займут его, то у черных появится новое поле *Г*, на которое они могут пойти, а противник — нет.

Предположим теперь, что черные на первом ходу заняли поле *Б*. В ответ на эту ошибку белые могут про-

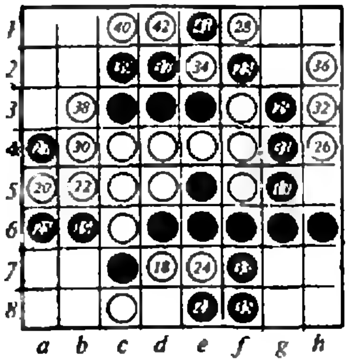
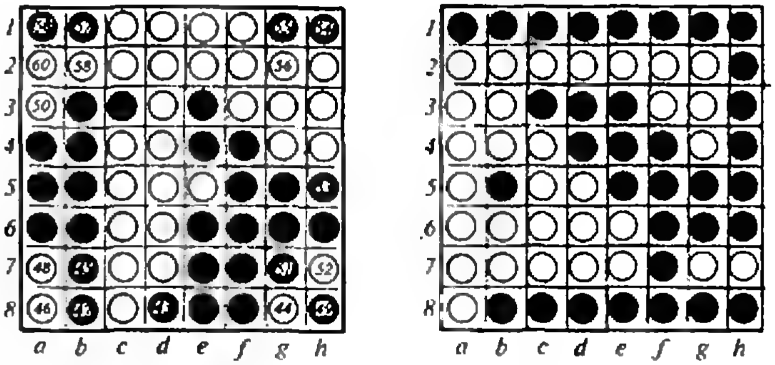


Рис. 6.



а) б)

Рис. 7.

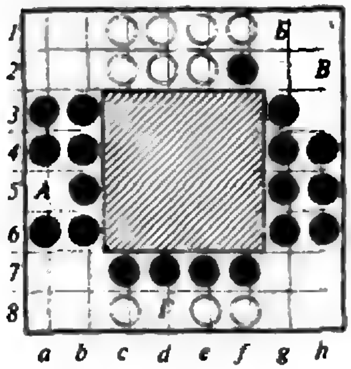


Рис. 8.

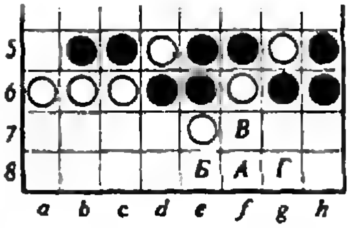


Рис. 9.

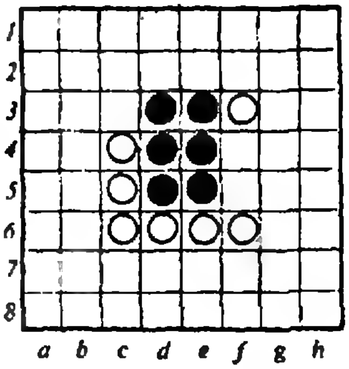


Рис. 10.

вести несложную комбинацию. Белые — *А*, черные — *Г*, белые — *В*, и теперь ход черных (нас сейчас не интересует расположение фишек в верхней половине доски, но предполагается, что на b4 стоит белая фишка). Поскольку занимать поле g7 — самоубийство, черные вынуждены переключиться на другой участок доски.

Чтобы понять идею комбинационного маневра белых, следует остановиться на некоторых общих принципах игры. В любой ситуации на доске у игрока имеется множество плохих ходов и множество нейтральных. Задача противника состоит в том, чтобы заставить его использовать все нейтральные ходы и в конце концов сделать плохой. Стандартный прием заключается в передаче очереди хода. Локальная ситуация разыгрывается так, чтобы в конце концов был ход противника. Этот прием и используется в операции на рисунке 9. После неточности черных и правильных действий партнера они вынуждены ходить вне правого нижнего угла.

Зная стандартные положения на краях (рис. 8) — к чему стремиться и чего избегать, можно уже в районе 30-го хода прогнозировать итог партии. Точный розыгрыш «стороны» доски является как бы аналогом позиционной игры в шахматах. Создание резервного поля можно сравнить с владением открытой линией или образованием проходной пешки... Разумеется, в реверси, как и в шахматах, позиционное преимущество, а тем более материальное (его роль здесь мала), не гарантирует победы, хотя увеличивает ее вероятность.

Разработаны и другие стратегические принципы, применимые в тех или иных положениях.

Как и в любой игре, в реверси существуют интересные задачи и комбинации. Приведем одну уникальную задачу (на шахматном языке — этюд), предложенную одним из авторов О. Степановым. На рисунке 10 белые начинают и выигрывают.

Эта жемчужина решается ходом 1. e2! Посмотрим, как складываются события дальше. Черные фишки d3 и e3 — e5 переворачиваются, и в «живых» остаются только фишки d4 и d5. Как теперь играть черным? После хода d2 или d7 и, соответственно, ответа d1 или d8 на доске, как мы видим, остаются одни белые фишки — игра закончена. В случае одного из ходов b7, b5, b4, b3, f2, f4, f5, f7 и соответствующего ответа a8, a5, a4, a2, g1, g4, g5, g8 у черных остается одна единственная фишка, которая окружена по всем направлениям, и следующим ходом белые завершают игру полным уничтожением неприятельских сил.

Итак, у черных вынужденный ответ g7, уступающий угол доски. Белые играют, например, f5 (на e5 появляется белая фишка) с неизбежным h8. В результате правый нижний угол завоеван, что на столь ранней стадии игры равносильно победе.

Возможно, что это единственная позиция (с точностью до симметрии) со столь малым и примерно равным материалом, про которую можно утверждать, что одна из сторон начинает и выигрывает!

Е. Гик, О. Степанов

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{6(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x)}=-\frac{2}{\sin x}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{16}{x^2}-1}(\log_3 x)<0.$$

3. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь параллелограмма, если

$$\angle A=2\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}},\ OA=2\sqrt{10},\ OD=5$$

(найдите все решения).

4. На координатной плоскости xOy задан треугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B\left(\frac{2}{3};0\right)$, $C(0;-2)$. К графику функции $y=\frac{(3x-1)^2}{3x}$, $x>0$, проведена касательная, отсекающая от треугольника ABC четырехугольник, около которого можно описать окружность. Найдите расстояние от начала координат до этой касательной.

5. Даны правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина ребра SD, точка F лежит на ребре AD, причем $AF=\frac{3}{2}FD$. Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD, а третья — на прямой EF. Найдите объем конуса, если $AB=4$, $SO=3$.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_9 x+4}{1+\log_9 x}\leqslant 4\log_x 3-1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}^4 x+32\sin^2 y=55,\\ \dfrac{1}{\sin^2 x}-4\cos y=5.\end{cases}$$

3. Функция $y=\frac{1}{6}x^2+6x+56$ является разностью кубов двух линейных функций. Найдите эти функции.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP. Известно, что $BP=16$, $PC=20$ и что центр окружности, описанной около треугольника ABP, лежит на отрезке AC. Найдите длину стороны AB.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 7, а углы ABC, ASB и двугранный угол при ребре AB являются прямыми. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB. Наибольшая из площадей таких проекций равна 14, а наименьшая — $4\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автомобили на автодроме испытываются на скорости $v=120$ км/ч. Под каким углом α к горизонту должно быть наклонено полотно дороги на повороте с радиусом закругления $R=110$ м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу (рис. 1)?

2. Трубка длиной $l=1{,}1$ м, герметично закрытая с одного конца, опускается открытым концом в воду и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Трубку притопили, опустив ее закрытый конец до поверхности воды, и удерживают в новом вертикальном положении. Найдите высоту слоя воды, находящейся в трубке. Атмосферное давление принять равным давлению, создаваемому слоем воды высотой $h_0=10$ м. Давлением насыщенного пара воды при температуре опыта пренебречь.

3. Два одинаковых проволочных кольца, радиусом R каждое, движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 2). Перпендикулярно плоскости колец действует однородное магнитное поле с индукцией B.

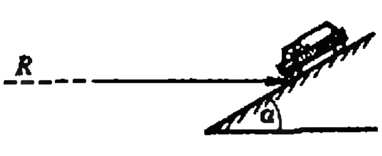


Рис. 1.

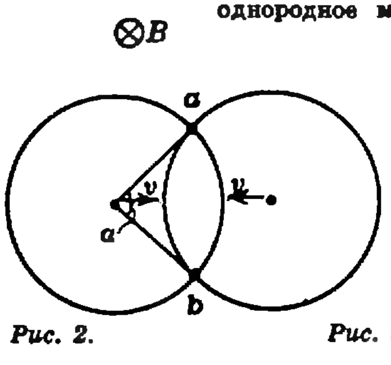


Рис. 2.

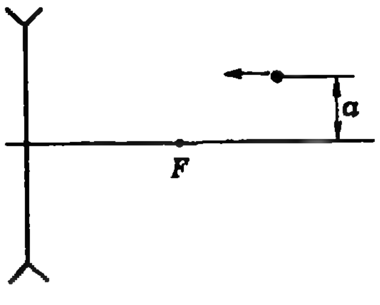


Рис. 3.

Найдите направления и абсолютные величины сил, действующих на кольца со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны v, а угол $\alpha=\pi/3$. В точках касания колец a и b имеется хороший электрический контакт. Электрическое сопротивление проволоки длиной, равной длине окружности кольца, равно r. Индуктивностью колец пренебречь.

4. Вдоль прямой, параллельной главной оптической оси линзы и отстоящей от нее на $a=5$ см, ползет к линзе муравей с постоянной скоростью $v_0=1{,}6$ см/с (рис. 3). Найдите скорость перемещения изображения муравья в тот момент, когда он проползает через фокальную плоскость линзы. Линза тонкая, рассеивающая, с фокусным расстоянием $F=10$ см.

Вариант 2

1. Деформация вертикальной легкой пружины, удерживающей гирю, составляет $x=4$ см (рис. 4). Чтобы увеличить деформацию пружины на 50 %, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу $A=0{,}3$ Дж. Найдите жесткость пружины.

2. Найдите работу, совершаемую молем идеального газа в цикле, состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис. 5). Точки *1* и *3* лежат на прямой, проходящей через начало координат. Температуры в точках *2* и *3* одинаковы. Считать заданными температуры T_1 и T_2 в точках *1* и *2*.

3. Какой заряд протечет через резистор R после замыкания ключей K_1 и K_2 в схеме, изображенной на рисунке 6? До замыкания ключей конденсатор C_2 не заряжен, а конденсатор C_1 заряжен до разности потенциалов U_0 (знаки зарядов указаны на рисунке). Считать известными $\mathscr{E}$, U_0, C_1 и C_2.

4. В ядерной реакции ${}^2H+{}^2H\to{}^4He+\gamma$ образуется медленно движущаяся, по сравнению со скоростью света, α-частица и квант света γ с энергией $E=19{,}7$ МэВ. Пренебрегая скоростями вступающих в реакцию ядер, найдите скорость образовавшейся α-частицы. Энергию покоя α-частицы принять равной $mc^2=8730$ МэВ.

Публикацию подготовили С. Резниченко, В. Чивилев

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство $4^x-2^{x+1}-3<0$.

Принадлежит ли множеству его решений число $\sqrt{2}$?

2. Решите уравнение

$$\sin x+2\cos x=\sqrt{6\sin 2x+4}.$$

3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром длины a, точка K — середина ребра AB, точка E — середина ребра DD_1. Найдите периметр треугольника A_1KE и определите, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

4. Велосипедисту надо было проехать расстояние в 30 км. Выехав на три минуты позже назначенного срока, велосипедист ехал со скоростью большею на 1 км/час и прибыл вовремя на место. Определите скорость, с которой ехал велосипедист.

5. Дано неравенство $(a-1)x^2-2x-a>0$.

а) Проверьте, что при $a=5$ это неравенство выполняется при любом $x>6$.

б) Укажите еще какое-нибудь значение a, при котором это неравенство выполняется при любом $x>6$.

в) Определите все значения a, при которых это неравенство выполняется при любом $x>6$.

Вариант № 2

1. Решите уравнение

$$4^{\lg 3-\lg(a-x)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lg x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$2\cos x+3\sin x=\sqrt{4+13\sin x}.$$

3. В трапеции длины диагоналей равны $2\sqrt{61}$ и $3\sqrt{41}$, а длины оснований — 10 и 15. Найдите площадь трапеции.

Можно ли в эту трапецию вписать окружность?

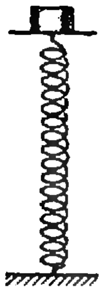


Рис. 4.

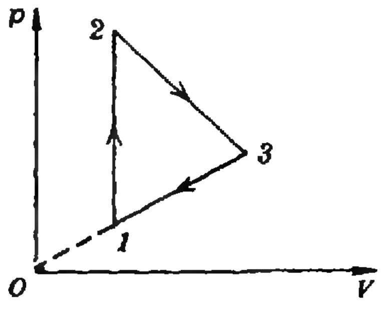


Рис. 5.

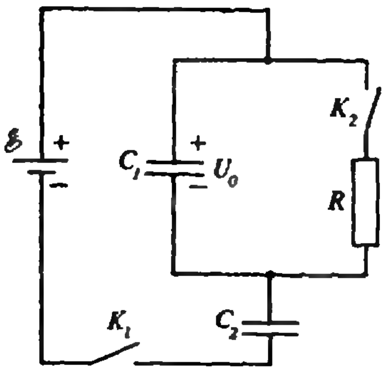


Рис. 6.

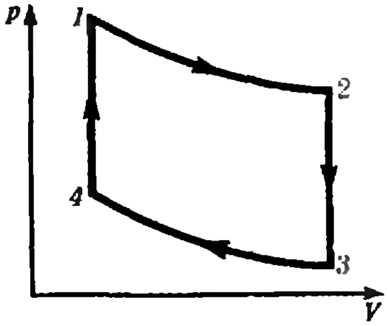


Рис. 1.

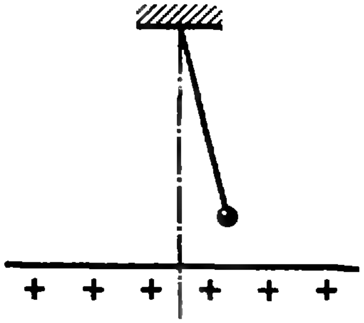


Рис. 2.

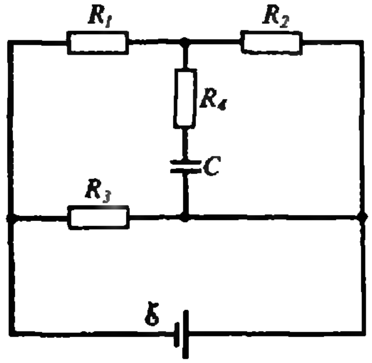


Рис. 3.

Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

4. Решите неравенство

$$(2\operatorname{ctg} x-1)\cdot\sqrt{9-5x-4x^2}\geqslant 0.$$

5. В магазине имеются книжные полки двух типов. 6 полок первого типа и 11 полок второго типа могут вместить не более 30 % книг домашней библиотеки, а 21 полка первого типа и 16 полок второго типа — более 60 % книг.

а) Хватит ли 29 полок первого типа для размещения $\frac{1}{3}$ библиотеки?

б) Хватит ли 51 полки второго типа для размещения всей библиотеки?

в) Докажите, что 39 полок первого типа и 24 полки второго типа достаточно для размещения всей библиотеки.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела бросили вертикально вверх с одинаковой скоростью $v_0=20$ м/с через время $\tau=1$ с одно после другого. Определите, где и когда (через какое время после бросания первого тела) они встретятся. Задачу решите аналитически и графически. Ускорение свободного падения $g\approx10$ м/с^2.

2. Снаряд разрывается на две части, массы которых относятся как 1:2. Взрыв произошел на высоте $H=320$ м. Через время $\tau=4$ с после взрыва больший осколок падает под тем местом, где произошел взрыв. Определите расстояние до места падения легкого осколка. Скорость снаряда перед взрывом горизонтальна и равна $v_0=150$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной $a=12$ см, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $r=3$ см, касающееся двух смежных сторон.

4. Воздушный шар имеет легко растяжимую замкнутую теплоизолированную оболочку массой $m_1=130$ кг. Оболочка заполнена воздухом массой $m_2=260$ кг при давлении и температуре окружающей атмосферы ($T=273$ К). На сколько градусов необходимо нагреть воздух внутри оболочки, чтобы шар взлетел?

5. В сухом атмосферном воздухе содержатся кислород, азот и аргон (содержанием остальных газов можно пренебречь). Определите число молекул этих газов и их массы в объеме $V=1$ м^3 при нормальных условиях: $p=101$ кПа, $T=273$ К. Известно, что число молекул азота в 4 раза больше, а аргона в 20 раз меньше, чем кислорода. Молярные массы: кислорода — $M_1=32$ г/моль, азота — $M_2=28$ г/моль, аргона — $M_3=40$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), число Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

6. Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор, совершаемого одноатомным идеальным газом (рис. 1). Известно, что в процессе адиабатного расширения устанавливается температура $T_2=0{,}75T_1$, а в процессе адиабатного сжатия — $T_3=0{,}75T_4$.

7. Положительно заряженный шарик массой $M=30$ г совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью (рис. 2). Сила электростатического взаимодействия шарика с плоскостью $F=0{,}1$ Н, а период колебаний шарика $T=2$ с. Шарик перезарядили так, что заряд его стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии.

8. Определите заряд конденсатора емкостью $C=2$ мкФ, включенного в цепь, показанную на рисунке 3, если $\mathscr{E}=24$ В, $R_1=R_2=5$ Ом, $R_3=R_4=10$ Ом, $r=1$ Ом.

9. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v=2\cdot10^5$ м/с, которая составляет с направлением вектора индукции $\vec{B}$ угол $\alpha=60°$. При каком наименьшем значении индукции магнитного поля электрон сможет оказаться в точке, лежащей на той же линии магнитного поля на расстоянии $L=2$ см от начальной точки? Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

10. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии $f_1=80$ см. Собирающую линзу заменяют на рассеивающую с таким же фокусным расстоянием. Изображение предмета в этом случае находится на расстоянии $f_2=20$ см. Определите фокусное расстояние линз и увеличения Γ_1 и Γ_2.

Публикацию подготовили
Г. Ефашкин, В. Тонян

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку за 60 дней. Если первая машина выполнит 30 % своей работы, а вторая — $26\frac{2}{3}$% своей, то обе они пройдут 60 м тоннеля. Если бы первая машина выполнила 2/3 всей работы второй машины по проходке этого тоннеля, а вторая — 0,8 всей работы первой машины, то первой понадобилось бы для этого на 6 дней больше, чем второй. Определите, сколько метров в день проходит каждая машина.

2. Решите уравнение

$$5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{17}{32}.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро $AB=a$, $BC=a$, $AA_1=b$. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину A и перпендикулярного диагонали BD_1.

Вариант 2
(физический факультет)

1. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и середину противоположного ребра проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол в 60°. Площадь сечения равна $S=8\sqrt{3}$. Найдите объем и полную поверхность призмы.

2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=3x^3-6x^2+7.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}\geqslant 0.$$

5. Решите уравнение

$$\lg(10x^2)\cdot\lg x=1.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело, брошенное вертикально вверх, дважды проходит через точку на высоте h. Промежуток времени между этими прохождениями Δt. Найдите начальную скорость тела.

2. Человек, стоящий на коньках на гладком льду реки, бросает камень массой $m=0{,}5$ кг. Спустя $t=2$ с камень достигает берега, пройдя расстояние $l=20$ м. С какой скоростью начинает скользить конькобежец, если его масса $M=60$ кг? Трением пренебречь.

3. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге, переходящей в мертвую петлю радиусом $R=4$ м. Какую скорость он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по петле?

4. Тело $m=1$ кг соскальзывает с наклонной плоскости длиной $l=12$ м, образующей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Начальная скорость тела равна нулю, скорость у основания плоскости $v=4$ м/с. Какое количество теплоты выделилось при трении тела о плоскость?

5. Сосуд с газом разделен подвижной перегородкой на две части, отношение объемов которых $V_1/V_2=2/3$. Температуры газа в меньшем и большем объемах $t_1=177$ °С и $t_2=267$ °С соответственно; давление в них одинаково. Каково будет отношение объемов, если температуры сравняются? Теплообмен возможен только через перегородку.

6. В электрическом чайнике, мощность которого $P=600$ Вт, можно вскипятить $V=1{,}5$ л воды за $\tau=20$ мин при начальной температуре воды $t=20$ °С. Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

7. Два последовательно соединенных конденсатора, емкости которых $C=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ, подключены к источнику тока с напряжением $U=220$ В. Найдите напряжение на каждом конденсаторе.

8. Нагревательная спираль электроаппарата для испарения воды при температуре $t=100$ °С имеет сопротивление $R=10$ Ом. Какой ток надо пропустить через эту спираль, чтобы аппарат испарил массу воды $m=100$ г за время $\tau=1$ мин? Удельная теплота парообразования воды $\lambda=2{,}3$ МДж/кг.

9. С какой скоростью должен двигаться проводник перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля, чтобы между концами проводника возникла разность потенциалов $U=0{,}01$ В? Индукция магнитного поля $B=0{,}2$ Тл, длина проводника $l=10$ см.

10. Проверяя свои очки, человек получил на полу комнаты действительное изображение лампы, висящей на высоте $H=3$ м, держа очковое стекло под лампой на расстоянии $f=1$ м от пола. Какова оптическая сила очков?

Публикацию подготовили
О. Овчинников, О. Рыльков,
Н. Терешин

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи по физике

1. Запишем уравнения движения тела и бруска в проекциях на горизонтальное направление (рис. 1):

$$ma_1 = F_{\text{тр}},$$
$$Ma_2 = F - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}} = \mu mg$. Тело проскальзывает по бруску, если $a_1 < a_2$, т. е. если

$$\frac{\mu mg}{m} < \frac{F - \mu mg}{M}.$$

Отсюда получаем

$$F > \mu(M+m)g.$$

2. В обоих случаях вес тела P численно равен силе нормальной реакции N со стороны поверхности Земли (рис. 2). Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_1 = mg - N_1,$$
$$0 = mg - N_2,$$

где m — масса тела, $a_1 = 4\pi^2 R/T^2$ — центростремительное ускорение тела на экваторе ($T = 24$ ч). Относительное изменение веса тела равно

$$\left|\frac{P_1 - P_2}{P_2}\right| = \left|\frac{N_1 - N_2}{N_2}\right| = \left|\frac{mg - ma_1 - mg}{mg}\right| =$$
$$= \frac{a_1}{g} = \frac{4\pi^2 R}{gT^2} \approx 0{,}003 = 0{,}3\ \%.$$

3. Пусть, для определенности, ускорение первого тела направлено вниз, а второго — соответственно вверх. Тогда уравнения движения тел в проекциях на вертикальное направление имеют вид

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1,$$
$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2.$$

Из условия невесомости подвижного блока получаем

$$T_2 = 2T_1,$$

а из кинематической связи —

$$a_1 = 2a_2.$$

Объединив все полученные уравнения в систему, найдем искомые величины:

$$a_1 = 2g\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2},$$
$$T_1 = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}, \quad T_2 = 2T_1.$$

4. Когда тележка въезжает на наклонную плоскость, она приобретает ускорение, направленное вдоль плоскости вниз. Поэтому точка подвеса нити, двигаясь вместе с тележкой, отстает от шарика. Ускорение шарика станет таким же, как у тележки, в тот момент, когда нить будет направлена перпендикулярно плоскости (рис. 3).

5. Равновесие не сохранится, так как натяжение того конца нити, где находится колеблющийся груз, не остается постоянным и равным весу этого груза — в крайних точках натяжение нити меньше, а в средней точке больше веса груза. Опыт показывает, что колеблющийся груз при этом опускается (объясните это).

6. Для двух возможных случаев (рис. 4) получаем

$$E_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a/\sqrt{2})^2} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0 a^2},$$
$$E_2 = 0.$$

7. Работа, которую надо совершить, равна изменению энергии взаимодействия электриче-

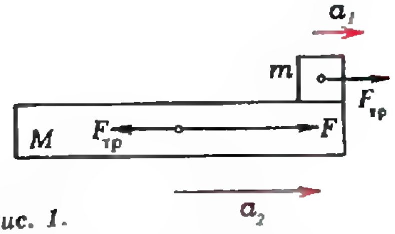


Рис. 1.

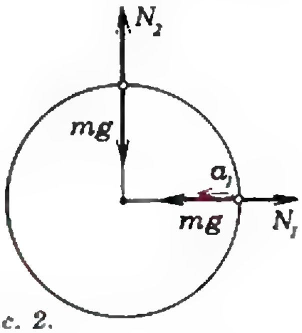


Рис. 2.

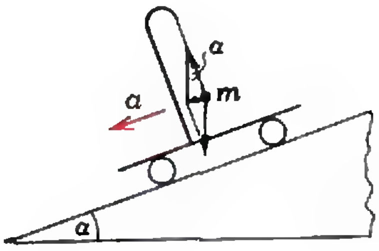


Рис. 3.

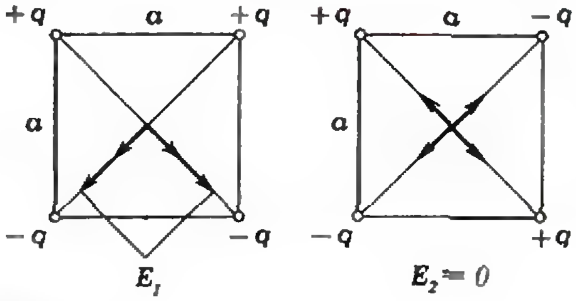


Рис. 4.

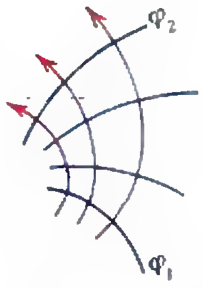


Рис. 5.

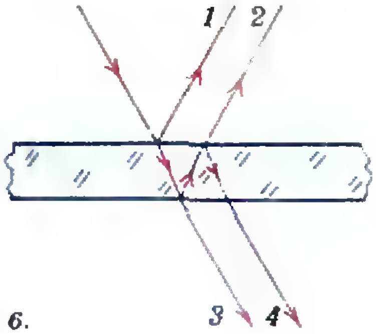


Рис. 6.

ских зарядов:

$$A=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=$$

$$=\frac{q^2(r_1-r_2)}{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}=8{,}1\cdot 10^{-10}\ \text{Дж}.$$

8. Линии напряженности электрического поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям и направлены в сторону убывания потенциала (рис. 5). Напряженность больше там, где эквипотенциальные поверхности расположены ближе друг к другу.

9. Из закона сохранения энергии

$$3\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}=3\frac{mv^2}{2}$$

получаем

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 ma}}\approx 9{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{м/с}.$$

10. Совершенная механическая работа и часть энергии, запасенной в конденсаторе, идут на увеличение энергии аккумулятора и на тепло, выделяющееся в подводящих проводах. (Действительно, при раздвигании пластин конденсатора, подключенного к аккумулятору, заряд конденсатора и его энергия уменьшаются, вследствие чего аккумулятор подзаряжается.)

11. В глазной линзе красные лучи преломляются слабее, чем синие. Поэтому возникает зрительное впечатление, что красные предметы находятся ближе к наблюдателю, чем синие (убедитесь в этом, сделав соответствующие построения хода лучей).

12. При переходе из вакуума в стекло частоты колебаний не изменяется, а скорость света уменьшается в n раз. Поэтому

$$\Delta\lambda=\frac{c}{\nu}-\frac{c/n}{\nu}=\frac{c(n-1)}{n\nu}=2{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

13. В отраженном свете кольца Ньютона видны более отчетливо, чем в проходящем. Это связано с тем, что в отраженном свете интенсивности интерферирующих лучей (лучи *1* и *2* на рисунке 6), испытавших каждый по одному отражению, приблизительно одинаковы, а в проходящем свете интенсивность луча, испытавшего два отражения (луч *4*), существенно меньше интенсивности луча (луч *3*), не испытавшего ни одного отражения. В результате первая картина получается более контрастной, чем вторая.

14. Из уравнения дифракционной решетки для главных максимумов получаем

$$\frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_2}=\frac{3}{2},$$

откуда

$$\varphi_3=\arcsin(1{,}5\sin\varphi_2)\approx 21^\circ.$$

15. Искомая скорость электронов находится непосредственно из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda}=A+\frac{mv^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2(hc/\lambda-A)}{m}}\approx 2{,}2\cdot 10^5\ \text{м/с}.$$

[illegible]сковский физико-технический институт

[illegible]тематика

Вариант I

1. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi+2\pi k,\ k\in Z.$

2. $3<x<4,\ 1<x<2\sqrt{2}.$

3. $S_{ABCD}=24$ или $S_{ABCD}=72$, причем в обоих случаях $AB=2\sqrt{13}$. Указание. Записав теорему косинусов для треугольников ABO и CDO, покажите, что числа $x=AB$ и $y=BC$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}x^2+(4/13)\cdot(y^2-2xy)=40,\\ x^2+(9/13)\cdot(y^2-2xy)=25.\end{cases}$$

4. Искомое расстояние равно $h_1=(2\sqrt{10}-6)/\sqrt{10}$ или $h_2=(3\sqrt{2}-4)/\sqrt{5}$. Указание. Возможны два случая.

1) Касательная из условия — это прямая $KL\perp BC$, имеющая уравнение $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{10}-6}{3}$. В этом случае расстояние равно h_1.

2) Касательная — прямая MN, имеющая уравнение $y=\frac{1}{3}x+\frac{8-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$. В этом случае расстояние равно h_2.

5. $V=(343\sqrt{13}/18)\pi$. Решение. Пусть K, L — вершины осевого сечения, лежащие на прямой CD, M — вершина, лежащая на прямой EF, Q — центр основания конуса. Какие-то две из точек K, L, M симметричны относительно точки Q. Поскольку точка Q не лежит на прямой CD, этими точками не могут быть точки K и L. Пусть, для определенности, Q — середина отрезка KM, и, значит, $QL\perp KM$. Геометрическое место точек M таких, что середина отрезка KM лежит на прямой SO, а его конец K — на прямой CD,— это плоскость α, параллельная прямым SO и CD и содержащая точку A. Следовательно, плоскость α содержит прямую AB и перпендикулярна плоскости $ABCD$, а M — точка пересечения прямой EF с плоскостью α. Пусть M' и E' — проекции точек M и E на плоскость $ABCD$, P — проекция точки Q на прямую CD. Точка M' принадлежит прямой $E'F$ — проекции прямой EF на плоскость $ABCD$, симметрична точке K относительно точки O — проекции точки Q на эту плоскость и лежит на продолжении отрезка AB за точку A, а точки E' и P — середины отрезков OD и CD (рис. 7). Обозначим R и h — радиус основания и высоту конуса. Тогда $2R=KM=\sqrt{M'K^2+M'M^2}$, где $M'K^2=(AB+2M'A)^2+BC^2$. Пусть T — проекция E' на отрезок AD (см. рис. 1). Тогда $E'T=1$, $FT=FD-TD=3/5$, и из подобия треугольников $M'AF$ и $E'TF$ находим $M'A=4$. Следовательно, $R=7$. Из подобия треугольников KQP и KLQ (рис. 8) получаем $h=R\cdot QP/KP$, где $KP=KC+CP=M'A+CD/2=6$, $QP=\sqrt{OQ^2+OP^2}=\sqrt{MM'^2+(AD/2)^2}$. Из подобия треугольников $EE'F$ и $MM'F$ (рис. 9) следует, что $EE'/MM'=E'F/FM'=1/4$, т. е. $MM'=4EE'=$

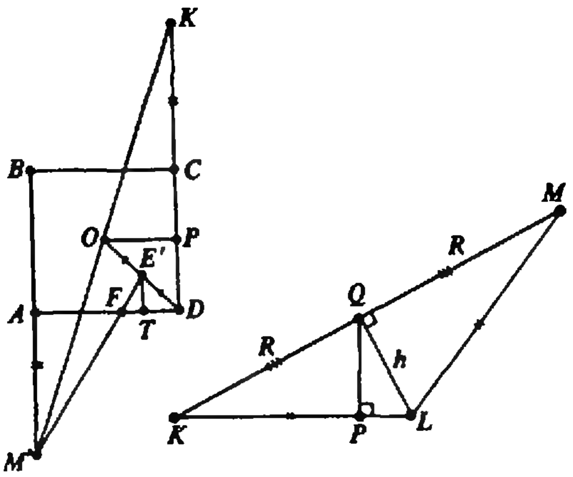


Рис. 7. *Рис. 8.*

$=4(SO/2)=6$, $QP=\sqrt{13}$, $h=7\sqrt{13}/6$. Следовательно, объем конуса равен

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{343\sqrt{13}}{18}\pi.$$

Вариант 2

1. $\frac{1}{81}\leqslant x<\frac{1}{9}$, $1<x\leqslant 3$.

2. $x=\pm\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

3. $y=\left(\frac{x}{6}+4\right)^3-\left(\frac{x}{6}+2\right)^3=$

$=\left(-\frac{x}{6}-2\right)^3-\left(-\frac{x}{6}-4\right)^3$.

4. $AB=144/\sqrt{5}$. Указание. Покажите, что $OP\parallel AB$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABP.

5. ${}^7/_3\sqrt{21/2}$. Решение. Пусть ψ — угол между плоскостью ABC и плоскостью β, на которую проектируется пирамида. Положим

$$\varphi=\begin{cases}\psi, & \text{если } \beta \text{ пересекает ребро } SC;\\ \pi-\psi & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда φ изменяется от 0 до π. Обозначим S_0 — площадь треугольника ABC, $\tilde{S}$ — площадь проекции пирамиды, SO — высоту пирамиды (по условию точка O принадлежит отрезку AB), S' и C' — проекции на плоскость β точек S и C, φ_1 — значение φ, при котором S' принадлежит отрезку AC'.

Пусть $SO=H$, $AB=c$, $BO=kc$ $(0<k<1)$, $BC=h$ (рис. 10). Тогда $S_0=\frac{1}{2}hc$,

$$\tilde{S}=\begin{cases}S_1(\varphi), & \text{если } 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1,\\ S_2(\varphi), & \text{если } \varphi_1<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\\ S_3(\varphi), & \text{если } \frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi,\end{cases}$$

где $S_1(\varphi)={}^1/_2hc\cdot\cos\varphi$,

$S_2(\varphi)={}^1/_2khc\cdot\cos\varphi+{}^1/_2Hc\cdot\sin\varphi$,

$S_3(\varphi)=-{}^1/_2hc\cdot\cos\varphi+{}^1/_2Hc\cdot\sin\varphi$.

Из условия $S_1(\varphi_1)=S_2(\varphi_1)$ получаем $\operatorname{tg}\varphi_1=(1-k)h/H$. Исследуем функции $S_i(\varphi)$. Функция $S_1(\varphi)$ убывает. Так как производная $S_2'(\varphi)$ обращается в нуль в единственной точке $\varphi=\varphi^*\in(0;\frac{\pi}{2})$, то либо функция $S_2(\varphi)$ монотонна на интервале $(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$ (если $\varphi^*\in(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$), либо она имеет максимум при $\varphi=\varphi^*$ (если $\varphi^*\in(\varphi_1;\frac{\pi}{2})$). Функция $S_3(\varphi)$ имеет максимум при $\varphi=\varphi^{**}\in(\frac{\pi}{2};\pi)$. Но $S_3(\varphi^{**})=({}^1/_2)c\sqrt{H^2+h^2}>S_2(\varphi^*)=({}^1/_2)c\sqrt{H^2+kh^2}$, значит, $\tilde{S}_{\max}=S_3(\varphi^{**})$. Далее, $\tilde{S}_{\min}=\{\tilde{S}(\varphi_1),\ \tilde{S}(\frac{\pi}{2})\}=\tilde{S}(\varphi_1)$, так как $\tilde{S}(\pi/2)={}^1/_2Hc=\sqrt{\tilde{S}^2(\varphi^{**})-S_0^2}$, а из данных задачи получаем, что $\tilde{S}_{\min}<\sqrt{\tilde{S}^2(\varphi^{**})-S_0^2}$. Итак, $hc=2S_0=14$; $\sqrt{(Hc)^2+(hc)^2}=2\tilde{S}_{\max}=28$, откуда $Hc=14\sqrt{3}$; $hc\times Hc/\sqrt{(Hc)^2+(hc)^2\cdot(1-k)^2}=2S_{\min}=8\sqrt{3}$, откуда $k=1/4$. Следовательно, $H=\sqrt{AO\cdot BO}=(\sqrt{3}/4)c$, и, значит, $c=2\sqrt{14}$, $H=\sqrt{21/2}$, а искомый объем равен $V={}^1/_3HS_0={}^7/_3\cdot\sqrt{21/2}$.

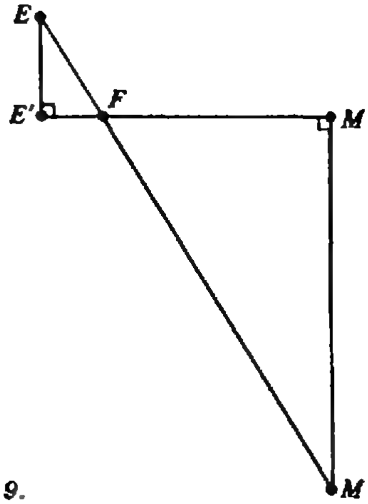


Рис. 9.

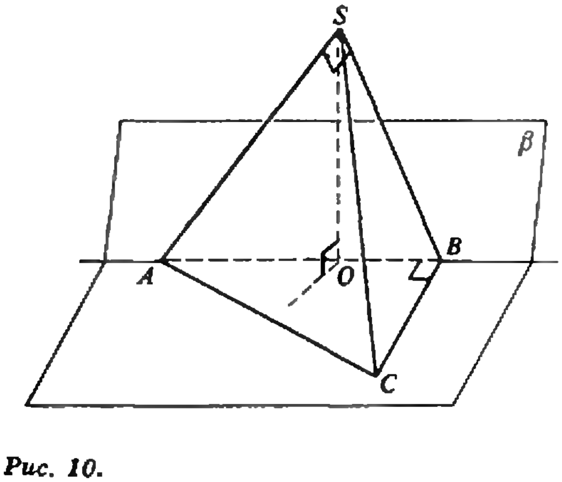


Рис. 10.

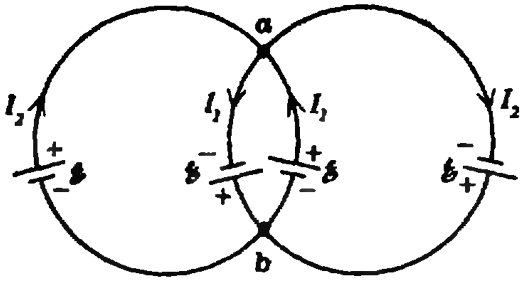


Рис. 11.

Физика

Вариант 1

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v^2}{Rg} \approx \operatorname{arctg} 1 = 45°$.

2. $x = 0{,}1$ м. Указание. Воспользуйтесь законом Бойля — Мариотта, а также тем, что атмосферное давление $p_a = \rho g h_0$, где ρ — плотность воды.

3. На каждое кольцо действует сила, направленная противоположно его скорости и равная

$$F = (36/5)B^2vR^2/r.$$

Указание. На рисунке 11 приведена эквивалентная схема. Здесь $E = Bvl_{аб} = 2BvR\sin\alpha/2$, $I_1 = (4\pi BVr\sin\alpha/2)/(r\alpha)$, $I_2 = (4\pi BvR\sin\alpha/2)/(r(2\pi-\alpha))$. Окончательно $F = B(I_1+I_2)l_{аб} = (36/5)B^2vR^2/r$.

4. $v = \sqrt{5}v_0/8 \approx 0{,}45$ см/с. Указание. Рассмотрите малое перемещение муравья и соответствующее перемещение его изображения.

Вариант 2

1. $k = 8A/x^2 = 1500$ Н/м.

2. $A = A_{31} + A_{23} = -R(T_2-T_1)/2 + R\sqrt{T_2/T_1}(T_2-T_1)/2 = R(T_2-T_1)(\sqrt{T_2/T_1}-1)/2$.

3. $q = C_2\mathscr{E} + C_1U_0$.

4. $v = Ec/(mc^2) \approx 1{,}6\cdot10^3$ км/с.

Указание. Воспользуйтесь законом сохранения импульса.

[illegible]овский институт электронного машино[illegible]ния

Математика

Вариант 1

1. $(-\infty;\ \log_2 3)$, принадлежит. Указание. $\sqrt{2} < \log_2 3$, поскольку $\sqrt{2} < \dfrac{3}{2} < \log_2 3$.

2. $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x + 2\cos x \geqslant 0, \\ \sin x(4\cos x - 3\sin x - 6) = 0. \end{cases}$$

Уравнение же $4\cos x - 3\sin x = 6$ корней не имеет.

3. $a\left(\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$; $\dfrac{7}{41}$. Указание. $A_1K = A_1E = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $KE = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Пусть M — точка пересечения прямых AE и AD, N — точка пересечения KM и DC. Объем многогранника AA_1KNDE равен разности объемов пирамид AA_1KM и $DENM$.

4. 25 км/ч.

5. $[48/35;\ \infty)$. Указание. Неравенство выполняется при всех $x > 6$ тогда и только тогда, когда либо $D < 0$, $a > 1$, либо $a > 1$, $f(6) \geqslant 0$, $x_в \leqslant 6$ ($x_в$ — абсцисса вершины параболы $y = (a-1)x^2 - 2x - a$).

Вариант 2

1. $x = a + 45 - 3\sqrt{10a+225}$ при $a \in (0;\ +\infty)$; при $a \leqslant 0$ корней нет. Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 0 < x < a, \\ 90x = (a-x)^2. \end{cases}$$

2. $2\pi n$; $\arccos\dfrac{12}{13} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. 150; вписать окружность можно, а описать нельзя. Указание. Пусть $ABCD$ данная трапеция, $AD = 15$, $AC = 2\sqrt{41}$, $BD = 3\sqrt{61}$, $BC = 10$. Пусть M точка на прямой AD такая, что $BM \parallel AC$. В треугольнике MBD: $BM^2 - AM^2 = BD^2 - AD^2 = 144 = 12^2$. Отсюда следует (убедитесь в этом!), что AB высота треугольника BMD, так что трапеция $ABCD$ — прямоугольная и $AB = 12$. Остальное ясно.

4. $\left[-\dfrac{9}{4};\ \operatorname{arctg} 2 - \pi\right] \cup [0;\ 1]$. Указание. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 9 - 5x - 4x^2 \geqslant 0, \\ 2\operatorname{ctg} x - 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

при решении которой необходимо доказать, что $\operatorname{arctg} 2 > 1$ и $-\dfrac{9}{4} < \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

5. а) Хватит; б) для ответа на этот вопрос условий задачи недостаточно.

Указание. Пусть на полке 1 типа помещается x книг, на полке второго типа — y книг, а всего в библиотеке N книг. По условию

$$\begin{cases} 6x + 11y \leqslant 0{,}3N, \\ 21x + 16y > 0{,}6N, \end{cases}$$

откуда $y < \dfrac{1}{50}N$, $x > \dfrac{1}{75}N$. Так, $29x > \dfrac{29}{75}N > \dfrac{1}{3}N$ и $51y < \dfrac{51}{50}N$ при этом неизвестно, верно ли, что $51y \leqslant N$ или $\dfrac{51}{50}N > 51y > N$.

Физика

1. $h = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g(\tau/2)^2}{2} = 18{,}75$ м;

$t = \dfrac{v_0}{g} + \dfrac{\tau}{2} = 2{,}5$ с.

2. $l \approx 11{,}9$ км.

3. Центр тяжести находится на диагонали пластинки, проходящей через центр отверстия, на расстоянии $x = a\pi\sqrt{2}/(64-4\pi) \approx 1$ см от центра квадрата.

4. $\Delta T = Tm_1/m_2 = 136{,}5$ К.

5. $N_1 = (20/101)(pN_A)/(RT) \approx 5{,}8\cdot10^{24}$; $N_2 \approx 2{,}1\cdot10^{25}$; $N_3 \approx 2{,}6\cdot10^{23}$; $m_1 = N_1\text{M}_1/N_A \approx 0{,}28$ кг; $m_2 \approx 0{,}99$ кг; $m_3 \approx 0{,}017$ кг.

6. $\eta = 0{,}25 = 25\ \%$.

7. $T' = T\sqrt{(g-F/m)/(g+F/m)} \approx 1{,}4$ с.

8. $q = \dfrac{C\mathscr{E}R_2R_3}{(R_1+R_2)R_3 + r(R_1+R_2+R_3)} = 2\times10^{-5}$ Кл.

9. $B_{\min}=(2\pi mv\cos\alpha)/(eL)\approx 1{,}8\cdot 10^{-4}$ Тл.
10. $F=2f_1f_2/(f_1+f_2)=32$ см; $\Gamma_1=(f_1-f_2)/(2f_2)=1{,}5$; $\Gamma_2=(f_1-f_2)/(2f_1)=3/8$.

[redacted]ковский педагогический государственный ерситет им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1
1. 2 м, 1,5 м.
2. 7.
3. $\pi(2k+1)/8,\ k\in Z$.
4. $y_{\min}=y(-1)=-5/6,\ y_{\max}=y(0)=1$.
5. $\dfrac{a}{2b}\sqrt{b^2+2a^2}$.

Вариант 2
1. $48\sqrt{3},\ 144+8\sqrt{3}$.
2. Промежутки возрастания: $(-\infty;\ 0)$ и $(\frac{2}{3};\ \infty)$. Промежуток убывания $(2/3;\ \infty)$.
3. $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.
4. $(-\infty;\ -2]\cup(-1;\ 2)\cup(4;\ \infty)$.
5. $0{,}1;\ \sqrt{10}$.

Физика

1. $v_0=\sqrt{2gh+g^2(\Delta t)^2/4}$.
2. $v=ml/(Mt)=0{,}08$ м/с.
3. $v\geqslant\sqrt{5gR}=14$ м/с.
4. $Q=m(gl\sin\alpha-v^2/2)=52$ Дж.
5. $V_1'/V_2'=(V_1/V_2)(T_2/T_1)=4/5$.
6. $\eta=c\rho V(t_{\text{к}}-t)/(P\tau)=0{,}7$ (здесь $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность, $t_{\text{к}}=100$ °C — температура кипения воды).
7. $U_1=UC_2/(C_1+C_2)=165$ В, $U_2=UC_1/(C_1+C_2)=55$ В.
8. $I=\sqrt{m\lambda/(R\tau)}\approx 200$ А.
9. $v=U/(Bl)=0{,}5$ м/с.
10. $D=H/((H-f)f)=1{,}5$ дптр.

[redacted]урс «Математика 6—8»

«Квант» № 10)

1. Ясно, что на последнем месте в искомом числе стоит цифра 0, а на пятом месте — 5. Четные цифры расположены на четных местах, нечетные — на нечетных. На четвертом и на восьмом местах должны стоять цифры, не делящиеся на 4. Поэтому число имеет один из четырех видов:

1) *8*254*6*0,
2) *4*658*2*0,
3) *4*258*6*0,
4) *8*654*2*0.

Суммы трех шести первых цифр должны делиться на 3. Поэтому и сумма чисел, стоящих на 4-м, 5-м и 6-м местах, также кратна 3. Таким образом, числа вида 1), 2) и 3) нам не подходят.

Итак, число имеет вид 4). Остаются следующие возможности:

а) 381654*2*0,
б) 183654*2*0,
в) 387654*2*0,
г) 783654*2*0,
д) 189654*2*0,
е) 981654*2*0.

Число 381 654 делится на 7. Поэтому, если число имеет вид а), то на седьмом месте должна стоять цифра 7. Итак, число 3 816 547 290 — искомое. Теперь перебором случаев б) — е) можно проверить, что оно единственное.

2. а) Число 1991 раскладывается на множители: $1991=11\cdot 181$. Поэтому оба слагаемых делятся на него: первое из них содержит 11 и 181 в качестве сомножителей, а второе — 22 и 362.

б) Запишем первое слагаемое в виде $(1993-1991)\times(1993-1989)\times(1993-1987)\times\ldots\times(1993-1)$. После раскрытия скобок возникают члены, содержащие 1993 в виде слагаемого и еще один член вида $(-1991)\times(-1989)\times\ldots\times(-1)$, имеющий четное число сомножителей, он сокращается со вторым слагаемым.

3. Пусть в первый магазин привезли $37\times 11\cdot 2\cdot x$ книг, во второй — $57\cdot 3\cdot y$, в третий — $25\cdot 6\cdot z$, где $x,\ y,\ z$ — целые числа. Тогда

$$814x+171y+150z=1990.$$

Ясно, что x не превосходит 2, а y — четное число, не большее 9. Если $x=2$, то $171y+150z=362$. Тогда $171y$ должно оканчиваться на 2, т. е. $y=2$. Отсюда $150h=20$. Это равенство невыполнимо при целых z. Если $x=1$, то $171y+150z=1176$. Число $171y$ должно оканчиваться на 6, поэтому $y=6$, откуда $z=1$.

Итак, в первый магазин привезли 814, во второй — 1026, в третий — 150 книг.

4. Искомое число можно представить в виде $A\cdot 100+56$. Поскольку $A\cdot 100$ должно делиться на 56, то число A кратно 14, т. е. оно четно, делится на 7 и имеет сумму цифр, равную $56-(5+6)=45$. Наименьшим четным числом с суммой цифр 45 является число 199 998, однако оно не делится на 7. Следующими по величине четными числами с такой же суммой цифр будут 289 998, 298 998 и т. д. Первое из них также не делится на 7, тогда как второе делится. Таким образом, ответом на вопрос задачи будет число $298998\cdot 100+56=29\,899\,856$.

5. а) Не всегда. Если на всех 28 крайних клетках доски расставить 28 фигур, то из них нельзя выбрать 8 с требуемым свойством (рис. 12).

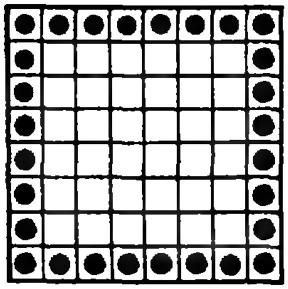


Рис. 12.

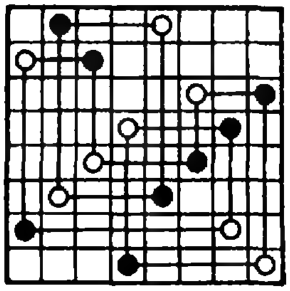


Рис. 13.

б) Всегда. Из 16 фигур выберем 8 с требуемым свойством. Все фигуры на шахматной доске соединим замкнутыми ломаными линиями, звенья которых параллельны сторонам доски. В каждой ломаной оставим все фигуры через одну по обходу ломаной (рис. 13).

6. Магический квадрат 3×3 однозначно определяется тремя числами a, b и n:

a	b	$3n-a-b$
$4n-2a-b$	n	$2a+b-2n$
$a+b-n$	$2n-b$	$2n-a$

Легко проверить, что сумма по вертикалям, горизонталям и обеим диагоналям одна и та же и равна $3n$. Также легко проверить, что $a^2+b^2+(3n-a-b)^2=(a-b-n)^2+(2n-b)^2+(2n-a)^2$. Такое же равенство справедливо, очевидно, для первого и последнего столбцов.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Уроев, А. Черноуцан,
А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев,
А. Серебров, Я. Смородинский, И. Сурин,
Е. Сурков, В. Фабрикант, Л. Фаддеев,
В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
В. Овсиенко, В. Тихомирова

Номер оформили:
С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Е. Тихонова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.10.90. Подписано к печати 13.12.90
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура
школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45.
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,27. Тираж 98 131 экз.
Заказ 2067. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

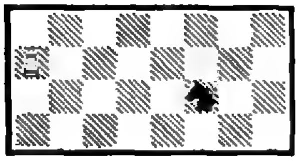
[illegible]

Шахматная страничка

ОХОТА НА МУСТАНГА

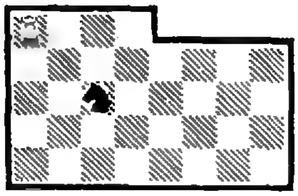
В одном из вычислительных центров сравнивались эффективности различных алгоритмов анализа конфликтных ситуаций. В качестве моделей использовались шахматные головоломки всего с двумя фигурами, которые перемещаются на необычных досках — одна фигура ловит другую. Особенно любопытны достижения компьютера в анализе игры, где ладья борется с конем. «Охота на мустанга» — так назвали эту игру ее авторы А. Левин и О. Ускова.

Традиционная доска интереса не представляет. Поймать на ней коня невозможно, если не считать некоторых особо неудачных для него ситуаций. По мере уменьшения размеров доски коня подстерегают все большие опасности. На доске 8×5 большинство начальных позиций все еще ничейно, а вот на доске 8×4 ладья уже легко ловит коня при любом начальном положении фигур.



Перед нами как бы учебный пример «охоты на мустанга». 1. Лc3! Kd1 (1...Kh1 и 1...Kg4 сразу проигрывают ввиду 2. Лf3) 2. Лc2! Ke3 3. Лd2 Kf1 (3...Kc4 4. Лd3 Kb2 5. Лd4) 4. Ле2 Kg3 5. Ле1! — конь пойман и следующим ходом ладья уничтожает его. Другой вариант: 1...Ke4 2. Лf3! Kd2 3. Ле3!, и после 3...Kf1 или 3...Kc4 дело сводится к предыдущему.

Обратимся к более занятным позициям.



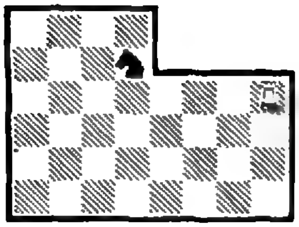
1. Ла3! Ладья берет под контроль центр доски. 1...Ke2 2. Лd3. Если бы фигуры стояли не на белых полях d3 и e2, а на черных d2 и e3, то конь быстро погибал. Цель белых и состоит в том, чтобы перейти от белопольной оппозиции к этой чернопольной. В обоих эховариантах (Kf4 и Kc1) это достигается при помощи остроумных маневров.

2...Kf4 3. Ле3! Kd5 4. Лf3 Kb4 5. Лc3 Kd5 (5...Ka2 6. Лc4) 6. Лc4! Ke3 7. Лd4! Kc2 8. Лd1! Ke3 9. Лd2! Kc4 10. Лd3 Kb2 (10...Ka5 11. Лc3) 11. Лd4. Или 7...Kf1 8. Ле4 Kd2 (8...Kg3 9. Ле1, 8...Kh2 9. Лf4) 9. Ле3 Kf1 (9...Kc4 10. Лd3) 10. Ле2 Kg3 11. Ле1.

2...Kc1 3. Лd2 Kb3 4. Лd1! Kc5 5. Лd4! Kb3 6. Лc4 Kd2. Неожиданно конь вырывается на свободу, впрочем, ненадолго. 7. Лb4! Kf3 (f1) 8. Ле4! Kd2 9. Ле3 и все кончено (дальше как в предыдущем варианте).

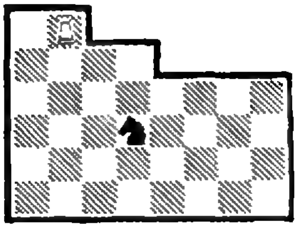
Осталось сказать, что в случае 1...Kd5 2. Лf3 возникает позиция первого варианта после четвертого хода белых, а в случае 1...Ke4 2. Лd3 Kc5 (2...Kf2 3. Ле3 Kd1 4. Лf3 с дальнейшим Лc3-c2-d2) 3. Лd4 — позиция второго варианта после пятого хода белых.

Тонкость и изящество игры в главных вариантах делают эту миниатюру весьма удачным образцом компьютерного творчества.



1. Лd4! Kc3. Быстрее проигрывает 1...Ke3 2. Лd2 или 1...Kb6 2. Лd2 Ka4 3. Лc2 и далее Лc5-c4-d4.

2. Лd2! Ke4 3. Лd3. Если теперь 3...Kc5, то 4. Лd4 и на 4...Kb3 — знакомый маршрут Лc4-b4-e4-e3. На 3...Kf2 решает 4. Ле3 Kd1 5. Лf3 Kb2 6. Лc3 Kd1 (6...Ka4 7. Лc4 и 8. Лd4) 7. Лc2 и т. д. При любом другом первом ходе ладьи выигрыша уже нет, правда, мустангу предстоят весьма опасные гонки. Вот один из вариантов: 1. Лc4? Ke3! 2. Лf4 Kc2! (2...Kd5? 3. Лd4, 2...Kd1? 3. Лf3) 3. Ле4 Ka3! 4. Ле2 Kb5! (4...Kc4? 5. Лc2 Kd6 6. Лc3) 5. Лd2 Kc3!, и белые в цугцванге: 6. Лd4 Ke2 7. Лc4 (7. Лd3 Kf4!) 7...Kg1 (7...Kg3? 8. Лc2 Ke4 9. Ле2 и 10. Лd2) 8. Ле4 Kf3! 9. Лg4 Ke1! (9...Kd2? 10. Лf4 Kb3 11. Лc4) с ничьей.



Заключительная задача потруднее предыдущих. Решение содержит 15 ходов — небольшая шахматная партия!

1. Лb3! Kf4. Ходы 1...Kf2 и 1...Kc5 ускоряют развязку, а при 1...Kc1 и 1...Ke1 дело сводится к основным вариантам. 2. Лf3! Продолжение «лобовой атаки» выглядит бессмысленно, но ошибкой было бы как раз напрашивающееся 2. Ле3. 2...Kd5 3. Лf2!! 3...Kb4 4. Лd2! Ka6 5. Лd4! Kc5 6. Лd5! Ke4 7. Лd3! Kc5 (7...Kf2 8. Ле3!) 8. Лd4! Эта позиция уже возникала после пяти ходов, но на сей раз надо ходить коню.

8...Kb3. Теперь следует эффектный маневр, знакомый нам по второй позиции. 9. Лc4! Kd2 10. Лb4! Kf1 11. Ле4! Kd2 12. Ле3! Kf1 13. Ле2 Kg3 14. Ле1, и следующим ходом ладья съедает коня.

Вот какая содержательная борьба возможна на миниатюрной доске даже при столь мизерном материале.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

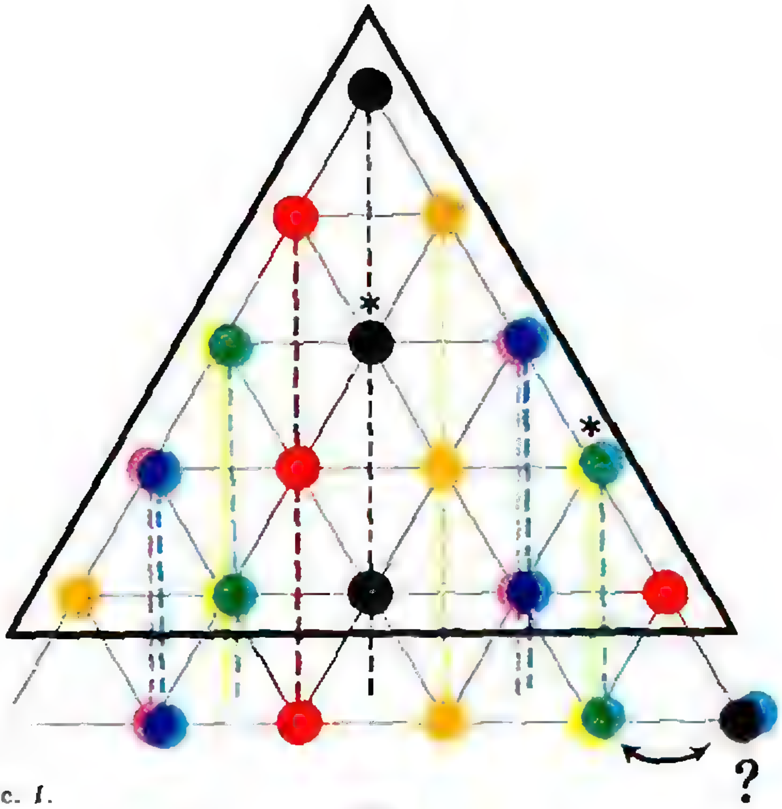


Рис. 1.

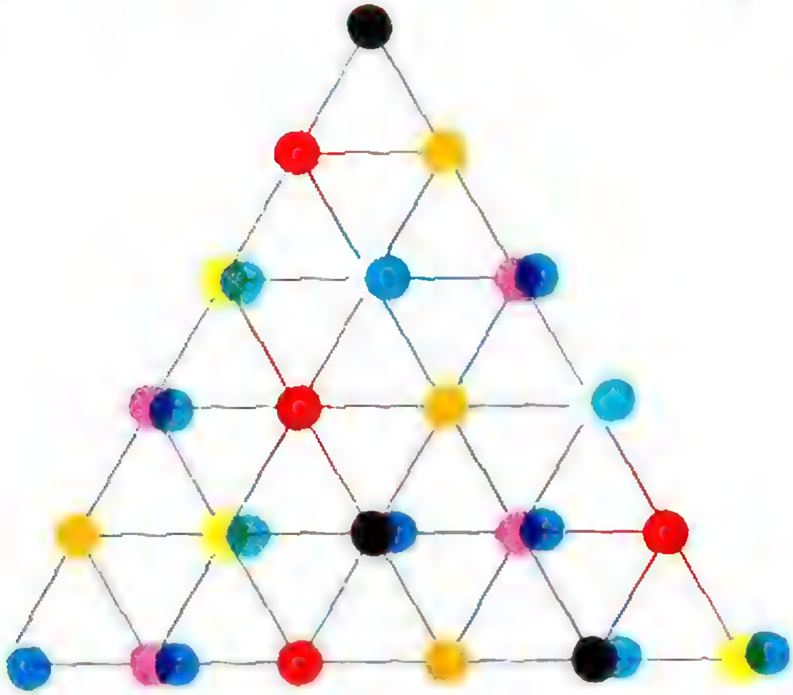


Рис. 2.

После публикации головоломки «Цветные фишки на треугольном поле» (см. обложку «Кванта» № 8 за прошлый год) мы получили письма от В. Аксеновой из Ленинграда, С. Злотникова из Гомеля, В. Севрийского из Москвы, В. Талдыкина из Семипалатинска и др., с ее решениями. Напомним, что требовалось расставить фишки n цветов в узлах сетки, образуемой при разбиении треугольника на меньшие треугольники (по n узлов на стороне), так, чтобы на линиях сетки цвета не повторялись. В заметке, посвященной этой головоломке («Квант» № 9, 1990 г., с. 69), мы привели ее общее решение для нечетного n и предложили читателям найти решение для четного $n>4$. Выяснилось, что это не так уж сложно: надо только слегка подправить решение для «нечетного случая». Во всех полученных нами ответах это сделано по-разному, и мы изложим некий комбинированный вариант. Сначала отбросим основание треугольного поля. Останется решетка с нечетным числом $n-1$ узлов на стороне, и на ней можно расставить фишки $n-1$ цветов по известному нам правилу: вдоль вертикалей (рис. 1). Продолжим эти цветные вертикали до основания. Остаются незаполненными нижние углы треугольника. В левый угол ставим n-й цвет (у нас — голубой), в правый — цвет, который пока не использован в нижней строке, т. е. цвет вершины треугольника (у нас — черный). При этом концы правой стороны оказываются одноцветными. Внесем поправки: две крайние справа нижние фишки переставим, а вместо фишек тех же цветов на правой стороне и ближайшей к ней параллельной линии (отмеченных звездочками) поставим фишки n-го цвета. Очевидно, что после этого повторов цветов не останется (рис. 2).

В. Д.

НОМЕР
2

Квант 2 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Л. Гурьяшкин, А. Стасенко.* История одного падения
10 *Е. Андреев.* Невписываемые многогранники
16 *Л. Мандельштам.* Почему физика нужна инженеру?
22 *И. Акулич.* Странный император и странный полководец

Задачник «Кванта»

26 Задачи М1266—М1270, Ф1273—Ф1277
27 Решения задач М1241—М1245, Ф1253—Ф1257

* * *

34 Конкурс «Математика 6—8»

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *И. Депман, Н. Виленкин.* Числовые фокусы

Школа в «Кванте»
Математика 9 — 11:

38 Неожиданность обратной задачи
42 Уравнение касательной к графику функции

40 Калейдоскоп «Кванта»

Р — значит ракета

46 *К. Феоктистов.* Ближайшие задачи в космосе

Есть идея?!

52 Мех дыбом

Фантастика

54 *Ф. Пол.* Я — это другое дело

Практикум абитуриента

59 *Д. Александров.* Векторные уравнения в кинематике
65 Варианты вступительных экзаменов 1990 г.

Рецензии, библиография

72 Прочтите интересную книгу
74 Ответы, указания, решения
Нам пишут *(45, 64, 73)*
Реклама *(9)*

Наша обложка

1 *Фотография «одного падения», раскрашенная машиной по желанию экспериментатора (см. статью Л. Гурьяшкина и А. Стасенко).*
2 *Картина бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) наводит на размышления о возможности пересечения параллельных прямых. Об истории и существе неевклидовой геометрии, возникшей из подобных наблюдений, вы сможете прочитать в статье В. Болтянского «Загадка «аксиомы параллельных» в одном из следующих номеров.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Складная модель шара из двух систем параллельных колец.*

© «Квант», 1991

ИСТОРИЯ ОДНОГО ПАДЕНИЯ

Маленькая трагедия

Л. ГУРЬЯШКИН,
доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

> *... в души наши вы загляните, и что мы люди тоже, вас помнить прошу я, что, подобно всем на земле живем мы и любим, и страдаем! Мысль пьесы сказал я; теперь судите, как она развита. Итак, мы начинаем!*
>
> Пролог из оперы Р. Леонкавалло «Паяцы»

Акт 1. Непростое рождение

Казалось бы, что может быть проще, чем сделать азотную каплю: налить жидкого азота в консервную баночку с маленьким отверстием — капли будут падать одна за другой, как вода из дырявой посуды. Попробовали — не тут-то было: азот выливался из отверстия сплошной струйкой, скользящей, как по маслу, по слою собственного пара, образующегося у стенок банки. Ведь эти стенки, первоначальная температура которых близка к комнатной ($T \approx 300$ К), воспринимались жидким азотом ($T' = 77$ К) как раскаленная печь. Можно было бы подождать, когда на внешней поверхности банки нарастет «шуба» из сконденсировавшихся паров воды и углекислого газа, содержащихся в воздухе,— но за это время утекло бы много азота; а чтоб не утекало, наверное, можно было бы придумать какой-нибудь клапан; а можно было бы... Но мы снабдили отверстие вертикальной трубочкой длиной около сантиметра (рис. 1) с пористым веществом, которое быстро принимало температуру жидкого азота и пропускало жидкий азот со скоростью приблизительно две капли в секунду.

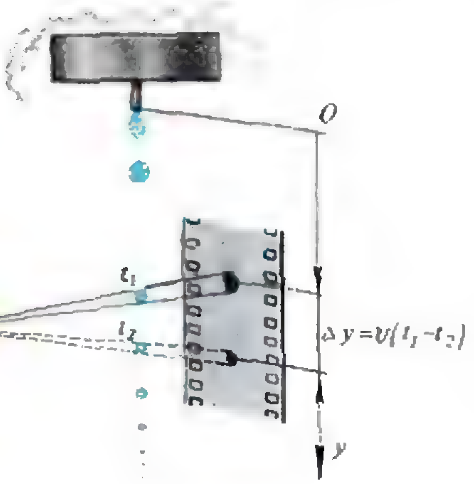


Рис. 1.

Эти капли с начальным диаметром порядка двух миллиметров, свободно падая в воздухе, пролетали мимо вертикально расположенной кассеты с фотопленкой и, освещаясь вспышками точечного источника света, оставляли на пленке теневую картину. Длительность вспышек была очень малой, около одной миллионной доли секунды, и потому картина получалась довольно четкой — за такое короткое время сама капля и картина обтекания ее изменялись очень мало.

На рисунке 2,*а* показана одна из многих полученных картин азотной капли, на рисунке 2,*б* — результат ее обработки в условных цветах на машине, которая умеет «раскрашивать» черно-белые фотографии по желанию экспериментатора. На этих рисунках хорошо виден след за каплей; он образуется благодаря резкому отличию плотностей окружающего воздуха и холодной массы газообразного азота, испарившегося с поверхности капли (аналогичный след можно видеть «на просвет» в стакане воды за куском растворяющегося сахара, опускаемого на краю ложки).

Проводились опыты и с каплями воды приблизительно такого же размера — никакого следа за каплей на пленке не оказалось. И понятно почему. Температуры воздуха и воды почти одинаковы и далеки от температуры кипения воды, так что скорость

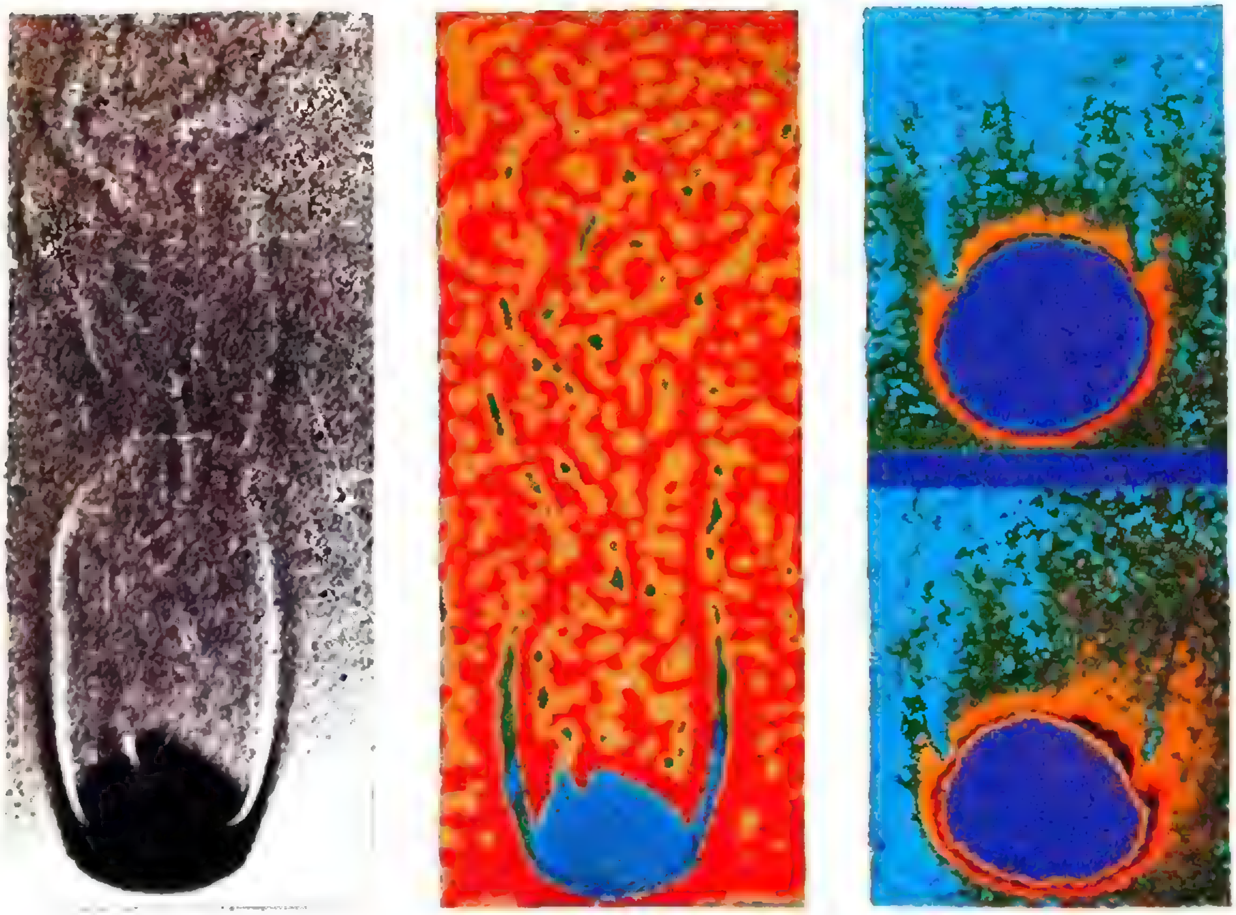


Рис. 2. *а)* *б)* *в)*

испарения водяной капли в комнатных условиях мала. А во влажном воздухе капля вообще не испаряется и даже может расти за счет конденсации (вспомните, как долго висят на деревьях и травах капли дождя или росы, а уж каплю воды на блюдце вы можете и специально понаблюдать). Обратим внимание еще и на то, что воздух для капли воды является «чужим» газом, а для азотной капли он «почти свой» (ведь основной компонент воздуха — азот).

Что же можно узнать о жизни азотной капли по ее «портрету»? Во-первых, «портрет» позволяет измерить размер капли (средний радиус r) и, следовательно, ее массу $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$ ($\rho_0 = 800$ кг/м^3 — плотность жидкого азота) и ее поверхность $s = 4\pi r^2$. Во-вторых, поскольку время Δt между вспышками известно, по сдвигу Δy последовательных изображений одной и той же капли (рис. 2,*в*) можно легко найти ее скорость $v = \Delta y/\Delta t$. А изменяя высоту капельницы, можно экспериментально найти изменение радиуса и скорости капли в процессе падения в зависимости от y: $r(y)$ и $v(y)$.

Результаты измерений показаны на рисунке 3 в виде кружочков. Виден характерный для всякого эксперимента разброс данных (для скорости v вычислена ошибка эксперимента и показана в виде горизонтальных отрезков). Измерения показали, что размер капли убывает монотонно, а скорость сначала растет, а затем, пройдя через максимальное значение, уменьшается.

Теперь дело за теоретическим осмыслением полученных результатов, которое позволит описать характерные периоды жизни падающей капли.

Акт 2. Безудержный разгон

Ясно, что сила сопротивления воздуха движущемуся телу как-то зависит от их относительной скорости.

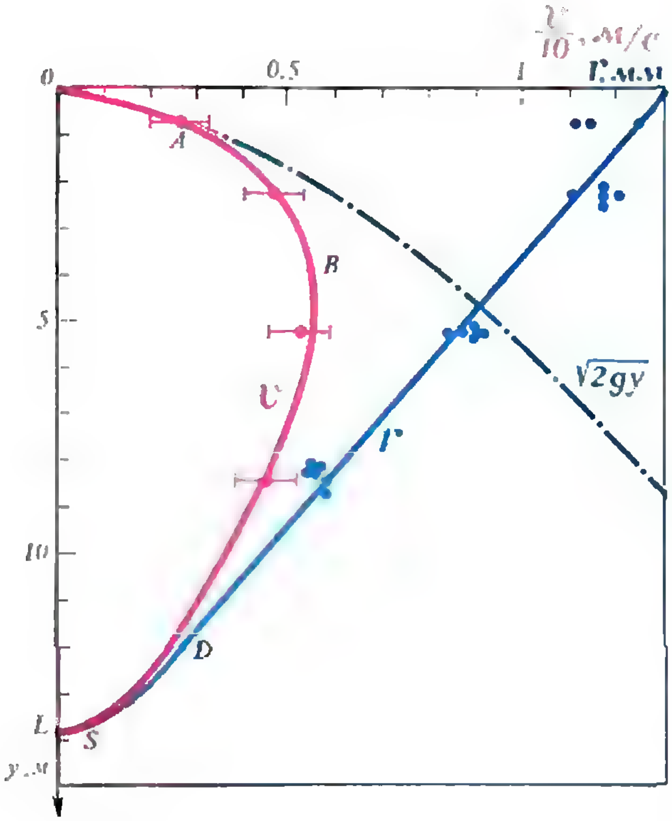


Рис. 3.

Во всяком случае, при нулевой скорости она равна нулю, и пока новорожденная капля движется еще медленно, силой сопротивления воздуха можно пренебречь. Тогда ее движение под действием только силы тяготения будет равноускоренным, а любой школьник знает про это движение все:

$$v^{(0)} = gt = \sqrt{2gy^{(0)}}, \quad y^{(0)} = \frac{gt^2}{2}.$$

Здесь верхний нуль как раз и означает приближенное рассмотрение при нулевой силе сопротивления. На рисунке 3 эта зависимость скорости от высоты показана штрихпунктирной линией, которая хорошо описывает экспериментальную кривую $v(y)$ на начальном участке OA.

Акт 3. Неизбежное торможение

По мере разгона капли сопротивление воздуха становится все ощутимее. Как описать эту силу?

Уж сколько раз твердили миру, что сила сопротивления воздуха движущемуся относительно него телу (аэродинамическая сила) пропорциональна плотности воздуха, квадрату размера тела (или площади его поперечного сечения) и квадрату скорости:

$$F_{\text{а}} = -C_{\text{а}}\rho\pi r^2 v^2.$$

Это утверждение можно получить, например, из соображений размерности. Здесь знак минус учитывает, что сила направлена в сторону, противоположную движению, а безразмерный коэффициент $C_{\text{а}}$, вообще говоря, зависит от скорости, но эта зависимость слабая и может быть получена из экспериментов или других более сложных теоретических соображений. А можно использовать и такие рассуждения. Поток массы воздуха внутри цилиндра с сечением, равным сечению πr^2 шаровой капли, равен $\rho v\pi r^2$(кг/с); но единица массы несет импульс (удельный импульс) $mv/m = v$, так что полный поток импульса в этом цилиндре равен $\rho v\pi r^2 v = \rho v^2\pi r^2$(Н). Конечно, линии тока газа при обтекании капли как-то искривляются — вот и появляется какой-то множитель $C_{\text{а}}$, учитывающий все, что не учтено в этих рассуждениях.

Итак, с учетом этой аэродинамической силы уравнение движения капли (второй закон Ньютона) можно записать в виде

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho\pi r^2 v^2 C_{\text{а}}. \qquad (1)$$

А если обе части разделить на массу капли $m = 4/3\pi r^3\rho_0$, получим

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3}{4}C_{\text{а}}\frac{\rho}{\rho_0}\frac{v^2}{r}, \qquad (2)$$

т. е. ускорение капли складывается из двух частей: ускорения силы тяжести g и отрицательного ускорения (торможения), связанного с аэродинамической силой.

Можно и по-другому записать последнее уравнение. Вспомним, что интервал времени dt можно получить делением пройденного пути dy на скорость движения v: $dt = dy/v$. Значит,

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

а ведь это есть изменение с расстоянием кинетической энергии единицы массы (или «удельной кинетической энергии» $v^2/2$).

Итак, уравнение (2) примет вид

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v^2}{r(y)}\right) dy, \quad (3)$$

и уж, казалось бы, совсем просто его проинтегрировать. Но тут самое время вспомнить, что размер капли тоже изменяется с расстоянием; чтобы этого не забыть, мы даже написали $r(y)$ в правой части. Последнее уравнение можно прочесть так: изменение удельной кинетической энергии капли складывается из работы силы тяготения и работы силы сопротивления на элементарном перемещении dy.

Акт 4. Непрерывная самоотдача и вершина славы

Ясно, что радиус капли неотрицателен и не возрастает со временем. А это означает, что с ростом скорости и уменьшением $r(y)$ второе слагаемое в правой части уравнения (3) может сравняться по модулю с первым, и в этой точке пути скорость перестанет изменяться: $\frac{dv}{dy} = 0$. Эта точка отмечена буквой B на рисунке 3. Можно теперь определить значение коэффициента сопротивления C_a, оставшегося неизвестным при определении аэродинамической силы, методом теории размерностей:

$$0 = g - \frac{3}{4} C_a \frac{\rho}{\rho_0} \frac{v_B^2}{r_B} \Rightarrow C_a = \frac{4}{3} g \frac{\rho_0}{\rho} \frac{r_B}{v_B^2}.$$

Подставив значения $\rho_0 = 800$ кг/м^3, $\rho \approx 1$ кг/м^3, $g \approx 10$ м/с^2, а значения скорости и радиуса капли взяв по рисунку 3 — $r_B \approx 0{,}9$ мм $= 9 \cdot 10^{-4}$ м, $v_B \approx 5$ м/с, получим $C_a \approx 0{,}2$.

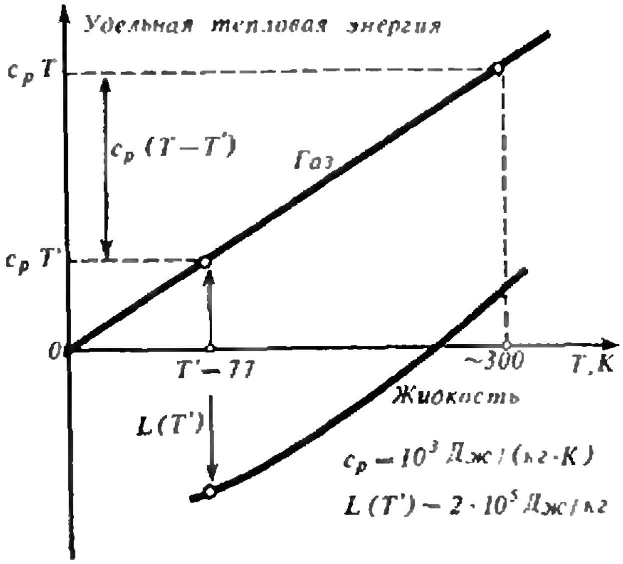


Рис. 4.

А что дальше, за точкой B? А дальше скорость капли должна падать, и ясно почему. Ведь сила тяжести пропорциональна массе капли, т. е. кубу ее радиуса ($\sim r^3$), а аэродинамическая сила — площади сечения капли, т. е. квадрату радиуса ($\sim r^2$), так что с уменьшением радиуса сила тяжести убывает быстрее, чем аэродинамическая. Таким образом, за точкой B капля тормозится, ее скорость уменьшается.

Теперь пора обсудить, как изменяется радиус капли. Прежде всего, причина его уменьшения совершенно ясна: тепло от обтекающего каплю воздуха идет на испарение ее верхних слоев. Запишем эту мысль.

Оценим подводимую к капле тепловую энергию. Поток массы воздуха, обтекающего каплю, — порядка $\rho v \pi r^2$ (кг/с). Это та масса воздуха, которая ежесекундно вступает в теплообмен с каплей. Каждая единица массы вещества несет энергию, состоящую из кинетической энергии хаотически движущихся молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Если считать окружающий воздух идеальным газом, то его удельная энергия равна $c_p T$ (для идеального газа энергия взаимодействия его молекул равна нулю; индекс p у теплоемкости указывает на постоянство давления). Для газообразной массы, только что испарившейся с капли температуры T', удельная энергия равна $c_p T'$; в конденсированном состоянии (в жидкой капле) она равна $c_p T' - L(T')$, где $L(T')$ — удельная теплота испарения, в которую входит удельная потенциальная энергия взаимодействия молекул.

На рисунке 4 изображен качественный вид зависимости удельного «теплосодержания» от температуры для газообразного азота (прямая линия c_pT для идеального газа) и для жидкого азота (нижняя кривая). Их можно (если нужно) построить и количественно по табличным данным. Нам достаточно указанных на рисунке значений c_p и L, которые пригодятся для численных оценок.

Таким образом, за время dt к капле поступает тепловая энергия порядка $\rho v \pi r^2 c_p(T-T')dt$. Эта энергия идет на испарение массы dm, что можно записать в виде

$$-Ldm = C_Q \rho v \pi r^2 c_p(T-T')\,dt. \qquad (4)$$

Здесь та же история, что и с потоком импульса (аэродинамической силой F_a): мы ввели безразмерный коэффициент C_Q, точное значение которого мы не знаем и в который «спрятаны» более тонкие (но менее существенные для нас) детали процесса.

Подставив в уравнение (4) равенства $dt = dy/v$, $dm = 4\pi r^2 \rho_0 dr$, получим

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{C_Q}{4}\,\frac{\rho}{\rho_0}\,\frac{c_p(T-T')}{L}. \qquad (5)$$

Таким образом, «скорость» изменения радиуса капли с расстоянием есть величина постоянная. Об этом и говорит прямая линия $r(y)$ на рисунке 3. Измерив ее наклон, из (5) можно найти безразмерный коэффициент C_Q. Собственно, для того ведь и нужен этот эксперимент — чтобы уточнить наши теоретические соображения; иначе обошлись бы и без него! Сплошные кривые $r(y)$ и $v(y)$ на рисунке 3 как раз и получены из условий наилучшего совпадения экспериментов с расчетами.

Акт 5. Жизнь ползком

Однако приведенные выше уравнения описывают динамику и тепло- и массообмен капли хотя и на большой части ее траектории, но не на всей. Начиная с некоторой точки (обозначим ее D), законы жизни капли изменяются. Дальнейшее ее жизнеописание тоже можно было бы провести довольно подробно, даже точнее, чем ранее, но это потребовало бы введения непростых понятий коэффициентов вязкости μ и теплопроводности λ. А можно было бы этот участок и вообще обойти молчанием, сославшись на то, что в жизни героев должны быть и таинственные периоды. Поэтому в порядке компромисса сделаем лишь набросок основных вех этого периода.

Самое существенное заключается в том, что после точки D капля становится столь малой и легкой, что величина $m\frac{dv}{dt}$ в левой части уравнения (1) перестает играть заметную роль, а сила тяжести mg уравновешивается силой сопротивления воздуха. Но и последняя тоже становится другой. Она уже пропорциональна первой степени радиуса и скорости и еще одной величине, именуемой коэффициентом вязкости; эта новая сила $F_\mu = 6\pi\mu r v$ называется силой Стокса, а движение капли называется ползущим, потому что напоминает медленное оседание дробинки в густом меде.

Итак, после точки D

$$0 = -6\pi\mu r v + mg,$$

откуда

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{\rho_0 g}{\mu}\,r^2. \qquad (6)$$

Тут сто́ит еще раз остановиться и задуматься. Ведь, судя по рисунку 3, скорость капли продолжает уменьшаться, так что $\frac{dv}{dy} \neq 0$ и $\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dy} \neq 0$; и масса еще не равна нулю, а мы написали «нуль» вместо $m\frac{dv}{dt}$. Что это значит?

Вспомним, что, размахнувшись, можно сравнительно далеко бросить камешек, но тополиный пух при том же размахе руки улетит совсем недалеко: пушинка тут же затормозится, ее скорость станет равной нулю (если воздух совершенно спокоен). Физик скажет при этом, что время релаксации, или «привыкания» скорости пушинки к скорости воздуха, малó, и это связано с малостью ее массы — меры ее инертности. А порыв ветра мгновенно унесет эту пушинку, в то время как для разгона парусной яхты потребуется определенное время (время релаксации). Так и наша капля, став достаточно малой, очень «быстро привыкает» к изменяющимся условиям обтекания, почти без запаздывания «следит» за ними (а они изменяются только за счет уменьшения ее массы, иначе установилась бы постоянная скорость падения). Все эти слова и поясняют, почему инертные свойства капли в конце ее траектории становятся несущественными, что и позволило написать «нуль» вместо $m\frac{dv}{dt}$.

После точки D подвод тепла к капле будет определяться в основном процессом теплопроводности. При этом за время dt капля будет получать тепловую энергию порядка $4\pi r^2\lambda\frac{T-T'}{r}dt$, и за счет этого тепла будет испаряться масса dm, т. е.

$$-L\frac{dm}{dt}\sim 4\pi r^2\lambda\frac{T-T'}{r},$$

откуда

$$r\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right)=-\frac{\lambda(T-T')}{L\rho_0}(=\text{const}),$$

$$r_D^2-r^2\sim t-t_D.$$

Этот закон, согласно которому площадь поверхности испаряющейся капли убывает пропорционально времени, был установлен русским ученым Б. И. Срезневским (1883 г.) на основе теории размерностей и многочисленных экспериментов с неподвижными каплями различных веществ (см. также задачу Ф1221 в «Кванте» № 7 за 1990 г.). Сравнивая полученное уравнение с (6), видим, что теперь скорость капли убывает со временем линейно, а значит, координата капли — квадратично, как и при равнозамедленном движении, и $v\sim\sqrt{y_L-y}$, где y_L — точка полного испарения (если бы движение происходило и далее по этому закону). Но тогда $r\sim\sqrt[4]{y_L-y}$.

Стоп, скажет вдумчивый читатель, но ведь скорость капли и в начальный момент должна равняться нулю, а мы во втором акте этого почему-то не учли? И правильно сделали — ответим мы, так как в момент отрыва от капельницы скорость капли уже не нулевая, а размер столь велик, что режим ползущего движения в воздухе не наблюдается с самого первого мгновения ее рождения. Кроме того, остается тонкий вопрос о влиянии близости самой капельницы (ведь в наших рассуждениях мы всюду мыслим все тела удаленными «на бесконечность» от изолированной капли).

Акт 6. Последняя микросекунда

И вот наступает такой момент в жизни капли, когда ее размер становится равным, а затем и меньше длины свободного пробега молекул воздуха (между столкновениями друг с другом) $l\approx10^{-7}$ м. Это значит, что капля находится уже в условиях не сплошной, а разреженной среды, и законы жизни капли изменяются. А сколько времени остается жить капле?

Теперь на единицу поверхности в единицу времени падает приблизительно $1/6n\langle u\rangle$ молекул воздуха (n — плотность молекул, $\langle u\rangle=\sqrt{8RT/\pi M}$ — их средняя тепловая скорость). Каждая молекула приносит энергию порядка $3/2kT$ (точнее $5/2kT$, если учесть, что воздух состоит из двухатомных молекул; но это не важно для оценки порядка величины). На всю сферическую поверхность капли, таким образом, в единицу времени приходит энергия

$$4\pi r^2\,\frac{1}{6}\rho\langle u\rangle\frac{5RT}{2M}.$$

Приравняв по порядку эту энергию величине

$$-L\frac{dm}{dt}=-L4\pi r^2\rho_0\frac{dr}{dt},$$

получим приближенное соотношение

$$\frac{dr}{dt}\approx-\frac{5}{2}\,\frac{RT\rho\langle u\rangle}{L\rho_0 6M}.$$

Правда, часть энергии уносится с испаряющейся массой, а значение удельной теплоты испарения, которое приводится в справочниках, надо бы уменьшить на удельную величину работы против сил давления сплошной среды, которой теперь нет; но эти две тонкости не повлияют на порядок искомой величины времени τ_s. Видно, что скорость испарения постоянна; значит, r уменьшается линейно по времени и

$$\frac{dr}{dt}=\frac{r_s}{\tau_s}=\frac{l}{\tau_s},$$

где r_s — это начальное значение радиуса капли на рассматриваемом этапе ее жизни в условиях разреженного газа. Отсюда время исчезновения капли ($r \to 0$) имеет порядок

$$\tau_s \sim \frac{r_s}{\frac{5}{12}\frac{RT}{LM}\frac{\rho}{\rho_0}\langle u\rangle}.$$

Подставив $r_s=l\approx 10^{-7}$ м, $T\approx 300$ К, $M=29\cdot 10^{-8}$ кг/моль, $\langle u\rangle\approx 500$ м/с, получим $\tau<10^{-6}$ с $=1$ мкс. Увы, последний этап жизни капли длится порядка микросекунды. По его истечении от почти неподвижной капли остается последняя молекула, и уже невозможно сказать, кому она принадлежала — капле ли, воздуху ли (разве что включить в ее состав заранее меченный атом азота?). И тут пора опустить

Занавес,

после чего потрясенный трагедией зритель может поразмышлять, все ли ему показали верно и зачем все это нужно.

Эпилог, или О чем умолчали в Трагедии и кому она нужна

Ну конечно, мы обсудили далеко не все. Например, как уже было сказано, можно было бы рассмотреть так называемые процессы молекулярного переноса массы (диффузию), импульса (вязкость) и энергии (теплопроводность). Это потребовало бы знания соответствующих коэффициентов и позволило бы описать участок движения капли от точки D до точки S, за которой начинается свободномолекулярный режим обтекания. Далее, не обсуждено влияние кислорода, присутствующего в воздухе,— «чужого» газа с точки зрения вещества азотной капли; можно ожидать, что этот кислород, как и всякое вещество, будет стремиться диффундировать туда, где его нет, т. е. внутрь капли; во всяком случае, он как-то мешает испаряющимся молекулам азота. Не учтено и то, что форма капли не обязательно шаровая; она колеблется в процессе движения (это видно из рисунка 2, *в*). Далее, мы считаем, что температура капли во все времена ее жизни остается равной температуре насыщенного пара при атмосферном давлении над плоской поверхностью жидкого азота, а это, может быть, не совсем так.

И наконец, кому нужна эта капля с ее трагедией?

Поведение отдельных капель и целых облаков из них нужно знать во многих случаях. Например, если нужно сделать видимой (визуализировать) картину обтекания модели будущего летательного аппарата, добавьте в поток капельки жидкого азота и подсветите в нужном месте — в результате рассеяния света на «тумане», состоящем из этих капелек, а также частиц воды и углекислого газа, сконденсировавшихся в их холодных следах, станут видимыми все завихрения воздуха вокруг модели. А в так называемых криогенных аэродинамических трубах жидкий азот специально впрыскивается в поток для его охлаждения, и важно знать, как быстро испаряются капли азота с разными начальными размерами. И во многих процессах химической технологии, очистки промышленных газов и в других случаях нужно знать прежде всего поведение отдельной капли (любого вещества) с изменяющейся массой.

Для нас полезно уже то, что эта маленькая трагедия азотной капли позволила обсудить некоторые физические процессы и показать, как эксперимент и теоретические рассуждения дополняют друг друга.

Кооператив «Электрон» и предприятие «Восток Лтд»

Предлагают владельцам и пользователям ПЭВМ типов «Вектор-06Ц», «Львов ПК-01», УК-НЦ («Электроника МС0511»), «БК0010-01», «БК0011», «IBM XT/AT», «Поиск», «Специалист», «Синклер ZX Спектрум», «Правец-8Д», ДВК-3,4, «РК-86 32К», «Микроша», «Партнер», «Апогей», «Агат-7», «Корвет», «Атари XE/XL//ST», «Коммодор +4,16», «Коммодор 64,128» широкий выбор системных, прикладных, игровых, учебных программ, новейшие разработки из первых рук по умеренным ценам, а также учебные программы для классов УК-НЦ («Электроника МС0202»), КУВТ-86.

Заключат с авторами договоры на тиражирование разработанного ими программного обеспечения с выплатой процентов от реализации.

Купят программы для ПЭВМ «Вектор-06Ц», «Львов ПК-01», УК-НЦ, «Поиск», возможен обмен программами.

Продадут компьютеры «Синклер ZX Спектрум» без дисковода и с дисководом, «Специалист», ДВК всех модификаций, УК-НЦ («Электроника МС0511»), классы УК-НЦ («Электроника МС0202») с программным обеспечением, «Корвет», классы «Эпос» на базе ПЭВМ «Корвет» (32 рабочих места), IBM-совместимые компьютеры, телефаксы, копировально-множительную технику, дискеты.

Доработают ранние модели ПЭВМ типа ДВК-2, ДВК-3 с приближением их возможностей к новым моделям ДВК-3,4, оснастят их дополнительными контроллерами и периферийными устройствами.

Оснастят компьютеры УК-НЦ («Электроника МС0511») жесткими дисками типа «Винчестер», кассетами ППЗУ с Бейсиком.

Окажут всем предприятиям и организациям, заинтересованным в закупках разнообразных импортных товаров народного потребления за советские рубли, посреднические услуги: помощь в заключении Вашим предприятием контрактов с инофирмами и совместными предприятиями. Списки предлагаемых к закупке товаров будут высланы по вашей письменной заявке.

Приглашают ваше предприятие стать полноправным участником вновь создающихся предприятий в свободной экономической зоне г. Зеленограда. Кооператив «Электрон» и предприятие «Восток Лтд» берут на себя регистрацию предприятия, обеспечивают оффисом, телефоном, менеджером, бухгалтером. Прибыльность создаваемых предприятий гарантируется. Все, что требуется от вашего предприятия,— это заключить с предприятием «Восток Лтд» договор, определяющий долю участников в уставном капитале и процент, идущий на оплату наших услуг.

Вышлют наложенным платежом:

— комплект рабочей документации для изготовления малогабаритного недорогого станка для изготовления стенных шлакоблоков;

— книги и брошюры по программному и аппаратному обеспечению ПЭВМ «Синклер ZX Спектрум»;

— комплекты документации по созданию обществ с ограниченной ответственностью, акционерных обществ, малых предприятий;

— справочник адресов и телефонов зарубежных фирм, аккредитованных в г. Москве.

Окажут всем предприятиям услуги по маркетингу наиболее эффективным способом: разошлют рекламу вашей продукции по 40000 адресов предприятий и учреждений.

Приглашают к сотрудничеству дилеров для помощи в реализации продукции и услуг кооператива «Электрон» и предприятия «Восток Лтд» с выплатой процентов от реализации.

Почтовый адрес для справок, запросов каталогов и заявок: 103489, Москва, Зеленоград, корпус 705, кооператив «Электрон».

По желанию заказчиков каталоги, программы, компьютеры, документация высылаются по почте.

Телефон для справок: 536-12-81 (с 12 до 18 часов).

НЕВПИСЫВАЕМЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Е. АНДРЕЕВ

Рассмотрим куб, одна из вершин которого срезана плоскостью (рис. 1). Можно ли полученный многогранник вписать в сферу? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какой именно плоскостью срезана вершина? С решением этой, а также подобных задач мы и хотим познакомить читателя.

Предположим, что дан выпуклый ограниченный многогранник, т. е. тело в пространстве, ограниченное со всех сторон плоскими многоугольниками — гранями — и лежащее по одну сторону от плоскости каждой из своих граней. Требуется выяснить, можно ли данный многогранник вписать в сферу.

Обозначим многогранник буквой M, занумеруем по отдельности его грани, ребра и вершины и будем обозначать i-ю грань через Γ_i, i-е ребро через P_i и i-ю вершину через B_i. Принято говорить, что две грани смежные, если у них имеется общее ребро, а две вершины соседние, если они суть концы одного и того же ребра.

Чтобы решить поставленную задачу, надо прежде всего проверить, являются ли все многоугольники Γ_i вписанными. Затем для каждого ребра P_k рассмотрим пару граней Γ_i и Γ_j, граничащих по этому ребру, и обозначим через r_k расстояние от точки пересечения перпендикуляров, восставленных из центров окружностей, описанных около Γ_i и Γ_j, до одной из вершин многоугольника Γ_i или Γ_j; величина r_k, очевидно, не зависит от выбора вершины (рис. 2).

Задача 1. *Докажите, что многогранник M вписанный тогда и только тогда, когда все многоугольники Γ_i вписанные, и $r_1=r_2=\ldots=r_m$, где m — число ребер многогранника.*

Этот или аналогичный способ проверки вписанности M был известен очень давно, но в начале XX века обнаружилось, что в целом ряде случаев можно доказать, что M вписанным не является, не производя почти никаких вычислений.

Первым это заметил немецкий математик Э. Штейниц. В 1927 году вышла в свет его статья, в которой была доказана следующая теорема.

Теорема Штейница.

Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы

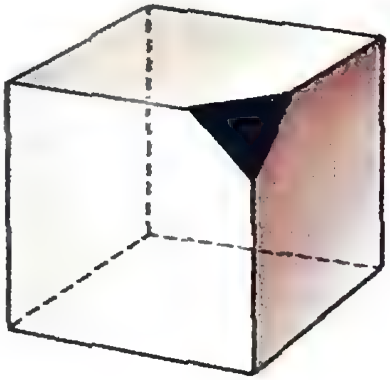


Рис. 1.

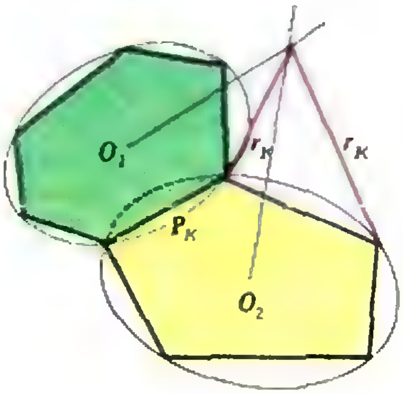


Рис. 2.

I) никакие две черные вершины не были соседними;

II) число черных вершин было больше, чем число белых.

Тогда многогранник M нельзя вписать в сферу.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сделаем некоторые замечания. Пусть у нас есть фиксированная сфера и некоторый двугранный угол, ребро которого эту сферу пересекает. Возьмем точку пересечения ребра со сферой и проведем через нее касательную плоскость (рис. 3). Двугранный угол высекает в этой плоскости линейный угол. Этот угол мы назовем линейным углом двугранного угла относительно данной сферы или просто *относительным углом двугранного угла*. Очевидно, что относительный угол не зависит от выбора одной из двух точек пересечения ребра со сферой. Если же ребро касается сферы, то удобно положить величину относительного угла равной нулю.

Рассмотрим теперь выпуклый многогранный угол, все ребра которого пересекают данную сферу. Относительные углы его двугранных углов назовем *относительными углами данного многогранного угла*. Пусть у многогранного угла n граней, а его вершина лежит на сфере. Тогда сумма его относительных углов равна $\pi(n-2)$. В самом деле, проведем через вершину многогранного угла касательную плоскость, а затем проведем плоскость, ей параллельную, секущую и сферу, и все ребра многогранного угла (это возможно, так как все ребра угла пересекают сферу). Многогранный угол высекает в этой последней плоскости многоугольник, углы которого равны относительным углам, что следует из теоремы об углах с попарно параллельными сторонами (рис. 4).

Перейдем к доказательству самой теоремы. Предположим, что многогранник M вписан в сферу. Обозначим относительный угол двугранного угла с ребром P_i через γ_i. Пусть n_k — число ребер, сходящихся в вершине B_k.

Из доказанного выше следует, что сумма относительных углов при вершине B_k равна $\pi(n_k-2)$. Положим $\beta_i=\pi-\gamma_i$, угол β_i — *внешний относительный угол*, тогда $\gamma_i=\pi-\beta_i$. Если сумма внутренних относительных углов равна $\pi(n_k-2)$, то сумма внешних относительных углов равна 2π. Итак, если в вершине B_k сходятся ребра P_i, P_j, ... P_l, то

$$\beta_i+\beta_j+\ldots+\beta_l=2\pi.$$

Выпишем аналогичные равенства для каждой вершины многогранника, потом умножим равенства, соответствующие черным вершинам, на -1 и сложим их все. Черных вершин больше, следовательно, в правой части будет стоять отрицательное число. Рассмотрим сумму, стоящую в левой части. Если i-е ребро идет из черной вершины в белую, то число β_i входит в левую часть один раз со знаком «+» и один раз со знаком «—», в сумме 0; если — из белой вершины в белую, то β_i оба раза входит с «+». Ребер

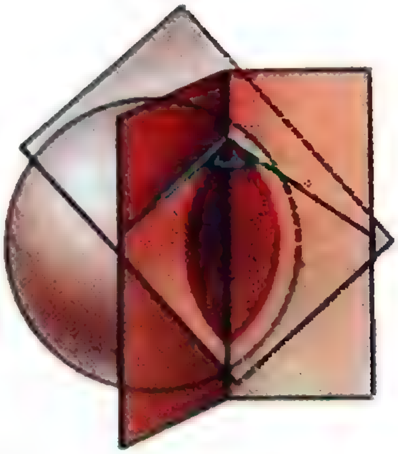


Рис. 3.

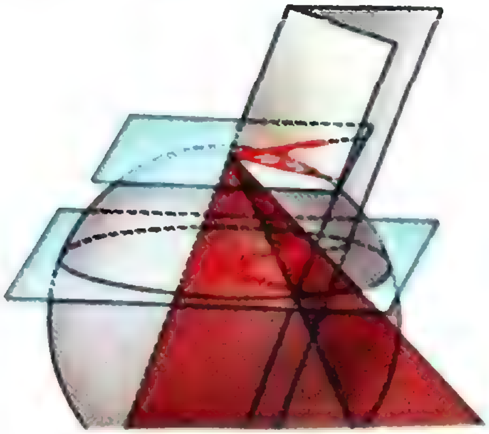


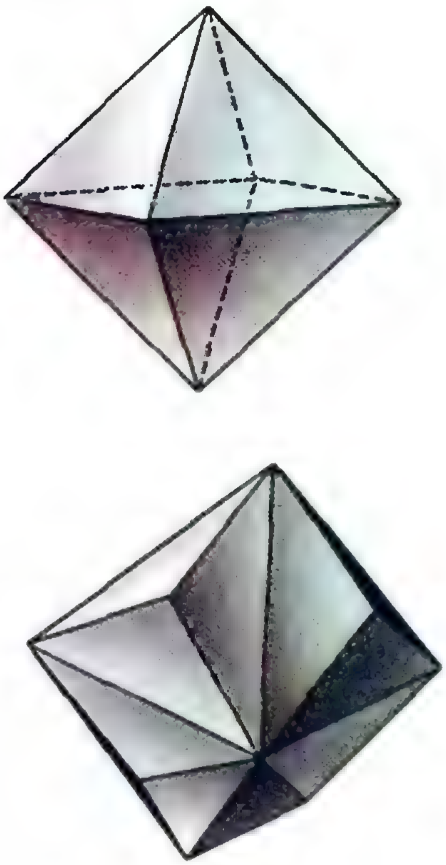
Рис. 4.

с двумя черными концами не бывает. Итак, сумма чисел в правой части не меньше нуля, и мы пришли к противоречию, предположив, что многогранник M — вписанный.

Прежде чем переходить к анализу полученного результата, т. е. прежде чем выяснять, чем замечательна и что означает теорема Штейница, надо показать, что теорема содержательна, т. е. что существуют многогранники, удовлетворяющие ее условиям. Возьмем октаэдр (рис. 5, *а*) и на каждой его грани как на основании построим правильную треугольную пирамиду, причем высоту пирамиды возьмем такой маленькой, чтобы двугранные углы при основании были меньше 25°. Рассмотрим многогранник M, склеенный из исходного октаэдра и восьми вновь построенных пирамид (рис. 5, *б*).

Задача 2. *Докажите, что многогранник М — выпуклый.*

Объявим белыми те его вершины, которые были вершинами исходного октаэдра, а черными — все остальные. Ясно, что условия теоремы Штейница выполняются. Итак, мы построили пример многогранника, который нельзя вписать в сферу, в чем можно убедиться, не зная ни размеров, ни углов многогранника, но зная только его *строение*.


а)

б)

Рис. 5.

Уточним, что значит строение. Начнем с плоскости. Чтобы описать строение выпуклого многоугольника, надо сказать, сколько у него вершин, тогда у него столько же и сторон; каждая сторона смежна с двумя другими, и в каждой вершине сходятся две стороны.

Иное дело в пространстве: у додекаэдра (рис. 6, *а*) и у десятиугольной призмы (рис. 6, *б*) одинаковое число граней — 12, одинаковое число ребер — 30, одинаковое число вершин — 20, а строение совсем разное. Чтобы описать строение многогранника, надо сказать не только сколько у него ребер, граней и вершин, но и как грани склеены между собой, т. е. какие грани являются смежными, какие вершины являются соседними и какие грани сходятся в каждой из вершин. Два многогранника имеют одинаковое строение, если у них одинаковое число вершин, ребер и граней и они одинаково из этих элементов составлены.

Назовем выпуклый многогранник M такой, что ни сам он, ни любой другой многогранник, имеющий то же строение, вписанным не является, *абсолютно невписываемым*. Из теоремы Штейница следует, что любой многогранник, удовлетворяющий ее условиям I и II, является не только невписываемым, но и абсолютно невписываемым. Построенный выше многогранник (рис. 5, *б*) представляет собой пример абсолютно невписываемого многогранника. Ничего подобного на плоскости не бывает: для всякого $n \geqslant 3$ найдется вписанный n-угольник. Поэтому до Штейница считали, что не существует абсолютно невписываемых многогранников. Существовали даже очень правдоподобные, но чуть-чуть не законченные доказательства этого утверждения. Теперь появилась новая проблема: найти все абсолютно невписываемые многогранники, точнее, найти необходимые и достаточные условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым.

У нас есть условие Штейница — достаточное условие абсолютной невписываемости. Может быть оно является необходимым? Нет. Это вытекает из следующих задач.

Задача 3. *Пусть все вершины многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

1) число белых было не больше числа черных;

2) никакие две черные вершины не были бы соседними и, напротив, нашлись бы две соседние белые вершины.

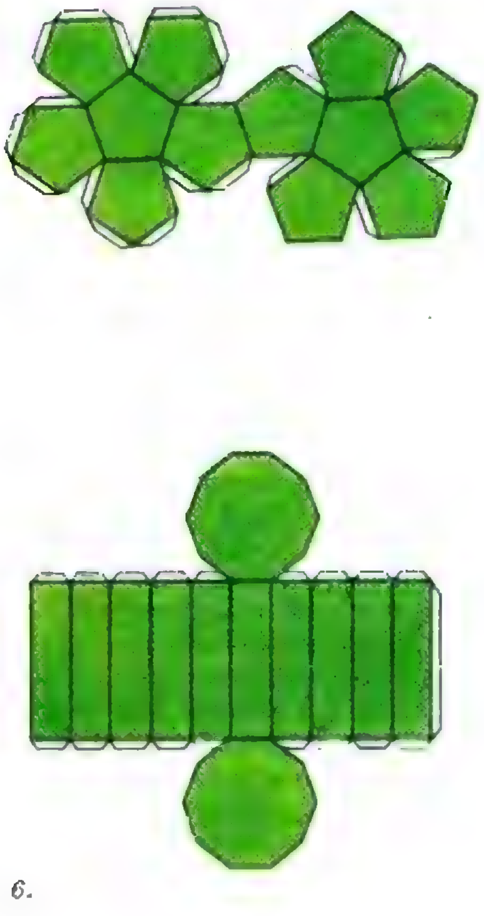
Доказать, что многогранник M нельзя вписать в сферу.

Задача 4. *Построить пример многогранника, удовлетворяющего условию задачи 3 и не удовлетворяющего условиям теоремы Штейница.*

Важно отметить и другое: если в каждой вершине многогранника M сходится одно и то же число, скажем, k граней, то M не удовлетворяет ни условию теоремы Штейница, ни условию задачи 3. Предположим противное, и пусть m — число всех ребер многогранника, p — число его черных вершин, g — белых, $p \geqslant g$ (в теореме Штейница это неравенство — строгое). Тогда $2m = k(p+g)$: у каждого ребра два конца, в каждой вершине сходятся k ребер. Кроме того, на каждом ребре лежит белая вершина, т. е. $m \leqslant kg$, и в случае задачи 3 это неравенство строгое. С другой стороны, $p+g \geqslant 2g$, и в условиях теоремы Штейница это неравенство строгое. Итак, получаем неравенства

$$kg \leqslant m \leqslant kg.$$

Если M удовлетворяет условию теоремы Штейница или условию задачи 3, то одно из этих неравенств будет строгим, что невозможно.


а)

б)

Рис. 6.

Остановимся теперь на многогранниках, в каждой вершине которых сходятся три грани: эти многогранники в некотором смысле самые типичные, но мы о них ничего не знаем с точки зрения их вписываемости.

Рассмотрим три попарно пересекающиеся плоскости. Они либо образуют трехгранный угол, либо линии их пересечения параллельны и тогда скажем, что они образуют бесконечный трехгранный угол. Фиксируем некоторую сферу. Пусть все ребра трехгранного угла ее пересекают, а вершина этой сфере не принадлежит, а может быть, вершины и вовсе нет. Оказывается, что если вершина угла лежит внутри шара, но не на сфере, то сумма относительных углов больше π, а если она лежит вне шара или угол бесконечный, — то меньше π. Действительно, рассмотрим окружности, высекаемые гранями трехгранного угла на сфере, — углы между этими окружностями и есть относительные углы трехгранного угла. Возьмем точку на сфере, не принадлежащую ни одной из этих окружностей, и стереографически спроектируем окружности из этой точки на плоскость. Возможны три случая (рис. 7, *а*, *б*, *в*): в первом — вершина лежит вне сферы, во втором — на сфере, в третьем — внутри сферы. Величины углов сохраняются при стереографической проекции, значит, углы α, β, γ равны исходным относительным углам. В первом случае $\alpha+\beta+\gamma$ меньше суммы углов $\triangle ABC$, а в третьем — больше. Утверждение доказано.

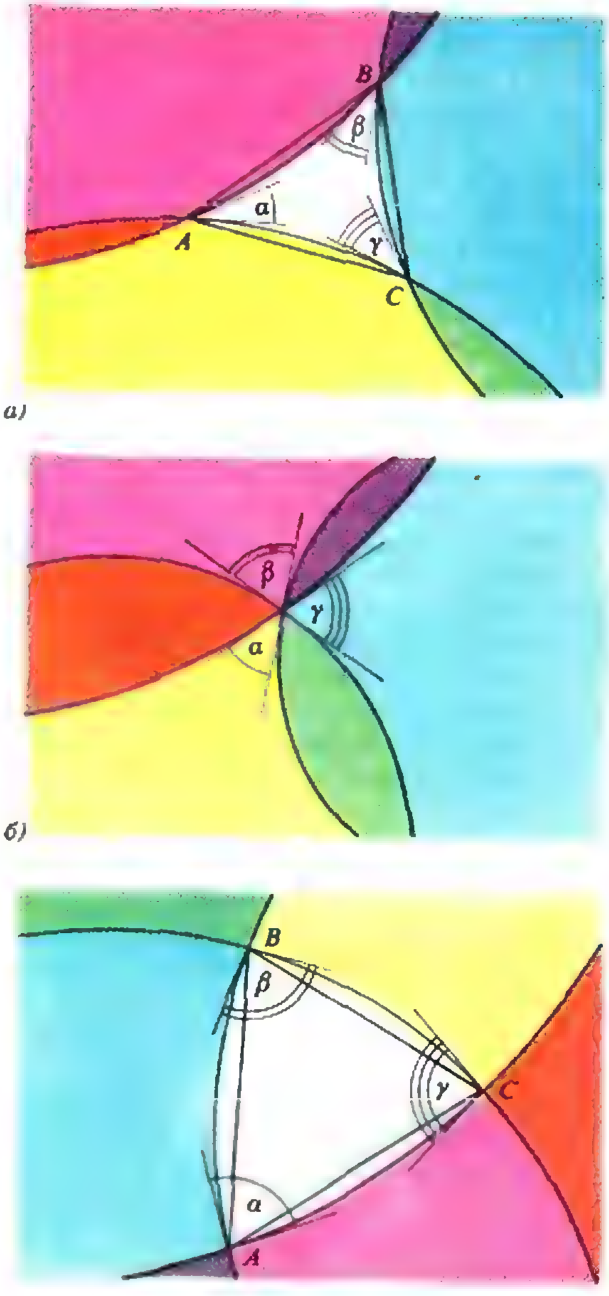
Пусть все вершины многогранника M можно разделить на черные и белые так, чтобы две вершины одного цвета не были соседними.

Задача 5. *Пусть во всех вершинах многогранника M сходится одинаковое число граней и все вершины разбиты на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета соседними не оказались. Доказать, что число черных вершин равно числу белых.*

Задача 6. *Докажите, что вершины многогранника можно разбить на черные и белые так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соседними тогда и только тогда, когда у каждой грани многогранника четное число сторон.*

Указание. Для доказательства достаточно взять любую вершину и объявить ее белой, соседние с ней — черными и т. д. Нужно доказать, что при этом не возникает противоречий, т. е. что во всякой замкнутой ломаной, составленной из ребер многогранника, четное число звеньев.

Вернемся к многограннику M с раскрашенными вершинами. Так как у M в каждой вершине сходятся три грани, то число белых вершин равно числу черных вершин. Выделим у него некоторые из черных вершин (одну, две или все) и отрежем их с помощью плоскостей. Каждую вершину отрежем одной плоскостью, пересекающей лишь те ребра, которые из этой вершины исходят, и не содержащей никаких вершин M. Получившийся многогранник обозначим M'. Он отличается от M тем, что у него вместо некоторых черных вершин — треугольные грани. Докажем, что многогранник M' — абсолютно невписываемый.



а)

б)

в)

Рис. 7.

Предположим, что многогранник M' или другой многогранник, имеющий то же строение, вписан в сферу. Выделим три грани, которые соответствуют трем граням многогранника M, сходящимся в одной обрезанной вершине. Эти три грани попарно смежные, вершина обрезанного трехгранного угла лежит заведомо вне сферы, так как многогранник вписанный, поэтому сумма относительных углов при них меньше π. Припишем каждому ребру многогранника M относительный угол при соответствующем ребре многогранника M'. Тогда сумма этих приписанных углов при всех белых и при всех не выделенных черных вершинах равна π, а при выделенных черных вершинах строго меньше π. Как и при доказательстве теоремы Штейница, выпишем эти равенства и неравенства, суммы, соответствующие белым вершинам, умножим на -1 и сложим их. В результате должно получиться строгое неравенство. Однако в левой части мы получим нуль, ибо каждый из приписанных углов один раз входит в сумму при белой вершине, а один раз — при черной. В правой же части мы тоже получим нуль, так как число белых вершин равно числу черных. Полученное противоречие ($0<0$) и доказывает наше утверждение.

Точно такое же рассуждение можно провести, если отмеченные вершины срезать не одной, а несколькими плоскостями, лишь бы сходящиеся в них грани оставались попарно смежными и не сходились в одной вершине.

Этим способом можно получать и другие достаточные условия. Сейчас стали известны и некоторые необходимые условия того, чтобы многогранник был абсолютно невписываемым, но в целом проблема до сих пор не решена.

Метод относительных углов позволяет решать и другие интересные задачи.

Задача 7. *Пусть в каждой вершине многогранника M сходятся три грани, а у каждой его грани четное число сторон. Докажите, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M — вписанный.*

Указание. Воспользуйтесь задачей 6. Не пропустите такой неприятной возможности: ребра, исходящие из вершины, не лежащей на сфере, касаются сферы.

Аналогичная, но более сложная

Задача 8. *Пусть все вершины многогранника M разбиты на черные и белые, как это описано в задаче 5, и число черных вершин равно числу белых. Докажите, что если все, кроме одной, вершины многогранника M лежат на сфере, то многогранник M — вписанный.*

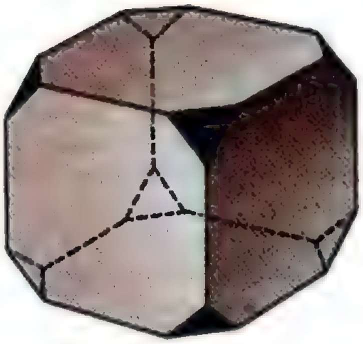


Рис. 8.

Таким образом, если вершины можно разбить на черные и белые, как это описано в задаче 5, то многогранник либо абсолютно невписываемый, либо удовлетворяет задаче 8, т. е. из того, что на сфере лежат все его вершины, кроме одной, следует, что он вписанный.

Простейшим примером абсолютно невписываемого многогранника является куб с одной срезанной вершиной (см. рис. 1).

В заключение остается сознаться, что Штейниц доказал отнюдь не ту теорему, которая называется его именем, но двойственное к ней утверждение, которое мы сформулируем в виде задачи.

Задача 9. *Пусть все грани многогранника M можно разбить на черные и белые так, чтобы*

1) число черных граней было больше, чем число белых;

2) никакие две черные грани смежными не являются.

Докажите, что многогранник M нельзя описать вокруг сферы.

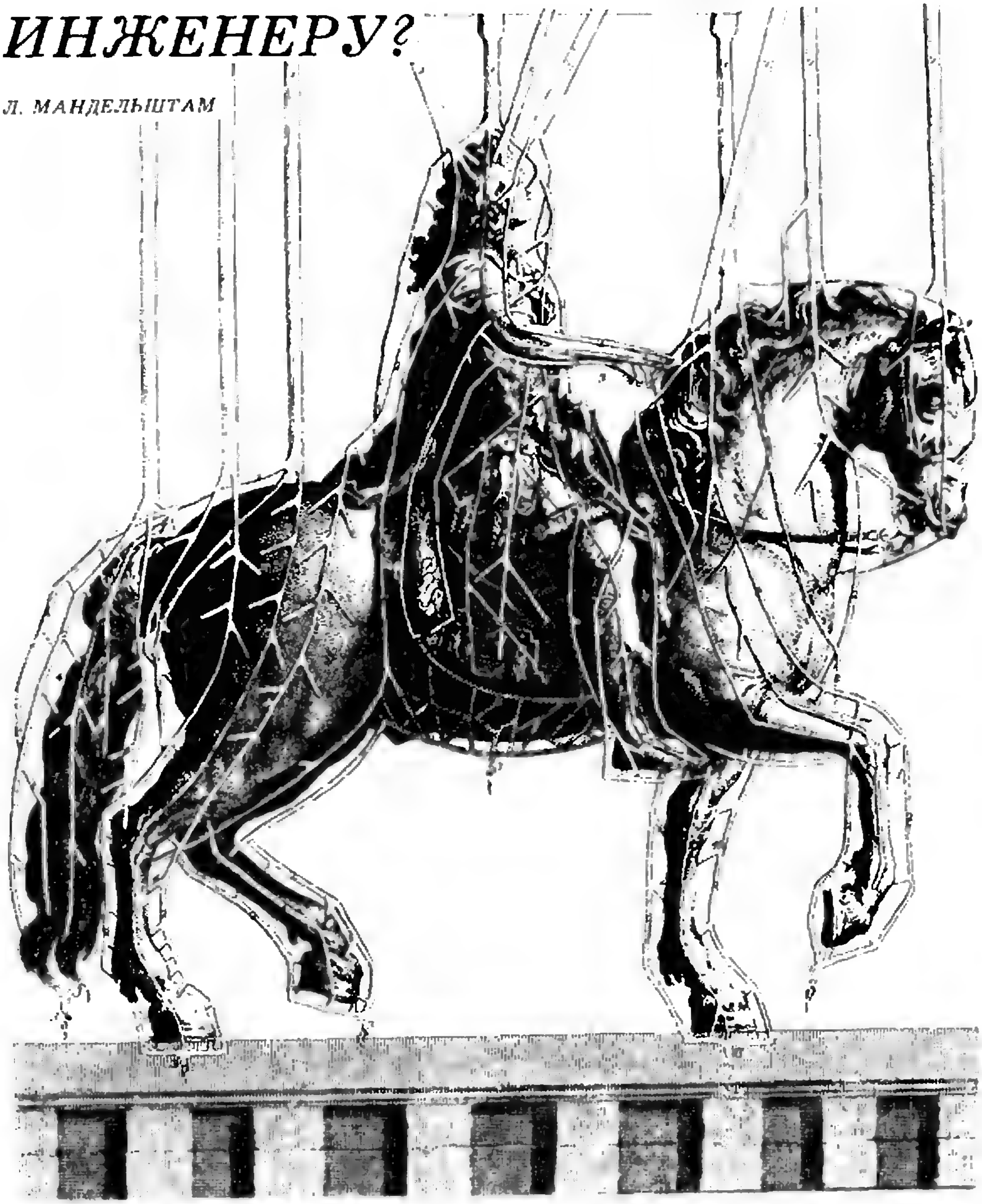
На рисунке 8 изображен один из самых простых примеров *абсолютно неописываемого* многогранника — куб, у которого срезаны все вершины.

Год назад мы начали новый цикл публикаций с условным названием «Письма о физике». Сегодня вниманию читателей мы предлагаем еще один материал из этого цикла. Это вводная в курс физики лекция, прочитанная в 1918 году известным советским физиком, создателем одной из крупнейших физических научных школ академиком Л. И. Мандельштамом студентам Одесского политехнического института. Тема лекции, как нам представляется, остается актуальной и сейчас.

Впервые этот материал был опубликован в нашем журнале в июле 1979 года.

ПОЧЕМУ ФИЗИКА НУЖНА ИНЖЕНЕРУ?

Л. МАНДЕЛЬШТАМ



Приступая к чтению лекций по физике, я хотел бы, прежде чем перейти к систематическому изложению предмета, остановиться сегодня на одном общем вопросе и поделиться с вами некоторыми соображениями насчет того положения, которое физика занимает и, по моему убеждению, должна занимать в ряде наук, изучению которых вы собираетесь посвятить ближайшие годы.

Мне хотелось бы дать вам материал, на основании которого вы могли бы сами убедиться, что физика нужна инженеру всегда, во все время его деятельности, и что на нее нельзя смотреть, как на предмет, который нужно — да и нужно ли? — раз пройти, а потом можно и забыть, так как ведь все равно то, что необходимо знать инженеру из физики, еще раз повторяется при прохождении специальных предметов.

Говоря, что инженеру нужна физика, я имею в виду не только то, что он должен быть знаком с теми отдельными явлениями и законами, с которыми он непосредственно встречается в своей практической деятельности. Такое утверждение было бы само собой очевидным. Что инженер-строитель, рассчитывая прочность сооружения, должен быть знаком с основными законами упругости, что инженер-электротехник в проектировании, скажем, осветительной сети должен знать закон Ома, связывающий силу тока, сопротивление и электродвижущую силу батареи, и т. д.— это, конечно, не нуждается в доказательстве. Нет, когда я говорю, что инженеру нужна физика, я этим хочу сказать, что ему нужно широкое владение этим предметом в его совокупности; я утверждаю, что ему нужно знание физики самой по себе как цельной дисциплины с ее специфической методикой, а не только в зависимости от текущих применений. Я утверждаю, наконец, что для этого инженеру недостаточно знать только опытную часть ее, а что он должен быть основательно знаком с теорией.

Но для того чтобы показать, что это действительно так, мы прежде всего должны постараться выяснить структуру физики как науки и посмотреть, в каком соотношении находятся теория и тот опытный материал, которым физика оперирует.

Конечно, мы не можем решать здесь вопроса о сущности физической науки во всей его полноте. Этот вопрос, относящийся к теории познания и крайне интересный как для физика, так и для философа, значительно более сложен, чем это может показаться на первый взгляд. В истории философской мысли он всегда занимал важное место. Но нам для нашей цели и нет надобности особенно сильно в него углубляться. Нам достаточно будет заняться только одной его стороной, хотя, правда, и здесь нам придется начать несколько издалека.

Не подлежит сомнению, что единственным средством, с помощью которого мы черпаем наши сведения об окружающем нас мире, являются наши органы чувств. Но единичные чувственные восприятия слишком мимолетны и неустойчивы, чтобы служить материалом для дальнейшей переработки. И вот человек выделяет и фиксирует в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Этот процесс, совершающийся совершенно непроизвольно, ведет к образованию того, что в логике называется понятиями.

В образовании понятий состоит первый шаг по пути познания природы. Они являются той базой, на которой строится дальнейшее. Но образованные таким образом первоначальные понятия обладают, как мне кажется, следующим свойством. Они не поддаются строгому определению. Мы все владеем понятием «свет». Но объяснить словами, определить один другому сущность этого понятия мы не можем. Чтобы научиться ему, нужно иметь глаза, нужно видеть, как освещается все нас окружающее при восходе солнца и как погружается опять во мрак при его заходе. Если быть прозаичнее, тому же можно научиться, включая и выключая электрическую лампочку. Но одно несомненно — слова, определения здесь бессильны. Попробуйте объяснить слепому от рождения, что такое свет.

Итак, одними словами первоначальным физическим понятиям научить нельзя. Вот почему, позвольте мне это здесь подчеркнуть, ни учебник, ни учитель недостаточны, чтобы научить физике. Учащийся должен хоть немного работать опытно сам. Он должен хоть поверхностно, но сам слышать, сам осязать те явления, о которых ему говорят.

Мы несколько отвлеклись в сторону. Вернемся к первым шагам по пути познания природы, к понятиям, непосредственно навязанным нам природой. По мере того, как человечество увеличивало свой запас навязанных опытом понятий (опытных знаний), все настоятельнее являлась потребность в их систематизации, без которой нет возможности разобраться в бесконечном обилии окружающих нас явлений. В этой систематизации громадную службу оказывает нам наша способность образовывать другого рода понятия, понятия более определенные, чем те, о которых шла речь выше, и менее зависящие от наших чувств. В первую очередь сюда относятся понятие о числе и те понятия, которыми оперирует математика. В области этих понятий, другими словами, в области математического мышления мы себя чувствуем несравненно более уверенно, чем при оперировании с материалом, непосредственно поставляемым нам нашими чувствами. При помощи математических понятий можно определенно формулировать посылки и так же определенно и легко делать из них выводы и заключения. И вот, зная за собой эту силу, человек старается — вначале инстинктивно, а затем, с развитием науки, и сознательно — приспособить математические понятия и специально понятие о числе к сырому опытному материалу, к понятиям физическим.

В этом процессе перехода от качественных соотношений к количественным заключается важнейший этап научной мысли. На нем основано как понятие об измерении, так и сам процесс измерения физических величин. Можно смело утверждать, что какая-нибудь область физических явлений вообще становится наукой только с того момента, когда мы научаемся вводить в нее измерения. Так, например, пока не было точного понятия температуры и не умели ее измерять, науки о теплоте почти или даже совсем не существовало.

Пользуясь в описанном смысле математикой, мы стараемся теперь найти систему в окружающих нас явлениях и облегчить себе их понимание тем, что ищем такие математические формулы в общем смысле слова, не непременно узко алгебраическом, которые охватывали бы возможно большее число единичных фактов или общую сторону различных явлений. Если такая формула найдена, то мы говорим, что нашли физический закон. Возьмем пример. Закон преломления света при переходе из одной прозрачной среды в другую гласит: падающий и преломленный лучи лежат в одной плоскости, и отношение между синусом угла падения и синусом угла преломления есть величина постоянная. Например, для воды и воздуха это отношение равно 1,33. Что представляет собой этот закон? Это — формула, охватывающая бесчисленное множество единичных случаев преломления. Она избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт, запоминать или заносить в таблицы для каждого отдельного случая угол падения и соответственный угол преломления луча. Зная закон преломления, вы уверены, что в любой момент, когда это вам понадобится, при помощи простейших вычислений вы сможете решить всякий представившийся в этом направлении вопрос.

По мере того как физические знания росли, по мере того как число найденных законов увеличивалось, все труднее и труднее становилось разобраться в их разнообразном обилии. Движимые опять необходимостью возможно лучше ориентироваться в этом громадном материале, люди старались найти такие картины, такие точки зрения, которые позволили бы объединить в одно целое отдельные законы. Так создавалась физическая теория или, вернее, теории.

Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы находятся к отдельным явлениям. Систематизирующая роль теории, конечно, не исчерпывает всей ее сущности, но все же, как вы видите, в систематизации наших знаний она имеет громадное значение. И тут математика является огромным подспорьем. Только что рассмотренные соотношения между различными сторонами физики и постепенное развитие их могут быть прослежены на любой физической теории. Очень просто это сделать, например, на оптике.

Оптика, между прочим,— одна из самых древних научно разработанных отраслей физики. Изучение оптических явлений уже в древности привело к установлению некоторых законов. Закон прямолинейного распространения света и закон отражения от зеркал были известны давно. Позже, в XVII веке, был найден закон преломления. Смотря по тому, какая группа явлений подвергалась исследованию и с каких точек зрения к ним подходили, были устанавливаемы различные отрывочные законы. Были открыты явления дифракции света, интерференции и т. д. Но пока не было общей, объединяющей точки зрения, было чрезвычайно трудно разбираться во всей совокупности оптических явлений. Более того, отдельные законы, казалось, находились в противоречии друг с другом. Загибание света не вязалось, например, с прямолинейным распространением луча.

Так было до тех пор, пока усилиями ряда гениальных физиков, из которых в первую очередь должны быть названы Гюйгенс и Френель, не удалось найти ту картину, которую мы теперь называем волновой теорией света и которая позволила объединить всю оптику в одно стройное целое. И все, что казалось сложно и противоречиво, сделалось простым и ясным.

А возьмите теорию всемирного тяготения Ньютона. Объединяя с гениальной смелостью столь разнородные на взгляд наших чувств явления, как падение камня и движение небесных светил, она грандиозна именно своей простотой. В одной простой формуле она содержит всю динамику всего мироздания.

Я ограничусь этими примерами. Может быть, в них осталось кое-что вам неясным. Это ничего. Понимание фактической стороны придет по мере того, как вы будете изучать физику, но я думаю, что для вас, по крайней мере в общих чертах, теперь выяснилось соотношение между ее опытной и теоретической сторонами.

Эти две стороны, как вы видели, тесно связаны между собой, они вместе представляют одно целое. В достижении нашей конечной цели — познания природы — могучим подспорьем, систематизирующим наш опыт и дающим возможность пользоваться материалом, является теория. Теория, а значит и орудие, которым, как мы видели, она пользуется,— математика, не являются балластом и чем-то искусственно пристегнутым к науке о природе. Нет, она есть то орудие, без которого мы не были бы в состоянии осилить окружающий нас мир как в практическом смысле, так и в смысле удовлетворения умственных потребностей.

Поэтому я нахожу — не считайте это парадоксом,— что нельзя требовать знания только опытной физики, но вовсе не потому, что это слишком мало, а потому, что это слишком трудно. Более или менее полное знание опытной физики без помощи теории человеку не под силу.

Изложенный взгляд на систематизирующую роль теории очень хорошо иллюстрируется одним красивым сравнением, сделанным Пуанкаре.

Пуанкаре сравнивает всю физику с огромной библиотекой. Отдельные опытные данные, отдельные явления — это те тома, из которых библиотека состоит. Теория — это каталог нашей библиотеки. Как без каталога библиотека, особенно большая, представляет собой лишь сборище книг, очень ценных книг, которыми в сущности продуктивно пользоваться нельзя, точно так же физика без теории не есть наука, а лишь довольно малоценный конгломерат отдельных фактов, разобраться в которых нет возможности.

А теперь нам будет уже нетрудно ответить на тот вопрос, который мы поставили себе вначале. Нужна ли инженеру физика в ее целом? Не достаточно ли ему знания отдельных, непосредственно для его практической работы нужных фактов? Ответ, мне кажется, ясен.

Чтобы продуктивно работать — позвольте мне говорить на языке сравнения Пуанкаре,— инженеру не достаточно прочесть и знать несколько книг из громадной библиотеки знания. Он должен быть знаком или, по крайней мере, уметь разбираться в каталоге всей библиотеки.

История техники знает немало примеров загадочных неуспехов, неуспехов повторных и имевших иногда весьма неприятные последствия. И очень часто оказывалось, что загадочность обусловливалась не присутствием действительно новых, до сих пор вообще неизвестных факторов, а отсутствием у тех, кто данными вопросами занимался, широкого физического горизонта. И когда за решение брались люди, обладавшие действительно широкими физическими знаниями, то загадка не только разъяснялась и находился способ предотвратить неуспех, но часто открывались и новые пути для дальнейшего прогресса.

Позвольте мне в заключение остановиться на одном примере, как мне кажется, иллюстрирующем значение широкого физического горизонта при разрешении технических вопросов. Я имею в виду вопрос об оптических инструментах и, в частности, вопрос о микроскопе... Микроскопом особенно заинтересовались уже в середине прошлого столетия, после того как применение его в биологии открыло совершенно новые пути в изучении явлений жизни. Но после первых успехов обнаружилось, что существовавшие тогда микроскопы не были хороши и не были сильны. Исследователи ясно чувствовали, что если бы удалось построить микроскоп с бо́льшим увеличением, то вместе с тем явилась бы возможность проникнуть еще дальше в сущность жизни. А такая перспектива всегда с особенной силой манила людей. И фантазия не останавливалась перед постройкой микроскопов, увеличивающих в десятки, сотни тысяч и миллионов раз, и ждали от их применения чудес. Исследователи ждали, что с их помощью можно будет проникнуть в самые сокровенные детали строения живой материи.

Понятно, что при такой конъюнктуре и специалисты-конструкторы оптических приборов взялись с усиленной энергией за усовершенствование микроскопа. И они считали принципиально возможным достигнуть любых увеличений. Весь вопрос, казалось, сводился к преодолению технических трудностей.

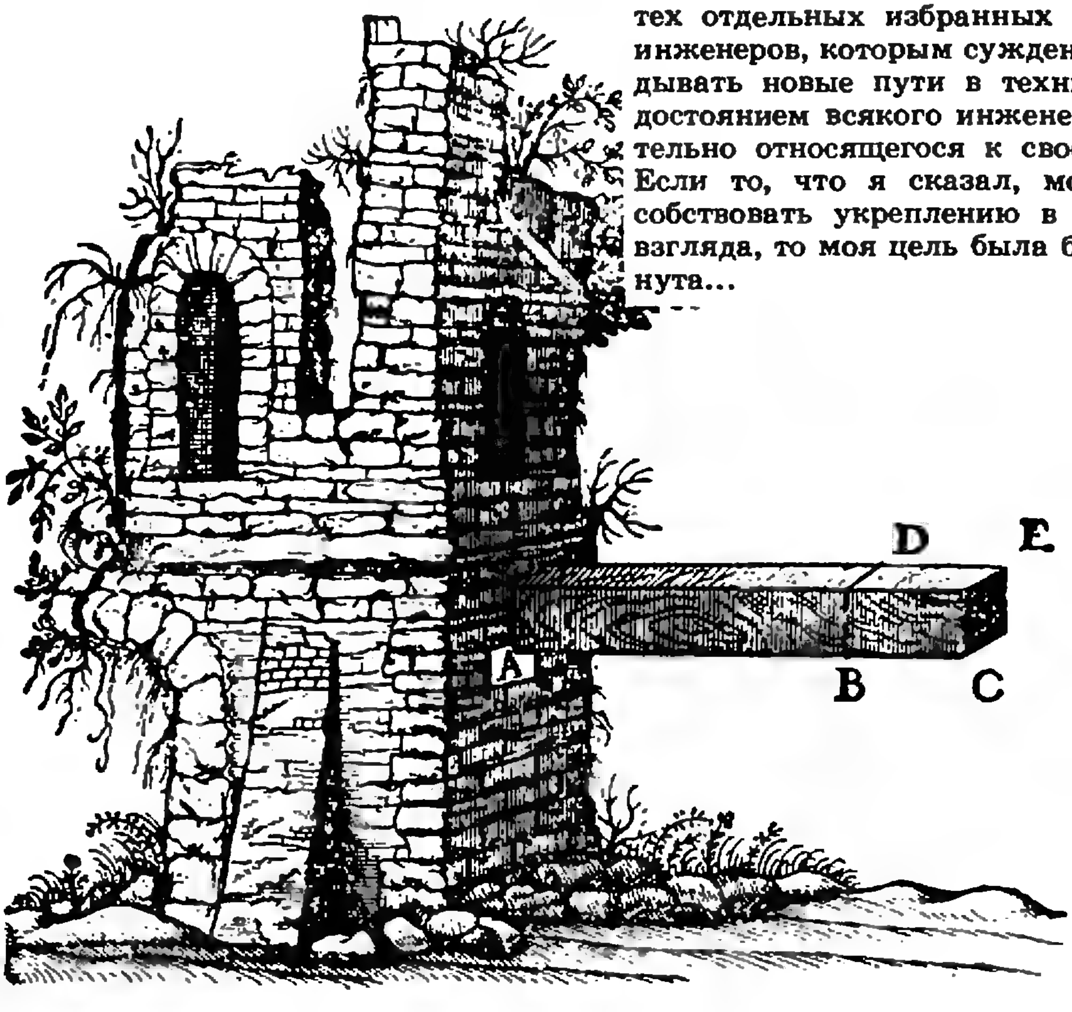
Дело в том, что в то время все расчеты, касавшиеся оптических приборов, велись исключительно при помощи так называемой геометрической оптики. В основании расчетов лежала та теория микроскопа, которая оперирует со световыми лучами как с прямыми линиями... А с точки зрения геометрической оптики действительно не существует принципиальной границы для возможного увеличения микроскопа.

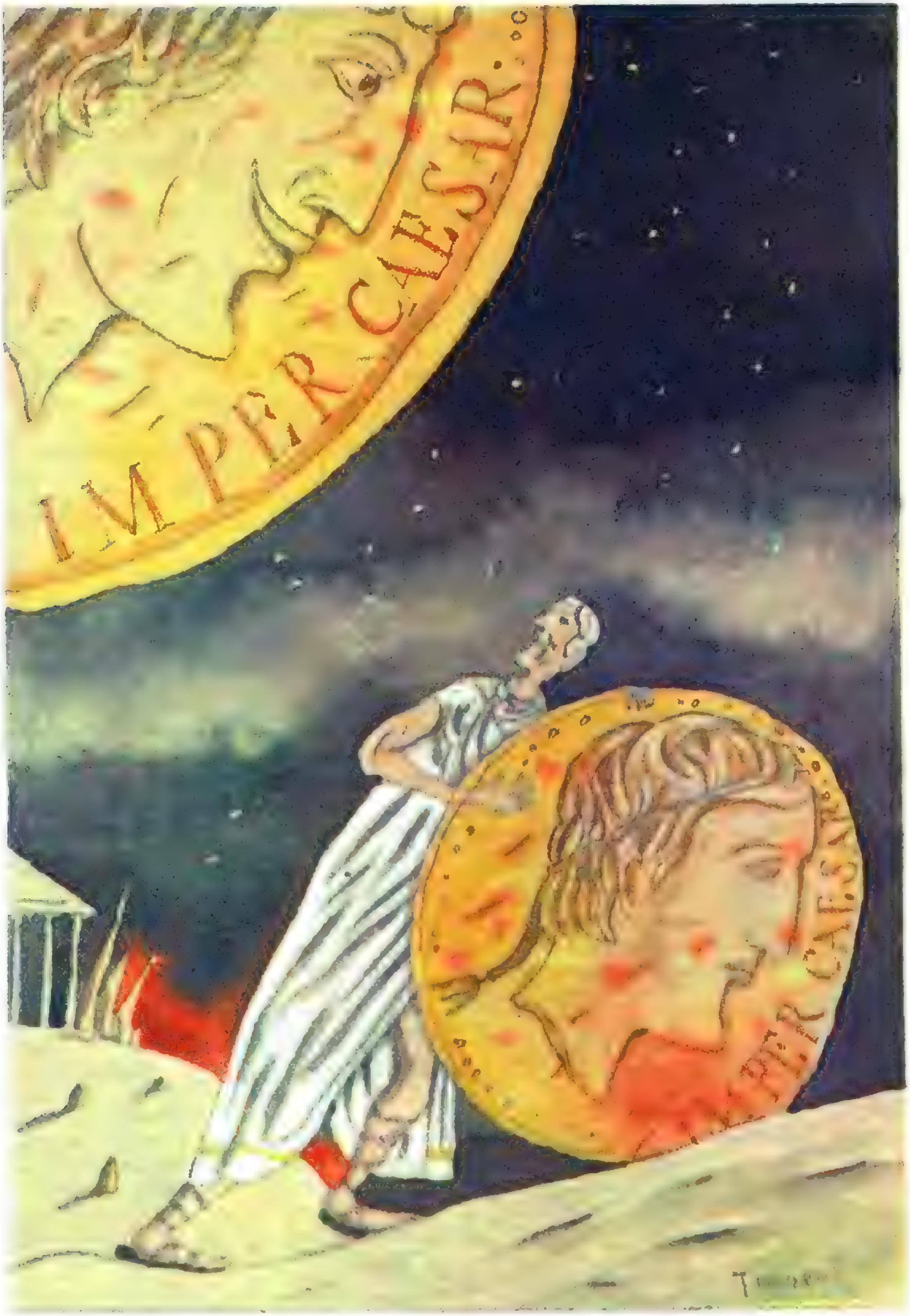
Однако же весьма скоро обнаружилось, что работа, направленная к усовершенствованию микроскопа, не дает тех результатов, которых, казалось, можно было ожидать. Между тем, что казалось достижимым, и тем, что достигалось, было противоречие, которому объяснения не находилось.

Так обстояло дело, когда йенский механик Цейс, имевший небольшую механическую и оптическую мастерскую и изготовлявший сам недурные по тому времени микроскопы, пригласил в качестве консультанта тогда еще молодого физика Аббе. Аббе обладал хорошей теоретической подготовкой, хорошо владел теоретической оптикой. Он знал, что геометрическая оптика есть лишь удобная схема для обработки классического явления преломления. Он знал ей цену, потому что сам очень много внес нового в эту область. Но он знал также, что с точки зрения волновой теории света, служащей базой для геометрической оптики, последняя есть не более как приближение. И он сразу подошел к вопросу о микроскопе с широким, не связанным узкими рамками геометрической теории взглядом.

Результаты такого подхода к делу не заставили себя долго ждать. Одним из главных результатов, к которым пришел Аббе, был следующий. Он показал, что волнообразная природа света ставит принципиальный предел тому полезному увеличению, которое может быть достигнуто при помощи микроскопа или, вообще, любого оптического инструмента. Если детали объекта мельче определенной величины, то эти детали не могут быть видимы, выявить их ни один микроскоп не может. Все мечты об увеличении в 100 000 и больше раз и все связанные с ними надежды должны быть принципиально оставлены, и работа тех, кто хотел такие микроскопы построить, совершенно бесцельна. Блестящими опытами Аббе подтвердил правильность своих теоретических выводов.

Позвольте мне на этом остановиться. Я надеюсь, что вы теперь согласитесь со мной, что знание, широкое, полное знание физики для инженера — не роскошь, а необходимость, что широкий физический горизонт должен быть достоянием не только тех отдельных избранных людей — инженеров, которым суждено прокладывать новые пути в технике, но и достоянием всякого инженера, сознательно относящегося к своему делу. Если то, что я сказал, может способствовать укреплению в вас этого взгляда, то моя цель была бы достигнута...




IM PER. CAESAR.
PER. CAESAR

СТРАННЫЙ ИМПЕРАТОР И СТРАННЫЙ ПОЛКОВОДЕЦ

(математико - психологическое исследование с двумя скачками в прошлое)

И. АКУЛИЧ

Полководец Теренций, собираясь на заслуженный отдых, пришел к императору и попросил уплатить ему 5 миллионов брассов (брасс — медная монета массой 5 г). Император, однако, был скуп и решил обмануть полководца. Он сказал ему: «Не хочу, чтобы ты довольствовался такой жалкой наградой. Ты пойдешь в казначейство и в первый день вынесешь оттуда монету в 1 брасс, на другой день — монету в 2 брасса, затем в 4, 8, 16 и так далее, каждый раз удваивая сумму денег. Я прикажу ежедневно изготавливать для тебя соответствующие монеты. И пока у тебя хватит сил доставлять их оттуда без чужой помощи — они твои. Но как только очередная монета окажется тебе не по силам — остановись, и на этом наш уговор закончен». Теренций был очень обрадован. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые он вынесет из казначейства.

Каков же оказался результат? Обогащение Теренция длилось лишь 18 дней, потому что последняя монета весила около 655 кг (ее он еще сумел прикатить с огромнейшим трудом, пользуясь копьем как рычагом), а очередная оказалась бы совершенно неподъемной. Общая же сумма, заработанная Теренцием, составила всего 262 143 брасса, т. е. почти в 20 раз меньше желаемой. Император торжествовал, а Теренций безмерно страдал.

Подробно эту историю можно прочесть у Я. И. Перельмана в его «Живой математике», а также в 8-м номере журнала «Квант» за 1989 год.

Скачок в далекое прошлое

Более века назад лорд Кельвин говорил на лекции в Балтиморе: «Изо всех двухсот миллиардов мужчин, женщин и детей, которые когда-либо прошли по влажному песку с сотворения мира до собрания Британской ассоциации в Абердине в 1885 году, сколько найдется таких, которые на вопрос: «Сжался ли песок под вашей ногой?» ответили бы иначе, чем «Да»?» Действительно, как показал на упомянутом собрании Британской ассоциации О. Рейнольдс, песок под ногой не сжимается, а расширяется, вопреки здравому смыслу.

Но не будем чересчур отклоняться от нашей темы. Лучше зададим подобный вопрос по поводу императорской награды:

«Среди миллионов читателей книги Я. И. Перельмана и десятков тысяч подписчиков «Кванта» сколько найдется таких, которые заметили, что и император, и полководец в этой истории вели себя по меньшей мере *странно* и совершенно *нелогично?*»

В чем же эта странность и нелогичность? Сейчас увидим.

Сперва попробуем оценить некоторые значения, которые нам потребуются. Из рассказа видно, что монета весом 655 кг была почти пределом физических возможностей Теренция: еще чуть-чуть — и он не смог бы ее даже сдвинуть. Оценим это «чуть-чуть» в 45 кг, т. е. будем считать, что самая большая монета, поддающаяся усилиям Теренция, имеет массу 700 кг (что соответствует достоинству в 140 000 брассов). Кроме того, будем считать, что Теренций по состоянию здоровья способен еще в течение 10 000 дней (около 25 лет) ежедневно являться в казну и выносить оттуда монеты.

Итак, император решил поймать своего боевого полководца в ловушку, зачастую именуемую *лавиной* (действительно, лучшего названия не придумаешь: здесь вес монет нарастает лавинообразно, и именно на это сделал ставку скупой и хитрый император). В данном случае коэффициент размножения $k=2$, т. е. каждая монета вдвое тяжелее предыдущей.

Так вот, выбор императором именно такого коэффициента размножения дает нам все основания считать его *странным* человеком, потому что из всех натуральных k он выбрал именно такое, которое приносит Теренцию *наибольшую* прибыль!

Рассмотрим, например, случай, когда каждая новая монета тяжелее предыдущей не в 2, а в 3 раза. Сколько всего монет поднял бы Теренций? Достоинство монеты с номером $n+1$ равно 3^n брассов. Полководец может поднять монету не более чем в 140 000 брассов. Выясним, при каком n число $3^n \leqslant 140\,000$, а $3^{n+1} > 140\,000$, или

$$n \leqslant \log_3 140\,000,$$
$$n+1 > \log_3 140\,000.$$

Другими словами, n — наибольшее целое число, не превосходящее $\log_3 140\,000$, т. е. $n=[\log_3 140\,000]$. Так как $\log_3 140\,000=10{,}7...$, то $n=10$. Итак, Теренций поднимет лишь 11-ю монету: в первый день монету в 1 брасс, во второй — в 3, в третий — в 3^2 и т. д. Его награда окажется равной $1+3+3^2+...+3^{10}=$ $=88\,573$ брасса. При $k=2$, как мы помним, Теренций получил 262 143 брасса — почти втрое больше!

Аналогичная ситуация будет и при бóльших значениях k. Вообще, сумма, которую мог бы получить Теренций (обозначим ее S), при заданном k равна

$$S=1+k+k^2+...+k^n,$$

где $n=[\log_k 140\,000]$.

По формуле для суммы геометрической прогрессии $S=\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$. Если бы n было достаточно велико, можно было бы принять $[\log_k 140\,000]\approx$ $\approx\log_k 140\,000$, и тогда

$$S\approx\frac{140\,000\,k-1}{k-1}=140\,000+\frac{139\,999}{k-1},$$

т. е. и в самом деле S убывает при возрастании k. В нашем случае такого нет — логарифм невелик, поэтому реальная зависимость $S(k)$ будет *неправильно убывающей.* Вот значения S для некоторых k: $S(4)=87\,381$; $S(5)=97\,658$; $S(6)=55\,987$; $S(7)=$ $=137\,257$; $S(8)=37\,499$; $S(10)=$ $=111\,111$; $S(20)=8421$; $S(50)=$ $=127\,551$; $S(100)=10\,101$ (в последнем случае Теренций придет за наградой лишь трижды!).

А если взять $k=1$? Может быть, хотя бы здесь значение S окажется бóльшим, чем для $k=2$? Увы, нет. В данном случае вступит в действие другой, весьма мрачный фактор — бренность земного бытия. Мы уже оценили предельную продолжительность хождения Теренция за деньгами в 10 000 дней. Следовательно, при $k=1$ ему достанется как раз 10 000 брассов.

Разумеется, если принять другие ограничения (вместо 700 кг и 10 000 дней), то выводы могут оказаться несколько иными (например, при предельной массе в 1000 кг $S(2)<S(3)$), но сути дела это не меняет.

Итак, хитрый (якобы) император, решив обмануть полководца с помощью лавины, выбрал наихудший коэффициент ее размножения (или, во всяком случае, один из худших). Это и дает нам все основания считать его, мягко говоря, *странным* человеком.

Что ж, с императором разобрались. А Теренций? С ним дело несколько сложнее. И предварительно нам придется сделать

Скачок в недалекое прошлое

Еще в школьные годы автор этих строк (кстати, тоже после прочтения книги Перельмана) предлагал своим несведущим в математике знакомым оценить, сколько потребуется пшеничных зерен, чтобы на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую — 2, на третью — 4 и т. д., каждый раз увеличивая количество зерен вдвое. Получив наивный ответ: «Полмешка», автор радовался и принимался убеждать знакомого, что тот не просто ошибается, а очень ошибается, что на самом деле число зерен поражает воображение, возрастая от клетки к клетке лавинообразно; приводил числовой результат с использованием геометрической прогрессии и... получал в ответ скептическую ухмылку: «Да что ты мелешь, какие там триллионы тонн? Сказано полмешка, значит полмешка!» Полное фиаско! И неудивительно, поскольку человеческий разум отказывается воспринимать слишком гигантские, «нежитейские» числа.

Из этого скачка в прошлое сделаем такой вывод. Людей можно условно разделить на две группы: одни, каким бы невероятным ни оказался результат, доверяют вычислениям и строгой логике, другие опираются на здравый смысл и не верят ничему, что ему противоречит. И то, и другое вполне нормально и естественно.

К какой же из двух групп следует отнести Теренция? С одной стороны, он весьма обрадовался, так как сразу понял, до каких больших значений возрастут достоинства монет, даже если начинать приходится лишь с одного бpaсса (у Я. И. Перельмана так и сказано: «Представил себе множество монет, одна больше другой»). Поэтому мы уверенно относим храброго полководца к первой группе. Но как же он в таком случае не понял, что поскольку стоимость монеты пропорциональна весу, то и вес будет нарастать также лавинообразно? Просто упустил из виду? Нет, этого быть не могло: император специально обратил внимание Теренция на то, что ему разрешается брать монеты до тех пор, пока он сможет поднимать их сам, без посторонней помощи. Получается, что Теренций одновременно и понял, и не понял, что имеет дело с лавиной и к чему это приведет. Иначе как *странным* такое поведение не назовешь.

Читатель, видимо, убедился, что эта история имеет как бы двойное дно. Но и его можно еще углубить. Допустим, возможны и нецелые значения k. При каком k Теренций получит наибольшую награду? Нетрудно понять, что это произойдет при таком k, когда в последний, 10 000-й день монета будет весить ровно 700 кг, т. е. составлять 140 000 брассов, что произойдет при $k=\sqrt[9999]{140\,000}\approx$ $\approx 1{,}0012$.

Тогда общий доход Теренция более чем за 25 лет хождения в казначейство составит: $S=\frac{k^{10000}-1}{k-1}\approx 120$ миллионов брассов! Это во много раз больше, чем он просил у императора. Воистину, не та лавина, что гремит, а та, что ползет. Таким образом, можно было бы посоветовать Теренцию так ответить на заманчивое с виду предложение императора:

«Государь! Такая награда слишком щедра для меня. Более того, столь быстрое уменьшение казны может нанести большой ущерб тебе и всему государству. Поэтому я не могу согласиться на такое стремительное нарастание стоимости монет. Но совсем отвергать твое предложение было бы дерзостью с моей стороны. Прошу об одном: пусть стоимость монет возрастает, но не так быстро. Меня вполне удовлетворит, если каждая монета будет тяжелее предыдущей лишь на 12 сотых процента». (Примечание. Скорее всего процентов тогда не знали. Но, думается, Теренций смог бы объяснить свое пожелание и без них).

Попытка — не пытка! Глядишь, император и впрямь проглотил бы наживку, не заметив крючка, что обернулось бы в конечном счете разорением для империи.

Здесь, правда, появляется затруднение: достоинство монет не будет выражаться целыми числами, что, возможно, в те времена не допускалось.

(Окончание см. на с. 44)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1266—М1270, Ф1273—Ф1277

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1266» или «Ф1273». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1266. Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечено 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся два треугольника равной площади с вершинами в этих точках.

К. Кохась

М1267. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка из чисел 1, 2, ..., n; r_k — остаток от деления числа $a_1+a_2+\ldots+a_n$ на n $(k=1, 2, \ldots, n)$. Докажите, что среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по крайней мере $\sqrt{n}$ различных.

Л. Курляндчик

М1268. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают стороны BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1. Пусть $AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \cdot CA_1 \cdot CB_1 = \Pi$. Докажите, что площадь S треугольника $A_1B_1C_1$ равна $S=\sqrt{\Pi}/2R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

А. Гирич

М1269. На плоскости дан треугольник ABC. Прямая p параллельна прямой AB и расположена на расстоянии AC от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (p и AB), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (q и AC), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямые p и q пересекаются в точке L. Докажите, что прямая AL проходит через середину BC.

Я. Коваль

М1270. Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то $12^m+9^m+8^m+6^m$ делится на 1991.

Н. Васильев

Ф1273. Веревка длиной l закреплена одним из своих концов в вершине сферы радиусом R (рис. 1). В некоторый момент веревку отпускают. Найти ускорение веревки сразу после этого. Трение отсутствует.

А. Быцко

Ф1274. В теплоизолированном сосуде, разделенном пополам перегородкой, находится пар, близкий к насыщению; в левой части — при температуре +20 °C, а в правой — при +50 °C. Перегородку удаляют. Какое давление установится в сосуде? Какое давление в нем будет, если нагреть содержимое до +50 °C? охладить до +20 °C? Воды в сосуде первоначально нет. Необходимые для расчета данные возьмите в таблицах.

М. Яскевич

Ф1275. Точечную частицу, имеющую массу m и заряд Q, помещают на расстоянии L от бесконечной

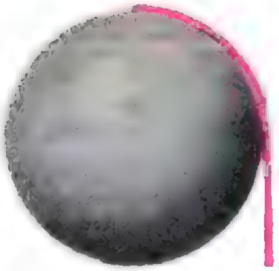


Рис. 1.

проводящей плоскости и отпускают. За какое время частица долетит до плоскости? Сила тяжести отсутствует. (Подсказка: можно воспользоваться методом зеркальных отображений.)

А. Быцко

Ф1276. На высоте $H=20$ м над плоскостью пола в вершинах квадрата со стороной $l=1$ м расположены четыре одинаковых громкоговорителя. На них подается синусоидальный сигнал частотой $f=1$ кГц. На каком расстоянии от точки максимальной громкости на полу громкость падает до нуля?

З. Рафаилов

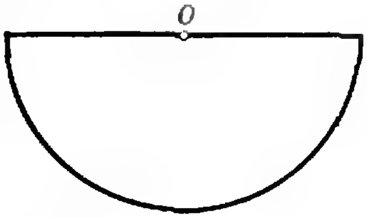


Рис. 2.

Ф1277. Из тонкой проволоки сделали замкнутую фигуру, изображенную на рисунке 2. Радиус полуокружности равен R. Где находится центр тяжести этой фигуры? Чему равен период малых колебаний относительно точки O?

А. Черноуцан

Решения задач

М1241 — М1245, Ф1253 — Ф1257

М1241. *Имеется 1990 кучек, состоящих соответственно из 1, 2, 3, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?*

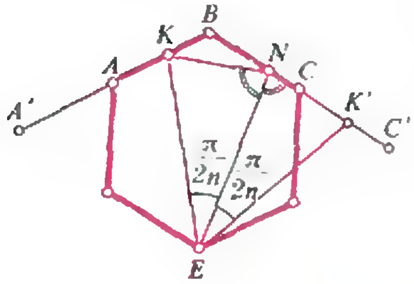
Ответ: 11. Решая эту задачу, удобно считать, что у нас имеется 1990 ящиков, в которых лежат 1, 2, ..., 1990 камней. После каждого выбрасывания камней мы будем разбивать ящики на группы, содержащие по одинаковому количеству камней. Пусть в некоторый момент имеется n групп ящиков (некоторые из них уже могут быть пустыми). Следующее выбрасывание камней происходит так: мы выбираем несколько ящиков, принадлежащих каким-то k группам, и выбрасываем из них по одинаковому количеству камней. В результате ящики, принадлежавшие до выбрасывания разным группам, по-прежнему будут содержать разное количество камней, а ящики, из которых ничего не выбрасывалось, останутся в тех же группах, где они были до этого. Тем самым, если вначале было всего n групп ящиков, то после очередного выбрасывания количество групп будет не меньше чем $\max\{n, n-k\}\geqslant \frac{1}{2}n$. Итак, на каждом шагу количество групп ящиков уменьшается не более чем в 2 раза.

Если вначале было 1990 различных групп ящиков, то на следующем шаге их будет не меньше чем 995, затем 498, 249, 125, 63, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Последняя группа уже может состоять из пустых ящиков. Итак, общее количество выбрасываний не меньше 11.

За 11 шагов можно выбросить все камни, если поступать так: сначала из всех ящиков, содержащих не меньше 996 камней, выбросить по 995 камней. Далее из каждого ящика, содержащего 498 и больше камней, выбросить 498 камней и так далее.

Н. Агаханов

М1242. *На двух сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взято по точке K и N так, что угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $\pi/2n$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.*



На лучах BA и BC отложим точки A' и C' такие, что $AA'=AB$, $CC'=BC$. Точки A', B и C' — это вершины правильного $2n$-угольника, центр которого совпадает с точкой E (на рисунке показан правильный шестиугольник). При повороте на угол $\frac{\pi}{n}$ вокруг точки E точка A' переходит в B, а точка B — в C'. При этом точка K переходит в некоторую точку K' на отрезке CC'. Поскольку $EK=EK'$, $\angle KEN=\angle NEK'=\frac{\pi}{2n}$, треугольники KNE и $K'NE$ равны. Но это и значит, что $\angle KNE=\angle K'NE=\angle CNE$.

Н. Агаханов, Н. Нецветаев, Д. Терешин, Д. Фомин

М1243. *а) На доске написано уравнение $*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?*

б) На доске написано уравнение $x^3+*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любое число, второй ставит его на место любой из звездочек; затем первый называет еще одно число, второй ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, первый ставит любое число на место последней

а) **Ответ:** может. Первый игрок выиграет, если назовет попарно различные целые числа a, b, c, сумма которых равна 0 (например 1, -3 и 2). Тогда уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}\neq 1$.

б) **Ответ:** может. Вот одна из возможных стратегий первого игрока. Сначала он называет число 0. Если второй игрок ставит 0 на последнее место, то в левой части оказывается многочлен вида x^3+ax^2+bx. Тогда первый называет число 2, а затем, в зависимости от действий второго игрока, ставит на оставшееся место число -3.

В итоге получается либо многочлен $x(x-1)(x-2)$, либо $x(x-1)(x+3)$.

Если второй игрок ставит 0 вместо первой звездочки, то получается многочлен вида x^3+bx+c. Тогда первый называет число $-(3\cdot4\cdot5)^2$. Если второй ставит его вместо b, первый полагает $c=0$. Если вместо c, то первый ставит $b=3^2\cdot4^2-3^2\cdot5^2-4^2\cdot5^2$. Соответственно, получается разложение $x(x+3\cdot4\cdot5)(x-3\cdot4\cdot5)$ либо $(x+3^2)(x+4^2)(x-5^2)$.

Если, наконец, второй подставит 0 вместо второй звездочки, т. е. если получится многочлен x^3+ax^2+c, то первый называет число $6^2\cdot7^3$, а затем *оставшейся звездочки. Может ли первый добиться того, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?*

полагает либо $a=-7^2$, либо $c=-6^3\cdot7^3$. Этим случаям соответствует разложение $(x+2\cdot7)(x-3\cdot7)(x-6\cdot7)$ либо $(x-2\cdot6^2\cdot7^2)(x+3\cdot6^2\cdot7^2)(x+6^3\cdot7^2)$.

А. Берзиньш

М1244. *В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причем каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все три попарно дружат, либо все три враждуют друг с другом.*

Ответ: 1990.

Пусть x — *число троек сенаторов, удовлетворяющих условию задачи,* y — число остальных троек. Тогда $x+y=\frac{30\cdot29\cdot28}{1\cdot2\cdot3}=4060$. Если каждый из сенаторов выпишет все тройки, в которые он входит и в каждой из которых два других сенатора одновременно или его друзья, или враги, получится список из $\frac{23\cdot22}{2}+\frac{6\cdot5}{2}=268$ троек. Во всех таких списках будет указано $30\cdot268=8040$ троек. Но каждая комиссия интересующего нас типа будет указана в трех списках, а каждая другая тройка — в одном. Поэтому $3x+y=8040$. Решая систему $x+y=4060$, $3x+y=8040$, получим $x=1990$.

Д. Фомин

М1245. *На плоскости задана точка О и n векторов, сумма которых равна 0. Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке О, друг за другом в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена внутри или на границе некоторого угла в 60° с вершиной в точке О.*

Занумеруем данные векторы $\bar a_1, \bar a_2, \dots, \bar a_n$ (рис. 1) так, чтобы многоугольник $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ оказался выпуклым (это можно сделать, поскольку сумма векторов равна нулю). Рассмотрим всевозможные треугольники, вершины которых совпадают с вершинами этого многоугольника и выберем из них треугольник наибольшей площади. Пусть это треугольник ABC. Через вершины треугольника ABC проведем прямые, параллельные его противоположным сторонам, и рассмотрим треугольник $A'B'C'$ (рис. 2). Многоугольник $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ целиком

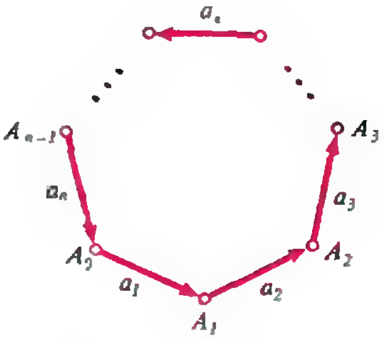


Рис. 1.

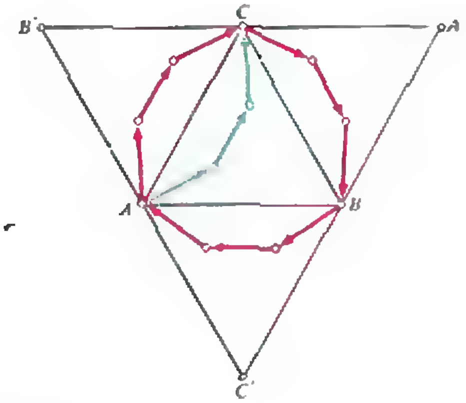
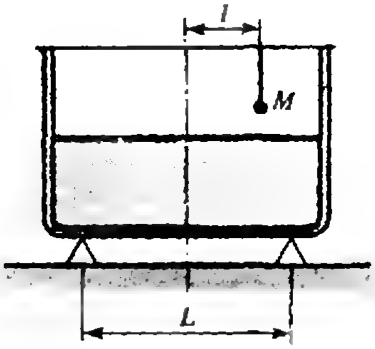


Рис. 2.

содержится в треугольнике $A'B'C'$ (иначе, подвинув какую-нибудь из его сторон мы смогли бы увеличить его площадь). Участок ломаной от вершины A до вершины B соединится внутри треугольника $AC'B$. Симметрично отразив его относительно середины отрезка AB, мы получим такой же участок, лежащий внутри треугольника ABC. Аналогично поступаем с ломаными от B до C и от C до A. Расставив нужным образом стрелки, мы получим замкнутую ломаную, целиком содержащуюся в треугольнике ABC и образованную данными векторами. Поскольку один из углов треугольника ABC не больше 60°, осталось совместить соответствующую вершину с точкой O параллельным переносом.

С. Августович, С. Севастьянов

Ф1253. *Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (см. рисунок). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.*



Когда грузик окажется в воде, сила натяжения нити станет меньше на величину выталкивающей силы — силы Архимеда

$$F_A = Mg/n.$$

Уровень воды в сосуде при этом поднимется, и сила давления воды на дно увеличится на такую же величину (третий закон Ньютона). Для симметричного сосуда точка приложения этой добавочной силы находится в середине дна сосуда.

Очевидно, что сумма сил реакций опор останется прежней:

$$N_1' + N_2' = N_1 + N_2.$$

Поэтому, если сила N_1', действующая со стороны левой опоры, станет на величину f больше прежней, то сила N_2' станет на такую же величину меньше.

Из равенства нулю суммарного момента добавочных сил, действующих на систему:

$$2fL/2 = F_A l$$

получаем

$$f = F_A l/L = Mgl/(nL).$$

Тогда окончательно

$$N_1' = N_1 + f = N_1 + Mgl/(nL),$$
$$N_2' = N_2 - f = N_2 - Mgl/(nL).$$

А. Зильберман

Ф1254. *В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед и за*

Так как вода не перемешивается, все тепло, которое выделяется при замерзании льда, рассеивается только в воздух. Поток тепла прямо пропорционален разности температур ΔT воды и воздуха и обратно пропор-

19 часов достигает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей, чем теплопроводность воды. Озеро очень глубокое.

ционален толщине x льда в каждый момент времени. Поэтому для изменения Δx толщины льда за время Δt можно записать

$$\Delta x \sim \frac{\Delta T}{x}\Delta t,$$

или, учитывая, что $\Delta T = \mathrm{const}$,

$$x\Delta x \sim \Delta t.$$

Отсюда получаем

$$x^2 \sim t, \qquad \text{и } x \sim \sqrt{t}.$$

Через 1000 часов лед достигнет толщины

$$x_{1000} = x_{10}\sqrt{1000/10} = 1 \text{ м}.$$

В. Скороваров

Ф1255. *Поверхность безжизненной планеты покрыта толстым слоем замерзшей углекислоты. Предлагается создать на ней атмосферу из чистого кислорода, разлагая углекислоту на углерод и кислород. За какое время это удастся сделать, если за 1 секунду разлагать 10^6 молей? Необходимо получить давление $p=0{,}2$ атм. Считайте, что у поверхности установится температура $T=200$ К, при которой испарением углекислоты можно пренебречь. Масса планеты $M=7{,}5\times10^{22}$ кг (примерно равна массе Луны), радиус $R=1750$ км.*

Если толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом планеты (это обязательно нужно будет проверить), то для массы кислорода можно записать:

$$m = 4\pi R^2 p/g.$$

Ускорение свободного падения g на поверхности планеты найдем из закона всемирного тяготения:

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

Тогда

$$m = 4\pi R^4 p/(GM) \approx 5\cdot10^{17} \text{ кг}.$$

Это примерно $1{,}5\cdot10^{19}$ молей.

Каждая молекула углекислоты дает при разложении одну молекулу кислорода, значит, процесс займет $\approx 1{,}5\cdot 10^{13}$ с $\approx 500\,000$ лет. Не так уж и много...

Для грубой оценки толщины атмосферы найдем плотность кислорода у поверхности планеты:

$$\rho = pM/(RT) \approx 0{,}4 \text{ кг/м}^3.$$

При такой плотности толщина атмосферы

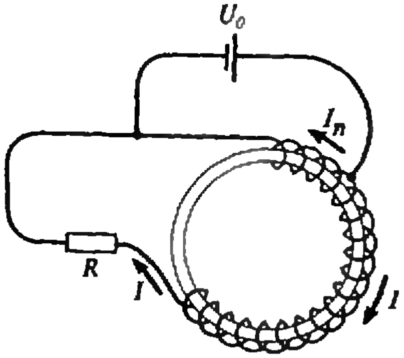
$$h = m/(4\pi R^2\rho) \approx 30 \text{ км}.$$

На самом деле толщина в несколько раз больше (плотность с высотой падает), однако и эта величина во много раз меньше радиуса планеты.

Д. Могилевцев

Ф1256. *На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью намотана катушка, содержащая $N=2000$ вит-*

По условию задачи, магнитный поток не рассеивается, поэтому вклад каждого витка в общую ЭДС индукции катушки одинаков. Но к части катушки ($n=300$ витков) подключена идеальная батарейка напряжением $U_0=1{,}5$ В (см. рисунок), значит, и ЭДС индукции *ков и имеющая индуктивность $L=5$ Гн. К концам катушки подключен резистор сопротивлением $R=200$ Ом. Батарейку напряжением $U_0=1{,}5$ В подключают между одним из концов катушки и витком номер 300, считая от этого конца. Какие токи будут течь по обеим частям катушки через время $t=0{,}1$ с после подключения? Батарейку считать идеальной, рассеянием магнитного потока пренебречь.*



в этой части катушки равна 1,5 В. Тогда полная ЭДС равна 10 В, и по резистору течет постоянный по величине ток

$$I=10\text{ В}/200\text{ Ом}=0{,}05\text{ А}.$$

Этот ток возникает сразу после подключения батарейки — скачком (строго говоря, время нарастания этого тока от нуля до вычисленного значения определяется «электростатикой» — межвитковыми емкостями, однако, это время можно сделать очень малым; во всяком случае подробный анализ весьма сложен, и мы не будем этим заниматься).

Нет ли тут нарушения известного правила о том, что ток через катушку не может меняться скачком? В нашем случае все в порядке — ведь на самом деле не должен меняться скачком полный магнитный поток, а он определяется токами в обеих частях катушки. Следовательно, и в меньшей части катушки будет скачок тока сразу после включения. Сделаем расчет. Для того чтобы сразу после включения не было скачка магнитного потока, поля обеих частей катушки должны друг друга компенсировать. Поля всех витков в сердечнике складываются, значит, между токами выполняется соотношение

$$nI_{n0}=(N-1)I,\text{ и } I_{n0}=U_0(N-n)N/(n^2R)=17/60\text{ А},$$

где I_{n0} — начальный ток в меньшей части катушки.

ЭДС индукции в малой части катушки равна U_0, и ток в ней возрастает по линейному закону. Индуктивность части катушки, в которой меняется ток, легко найти: рассеяния потока в сердечнике нет, поля всех витков складываются, следовательно, индуктивность пропорциональна квадрату числа витков. Тогда

$$L_n=Ln^2/N^2=0{,}125\text{ Гн}.$$

Согласно закону Фарадея (мы будем учитывать только изменяющуюся часть магнитного потока),

$$-L_n\frac{dI_n}{dt}=U_0.$$

Поэтому окончательно

$$I_n=I_{n0}+U_0t/L_n=1{,}62\text{ А}.$$

З. Рафаилов

Ф1257. *Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0. Груз с пружиной расположили на шероховатой горизонтальной*

При движении влево и вправо груз находится под действием дополнительной (по сравнению с колебаниями груза, висящего на пружине) постоянной по величине силы — силы трения. В этих условиях меняется только «положение равновесия» (рис. 3), а период колебаний остается прежним, т. е. равным T_0.

поверхности (рис. 1) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области, внутри которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и силы упругости пружины (так называемой зоны застоя),— она оказалась равной 2a. В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза. Каким окажется период колебаний?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком (рис. 2), и скорость груза становится равной v_0. Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза?

Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определить, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

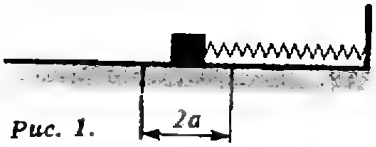


Рис. 1.

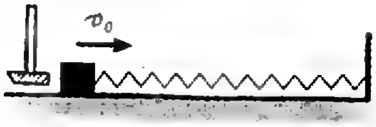


Рис. 2.

Теперь обсудим случай, когда при колебаниях груза по нему регулярно ударяют молоточком. На рисунке 4 представлен график зависимости смещения x груза от времени t (из условия задачи очевидно, что изменение ΔT периода установившихся колебаний достаточно мало́ по сравнению с самим периодом T_0). Как видно из графика, отклонения груза в обе стороны одинаковы относительно точки с координатой $+a$, A — искомая амплитуда колебаний. По закону сохранения энергии,

$$4A\mu mg=\frac{mv_0^2}{2},$$

причем

$$\mu mg=ka,$$

где μ — коэффициент трения, k — жесткость пружины. Отсюда получаем (учитывая, что $T_0=2\pi\sqrt{m/k}$)

$$\mu g=\frac{k}{m}a=\frac{4\pi^2}{T_0^2}a.$$

Окончательно

$$A=\frac{v_0^2}{8\mu g}=\frac{v_0^2T_0^2}{32\pi^2a}.$$

Рассмотрим участок графика MNK (см. рис. 4). Движение здесь происходит по закону

$$x=-a-(A+2a)\cos\omega_0t,\text{ где }\omega_0=2\pi/T_0=\sqrt{k/m}.$$

Скорость груза

$$v=x'=(A+2a)\omega_0\sin\omega_0t.$$

В установившемся режиме участок MN отсутствует. Скорость в точке N равна начальной скорости v_0 после удара молоточком:

$$v_0=(A+2a)\omega_0\sin\omega_0\Delta T\approx A\omega_0^2\Delta T,$$

откуда

$$\Delta T\approx\frac{v_0}{A\omega_0^2}=\frac{32\pi^2a}{v_0^2T_0^2}\frac{v_0T_0^2}{4\pi^2}=\frac{8a}{v_0}.$$

О приближенном решении. Условие $A\gg 2a$ означает

$$\frac{v_0^2T_0^2}{32\pi^2a}\gg 2a,$$

откуда

$$v_0T_0\gg 8\pi a. \qquad (*)$$

Условие $\Delta T\ll T_0$ означает

$$\frac{A\omega_0^2}{v_0}\ll T_0,\qquad\text{или }v_0T_0\gg 16\pi a. \qquad (**)$$

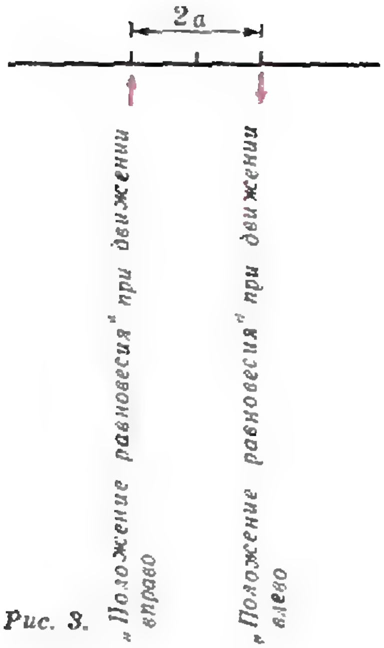

2a
„Положение равновесия" при движении вправо
„Положение равновесия" при движении влево

Рис. 3.

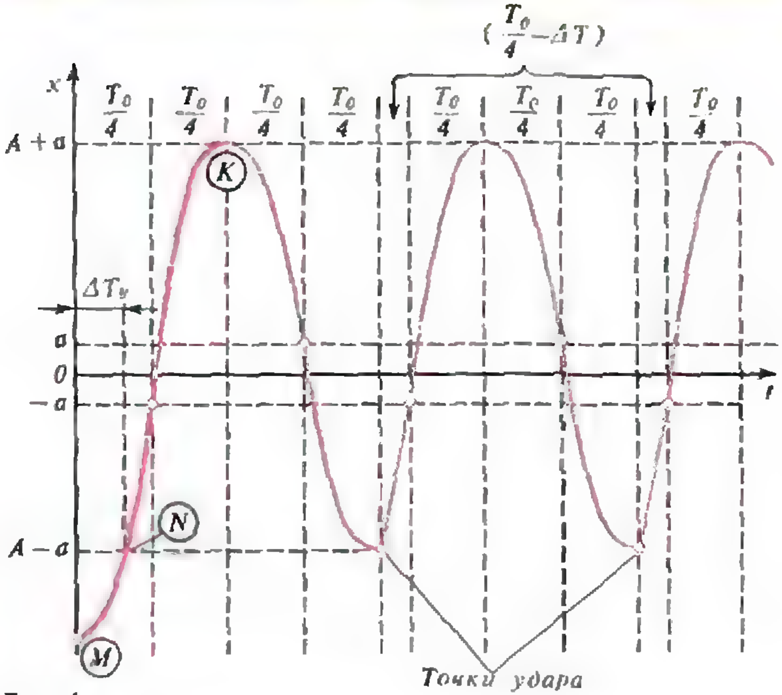


Рис. 4.

Выражения (*) и (**) практически совпадают. Значит, принятое приближение оправдано.

С. Козел

Конкурс «Математика 6 — 8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журнала «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 апреля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

16. Слово МАРШРУТ можно прочесть на рисунке 1 разными способами. Сколько таких способов? Какую букву нужно убрать, чтобы количество способов равнялось 145?

В. Радунский

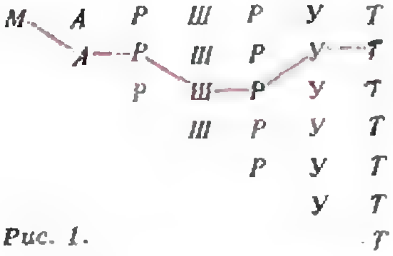

М А Р Ш Р У Т
А Р Ш Р У Т
Р Ш Р У Т
Ш Р У Т
Р У Т
У Т
Т

Рис. 1.

17. Несколько тракторов вспахивают поле в 300 га за целое число дней, причем каждый трактор вспахивает в день 15 га. Сколько тракторов потребуется дополнительно для того, чтобы выполнить работу на 6 дней раньше?

И. Акулич

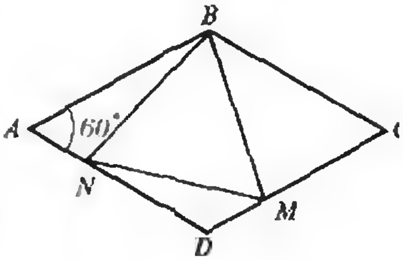


Рис. 2.

18. В ромбе $ABCD$ угол A равен 60°. Докажите, что если один из углов треугольника BMN (рис. 2) равен 60°, то и остальные тоже равняются по 60°.

В. Произволов

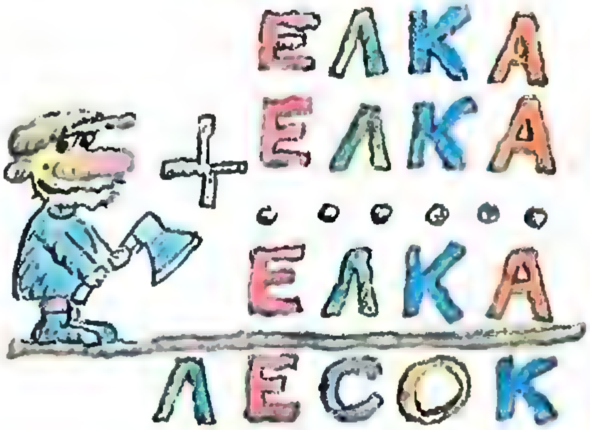
Задачи

1. Рассказывают, что основательница чешского государства принцесса Либуша предложила трем претендентам на ее руку загадку. «Если бы я дала первому жениху половину слив из этой корзины *и еще одну сливу*, второму половину остатка и еще одну сливу, а третьему половину того, что останется и еще три сливы, то корзина опустела бы. Сколько слив в корзине?» А вы как думаете?

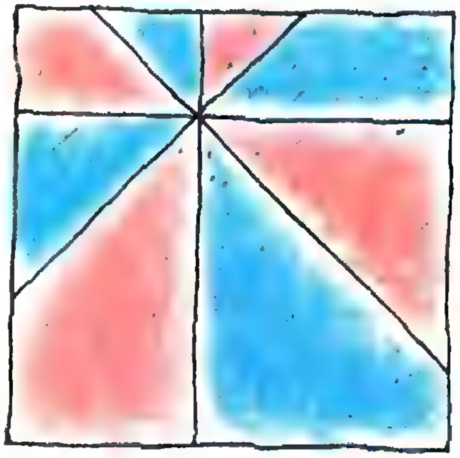
2. Докажите, что сумма *n последовательных* нечетных чисел делится на *n*.

3. При возведении в квадрат некоторого двузначного числа, состоящего из одинаковых цифр, получится число, у которого первая и вторая цифры одинаковы, а также одинаковы третья и четвертая. Найдите это двузначное число.

4. На рисунке изображен арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Из какого наименьшего количества елок может состоять ЛЕСОК? (Буквам Е и Ё соответствует одна *и та же цифра*.)



5. Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей, окрашенных в красный цвет, равна сумме площадей, окрашенных в синий цвет.



Эти задачи нам предложили А. Савин, С. Сефибеков, О. Повалюхина, Е. Горбунов и В. Произволов.

ЧИСЛОВЫЕ ФОКУСЫ

Предлагаем вашему вниманию небольшой фрагмент из недавно вышедшей книги «За страницами учебника математики» (М.: Просвещение, 1989). Мы надеемся, что любопытные фокусы с числами будут вам интересны и советуем прочитать эту замечательную книгу.

Профессор
И. ДЕПМАН,
доктор физико-математических наук, профессор
Н. ВИЛЕНКИН

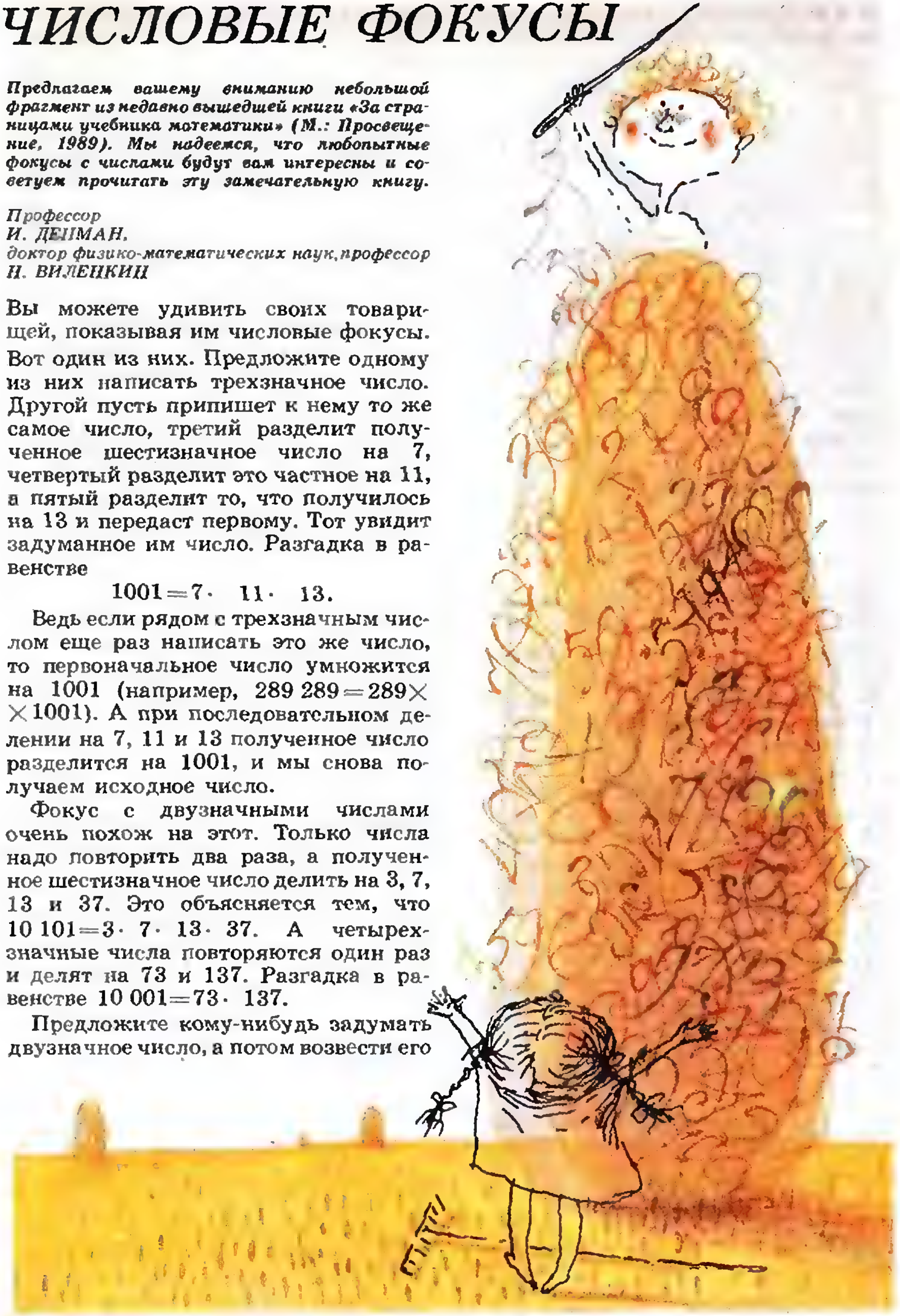
Вы можете удивить своих товарищей, показывая им числовые фокусы. Вот один из них. Предложите одному из них написать трехзначное число. Другой пусть припишет к нему то же самое число, третий разделит полученное шестизначное число на 7, четвертый разделит это частное на 11, а пятый разделит то, что получилось на 13 и передаст первому. Тот увидит задуманное им число. Разгадка в равенстве

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Ведь если рядом с трехзначным числом еще раз написать это же число, то первоначальное число умножится на 1001 (например, $289\,289 = 289 \times 1001$). А при последовательном делении на 7, 11 и 13 полученное число разделится на 1001, и мы снова получаем исходное число.

Фокус с двузначными числами очень похож на этот. Только числа надо повторить два раза, а полученное шестизначное число делить на 3, 7, 13 и 37. Это объясняется тем, что $10\,101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. А четырехзначные числа повторяются один раз и делят на 73 и 137. Разгадка в равенстве $10\,001 = 73 \cdot 137$.

Предложите кому-нибудь задумать двузначное число, а потом возвести его



в куб. Услышав ответ, вы мгновенно сообщаете, какое число было задумано. Для этого, правда, придется выучить наизусть кубы чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вот они: $0^3=0$, $1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$.

Заметим, что кубы чисел 0, 1, 4, 5, 6 и 9 оканчиваются той же цифрой (например, $4^3=64$, $9^3=729$), а числа 2 и 8, 3 и 7 образуют пары, в которых куб одной цифры оканчивается другой.

Пусть возводили в куб число 67. Получили ответ 300 763. Услышав это значение, отгадывающий замечает, что 300 лежит между 216 и 343, то есть между 6^3 и 7^3, а потому цифра десятков равна 6. Последняя цифра ответа 3 получается при возведении в куб числа 7. Значит, цифра единиц равна 7. Мы отгадали задуманное число: 67. После небольшой тренировки отгадывание происходит мгновенно.

Более впечатляющим является отгадывание двузначного числа по его пятой степени. Ведь чтобы возвести число в пятую степень, придется четыре раза делать умножение, а в ответе может получиться десятизначное число! А отгадка основана на том, что при возведении чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в пятую степень получается число, оканчивающееся той же цифрой, которую возводили в степень (например, $1^5=1^5$, $2^5=32$, $3^5=243$, $4^5=1024$, а $5^5=3125$).

Кроме того, надо запомнить следующую таблицу, показывающую, с чего начинаются пятые степени следующих чисел:

10	100 тыс.
20	3 млн.
30	24 млн.
40	100 млн.
50	300 млн.
60	777 млн.
70	1 млрд. 500 млн.
80	3 млрд.
90	6 млрд.
100	10 млрд.

Поэтому, услышав, что при возведении двузначного числа в пятую степень получится ответ 8 587 340 257, сразу соображаем, что 8 миллиардов лежат между 6 миллиардами и 10 миллиардами, а потому цифра десятков равна 9. А услышав, что ответ кончается цифрой 7, понимаем, что той же цифрой кончается и двузначное число. Значит, возводили в пятую степень число 97.

На доске написано пятизначное число. Два школьника подходят к доске. Первый пишет любое пятизначное число, второй пишет свое число. Потом первый пишет еще одно пятизначное число, а второй — свое число, а затем они поступают так же еще раз. После этого второй школьник сразу пишет сумму всех написанных на доске чисел.

Этот фокус заключается в следующем. Каждый раз, после того как первый школьник написал свое число, второй пишет число, цифры которого служат дополнениями до 9 стоящих на том же месте цифр первого числа (если первый написал число 40 817, то второй пишет 59 182). Сумма двух таких чисел всегда равна 99 999. Поэтому после трех раз будет (кроме самого первого числа) шесть чисел, сумма которых равна $3\cdot 99\,999=300\,000-3$. Значит, надо приписать к первоначально написанному на доске пятизначному числу впереди цифру 3, а из полученного числа отнять 3.

Чтобы зрители не разгадали фокуса, можно уменьшить первую цифру какого-нибудь из чисел на несколько единиц и на столько же единиц уменьшить соответствующую цифру в сумме. Например, здесь

$$\begin{array}{r} 76\,281\\ 14\,391\\ 65\,608\\ 24\,380\\ 75\,619\\ 95\,073\\ 4\,926\\ \hline 356\,278 \end{array}$$

уменьшена на 2 первая цифра в третьем слагаемом и на столько же соответствующая цифра в сумме.

обратная задача

Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Неожиданность обратной задачи

Известно, что теоремой, обратной к данной, называется такая теорема, условием которой служит заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Предлагаем шесть задач в виде «прямых» теорем. Все они весьма просты и известны младшим школьникам. Докажите теоремы, обратные к этим «прямым» теоремам, самостоятельно. Вы убедитесь, что все доказательства обратных теорем значительно труднее, чем «прямых» теорем.

Прямые теоремы

1. В трапеции отрезок, соединяющий середины оснований, делит ее на две равновеликие фигуры.

2. В параллелограмме сумма расстояний между серединами противоположных сторон равна его полупериметру.

3. Если точка H — ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC, то $\angle HBA=\angle HCA$, $\angle HAB=\angle HCB$.

4. Если точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle OAB-\angle OBA=\angle OBC-\angle OCB=\angle OCA-\angle OAC$.

5. В равнобедренном треугольнике центр вписанной в треугольник окружности принадлежит прямой Эйлера. (Прямая Эйлера — это прямая, которой принадлежит ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной около треугольника окружности.)

6. В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

Указания к доказательствам обратных теорем

1. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина AD, точка N — середина BC. Докажите, что $S_{ABN}=S_{DCN}$. Тогда $AD \parallel BC$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

2. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (рис. 1). Пусть точки M, N, E — середины отрезков AB, DC и AC соответственно. Тогда $AD \parallel EN$ и $EN=\frac{1}{2}AD$, $BC \parallel ME$ и $ME=\frac{1}{2}BC$. Так как $MN \leqslant ME+EN$, то $MN \leqslant \frac{AD+BC}{2}$. Пусть L и K — середины сторон BC и AD. Аналогично, $LK \leqslant \frac{AB+CD}{2}$. По условию $MN+LK=$

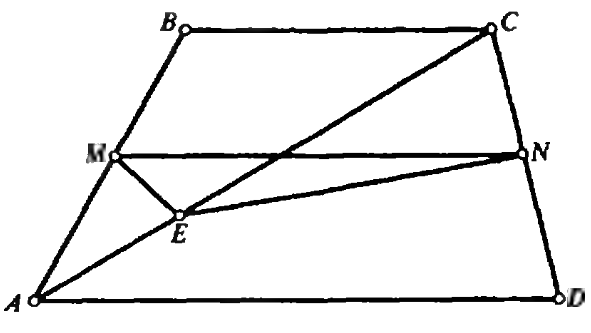


Рис. 1.

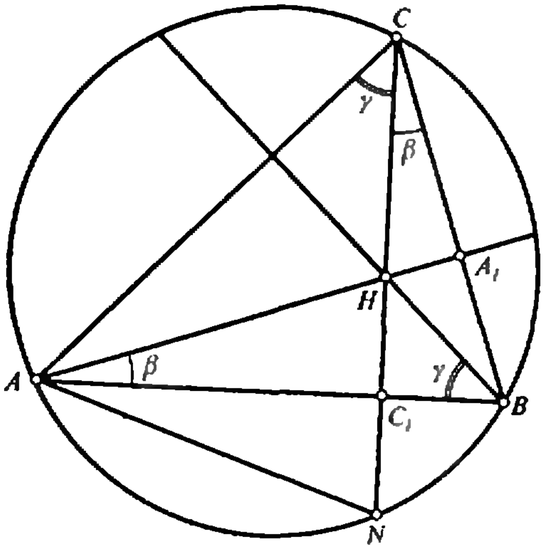


Рис. 2.

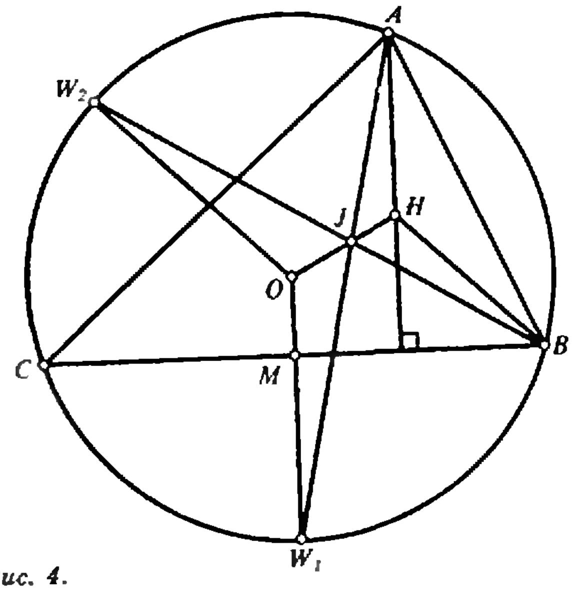


Рис. 4.

$=(AB+BC+CD+AD)/2$. Таким образом, должны достигаться оба равенства: $MN=(AD+BC)/2$, $LK=(AB+CD)/2$, а это возможно лишь при условии, что точка E принадлежит отрезкам MN и LK, откуда $BC\|MN\|AD$ $AB\|LK\|CD$.

3. Опишите около треугольника ABC окружность и проведите отрезок CC_1 до пересечения с ней в точке N (рис. 2). Докажите, что если $\angle HAB=\angle HCB$, $\angle HBA=\angle HCA$, то точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Так как $\angle BAN=\angle BCN$, то $\angle HAB=\angle BAN$, аналогично, $\angle HBA=\angle ABN$, откуда $C_1H\perp AB$. Докажите, что $\angle AA_1C=90°$. Обозначим $\angle HAC=\alpha$, $\angle HAC_1=\beta$, $\angle HBA=\gamma$. Так как $\triangle ACC_1$ прямоугольный, $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Используя то, что $\triangle CC_1B$ прямоугольный, докажите, что $\angle HBC=\alpha$. Обозначим $\angle AA_1B=x$. Рассматривая $\triangle AA_1B$, получим $x+\alpha+\beta+\gamma=180°$. Отсюда $x=90°$.

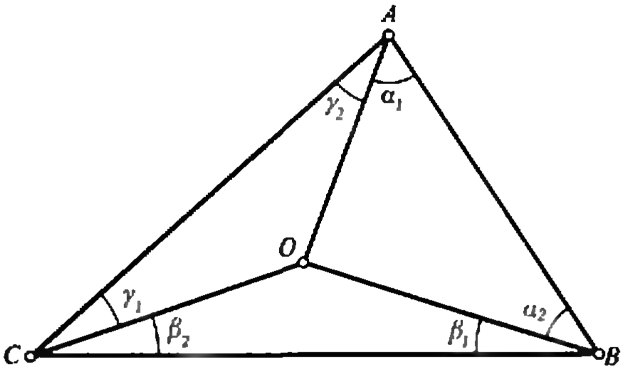


Рис. 3.

4. Докажите, что точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности (рис. 3). Обозначим углы, данные в условии, через α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2. Для определенности будем считать $\alpha_1>\alpha_2$, $\beta_1>\beta_2$, $\gamma_1>\gamma_2$. Тогда из образовавшихся треугольников получим $OB>OA$, $OC>OB$, $OA>OC$. Откуда $OB>OC$ — мы получили противоречие.

5. Докажите, что если центр вписанной в треугольник окружности I принадлежит прямой Эйлера, то треугольник равнобедренный. Пусть O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности, H — ортоцентр, M — середина стороны BC, W_1 — точка пересечения биссектрисы угла BAC с описанной около треугольника ABC окружностью, W_2 — точка пересечения биссектрисы угла ABC с описанной окружностью (рис. 4). Рассмотрите подобные треугольники OW_1I и HAI, OW_2I и HBI. Так как $OW_1=OW_2$, то $AH=BH$, откуда $AC=BC$.

6. Формулировка обратной теоремы звучит так: если в треугольнике ABC равны биссектрисы $l_a=l_b$ (рис. 5), то равны также и длины сторон: $a=b$. Доказательство проведем от противного. Пусть, например, $a>в$. Тогда $\alpha>\beta$ (в треугольнике против большей

(Продолжение см. на с. 42)

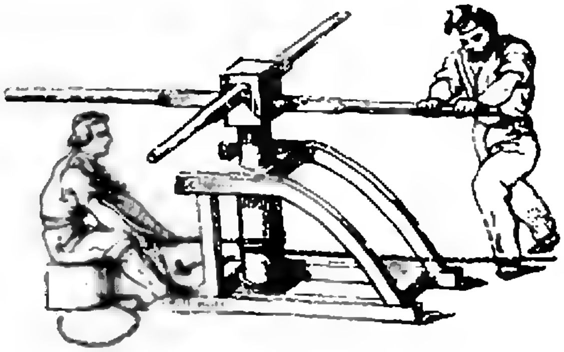
Калейдоскоп „Кванта"

...наш принцип требует, чтобы количество работы, которое получается, когда тела системы переходят из начального положения во второе, и количество работы, которое затрачивается, когда они переходят из второго положения в первое, всегда было одно и то же, каков бы ни был способ перехода, путь перехода или его скорость.

Г. Гельмгольц

А так ли хорошо знакома вам

работа ?



В обиходном смысле этого слова — надеемся, да. А в физическом?

Понятие «работа» долгое время было на периферии точной науки. Но потребность применить теоретические результаты и методы к задачам прикладного характера, в теории машин и механизмов заставила осмыслить его и включить в ряды строгих физических понятий. И Гельмгольц использовал физическое понятие «работа» при формулировании закона сохранения энергии.

Особенный интерес вызывает рассмотрение работы, совершаемой в различных физических полях — гравитационном, электрическом, магнитном. Общий подход к возникающим здесь задачам позволяет лучше познакомиться с понятием поля. Итак, ключ для работы с этим выпуском «Калейдоскопа» — «работа в полях».

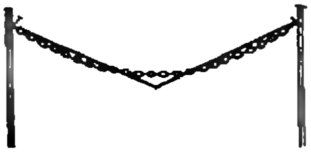
Вопросы и задачи

1. Одинаковую ли работу нужно совершить, чтобы равномерно поднять тело вертикально вверх на высоту H и равномерно переместить то же самое тело по горизонтальному пути на расстояние, равное H?

2. Какая работа будет совершена, если силой 30 Н поднять груз массой 2 кг на высоту 5 м?

3. Изменится ли работа, производимая двигателем эскалатора, если пассажир, стоящий на равномерно движущейся вверх лестнице эскалатора, начнет сам равномерно подниматься по ней?

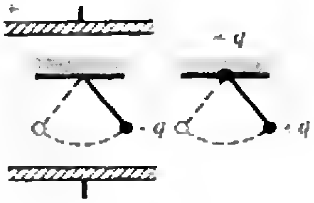
4. Тело свободно падает с некоторой высоты. Одинаковую ли работу совершает сила тяжести за последовательные равные промежутки времени?



5. К двум гвоздям, находящимся на одной высоте, прикреплены концы цепочки длиной l и концы двух шарнирно связанных между собой стержней, общая длина которых тоже равна l. Чей центр тяжести расположен ниже — цепочки или стержней?

6. Планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого расположено Солнце. В какой точке траектории скорость планеты будет максимальной и в какой — минимальной?

7. Какое электрическое поле — однородное или неоднородное — ближе по своим свойствам к полю силы тяжести у поверхности Земли?

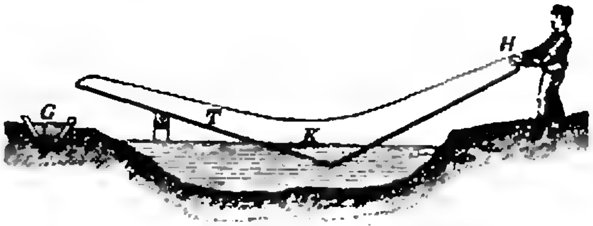


8. Отличаются ли периоды колебаний маятников одинаковой массы и длины в условиях, показанных на рисунке?

9. Проводящий шар B находится в электрическом поле шара A. Является ли при этом поверхность шара B эквипотенциальной поверхностью?

10. Напряженность поля равномерно заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее. Означает ли это, что если под действием такого поля перемещается заряд, то может совершиться бесконечно большая работа?

11. За счет чего увеличивается энергия плоского заряженного конденсатора, не под-



ключенного к источнику тока, если из него удаляется диэлектрик, в качестве которого использована, например, тонкая стеклянная пластина?

12. Почему сила Лоренца не совершает работы?

13. Одинаковую ли работу необходимо произвести, чтобы вставить магнит в катушку, когда ее обмотка замкнута и когда разомкнута?

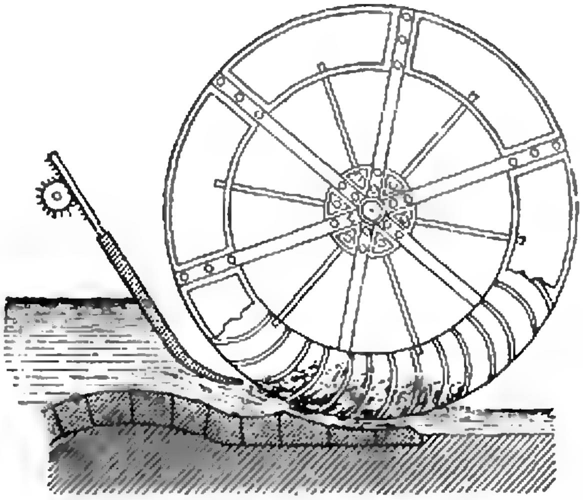
14. Если нет перемещения тела, то нет и работы в механическом смысле. На что же расходуется энергия, подводимая к электромагниту, когда он «держит» груз?

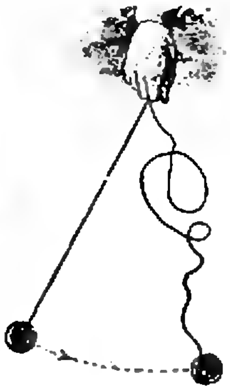
Микроопыт

Попробуйте изготовить и испытать модель «вечного двигателя», изображенного на рисунке. Почему этот двигатель не работает?

Любопытно, что...

...понятие «работа» отсутствовало в механике Ньютона. Не было его и в учебниках физики первой трети XIX века. Физикам оно было попросту неведомо. Впервые понятие работы подробно развил Жан Виктор Понселе, математик и инженер, бывший, кстати, солдатом наполеоновской армии и русским военнопленным, что не помешало ему позднее стать иностранным членом - корреспондентом Петербургской академии наук.

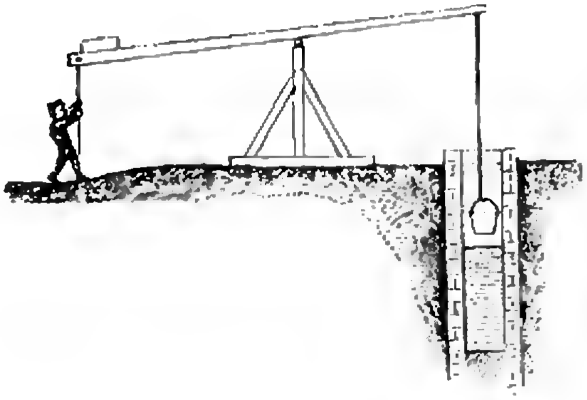


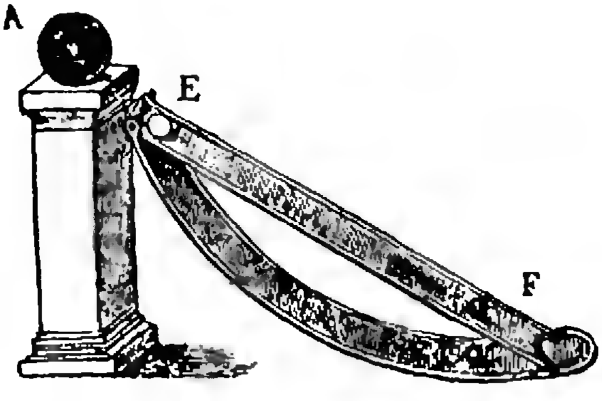


...движение бусинки, соскальзывающей без трения вдоль проволоки произвольной формы, служит хорошей иллюстрацией замечательного факта независимости работы, произведенной над телом, от пути, по которому оно перемещалось. Исследование такого рода задач привело физиков XVIII века к введению понятия энергии.

...отмеченное выше свойство независимости работы от пути характерно для так называемых консервативных сил. Оказывается, что все четыре типа фундаментальных сил, действующих между элементарными частицами, являются консервативными.

...в последнее время проявляется все больший интерес к проблеме ускорения не только микрочастиц, но и макроскопических тел электромагнитным полем. Скорость, до которой удалось разогнать грузы массой уже в несколько граммов, близка к первой космической скорости.





Что читать о работе в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Сила Лоренца и ее работа» — 1979, № 2, с. 52;
2. «Механическая работа и механическая энергия» — 1985, № 5, с. 46;
3. «О судьбе некоторых понятий механики» — 1986, № 5, с. 20;
4. «Закон сохранения энергии в электростатике» — 1989, № 6, с. 63;
5. «Калейдоскоп «Кванта» — 1985, № 4; 1986, № 5; 1987, № 5; 1989, № 4; 1990, № 4.

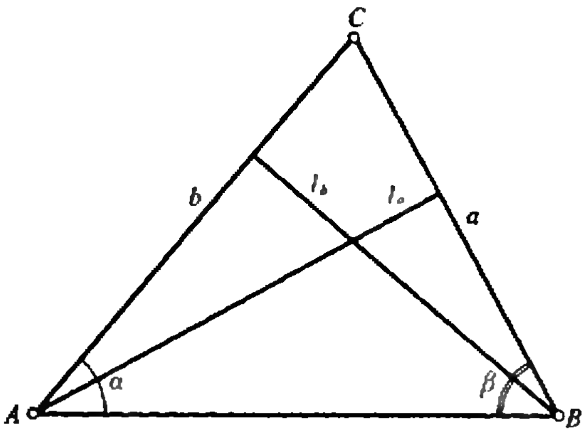


Рис. 5.

стороны лежит больший угол). Длины биссектрис в треугольнике вычисляются по формулам:

$$l_a=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},\ l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$$

(докажите их самостоятельно). Поскольку $\alpha>\beta$, причем $0<\alpha<\pi$, $0<\beta<\pi$, то $\cos\frac{\alpha}{2}<\cos\frac{\beta}{2}$. Кроме того, $\frac{b}{b+c}<\frac{a}{a+c}$. В самом деле,

$$\frac{a}{a+c}-\frac{b}{b+c}=\frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)}>0.$$

Таким образом, получаем $l_a<l_b$ — противоречие.

Эта теорема — классический пример, демонстрирующий, что даже у совсем очевидной теоремы обратное утверждение может оказаться далеко не столь простым (а порой и неверным!). А вы знаете такие примеры?

И. Кушнир

Уравнение касательной к графику функции

Понятие касательной в школе, в первую очередь, связано с окружностью, вернее, с определением касательной к окружности: прямая, имеющая с окружностью одну общую точку, называется касательной. В математическом анализе мы сталкиваемся уже с касательной к графику функции и обнаруживаем, что касательная может иметь с кривой не одну, а несколько общих точек (рис. 1, *а*, *б*).

Пусть график функции $y=f(x)$ изображается некоторой кривой (рис. 2). Рассмотрим секущую, проходящую через две точки этой кривой: $(x_0;\ f(x_0))$ и $(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$. Будем приближать вторую точку к первой ($h=\Delta x\to 0$). Секущая займет некоторое предельное положение. Эта предельная прямая называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, проходящей через точку $(x_0;\ f(x_0))$, конечно же, хорошо вам знакомо: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Но как «увидеть» это уравнение, в чем его геометрический смысл? Во-первых, полезно убедиться, что это действительно *уравнение прямой*. Перепишем уравнение в виде $y=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0$. Таким образом, переменная y линейно зависит от x, следовательно, точки с координатами $(x;\ y)$, удовлетворяющими уравнению, лежат на прямой. Эта прямая проходит через точку $(x_0;\ f(x_0))$, так как $y=f(x_0)$ при $x=x_0$. Ее угловой коэффициент равен $f'(x_0)$, тангенс угла наклона секущей $\operatorname{tg}\alpha_h=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (см. рис. 2). Поэтому при $\Delta x\to 0$ мы получаем производную функции $f(x)$ в точке x_0 по самому ее определению: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Значит, наша прямая — касательная!

Заодно мы вспомнили геометрический смысл производной: производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту наклона касательной к графику функции в этой точке. Теперь каждый сам легко выведет уравнение касательной, ведь свободный член $f(x_0)-f'(x_0)x_0$ в нем сразу определяется условием $y=f(x_0)$ при $x=x_0$.

Уже на уровне этих элементарных рассуждений мы можем сделать некоторые важные выводы и решать многие содержательные задачи.

Во-первых, по знаку тангенса угла наклона касательной к графику функ-

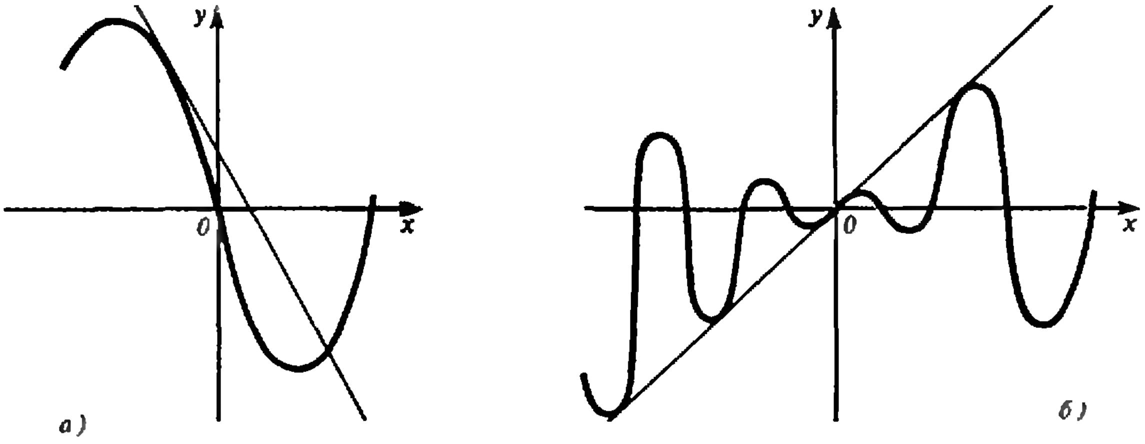


Рис. 1.

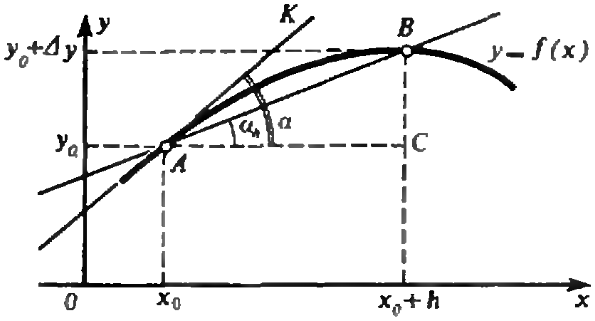


Рис. 2.

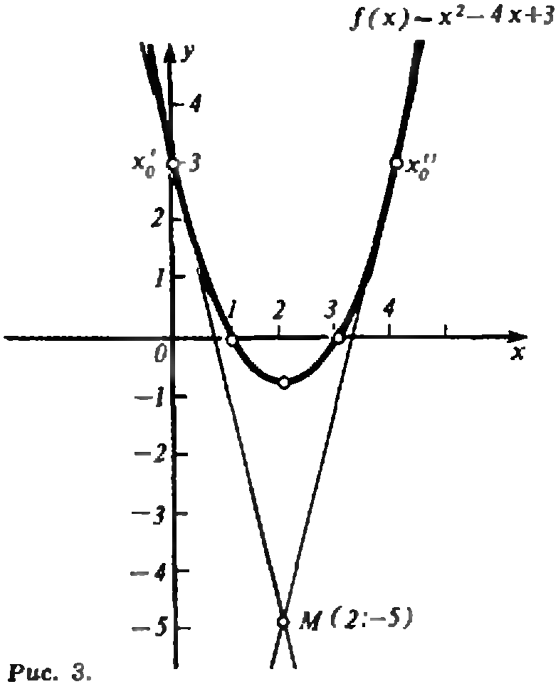


Рис. 3.

ции (т. е. по знаку производной функции) в точке x_0 мы можем судить о возрастании (или убывании) функции в этой точке. Во-вторых, по численному значению этого тангенса (т. е. по численному значению производной) мы можем судить о «скорости» возрастания (или убывания) функции в точке x_0.

Обратимся теперь к задачам.

Задача 1. *Касательная к графику функции $y=x^2+2x-3$ наклонена к оси абсцисс под углом $\pi/4$. Найдите координаты точки касания.*

Решение. Из условия задачи вытекает, что $f'(x_0)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. $f'(x)=2x+2$, значит, $2x_0+2=1$; $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=-3\frac{3}{4}$.

Задача 2. *Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=x^2-5x+7$ в точке (2; 1)?*

Решение. Первым делом убедитесь, что точка (2; 1) принадлежит графику функции. Так как значение производной функции $y=x^2-5x+7$ (т. е. $y'=2x-5$) равно тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции в данной точке, то $\operatorname{tg}\alpha=2x_0-5=-1$. Значит, касательная образует с осью абсцисс угол $\alpha=135°$.

Следующая задача — интереснее.

Задача 3. *Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x+3$, проходящей через точку M (2; −5).*

Основываясь на большом опыте, автор утверждает, что, к сожалению, многие учащиеся подходят формально к решению этой задачи: так как уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, то они найдут значение производной данной функции в точке $x_0=2$, положат $f(x_0)=-5$, подставят все в уравнение касательной и, конечно, получат ошибочный результат.

Однако, очевидно, что точка M (2; —5) не лежит на параболе $f(x)=x^2-4x+3$ (в чем легко убедиться, хотя бы подставив координаты точки в уравнение параболы) и касательных будет две (рис. 3), соответственно будет и две точки касания x_0' и x_0''.

Правильное решение. Уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x+3$ (с учетом, что $f'(x)=2x-4$) будет иметь вид $y=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)\cdot(x-x_0)$, где x_0 — точка касания, x и y — текущие координаты уравнения касательной.

С другой стороны, так как касательная должна проходить через точку M (2; —5), то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению касательной. Получаем: $-5=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)\cdot(2-x_0)$.

После очевидных преобразований получаем квадратное уравнение относительно x_0: $x_0^2-4x_0=0$, откуда находим два решения: $x_0'=0$, $x_0''=4$.

Значит, уравнения касательных будут $y=-4x+3$ и $y=4x-13$.

Задача 4. *Напишите уравнение общей касательной к графикам функций $f(x)=x^2-2x+5$ и $g(x)=x^2+2x-11$.*

Решение. Обозначим точку касания с графиком функции $f(x)$ x_1, а с графиком функции $g(x)$ — x_2. Уравнения касательных к графику каждой из парабол имеют вид

$$y=(2x_1-2)\cdot x+5-x_1^2,$$
$$y=(2x_2+2)\cdot x-11-x_2^2.$$

Общей касательной к обеим параболам будет некоторая прямая $y=kx+b$, значит, угловой коэффициент k и свободный член b в полученных уравнениях касательных должны совпадать. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-2=2x_2+2, \\ 5-x_1^2=-11-x_2^2. \end{cases}$$

Откуда $x_1=5$, $x_2=3$.

Искомое уравнение имеет вид $y=8x-20$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-4$ образует с осью абсцисс угол 45°?

2. Под каким углом к оси абсцисс наклонена касательная, проведенная к кривой $y=2x^3-x$ в точке пересечения этой кривой с осью ординат?

3. Прямая $y=6x-7$ касается параболы $y=x^2+bx+c$ в точке A (2; 5). Найдите уравнение параболы.

4. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (3; 2) и касающейся графика функции $y=x^2-2x$.

5. Найдите площадь треугольника, образованного осью абсцисс и касательными, проведенными к графику функции $y=\frac{1}{2}x^2-x+5$ из точки A (0; 3).

6. Найдите уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+8x+4$ и $y=x^2+4x+8$.

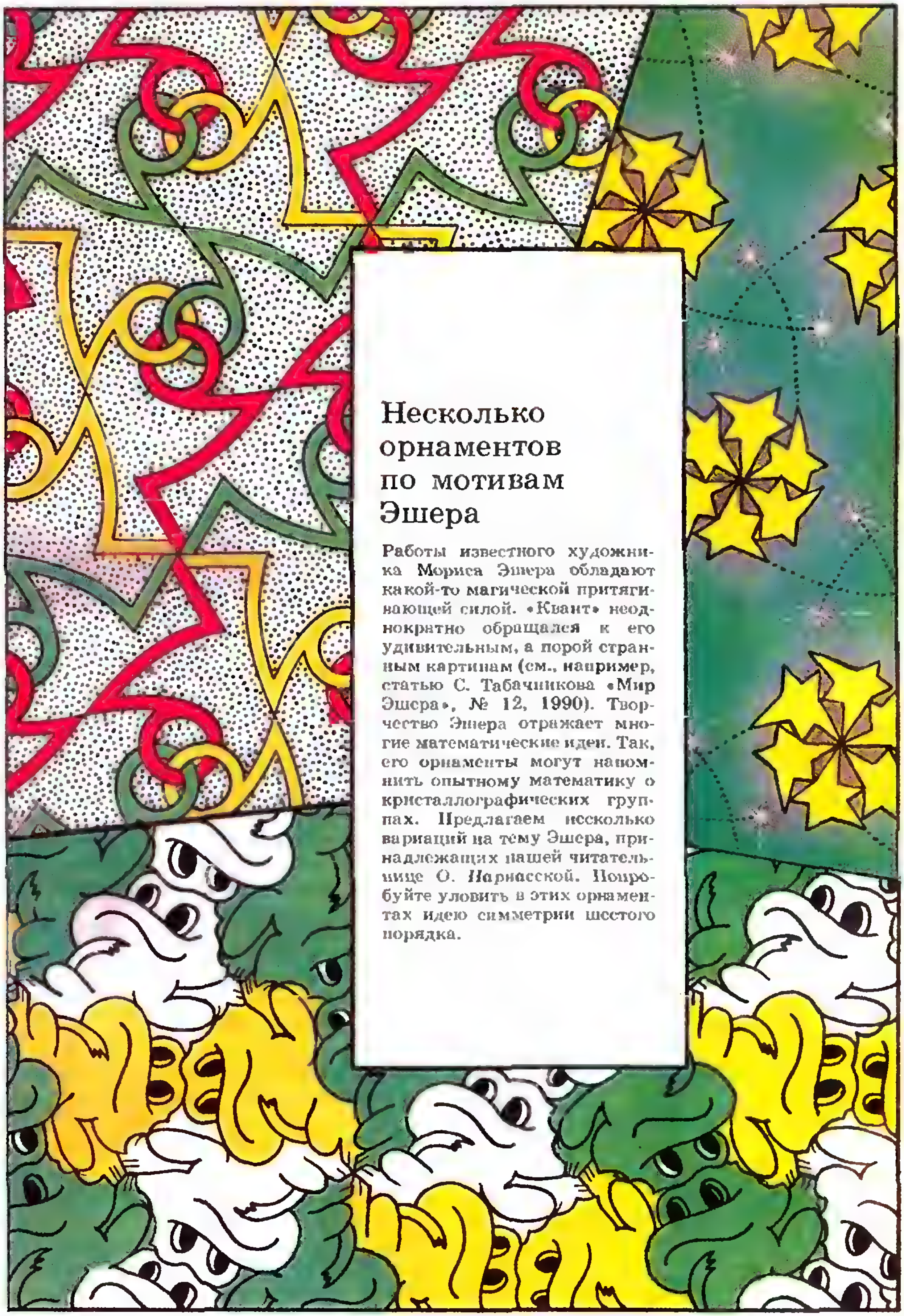
В. Затакавай

Странный император и странный полководец

(Начало см. на с. 22)

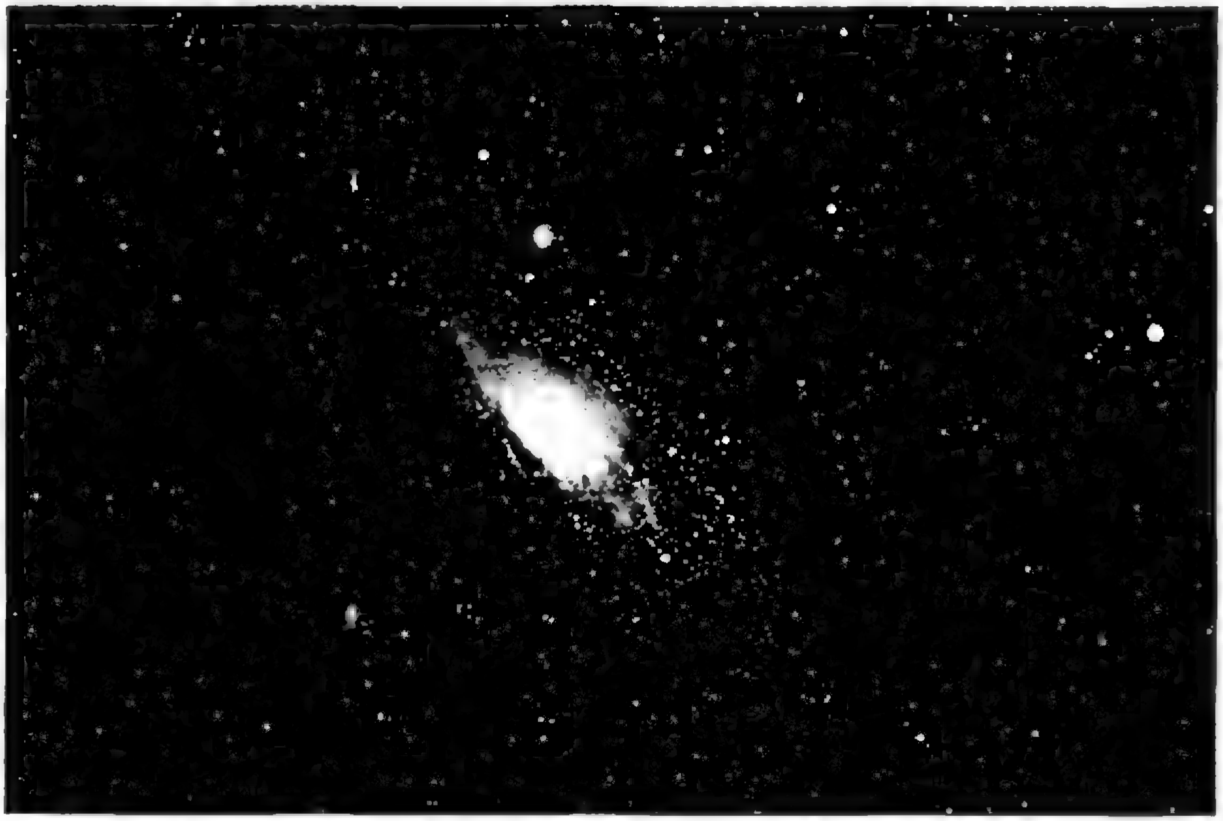
Ничего, Теренций и здесь мог внести великодушную поправку: пусть, мол, при изготовлении монет вычисленный вес очередной монеты округляется в меньшую сторону! Такое великодушие не очень ударит по карману Теренция: ущерб, заведомо меньший 10 000 брассов, просто мизерен по сравнению с доходом.

Конечно, нам с вами легко решать финансовые проблемы отважного полководца. А вот что ответил бы сам Теренций на предложение автора? Не исключено, что он нашел бы его по меньшей мере *странным*. Ведь основную часть своей награды ему пришлось бы ждать целых 20 лет. За первые 5 лет Теренций получил бы менее 6600 брассов, а первые полтора года ему пришлось бы каждый день приходить за монеткой в 1 брасс! Так кто же из всех троих самый *странный:* император, полководец или автор? Решать читателям. А все же интересно, что сказал бы сам Я. И. Перельман по поводу такого толкования его рассказа? Смею надеяться, что оно бы его изрядно позабавило.



Несколько орнаментов по мотивам Эшера

Работы известного художника Мориса Эшера обладают какой-то магической притягивающей силой. «Квант» неоднократно обращался к его удивительным, а порой странным картинам (см., например, статью С. Табачникова «Мир Эшера», № 12, 1990). Творчество Эшера отражает многие математические идеи. Так, его орнаменты могут напомнить опытному математику о кристаллографических группах. Предлагаем несколько вариаций на тему Эшера, принадлежащих нашей читательнице О. *Парнасской*. Попробуйте уловить в этих орнаментах идею симметрии шестого порядка.



Р-значит ракета

Ближайшие задачи в космосе

Доктор технических наук
К. ФЕОКТИСТОВ

В настоящее время еще нет сложившегося единого мнения о наиболее важных направлениях развития деятельности человечества в космосе. Предлагаются самые разнообразные программы.

Например, программа, которую связывают с именем американки — астронавта Салли Райд, предусматривает в качестве основных целей на ближайшие 50 лет исследования и создание баз на Луне, астероидах и планетах, создание средств путешествий в Солнечной системе, создание космических поселений.

Советские ученые, работающие в области фундаментальных наук, считают необходимым в ближайшее десятилетие сосредоточить усилия на изучении околоземного космического пространства, магнитосферы Земли, на исследованиях солнечно-земных связей, Солнца, солнечной короны, Марса, на астрофизических исследованиях с помощью автоматических космических аппаратов.

Есть и более прагматические предложения, которые нацелены на развитие спутниковых систем связи и телевидения, систем метеорологических спутников, на создание спутниковых систем экологического контроля и исследования природных ресурсов Земли, создание экономически целесообразного и эффективного производства на орбите.

Так что есть самые различные тенденции. И, наверное, было бы неправильно противопоставлять прагматические устремления естественному желению людей расширить сферу своей деятельности, больше узнать о Вселенной и о нашем месте в ней. Представляется наиболее разумным при выборе дальнейшего пути стремиться и к удовлетворению насущных нужд человечества, и к исследованию окружающего мира.

К наиболее острым проблемам, стоящим сегодня перед человечеством, относятся

— экология, истощение природных ресурсов,

— политическая нестабильность в мире, разобщенность народов, деление государств на противостоящие блоки, недоверие между ними и т. п.,

— возрастающая перенаселенность Земли.

В исследованиях Вселенной, как мне сегодня представляется, к наиболее интересным задачам относятся

— исследования Солнечной системы,

— исследования звезд, галактик, небесных объектов на окраинах Вселенной с помощью астрофизических инструментов,

— исследования возможностей полетов к звездам.

При таком подходе можно было бы предложить следующие основные направления космических работ.

Деятельность в интересах удовлетворения насущных нужд человечества

Речь идет о работах прикладного характера, которые могли бы приносить конкретную пользу людям и по возможности были бы экономически рентабельны. Здесь можно выделить три группы работ.

— Группа А: уже определившиеся, почти ставшие традиционными, такие работы, как экологический контроль поверхности суши, морей и океанов с помощью космических аппаратов, спутниковая метеорологическая служба, спутниковая навигация для судов, самолетов, наземного транспорта, спутниковые системы для приема сигналов от терпящих бедствие, связь и телевидение.

— Группа Б: работы, связанные с развертыванием на орбите экономически выгодного производства, с выносом на орбиту нужных, но опасных на поверхности Земли производств. Для организации этих работ потребуется расширить наземные и, главное, космические эксперименты по поиску надежных и эффективных технологических процессов на орбите. К этой же группе работ можно отнести и поисковые работы по возможности и целесообразности создания солнечных орбитальных электростанций для снабжения Земли дешевой и экологически чистой электроэнергией.

Сюда же можно отнести работы на орбитальных станциях по определению области наиболее эффективной деятельности людей непосредственно на орбите, так как до сих пор эта область не найдена и остается неясным, где, при выполнении каких работ человек эффективнее автоматических устройств.

— Группа В: работы в интересах поддержания мира на Земле, поддержания стабильности и укрепления доверия между государствами, предотвращения агрессии. Здесь имеется в виду создание международной, открытой для всеобщего ознакомления спутниковой системы наблюдения и контроля земной поверхности и воздушного пространства, подводной обстановки. Предлагается создать системы спутников, которые бы давали всем возможность видеть, что происходит на Земле, и днем и ночью, наблюдать за перемещениями воинских соединений и военной техники, за строительством подозрительных (возможно, военных) объектов, контролировать выполнение международных соглашений. Сейчас практически только Советский Союз и Соединенные Штаты Америки имеют спутниковые разведывательные системы, которые пока не носят всепогодный характер и не дают достаточно качественной картины в сумерках и в ночное время.

Конечно, есть что-то непорядочное в подглядывании друг за другом. Но что нам делать в наше время? XX век не один раз демонстрировал, как уголовники и маньяки захватывали власть или просачивались к ней. И как, укрепившись внутри государства с помощью террора и оболванивания своих соотечественников, они пытались захватить соседние государства. Наличие международной спутниковой системы наблюдения позволит мировому сообществу, заинтересованным людям (а не благополучным и равнодушным чиновникам) заблаговременно подготовиться к отражению агрессии или даже остановить ее подготовку.

Современная космическая техника в принципе позволяет решить эту задачу, причем важно и то, что расходы на создание и эксплуатацию такой системы могло бы нести все мировое сообщество.

Исследование и освоение Солнечной системы

К этому направлению работ относятся

— исследования Солнца,

— исследования астероидов,

— исследования Луны, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна и т. д.,

— исследования возможности и целесообразности космических поселений.

Едва ли эти исследования принесут нам принципиально новую информацию, но не рассмотреть то, что у нас под носом, было бы просто неразумно. Вести исследования можно с помощью автоматических космических аппаратов. И только в случае полной неудачи с доставкой проб грунта и атмосферы с Марса и, в то же время, при появлении информации, указывающей на возможность обнаружения живых организмов на Марсе, стоит всерьез рассмотреть организацию пилотируемой экспедиции на Марс. (Подразумевается, что пробы грунта и атмосферы будут доставляться на Землю для их изучения с тем, чтобы определить, нет ли в них живых организмов, а если они есть — узнать их генетический код или их механизм воспроизводства и тем самым получить информацию в пользу той или иной гипотезы о происхождении жизни: гипотезы «самозарождения» или «посева».)

Исследования Вселенной

Это наиболее интересные, можно сказать, интригующие направления исследований. Они могут принести нам наиболее ценную и необычную информацию. К этим работам относятся

— исследования с помощью космических радиотелескопов, выводимых на околосолнечные и околоземные орбиты, работающих совместно в режиме радиоинтерферометрии,

— исследования окружающего мира с помощью орбитальных астрофизических инструментов современного уровня (типа космического телескопа «Хаббл») в различных спектральных диапазонах,

— исследования с помощью оптических телескопов с разнесенной базой, которые можно располагать, например, на Луне,

— исследование проблемы полета к звездам.

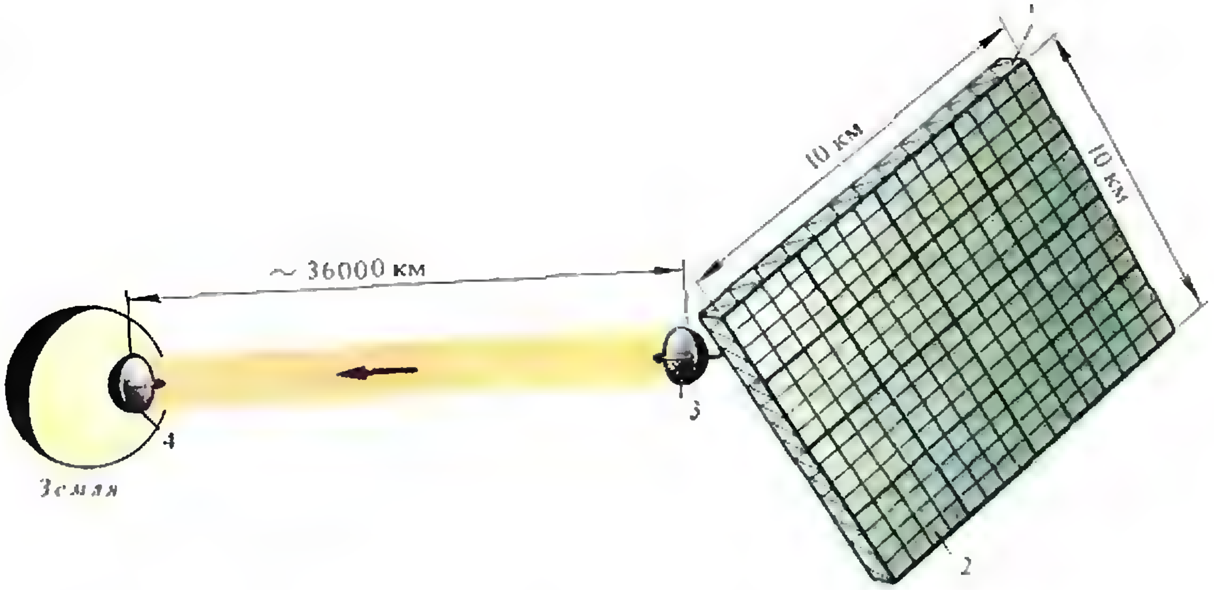
Все это дорогие предприятия, но если объединить усилия многих стран и разумно распределить работы, то их можно осилить. Во всяком случае, расходы на их осуществление будут существенно меньше, чем военные расходы государств.

Технические средства

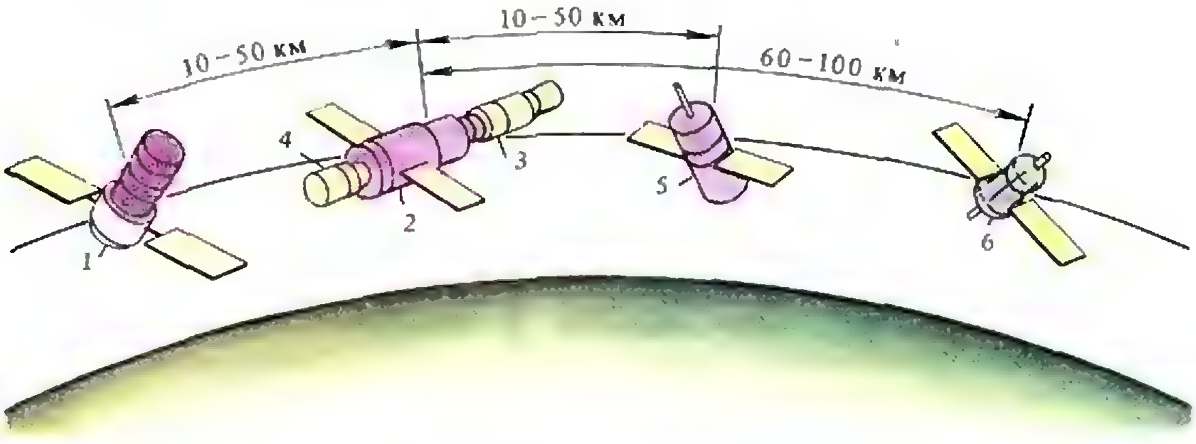
Для реализации такой программы работ необходимо совершенствовать имеющуюся космическую технику, создавать совершенно новую, проводя теоретические и экспериментальные исследования.

Можно уже сегодня представить, какие технические средства для этого понадобятся.

1. Низкоорбитальные системы унифицированных спутников экологического контроля, исследования природных ресурсов, метеорологических наблюдений и наземные автоматизированные центры обработки информации с автоматизированной системой доставки результатов абонентам.



Солнечная орбитальная электростанция на геостационарной орбите (мощность ~10^9 Вт, масса ~10^8 кг). 1 — ферменная конструкция, отслеживающая направление на Солнце; 2 — пленочные солнечные батареи; 3 — передающая антенна размером ~1 км, неподвижная относительно Земли; 4 — приемная антенна размером ~10 км, работающая в радиодиапазоне на длине волны ~10 см.



Станция-«облако» (высота орбиты 450—500 км). 1 — астрофизическая обсерватория, ориентируемая на объекты наблюдения; 2 — базовый жилой блок; 3 — транспортный корабль; 4 — межорбитальный аппарат для обслуживания модулей станции; 5 — производственный модуль; 6 — заправочная станция.

Здесь уже создан большой задел, особенно у американцев. Следует расширять эти работы на коммерческой основе. Наша страна тоже могла бы активно участвовать в создании таких систем.

2. Система платформ на геостационарной орбите для глобальной связи, телевидения, экологического контроля, исследования природных ресурсов и метеорологических наблюдений.

Спутники на геостационарной орбите неподвижны относительно поверхности Земли. На этой орбите нельзя располагать слишком большое количество спутников, иначе они начнут мешать работе друг друга. Поэтому придется в будущем создавать многофункциональные платформы.

3. Системы навигационных спутников, используемых для определения местоположения судов, самолетов, автомобилей и даже туристов.

4. Системы спутников для вызова срочной помощи терпящим бедствие.

Первая такая система — международная система «КОСПАС — САР-

САТ» уже начала работать. Но нужно расширять их возможности с тем, чтобы при обращении о помощи передавался не только сигнал «SOS» и координаты, но и хотя бы некоторый минимальный стандартный объем информации об объекте, терпящем бедствие.

5. Орбитальные станции.

По-видимому целесообразно создавать орбитальные станции разных типов: станции-лаборатории типа «Салют» и «Мир», типа разрабатываемой в настоящее время американской станции «Фридом», орбитальные станции типа «облако».

Последний тип станции мне представляется наиболее перспективным. Идея станции-облака заключается в том, что отдельные части станции — ее модули — не соединены жестко между собой, а «плавают» поблизости друг от друга на расстояниях, скажем, 10—100 километров (средства современной космической техники позволяют обеспечить стабильность такого «облака» без существенного расхода топлива). При этом каждый модуль станции работает в оптимальных для него условиях: на технологическом модуле нет помех (микроперегрузок) от космонавтов (например, когда они занимаются физическими упражнениями) и от работы двигателей ориентации; модули-телескопы ориентируются без помех с нужной точностью и в нужном направлении; заправочная станция с опасными запасами компонентов топлива может быть удалена на достаточное расстояние от базового жилого модуля.

6. Орбитальные заводы для производства сверхчистых материалов, биологических препаратов и для других производственных процессов, которые будут рентабельны или целесообразны на орбите.

7. Автоматические космические аппараты международной спутниковой системы наблюдения и контроля поверхности суши, вод, воздушного пространства и подводной обстановки с системой выдачи информации абонентам.

В международной системе наблюдения можно было бы иметь три подсистемы:

— 12—16 спутников с оптико-телевизионной аппаратурой для наблюдений в дневное время,

— 12—16 спутников с радиолокаторами для всепогодного и круглосуточного наблюдения,

— 3—6 спутников с аппаратурой для наблюдений в инфракрасном диапазоне.

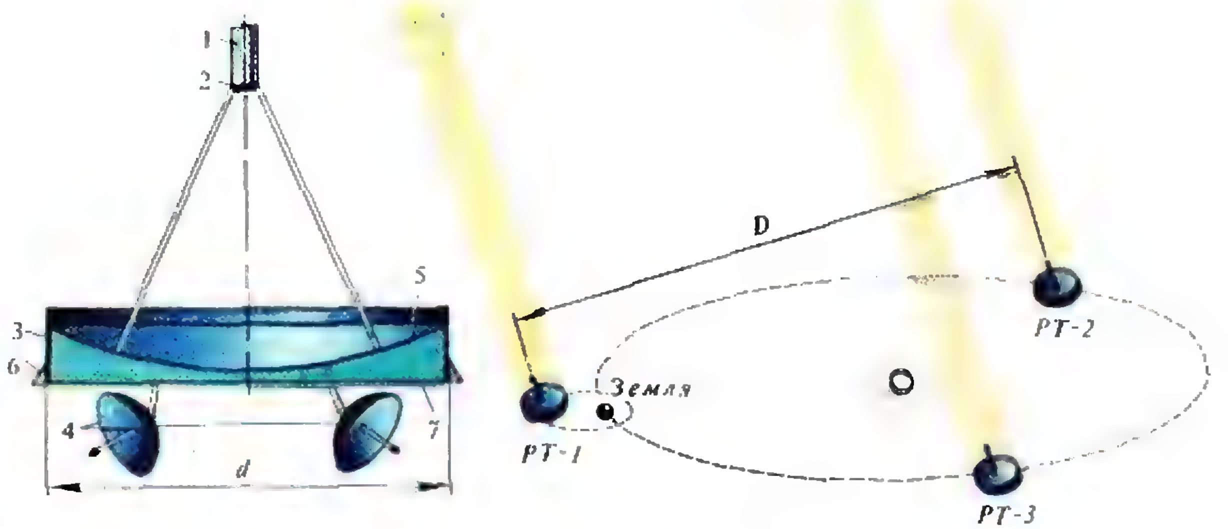
Современные оптико-телевизионные космические средства уже позволяют рассмотреть с орбиты предметы с размерами порядка метра и передать изображение через спутники-ретрансляторы абонентам.

Так называемые радиолокаторы бокового обзора, вынесенные на орбиту, при достаточной мощности позволят вести круглосуточный и всепогодный контроль поверхности Земли, воздуха и даже наблюдать за передвижениями подводных лодок. В принципе с помощью орбитальных радиолокаторов можно было бы различать предметы размером несколько метров.

С помощью такой системы спутников можно было бы получить темп обновления информации о происходящем на поверхности Земли порядка 30—60 минут.

8. Системы радиотелескопов, выводимых на околоземные и околосолнечные орбиты и работающих в единой радиоинтерферометрической схеме.

Разрешающая способность оптического телескопа (угловой размер предельно различимого объекта) определяется отношением длины волны, на которой ведется наблюдение, к диаметру телескопа. Для телескопа с диаметром около 3 метров, вынесенного за пределы атмосферы, в принципе можно получить разрешающую способность порядка сотых долей угловой секунды. Для системы радиотелескопов, вынесенных на орбиту и работающих совместно, разрешающая способность будет определяться отношением длины волны, на которой ведется прием радиоизлучения, к расстоянию между радиотелескопами. По-



Радиотелескоп и размещение совместно работающих радиотелескопов на орбите Земли (база $D \approx 250$ млн. км). 1 — приборный отсек; 2 — приемник; 3 — теплоизолирующая конструкция, обеспечивающая стабильность температур; 4 — антенны радиосвязи с Землей; 5 — зеркало; 6 — электрореактивные двигатели для ориентации; 7 — солнечные батареи; d — диаметр телескопа.

этому с помощью радиотелескопов, вынесенных на околосолнечную орбиту, можно получить разрешающую способность порядка десятимиллионных долей угловой секунды и заглянуть на самые окраины нашей Вселенной.

Кроме того, большие радиотелескопы с размерами порядка километра позволят человечеству начать регулярный поиск сигналов внеземных цивилизаций.

9. Орбитальные астрофизические обсерватории, работающие в различных спектральных диапазонах.

10. Оптические телескопы с разнесенными зеркалами, располагаемые на Луне.

Идея таких телескопов та же, что и в радиоинтерферометрии,— в увеличении базы наблюдения. Но базу нужно удерживать и знать с точностью до малых долей длины волны электромагнитного излучения, на которой ведется наблюдение, т. е. в данном случае с точностью до долей микрона. Поэтому и появляется мысль о расположении их на Луне.

11. Исследовательская база на Луне, которая может потребоваться для создания астрофизических обсерваторий на поверхности Луны и для изучения возможностей использования лунных ископаемых в космической деятельности человечества.

12. Автоматические аппараты для доставки на Землю проб грунта и атмосферы Марса.

13. Если в результате этих работ окажется необходимым осуществление экспедиции на Марс, то придется разрабатывать и создавать соответствующие средства пилотируемой экспедиции на Марс: марсианский орбитальный корабль, марсианский экспедиционный корабль, марсианский автомобиль и соответствующее оснащение для жизни и исследований на Марсе.

14. Автоматические средства исследования Венеры: орбитальная база у Венеры, атмосферные шары-зонды, средства радиолокационного картирования поверхности, посадочные лаборатории.

15. Солнечные обсерватории с перигелием внутри орбиты Меркурия, предназначенные для регулярного исследования ближайшей к нам звезды — нашего Солнца.

16. Автоматические аппараты для исследований астероидов.

17. Автоматические космические аппараты для исследования дальних планет.

(Окончание см. на с. 53)

Есть идея?!

Мех дыбом

В июльском номере «Кванта» за 1990 год мы предложили читателям задачу «Сушка меха». Повторим ее условие:

> В пушной промышленности возникает проблема сушки меха после мытья. Волоски меха слипаются, образуя неприглядные «сосульки». Это портит внешний вид меха. Нужно найти способ, позволяющий разделить волоски меха в процессе сушки.

Судя по откликам читателей, эта проблема заинтересовала их не менее, чем экзотическая задача спасения древнегреческой статуи (см. «Квант» № 7, 1990). Однако, как и прежде, многие пошли традиционным путем: если необходимо произвести какое-то действие, то надо сконструировать специальное устройство. Поэтому в редакцию поступило немало писем, в которых предлагаются разного рода хитрые гребни. Они, по мнению авторов, будут разделять слипшиеся волоски меха, позволяя тем самым теплому воздуху проходить внутрь меха.

Надо сказать, что присланные решения в большинстве своем явно неизобретательские, неидеальные. Понятие идеального решения или идеального конечного результата (сокращенно ИКР) является одним из основных понятий теории решения изобретательских задач (сокращенно ТРИЗ). Ее создал наш выдающийся соотечественник Г. С. Альтшуллер. В настоящее время ТРИЗ успешно применяют во всем мире.

Итак, вернемся к задаче. Представим себе идеальный результат: ворсинки меха сами собой перестают слипаться, теплый воздух свободно проходит внутрь меха. Сушка осуществляется быстро, внешний вид меха не ухудшается. Правильная формулировка идеального решения зачастую делает ответ очевидным. Главное — не испугаться кажущейся невозможности осуществления решения. В математических задачах читатели, вероятно, привыкли обозначать искомую величину x. Аналогично и нам требуется найти искомый x-элемент, который позволит осуществить требуемое действие.

Ребята, предложившие расчесывать мех во время сушки, считали, что x-элемент — это зубья гребня. Слишком прозаично! За некоторое ускорение процесса сушки в этом случае приходится платить конструированием целого расчесывающего станка. Гораздо более красивое решение прислал Олег Гребенников из Уфы. Он пишет: «Ворсинки меха слипаются из-за поверхностного натяжения воды. Надо сделать мех несмачиваемым, тогда необходимость в сушке отпадет, воду можно будет просто стряхнуть». Возможно, над *этим* решением и следует подумать химикам, мы же, не углубляясь в его разбор, поищем x-элемент из области физики.

Сформулируем проблему следующим образом: какое физическое поле может «растолкать» ворсинки меха в разные стороны? Ответ очевиден: электростатическое. Наверное, все читатели видели школьный опыт: при зарядке электрического султанчика его лепестки расходятся в стороны. Однако далеко не все сумели использовать знание физики для решения технической проблемы. Уж слишком велика сила психологической инерции.

Но вот участники кружка «Юные изобретатели» Сепычевской школы Верещагинского района Пермской области (руководитель кружка А. И. Колобов) нашли чисто физический x-элемент. Их решение задачи приведем полностью.

«Для сохранения высокого качества меха необходимо, чтобы в процессе сушки ворсинки меха сами собой выпрямлялись или вытягивались по команде «смирно!». Этого можно добиться следующими способами.

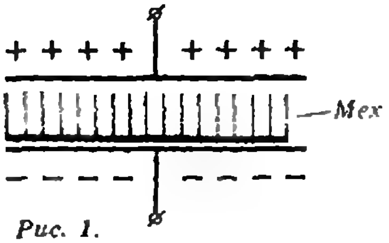


Рис. 1.

1. Поместить мех в электрическое поле, как показано на рисунке 1. Силовые линии электрического поля при этом будут выпрямлять ворсинки меха.

2. Перед мойкой размешать в моющем растворе мельчайшие частицы из ферромагнитного материала. Во время мойки меха ферромагнитные частицы вместе с моющим раствором прильнут к ворсинкам меха. Сушку меха производить в магнитном или электромагнитном поле, как показано на рисунке 2. Магнитные силовые линии будут выпрямлять ворсинки меха. В процессе сушки ферромагнитные частицы сами собой отделятся от ворсинок и притянутся магнитным полем к магнитному элементу. (Для ускорения отделения ферромагнитных частиц от магнитного элемента можно применить электромагнит или соленоид: выключил электрический ток, проходящий через катушку,— и ферромагнитные частицы отпали от сердечника. Их можно снова помещать в моющий раствор.)»

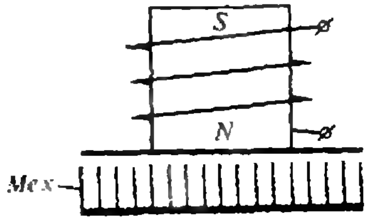


Рис. 2.

Мы думаем, что теперь читатель без труда справится со следующей задачей:

Задача 3. «Опыление ветром» Для повышения урожайности многих культур часто применяют искусственное опыление. Оно заключается в обдувании растений потоком воздуха. Однако вот беда: поток воздуха вызывает закрытие венчиков цветков, что резко ухудшает опыление. Подумайте, как можно предотвратить закрывание венчиков цветов при опылении ветром.

Следующие две задачи не похожи по форме, однако их решение во многом сходно.

Задача 4. «Горизонтальный желоб»

Во время строительства возникла проблема определения горизонтальности желоба в бетонном теле плотины. Обычно такая задача решается с помощью ватерпаса — прибора, основной частью которого является трубочка с водой, содержащей пузырек воздуха. Если трубочка горизонтальна, то пузырек находится посередине, если не горизонтальна, то пузырек отходит к одному из концов. Но в данном случае непосредственное использование прибора затруднено. Ватерпас в желоб поместить можно, но желоб имеет изгиб, а потому прибора не видно и не удается определить горизонтальность желоба за изгибом. Помогите строителям. А те, кто решат эту задачу, пусть подумают над вопросом: предположим, желоб негоризонтален; как определить его наклон?

И еще одна строительная задача. Сформулируем ее в виде ситуации.

Задача 5. «Скала над дорогой»

Главный инженер стремился скрыть свое раздражение. Его люди в лютые сибирские морозы строят дорогу, а разлюбезные проектировщики так все распланировали, что над дорогой будет нависать кусок скалы, угрожая безопасности строительства и будущего движения по дороге. Использовать взрывчатое вещество нельзя — вблизи поселок.

«Как вы поняли,— обратился главный инженер к собравшимся, — вопрос номер один сейчас — это как отковырнуть эту проклятую глыбу.»

Поднялся молодой инженер, недавно вернувшийся из загранкомандировки: «В аналогичных случаях в Италии,— начал он,— бурят в скале скважины, потом специальная машина вставляет в них клинья, нажимает — и порода с треском отваливается...»

«Нет, не пойдет,— прервал его главный инженер,— бурить скважины мы можем, а вот этой итальянской машины у нас нет.»

«Да, тут не Италия,— почему-то развеселился мастер.— Если что и трещит, так это мороз за окном.»

Что бы вы предложили главному инженеру?

Ждем ваших писем.

Ведущий рубрики
А. Лазарян

Ближайшие задачи в космосе

(Начало см. на с. 46)

18. Многоразовые дешевые транспортные корабли для транспортных операций Земля — орбита — Земля.

Что значит дешевые? Доставка грузов на орбиту одноразовыми носителями в конце семидесятых — начале восьмидесятых годов обходилась американцам в 1500—2500 долларов за каждый килограмм. У нас эти работы обходились существенно дешевле, но объективно сравнивать здесь очень трудно. Переход на «Шаттл» с точки зрения элементарного здравого смысла был, конечно, шагом назад: доставка аппаратов на «Шаттле» обходится сейчас не дешевле, чем 10 000 долларов за килограмм. Советский «Буран», внешне довольно похожий на «Шаттл», по экономическим показателям будет еще хуже. Ни «Шаттл», ни «Буран» не решают задачи снижения транспортных расходов в космосе. Так что задача создания действительно дешевых средств доставки космических аппаратов на орбиту остается. По моему мнению, эти новые средства должны снизить стоимость доставки на орбиту до сотни долларов.

19. Дешевые многоразовые транспортные средства для транспортных операций низкая орбита — геостационарная орбита — низкая орбита.

20. Космические роботы.

Следует ожидать расширения работ в открытом пространстве на орбитах спутников Земли. Эти работы будут связаны с созданием орбитальных заводов, больших радиотелескопов, обслуживанием орбитальных аппаратов, возможно, со строительством орбитальных электростанций. Скованность человека, одетого в космические доспехи, опасность работ в открытом пространстве вынудят нас создать космические роботы.

* * *

Эта статья не претендует на исчерпывающее освещение задач космических работ на ближайшие десятилетия. Она только показывает на необходимость и возможность их формирования уже сейчас, с тем чтобы не упустить время и не делать ошибок в выборе цели.

Я — ЭТО ДРУГОЕ ДЕЛО

(фантастический рассказ)

Ф. ПОЛ (США)

Я сижу на краю металлической кровати. Матрацем служит второе одеяло, постеленное на ее стальные пружины. Не слишком удобно, но меня ждут еще бóльшие неприятности.

Близится час, когда меня переведут в окружную тюрьму, а через некоторое время после этого я окажусь в камере смертников. Разумеется, сначала состоится судебная процедура, но это простая формальность. Меня не только схватили на месте преступления, я к тому же еще во всем признался.

Я умышленно убил Лоренса Коннота, моего друга, который спас мне жизнь. Конечно, в свое оправдание я мог бы привести некоторые смягчающие обстоятельства, но вряд ли суд примет их во внимание.

Коннот и я были друзьями много лет. Война разъединила нас. Через несколько лет после ее окончания мы снова встретились в Вашингтоне, но в наших отношениях появилась некоторая отчужденность. За это время он, как это говорится, нашел свое призвание. Он много и упорно над чем-то работал, но скрывал от меня, что это было такое. У меня, естественно, были свои заботы, но после того, как я с треском провалился по анатомии, они уже не имели никакого отношения к науке. Должен сказать, что к медицине я охладел уже давненько, с того самого дня, когда впервые попал в анатомический театр; трупов я не боялся, просто не было в этом ничего привлекательного.

Так я и не получил никакого академического звания, да и к чему оно сенатскому охраннику?

Карьера не очень внушительная? Конечно, нет. Но я не стыжусь ее. В жизни вообще ничего не следует стыдиться. А моя должность мне даже нравится. Сенаторы в присутствии нас, охранников, обычно довольно откровенны, к нам относятся неплохо, и мы частенько узнаем интересные вещи о том, что происходит за правительственными кулисами. Со своей стороны, мы можем быть полезны немалому числу людей — газетным репортерам, охотящимся за какой-нибудь историей; правительственным чиновникам, могущим порой использовать одно-единственное неосторожное замечание для целой политической кампании; а также всем тем, кто захотел бы побывать во время важных прений на галерее для посетителей.

Как это и получилось, к примеру, с Ларри Коннотом. Мы с ним столкнулись как-то на улице, немного поболтали, потом он спросил, не могу ли я достать для него пропуск на предстоящие прения по внешней политике. На следующий день я сообщил ему по телефону, что с пропуском все в порядке.

Он явился к началу выступления государственного секретаря, и его маленькие влажные глазки прямо-таки блестели от удовольствия. И тут неожиданно раздался громкий крик... История эта, конечно, у всех еще свежа в памяти. Их было трое, этих фанатиков из Центральной Америки, пытавшихся с помощью огнестрельного оружия оказать воздействие на нашу политику. У двоих были пистолеты, у третьего — ручная граната. Пистолетными выстрелами ранило двоих сенаторов и одного охранника. Мы с Коннотом стояли совсем рядом. Я бросился на маленького паренька, уже замахнувшегося гранатой, сбил его с ног; граната откатилась в сторону, я хотел схватить ее и, увидев, что она взведена и вот-вот взорвется, на какое-то мгновение оцепенел, и в это же самое мгновение на ней оказался Ларри...

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967). Перевод с английского Л. Мишина.

Газеты сделали нас обоих героями. Они писали, как о чуде, что Ларри, упав плашмя на гранату, еще успел ее из-под себя вытащить и отбросить в такое место, где она, взорвавшись, никому не причинила вреда.

Верно, вреда она действительно не причинила никому. В газетах упоминалось, что взрыв гранаты заставил Ларри потерять сознание. И верно, он действительно потерял сознание. Прошло около шести часов, пока он снова не пришел в себя, и еще целый день после того он находился в каком-то полузабытьи.

На следующий день вечером я его навестил. Он был очень рад моему приходу.

— Ну вот мы с тобой и в героях,— сказал он приветливо.

— Ларри, ты спас мне жизнь,— сказал я.

— Чепуха, Дик, не стоит говорить об этом. Я бросился вперед чисто инстинктивно, нам обоим повезло, и все тут.

— Газеты пишут: ты был просто великолепен, проделал все так молниеносно, что никто и не понял толком, как все это произошло.

— В такую ничтожную долю секунды,— произнес он еще более небрежным тоном,— никто и не смог бы, естественно, успеть заметить что-либо.

— Я успел, Ларри.

Его маленькие глазки еще более сузились.

— Я был как раз между тобой и гранатой. Ты не мог броситься вперед ни мимо меня, ни надо мной, ни сквозь меня. И все же оказался лежащим на гранате.

Он продолжал молчать.

— И еще одно, Ларри. Она взорвалась прямо под тобой, тебя буквально приподняло взрывом. На тебе был непроницаемый для осколков жилет?..

— Видишь ли,— слегка откашлявшись, сказал он,— тот факт, что...

— Оставим «тот факт» в покое, дружище. Что произошло на самом деле?

Он снял очки и растерянно стал тереть себе глаза.

— Не понимаю,— пробормотал он.— Газеты пишут, что она разорвалась в нескольких...

— Плюнь на газеты, Ларри,— мягко прервал я его.— Пойми, я стоял рядом, и глаза у меня были открыты.

Ростом Ларри Коннот был вообще невелик, но никогда он не казался мне таким крошечным, как сейчас, когда он, сжавшись в маленький комочек в своем кресле, смотрел на меня такими глазами, как будто я был воплощением Немезиды.

Затем он рассмеялся, рассмеялся таким смехом — почти счастливым смехом, что я вздрогнул от неожиданности.

— Ну ладно, Дик. К черту эту игру в прятки: я ведь потерял сознание, а у тебя глаза были открыты... Рано или поздно я все равно должен был бы кому-нибудь признаться. Почему не тебе в конце концов?

Из того, что я узнал, в этой моей прощальной записке я опущу всего лишь одну подробность, подробность, правда, весьма существенную. О ней не узнает никто и никогда. Не узнает от меня, во всяком случае.

— Естественно, я не мог не понимать,— сказал Ларри,— что рано или поздно ты вспомнил бы наши ночные разговоры в кафе, наши бесконечные споры о боге и мировых проблемах. Конечно, ты их не забыл.

Да, я не забыл. У меня еще сохранилось в памяти, как я беспощадно издевался над его бредовыми утверждениями и гипотезами и как он упрямо защищал их. Одна из них была особенно вздорной. Он начал как-то доказывать, что...

В голове у меня все вдруг перемешалось.

— Ты, кажется, тогда утверждал,— заговорил я, с трудом подыскивая слова,— что когда-нибудь придет время и человеческий дух овладеет... гм... психокинетическими силами... Что когда-нибудь мы, не прибегая ни к каким машинам и не пошевелив даже пальцем, сможем одною лишь силой нашей мысли переносить наше тело в мгновение ока в любое место, какое нам вздумается. В общем, что для человеческого духа нет ничего невозможного.

— Боже, каким я тогда был желторотым юнцом! — воскликнул Ларри и задумался.

Я не мешал ему думать. Мне самому нужно было собраться с мыслями.

— Разумеется,— снова заговорил он,— человеческий дух сам по себе не способен на такие вещи. Все, что я тебе тогда об этом говорил, все это были слова восторженного мечтателя, а не выводы ученого, проверившего их истинность сотней опытов. Но кое в чем я все же был прав, и это кое-что помогло мне найти верное решение. Существуют некоторые... скажем, технические приемы, с их помощью человек может направить работу своей мысли таким образом, что она подчинит себе обычные физические силы, с которыми мы на каждом шагу сталкиваемся в нашей повседневной жизни. Владея такими приемами, человек окончательно восторжествует над природой!

Какой-то необыкновенный оттенок в его голосе и в выражении его глаз заставил меня почувствовать, что он действительно вырвал у природы какую-то великую тайну. На этот раз я поверил бы ему, даже если не было бы вчерашнего инцидента в сенате.

— Владея этими приемами,— продолжал он,— человек в состоянии делать все. Ты понимаешь, Дик? Решительно все! Перелететь через океан? В одну секунду. Обезвредить взрывающуюся бомбу? Ты видел это собственными глазами. Конечно, действия эти представляют собой работу, и она, как всякая работа, требует расхода энергии: никому не дано обойти законы природы. Поэтому-то я и вышел на целый день из строя. Полная нейтрализация большого количества мгновенно высвобожденной энергии — пока еще дело довольно трудное. Гораздо легче, например, отклонить в сторону летящую пулю, а еще проще — удалить из ствольной коробки патрон и перенести его себе в карман, чтобы выстрел вообще не состоялся. Расстояния не играют почти никакой роли. Стоит тебе захотеть, Дик,— в его глазах вспыхнул горделивый огонек,— и ты увидишь перед собой английскую корону во всем блеске ее драгоценностей...

А в будущее заглядывать ты уже можешь? — спросил я.

Он нахмурился.

— Зачем такой тон, Дик, ведь я говорю о серьезных вещах. Шарлатанством я никогда...

— А читать мысли?

Лицо его прояснилось.

— Ах, ты и этот разговор помнишь? Нет, этого я не могу. Позже когда-нибудь, если займусь этой проблемой по-настоящему. Во всяком случае, не сейчас.

— Покажи мне что-нибудь, что ты можешь уже сейчас,— попросил я.

Он улыбнулся. Видимо, он наслаждался нашим разговором, и я его хорошо понимал. Долгие годы он скрывал свою тайну от всех. Десять лет поисков и экспериментов в полном одиночестве! Десять лет тайных надежд и разочарований, начиная с появления еще бесформенной идеи и кончая днем, когда она стала реальной действительностью. Ему просто необходимо было дать выход распиравшим его чувствам. Думаю, он в самом деле был рад, что наконец-то его кто-то разоблачил.

— Показать что-нибудь? Сейчас сообразим.— Он окинул комнату взглядом и кивнул головой: — Смотри на окно.

Окно открылось и снова закрылось.

— Радиоприемник,— сказал Ларри.

Маленький аппарат вдруг ожил: щелкнув, опустилась одна из клавиш, засветилась шкала, раздалась музыка.

— Смотри внимательно!

Музыка резко умолкла, приемник исчез. И тут же вновь появился на прежнем месте; выскочивший из розетки конец соединительного шнура с легким стуком упал на ковер.

— Он был примерно на высоте Эвереста,— сказал Ларри, явно стараясь сохранить непринужденный вид.— А что скажешь о такой штуке...

Лежавший на полу шнур поднялся, и его вилка устремилась к розетке, замерла в воздухе на секунду и снова шлепнулась на пол.

— Нет,— передумал Ларри,— сейчас я тебе покажу действительно кое-что серьезное. Следи за приемником, Дик. Я его заставлю работать без тока. Для усиления электромагнитных колебаний достаточно...

Его напряженный взгляд снова был прикован к аппарату. Мгновение, другое. Вспыхнула лампочка, освещающая шкалу; из динамика донеслись первые шипящие звуки. Я поднялся со стула, оказавшись как раз позади Ларри. Я воспользовался телефоном, стоявшим на столике рядом с моим стулом. Удар пришелся ему в затылок, возле уха; он обмяк и повалился на пол. Я ударил его еще дважды, чтобы он наверняка не смог прийти в себя в течение ближайшего часа, и бросил телефонную трубку на место.

Затем приступил к обыску. То, что меня интересовало, я нашел в его письменном столе: записки и расчеты. Все, что я должен был знать, чтобы быть в состоянии делать то, что мог делать он. Это вместилось в две-три строки, все прочее я сжег.

Я снова поднял трубку и вызвал полицию. Услыхав их сирену, я вытащил мой служебный пистолет и выстрелил ему в горло. Он был уже мертв, когда они ворвались в комнату.

Совесть моя чиста. На суде я постараюсь объяснить мотивы моего поступка, хотя и не уверен, что присяжные признают их основательными.

В тех двух-трех строчках было сказано, как делать то, что мог делать он, Лоренс Коннот. Всякий, кто умеет читать, тоже мог бы это делать. Формула Коннота доступна всем грамотным людям — честным, нечестным, подлецам, преступникам, душевнобольным.

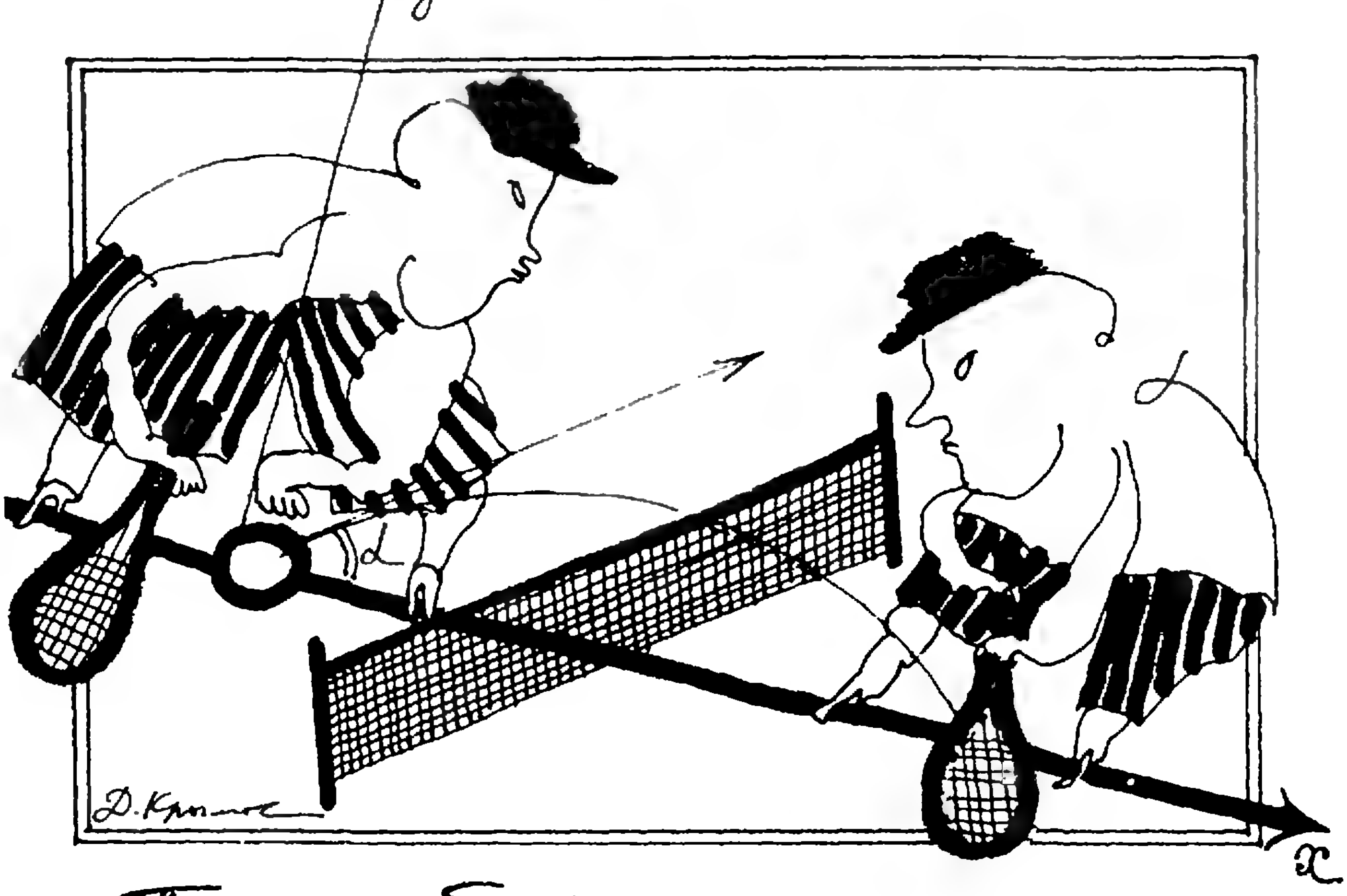
Лоренс Коннот был честным идеалистом, это верно. Мы были друзьями с детства, я его душу знал насквозь и, как говорится, в случае необходимости мог бы доверить ему мою жизнь. Все это так. Но ведь речь идет о гораздо большем!

Не только о его жизни! Не только о моей!

Кто может поручиться за человека, который вдруг почувствует себя богом? Предположите, что какой-нибудь человек стал единственным обладателем секрета, дающего ему возможность проникать сквозь любые стены, в любое закрытое помещение, в любой банковский сейф. Предположите, что этому человеку не страшно никакое оружие.

Говорят, что власть разлагает. Что абсолютная власть разлагает абсолютно. Можно ли себе представить более абсолютную власть, чем та, которой обладал Коннот? Человек, который, не боясь наказания, мог делать все, что ему взбредет на ум? Ларри был моим другом, но я убил его совершенно хладнокровно, понимая, что человека, владеющего тайной, которая может сделать его властелином мира, нельзя оставлять в живых.

Я — это другое дело.



Практикум абитуриента

Векторные уравнения в кинематике

Д. АЛЕКСАНДРОВ

Как известно, при равноускоренном движении зависимости скорости $\vec{v}$ и перемещения $\vec{s}$ тела от времени задаются формулами

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t, \qquad (1)$$

$$\vec{s}=\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2}, \qquad (2)$$

где начальная скорость $\vec{v}_0$ и ускорение тела $\vec{a}$ — не зависящие от времени векторы.

Упражнение 1. Из формул (1) и (2) получите следующие выражения:

$$\vec{s}=\frac{\vec{v}_0+\vec{v}}{2}t,$$

$$v^2-v_0^2=2\vec{a}\cdot\vec{s} \qquad (3)$$

(где $\vec{a}\cdot\vec{s}$ — скалярное произведение).

Упражнение 2. Убедитесь, что из формулы (2) после дифференцирования по времени получается выражение (1).

Среди всевозможных случаев равноускоренного движения особое место занимает свободное падение тел в поле тяжести. Решение большинства задач на эту тему сводится, как правило, к применению формул (1), (2) и (3). На этом примере мы и рассмотрим основные методы работы с векторными уравнениями.

Задача 1. *Тело, брошенное с поверхности земли под углом α к горизонту, упало на расстоянии L от места броска. Определите время полета тела.*

Решение 1. Выберем оси координат X и Y так, как показано на рисунке 1, и запишем векторное

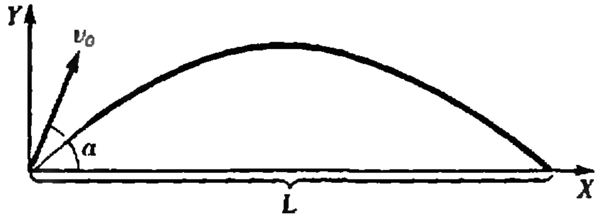


Рис. 1.

уравнение (2) в проекциях на эти оси:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть τ — искомое время полета. Из условия задачи следует, что при $t=\tau$ тело имеет координаты $x=L$ и $y=0$. Уравнения (4), записанные для момента падения тела, дают систему из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} L &= v_0 \cos\alpha \cdot \tau, \\ 0 &= v_0 \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}. \end{aligned} \qquad (5)$$

Отсюда, исключив v_0, находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2L\,\mathrm{tg}\,\alpha}{g}}.$$

Мы решили задачу стандартным методом, который можно назвать «проектированием на оси». С его помощью векторное уравнение сводится к системе скалярных, которая затем решается обычным образом. Именно так абитуриенты обычно и решают подобные задачи, однако при ответе даже несложные вопросы зачастую ставят их в тупик. Например, такие:

1) Какая разница между системами уравнений (4) и (5)?

2) Почему из трех уравнений (1) — (3), описывающих равноускоренное движение, для проектирования выбрано второе?

3) Почему именно так направлены оси координат?

Упражнение 3. Прежде чем читать ответы, подумайте, как бы вы ответили на эти вопросы.

Вы, конечно же, решали задачи с числовыми данными и знаете, что обычно требуется сначала получить буквенный ответ, или, как принято говорить, ответ в общем виде, а потом подставить в него числа. Понятно, что в буквенном ответе содержится несоизмеримо больше информации, чем в числовом. Так вот, система (4) находится примерно в таком же отношении к системе (5), как и буквенный ответ к числовому. Так, если первая система верна всегда, т. е. из нее можно найти координаты тела в любой момент времени, то вторая верна только для момента падения тела.

По поводу второго вопроса заметим, что три изменяющиеся со временем величины $\vec v$, $\vec s$ и t в уравнения (1) — (3) входят парами. В нашей задаче известна дальность ($\vec s$), а найти нужно время (t), поэтому мы и выбрали уравнение с парой $\vec s$, t, т. е. второе.

Упражнение 4. Как нужно переделать условие задачи, чтобы она решалась с помощью уравнений (1) или (3)?

Заметим, что эти соображения легко переносятся на задачи из любого раздела физики. Ведь все встречающиеся в задаче величины можно разбить на три группы: известные

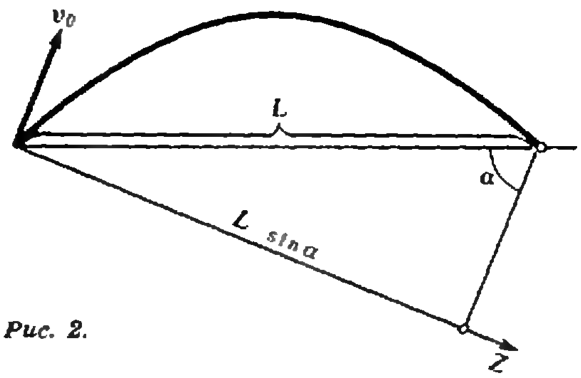


Рис. 2.

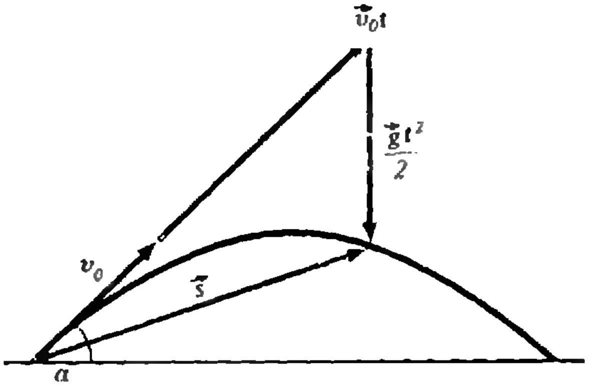


Рис. 3.

величины; неизвестные величины, которые необходимо найти; неизвестные величины, которые не требуется находить. Ясно, что если в формулы не входят первые два типа, то задачу не решить, а вот от третьих желательно по возможности избавиться.

Что касается третьего вопроса, то вы, наверное, посчитаете его глупым и скажете, что, конечно же, именно эти оси координат самые удобные. Вообще в такой задаче мысль направить оси куда-нибудь еще выглядит крамольной. И это легко обосновать. Действительно, естественно считать метод удобнее, если он позволяет получить ответ при меньшем количестве вычислений. В этом смысле наибольшие неприятности в уравнении (2) сулит член $\vec{g}t^2/2$ — из-за него уравнения получаются квадратными. Если мы не хотим решать два квадратных уравнения, одну ось нужно направить горизонтально. Вторую же можно направить куда угодно, но, чтобы не вводить при проектировании новых углов, направим ее вертикально. Кроме того, дальность полета и высота, обычно фигурирующие в подобных задачах, являются координатами именно при таком выборе осей. Убедительно, не правда ли? И все-таки...

Решение 2. Направим ось Z перпендикулярно начальной скорости v_0 (рис. 2). В проекциях на эту ось вместо уравнения (2) получим

$$z=\frac{g\cos\alpha\cdot t^2}{2}.$$

При $t=\tau$ $z=L\sin\alpha$. Отсюда получаем ответ:

$$\tau=\sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

Это решение стало возможным потому, что величина третьего типа (по нашей классификации) $\vec{v}_0$ — векторная, и от нее можно избавиться удачным выбором оси координат, получив тем самым одно уравнение с одним неизвестным.

Впрочем, можно вообще обойтись без всяких осей...

Решение 3. Формула (2) утверждает, что при равноускоренном движении вектор перемещения тела в любой момент времени равен сумме векторов $\vec{v}_0t$ и $\vec{g}t^2/2$ (рис. 3). Это, кстати, означает, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, складывается из равномерного и прямолинейного движения со скоростью $\vec{v}_0$ и свободного падения без начальной скорости.

«Нарисуем» формулу (2) для момента падения тела τ (рис. 4). Из получившегося прямоугольного треугольника легко найдем

$$L\operatorname{tg}\alpha=\frac{g\tau^2}{2},\ \text{и}\ \tau=\sqrt{\frac{2L\operatorname{tg}\alpha}{g}}.$$

Упражнение 5. Тело бросают под углом β к горизонту со склона горы, наклоненной под углом α к горизонту. Тело упало на расстоянии L от места броска. 1) Напишите уравнения движения тела (уравнение (2)) в проекциях на оси 1—5 (рис. 5) для момента падения тела на склон горы. 2) Выберете любые два из этих уравнений и покажите, что оставшиеся можно получить из этих двух. 3) Для каждого из полученных уравнений придумайте задачу, в которой это уравнение сразу приводит к цели.

Задача 2. *На гладкую неподвижную наклонную плоскость с углом*

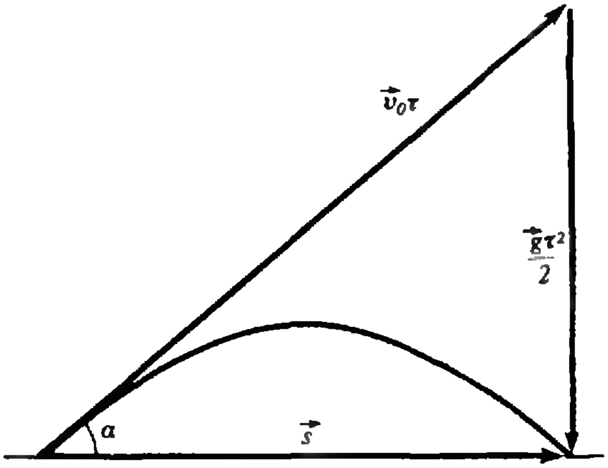


Рис. 4.

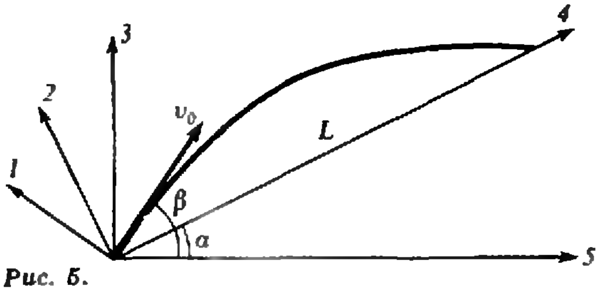


Рис. 5.

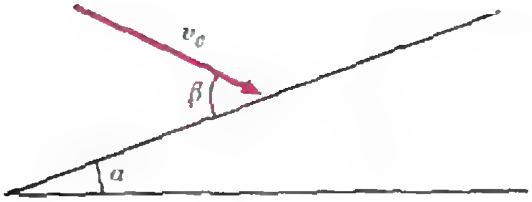


Рис. 6.

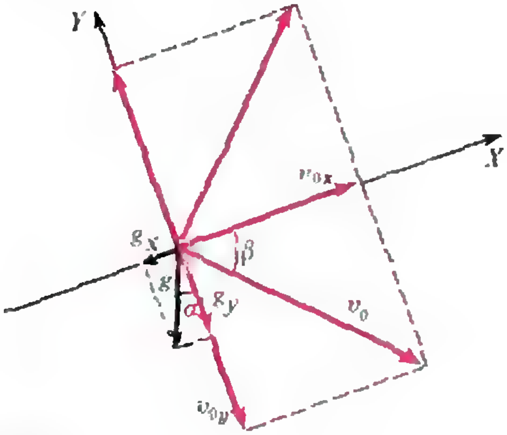


Рис. 7.

наклона α налетает стальной шарик под углом β к плоскости (рис. 6). При каких значениях β шарик сможет вернуться в точку его первого удара о плоскость? Все соударения считать упругими.

Ограничимся одним — наиболее разумным, с нашей точки зрения, решением этой задачи.

Решение. Движение шарика в целом в этом случае не является равноускоренным из-за ударов о плоскость. Однако в промежутках между ударами шарик движется под действием только силы тяжести и, следовательно, равноускоренно. Поэтому для каждого промежутка можно использовать формулы (1) — (3), правда для этого всякий раз нам придется искать начальную скорость.

Как известно, при упругом ударе составляющая скорости шарика, параллельная плоскости, не изменяется, а перпендикулярная плоскости составляющая лишь меняет знак, также не изменяясь по величине. Тогда, зная скорость шарика $\vec{v}_0$ перед первым ударом, найдем скорость после этого удара и подставим ее в формулу (2) для первого участка равноускоренного движения. Затем по формуле (1) найдем скорость шарика перед вторым ударом, и т. д. Другими словами, формулы (1) — (3) плюс условия упругого удара полностью определяют движение шарика.

Осталось только определиться с выбором осей. Если, по традиции, направить оси горизонтально и вертикально, то мы, конечно, выиграем при написании уравнений движения для отдельных участков (так как проекция шарика на горизонтальную ось движется равномерно), но зато очень сложными станут условия отскока шарика. Поэтому направим оси X и Y так, как показано на рисунке 7, и запишем уравнение (2) в проекциях на эти оси:

$$x = v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$
$$y = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2},$$

где

$$v_{0x} = v_0 \cos\beta, \; v_{0y} = v_0 \sin\beta,$$
$$g_x = -g\sin\alpha, \; g_y = -g\cos\alpha.$$

Шарик ударится о плоскость второй раз, когда координата y станет равна нулю (еще одно преимущество выбранных нами осей). Решив уравнение

$$0 = v_{0y}\tau + \frac{g_y \tau^2}{2},$$

найдем, что второй удар произойдет через время

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{-g_y} = \frac{2v_0 \sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

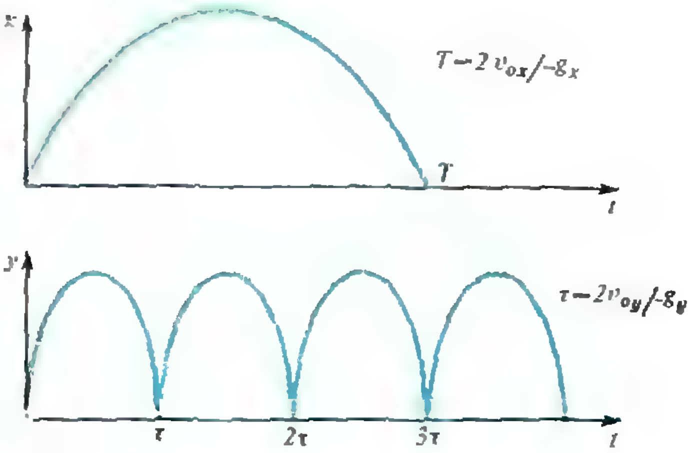


Рис. 8.

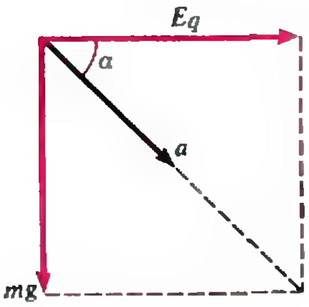


Рис. 9.

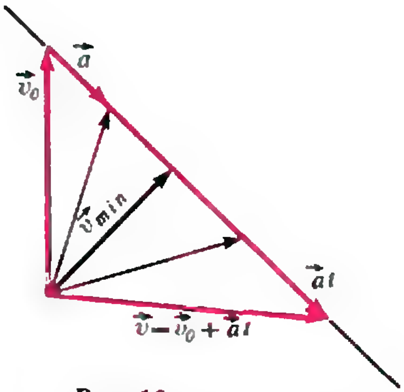


Рис. 10.

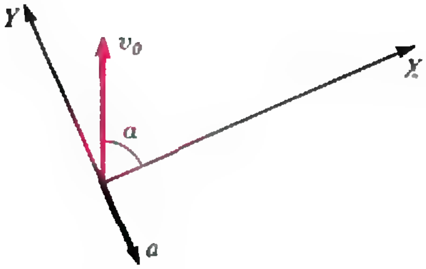


Рис. 11.

Чтобы найти скорость шарика перед вторым ударом (т. е. через время τ), запишем в проекциях на наши оси уравнение (1):

$$v_x=v_{0x}+g_xt,$$
$$v_y=v_{0y}+g_yt.$$

Подставляя $t=\tau=2v_{0y}/(-g_y)$, получим, что перед вторым ударом $v_y=-v_{0y}$ и, следовательно, сразу после удара $v_y=v_{0y}$. Этот результат позволяет облегченно вздохнуть — дальше можно не считать. Так как время между ударами зависит только от v_{0y}, все удары происходят через одинаковое время.

Ответить на вопрос задачи теперь удобнее всего, нарисовав друг под другом графики зависимости координат шарика от времени (рис. 8). Шарик вернется в ту же точку, если в некоторый момент $x=y=0$, что может быть, только если $T=n\tau$, где n — целое число. Итак,

$$\frac{2v_0\cos\beta}{g\sin\alpha}=n\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}\beta=n\operatorname{tg}\alpha.$$

Интересно, что при четных и нечетных n шарик ведет себя несколько по-разному. При четных n средний удар шарика (всего ударов $n+1$) происходит перпендикулярно плоскости, и шарик возвращается обратно по той же траектории. Если же n нечетно, то после половины ударов шарик летит вертикально вверх, падает обратно и также возвращается, повторяя весь пройденный путь.

Задача 3. *В область пространства, где создано горизонтальное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, запускают шарик, масса которого m, а заряд q, со скоростью $\vec{v}_0$, направленной вертикально вверх. Какова минимальная скорость шарика в процессе движения?*

Вас не удивило присутствие здесь «электрической» задачи? Нет? И правильно, эта задача, конечно же, имеет прямое отношение к кинематике.

Обсудим два решения.

Решение 1. На шарик в полете действуют две постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и электрическая сила $\vec{E}q$ (рис. 9). По второму закону Ньютона ускорение шарика постоянно и равно

$$\vec{a}=\frac{\vec{E}q+m\vec{g}}{m}.$$

При этом

$$a=|\vec{a}|=\frac{\sqrt{(Eq)^2+(mg)^2}}{m}.$$

На рисунке 10 показано, как изменяется со временем вектор скорости шарика («нарисована» формула (1)). Ясно, что минимальной скорость будет через время

$$t=\frac{v_0\sin\alpha}{a},$$

и ее величина будет равна

$$v_{\min}=v_0\cos\alpha=v_0\frac{Eq}{\sqrt{(Eq)^2+(mg)^2}}.$$

Если вам хочется побольше формул, можно сделать по-другому.

Решение 2. Направим оси координат перпендикулярно и параллельно ускорению (рис. 11) и запишем уравнение (1) в проекциях на эти оси:

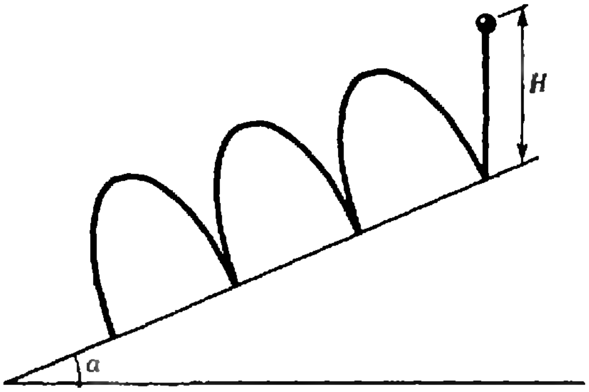


Рис. 12.

$$v_x = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_y = v_0 \sin\alpha - at.$$

(Сравните со свободным падением тела, брошенного под углом к горизонту.) Так как оси перпендикулярны,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - at)^2}.$$

Так как $(v_0 \sin\alpha - at)^2 \geqslant 0$,

$$v \geqslant v_0 \cos\alpha,$$

и при $t = (v_0 \sin\alpha)/a$

$$v_{\min} = v_0 \cos\alpha.$$

Подставляя сюда выражение для $\cos\alpha$, получим прежний ответ.

Если вы располагаете большим количеством свободного времени и чистой бумаги, убедитесь, что при другом выборе осей решение, мягко говоря, проще не становится.

Задачи для самостоятельной работы

1. Шарик свободно падает с высоты H на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом (рис. 12). Найдите отношение расстояний между точками, в которых подпрыгивающий шарик касается наклонной плоскости. Соударения шарика с плоскостью считать абсолютно упругими.

2. Из миномета ведут стрельбу по объектам, расположенным на склоне горы. На каком расстоянии от миномета будут падать мины, если время их полета τ? Угол наклона горы к горизонту β, миномет стреляет под углом α к горизонту.

3. Со стола высотой H сбрасывают упругий шарик, сообщая ему некоторую горизонтальную скорость. В момент, когда шарик испытывает одно из бесчисленных упругих соударений с полом, с того же стола горизонтально сбрасывают другой шарик, сообщая ему такую скорость, чтобы он столкнулся с первым шариком. На какой высоте произойдет встреча?

4. Электрон влетает в плоский конденсатор, параллельно его пластинам, со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с. Найдите модуль скорости электрона в момент его вылета из конденсатора. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/м, длина пластин $L = 8$ см, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-34}$ кг.

Малая и Большая теоремы Ферма

На польской математической олимпиаде 1970-71 гг. предлагалось доказать следующее утверждение об уравнении Ферма: если натуральные числа x, y, z удовлетворяют условию $x^n + y^n = z^n$, то $x \geqslant n$*).

(Напомним, что «Великая теорема» Ферма в том, что таких решений при $n > 2$ не существует, до сих пор не доказана и не опровергнута; легко видеть, что достаточно изучать ее лишь для простых n).

Наш читатель *В. П. Кузнецов* из подмосковкого поселка Мамонтовка прислал следующее изящное рассуждение, позволяющее усилить этот результат, а именно, доказать, что если p простое, $p > 3$ и $x^p + y^p = z^p$ для некоторых натуральных x, y, z, то $x > 6p$.

Воспользуемся Малой теоремой Ферма: если p простое, то $a^p - a$ делится на p при любом целом a. Заметим, что если $p > 3$ нечетно, то $a^{p-1} - 1$ делится на $a^2 - 1 = (a-1) \times (a+1)$, так что $a^p - a$ делится на произведение трех последовательных чисел $(a-1)a(a+1)$, а значит, делится на 6; а если $p > 3$ — простое, то 6 взаимно просто с p, следовательно, $a^p - a$ делится на $6p$. Если $x^p + y^p = z^p$, то очевидно $x < z$, $y < z$, $x + y > z$, а выражение $x + y - z = z^p - z - (x^p - x) - (y^p - y)$ должно делиться на $6p$. Поскольку $x + y - z \geqslant 6p$ и $z - y > 0$, получаем $x > 6p$.

---

*) Это задача 130 из книги С. Страшевича и Е. Бровкина «Польские математические олимпиады». М.: Мир, 1978.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30°. Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше $1/\sqrt{2}$.

2. Решите уравнение

$$2^{|x-2|\sin x}=(\sqrt{2})^{x|\sin x|}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\leqslant x.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2-2a\sin(\cos x)+a^2=0$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+$$
$$+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17.$$

6. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$; $SA=SB=SC=\sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1. Сфера S_2, радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1, касается сферы S_1, плоскостей SAC и ABC. При этом отрезок прямой SB, заключенный внутри сферы S_2, имеет длину $6/\sqrt{7}$. Найдите радиус сферы S_2.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2+4}8<1.$$

2. Числа a_1, a_2, ..., a_{21} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12}, если $a_{20}=3a_9$.

3. Решите уравнение

$$3\cdot 64^{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}-392\cdot 8^{\sin 2x}+16=0.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2-48v-21}+\sqrt{9v^2-51v-15}\leqslant|3v-6|.$$

5. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{15}/3$. Окружность радиусом $5\sqrt{5}/(3\sqrt{3})$ касается лучей, образующих угол ABC, и вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите тангенс угла ABC, если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b неравенство

$$\left|\log_6\left(\frac{x}{36}\right)+\left(\frac{10a+3b+31}{5}\right)x^2-9b^2-\right.$$
$$\left.-9b-1\right|\leqslant\log_6\left(\frac{36}{x}\right)+\left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2-$$
$$-(6b+2)x+9b^2+15b+3$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$x^2-4|x|-1=0.$$

2. В равнобедренной трапеции диагональ длины d образует угол α с основанием. Найдите площадь трапеции.

3. Решите уравнение

$$\cos x\cdot\cos 3x=\cos 2x.$$

4. В треугольнике ABC $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $BC=a$, AD — высота. На стороне AB взята точка P так, что $AP/PB=1/2$. Через точку P проведена окружность, касающаяся стороны BC в точке D. Найдите радиус этой окружности.

5. Определите, при каких a уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$ имеет решение, и найдите эти решения.

6. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ отрезок AD — высота основания ABC. Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания ABC и боковых граней ASC и ASB пирамиды. Известно, что $AD/SD=m$. Найдите

1) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

2) в каких границах может изменяться это отношение при изменении m;

3) при каких m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^x+3\cdot 2^{x+2}=64.$$

2. Решите уравнение

$$2\sin^2x+\sin^2 2x=\frac{5}{4}-2\cos 2x.$$

3. Вычислите площадь и периметр треугольника, образованного осями координат и касательной, проведенной к графику функции $y=a\sin x$ $(a>0)$ в точке $x_0=-\frac{4\pi}{3}$.

4. Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 часов. Половину бассейна

первый из них может наполнить за время на 7,5 часов меньшее, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 кубометров воды. Какова емкость бассейна?

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=6$ и $BC=9$. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей AC и BD основания и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB и AD соответственно, $AE=4$, $AF=6$. Найдите площадь многоугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через точки E и F и параллельной ребру AS.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Найдите все решения уравнения

$$3\cos 2x=4-11\cos x.$$

2. Найдите все решения неравенства

$$9^{2x+0.5}-10\cdot 27^{-\frac{2}{3}x}>\frac{11}{3}.$$

3. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовой и легковой автомобили. Через 4 часа после начала движения они встретились. После встречи легковой автомобиль, едущий из A в B, увеличил свою скорость на 15 км/ч, а грузовик увеличил свою скорость на 30 км/ч. Определите первоначальную скорость легкового автомобиля, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 час раньше, чем грузовик прибыл в пункт A.

4. Из точки M на окружности проведены три хорды: $MN=1$, $MP=6$, $MQ=2$. При этом углы NMP и PMQ равны.

Найдите радиус окружности.

5. Найдите все значения a, b, x, y, z, при которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} 1+\operatorname{tg}(bz)\sin^2(xy)+\cos(2xy)\leqslant \\ \leqslant(\cos x+\sin(ay))|\sin(2xy)|, \\ 2+2\sqrt{\operatorname{tg}(bz)}\cos(b(y+x))+\cos(2b(y+x))=0. \end{cases}$$

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$2-3^{x-2}=3^{x-1}.$$

2. Трактористы A и $Б$ вспахали поле. В первый день они вспахали 1/3 поля, причем A работал 2 часа, а $Б$ — на 1 час больше. Оставшуюся часть поля они вспахали на другой день, при этом A работал 5 часов, а $Б$ — 4,5 часа. За сколько часов работы тракторист $Б$ мог бы вспахать это поле один?

3. В треугольнике ABC сторона AB равна 4, угол A равен 30°, угол B равен 130°. На стороне AB как на диаметре построена окружность. Найдите площадь части круга, лежащей внутри треугольника.

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y=1+4\sin x-2x$$

на отрезке $[0;\pi]$.

5. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $2x+1$ и $x+2$ больше -1.

6. Решите неравенство

$$\log_2(2-3x)>4x+1.$$

Вариант 7
(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{|x|}{x}-x=\frac{x^2}{2}+1.$$

2. Найдите площадь треугольника OMN, образованного на плоскости отрезками прямых OM, ON, MN, где O — начало координат, M — точка пересечения прямых $y=x$, $y=-2x+2$, N — точка пересечения прямой $y=-2x+2$ и оси OX.

3. Решите уравнение

$$1-(2\cos x+\sqrt{3})\operatorname{ctg} x=2\sin x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x^{13}}\right)-2}{\log_{125}x^{12}}\leqslant 4-\frac{7}{\log_x 5}.$$

5. Найдите все пары действительных чисел m и n, при которых уравнение

$$(3x^2-2m^2+mn)^2+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+\\+4=4x-x^2$$

имеет хотя бы одно решение.

6. На стороне BC треугольника BCD выбрана точка E, а на стороне BD — точка F так, что угол BEF равен углу BDC. Площадь круга, описанного около треугольника CFD, в 5 раз меньше площади круга, описанного около треугольника BEF. Отношение площади четырехугольника $CEFD$ к площади треугольника BEF равно 9/16. Угол FDE равен 45°. Найдите угол CED.

Вариант 8
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos^2 6x-\sin^2 3x-1=0.$$

2. Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвертый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

3. Решите неравенство

$$\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1.$$

4. На сторонах AB, BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K, M и L таким образом, что $AK:KB=2:1$, $BM:MC=1:1$, $AL:LD=1:3$. Найдите отношение площадей треугольников KBL и BML.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a+1)x^2+(|a+2|-|a+10|)x+a=5$$

имеет два различных положительных корня.

Вариант 9

(экономический факультет)

1. Имеют ли общие точки область значений функции

$$y=\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,x-2x^2$$

и промежуток $[\log_3 15;\ +\infty)$? Ответ обосиуйте.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{25+|16x^2-25|}=4+4|x+1|.$$

3. На гипотенузе KM прямоугольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов LK и LM в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AK, если известно, что $BM=\frac{23}{16}$, $AK:AC=5:23$ (где C — точка пересечения окружности с KM, лежащая между точками O и M).

4. Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найдите числа a, b и c, если известно, что при указанных условиях сумма $a+b+c$ максимальна.

5. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2},$$

расположенные на отрезке $[-3;\ 1]$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}(3-2\sqrt{2})^y+(3+2\sqrt{2})^y-3a=x^2+6x+5,\\ y^2-(a^2-5a+6)x^2=0,\\ -6\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 10

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{10}\cos x-\sqrt{4\cos x-\cos 2x}=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(3x-x^2)\leqslant 2.$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена медиана CM и высота CH. Найдите отношение $AH:AM$, если $CM:CH=5:4$ и точка H находится между точками A и M.

4. От двух сплавов массами 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$, а высота пирамиды совпадает с ребром SA. Найдите высоту пирамиды, если радиус вписанного в пирамиду шара равен 3, а сторона квадрата $ABCD$ равна 15.

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4\sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-2(\sqrt{5}-\sqrt{3})\cos(2x-\pi)+$$
$$+\sqrt{15}-4=0.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{x}-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}<\frac{1}{3}.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\left(-\frac{1}{2}x+\frac{5}{8}-\frac{15}{88-32x}\right)^2\leqslant 1.$$

4. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, а угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

5. Считая известным, что при любом $a>0$ уравнение

$$2x^3+x^2-x-a-1=0$$

имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найдите все $a>0$, при которых

$$12x_0^3-7x_0>6a+1.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Два одинаковых шара, между которыми зажата пружина, связаны нитью. Шары бросают без начальной скорости с некоторой высоты так, что при падении центры шаров двигаются по одной вертикали. Через время t после начала падения нить обрывается, пружина разжимается, и шары разлетаются. На какой высоте разорвалась нить, если первый шар упал на землю через время t_1 после разрыва нити, а второй — через время $t_2>t_1$? Время действия пружины на шары после разрыва нити считать малым. Размеры шаров и пружины не учитывать, сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Внутри сферической поверхности находится шайба (рис. 1). Одна поверхность шайбы представляет собой сферу того же радиуса. Коэффициент трения скольжения между шайбой и сферой μ, радиус сферы R. С какой угловой скоростью должны вращаться вокруг вертикальной оси OO' сфера и неподвижная относительно нее шайба, чтобы шайба находилась на высоте h ($h<R$) от нижней точки сферы? Ускорение свободного падения g. Максимальную силу трения покоя считать равной силе трения скольжения.

3. Длинная однородная деревянная доска плавает в воде, погрузившись на 1/2 своего объема. На один конец доски положили груз, в результате чего этот конец опустился в воду до своего верхнего ребра. Какая часть объема доски будет при этом погружена в воду?

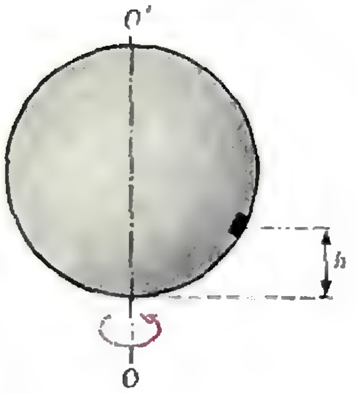


Рис. 1.

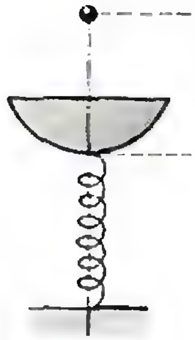


Рис. 2.

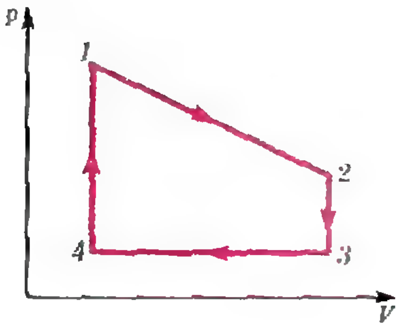


Рис. 3.

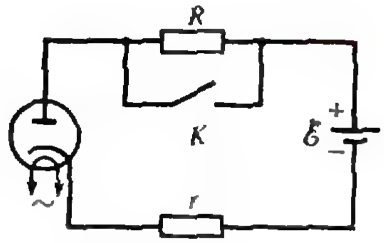


Рис. 4.

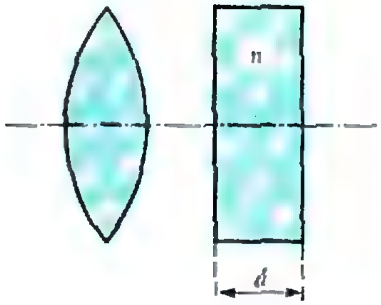


Рис. 5.

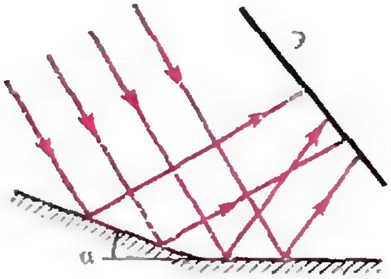


Рис. 6.

4. В середину чашечки, прикрепленной снизу к вертикальной пружине, попадает падающий с высоты H пластилиновый шарик (рис. 2). Масса чашечки M, масса шарика m, жесткость пружины k (пружина невесома), ускорение свободного падения g. На какую максимальную величину отклонится вниз чашечка в процессе колебаний после попадания в нее шарика?

5. Банка цилиндрической формы наполовину заполнена маслом плотностью ϱ. Высота банки L. Закрыв банку пластинкой, ее переворачивают вверх дном и опускают в воду плотностью ϱ_0. На какой глубине находится дно банки, если между дном и маслом в банке имеется слой воздуха высотой d? Атмосферное давление p_0. Температуру считать неизменной. В воде пластинку убирают.

6. Один моль идеального газа изменяет свое состояние согласно циклу, изображенному на диаграмме (рис. 3). Этот цикл состоит из двух изохор, одной изобары и процесса, изображенного на диаграмме прямой, соединяющей точки *1* и *2*. Температуры в состояниях *1*, *2*, *3*, *4* равны, соответственно, T_1, T_2, T_3, T_4. Какую работу совершает газ за один цикл?

7. Вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}=200$ В через два резистора R и r, согласно схеме, приведенной на рисунке 4. При замкнутом ключе K через диод идет ток $I_0=0{,}2$ А. Какой ток будет идти через диод, если ключ K разомкнуть? Сопротивление резистора R равно $R=1000$ Ом. Для данного диода сила тока пропорциональна разности потенциалов между анодом и катодом U, если $0<U<300$ В.

8. Электрон движется в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях, направленных по оси OZ. В начальный момент электрон пересекает начало координат, двигаясь в направлении оси OX. В каких точках электрон вновь пересечет ось OZ? Напряженность электрического поля E, индукция магнитного поля B, заряд электрона e, масса электрона m.

9. На какое расстояние сместится фокус длиннофокусной собирающей линзы, если на пути прошедших через линзу лучей перпендикулярно к главной оси поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=6$ см с показателем преломления $n=1{,}5$? Пластинка установлена вплотную к линзе (рис. 5). Диаметр линзы много меньше ее фокусного расстояния.

10. Два плоских зеркала образуют двугранный угол за счет того, что одно зеркало относительно другого повернуто на небольшой угол α (рис. 6). На зеркало падает свет в виде плоской волны с длиной волны λ. На пути отраженных от зеркал волн поставлен экран *Э*, который расположен симметрично по отношению к отраженным волнам. Чему равно расстояние между двумя соседними максимумами в интерференционной картине, наблюдаемой на экране?

Механико-математический факультет

1. Брусок массой $m=0{,}51$ кг, лежащий на горизонтальной плоскости, совершает прямолинейное равноускоренное движение под действием горизонтально направленной силы, равной

$F=5$ Н. Если увеличить массу бруска в $\alpha=2$ раза, то его ускорение под действием той же силы уменьшится в $\beta=3$ раза. Пользуясь этими данными, вычислите коэффициент трения бруска о плоскость. Считайте, что сила трения скольжения не зависит от скорости.

2. Маленький шарик массой $m=10$ г подвешен на нити длиной $l=1{,}1$ м к бруску массой $M=100$ г (рис. 7). Брусок находится на горизонтальной поверхности и может перемещаться в плоскости рисунка. Придерживая брусок, шарик отклоняют так, что нить образует с вертикалью угол $\alpha=60°$, и отпускают оба тела. Какова скорость бруска в тот момент, когда нить проходит через вертикальное положение? Трение можно не учитывать.

3. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (рис. 8). Масса стержня $m=1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha=45°$. Найдите величину силы реакции шарнира.

4. Кузнечик сидит на одном из концов соломинки длиной $l=50$ см, покоящейся на гладком полу. С какой минимальной относительно пола скоростью он должен прыгнуть, чтобы при приземлении попасть точно на второй конец соломинки? Масса кузнечика в $\beta=3$ раза больше массы соломинки. Размерами кузнечика и трением между полом и соломинкой можно пренебречь.

5. Сосуд, содержащий идеальный газ при температуре $t=27$ °C, снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений $\Delta p=400$ кПа. Газ нагревают до температуры $t'=127$ °C, при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Какое давление установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры t? Атмосферное давление $p_0=100$ кПа.

6. Воздух в комнате объемом $V=50$ м^3 имеет температуру $t=27$ °C и относительную влажность $\varphi_1=30$ %. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью $\alpha=2$ кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до $\varphi_2=70$ %? Давление насыщенных паров воды при $t=27$ °C $p_н=3565$ Па, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

7. В схеме, показанной на рисунке 9, напряжение на клеммах источника $U=100$ В, сопротивления в цепи $R_1=101$ Ом и $R=100$ Ом. Определите величину тока, протекающего по проводнику AB. Сопротивлением этого проводника и подводящих проводов, а также внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

8. При подключении к батарее по очереди двух сопротивлений $R_1=1$ Ом и $R_2=4$ Ом оказалось, что выделяющиеся на них мощности одинаковы. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

9. Цилиндрический сосуд с непрозрачными стенками расположен так, что глаз наблюдателя не видит дна сосуда, но полностью видит образующую цилиндра CD (рис. 10). Высота цилиндра $a=40$ см равна его диаметру. Какой объем воды нужно налить в сосуд, чтобы наблюдатель смог увидеть маленький предмет F, находящийся на расстоянии $b=10$ см от точки D? Коэффициент преломления воды $n=1{,}3$.

10. На боковую грань равнобедренной призмы с углом при вершине 90° падает перпенди-

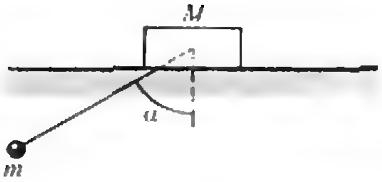


Рис. 7.

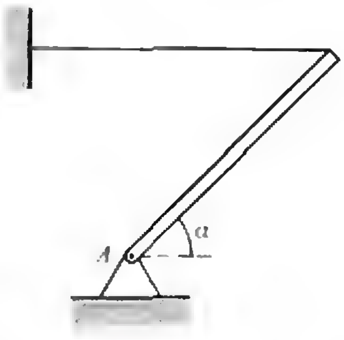


Рис. 8.

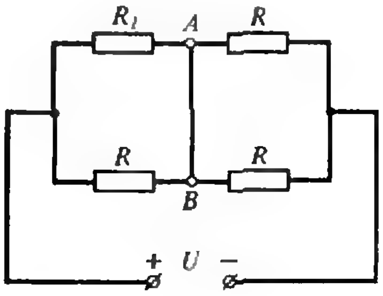


Рис. 9.

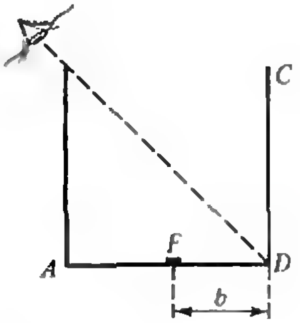


Рис. 10.

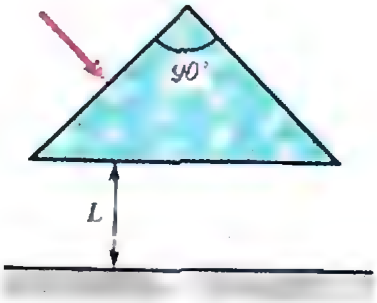


Рис. 11.

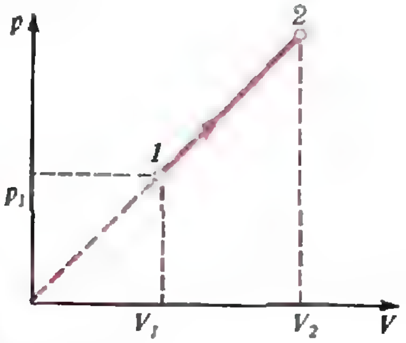


Рис. 12.

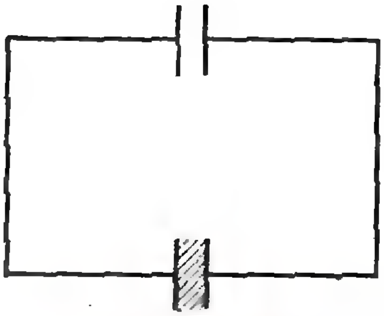


Рис. 13.

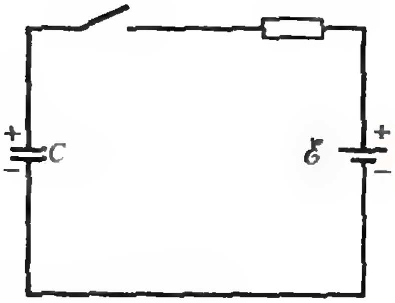


Рис. 14.

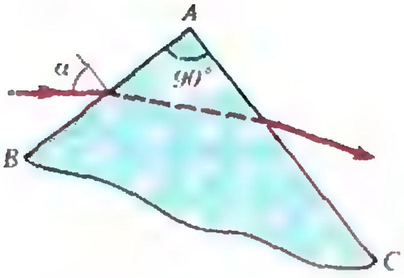


Рис. 15.

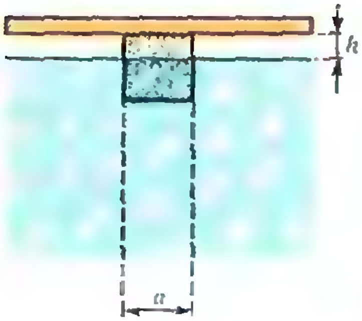


Рис. 16.

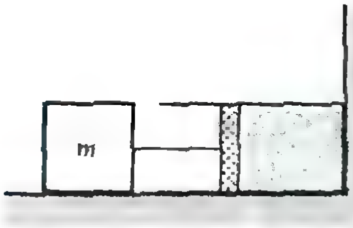


Рис. 17.

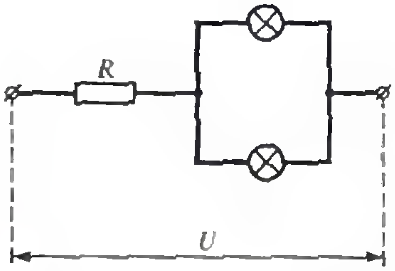


Рис. 18.

кулярно этой грани луч света с длиной волны, для которой показатель преломления призмы $n_1=1{,}1$. После выхода из призмы луч падает на экран, параллельный основанию призмы и находящийся от него на расстоянии $L=10$ см (рис. 11). На какое расстояние сместится луч на экране, если свет будет иметь другую длину волны, для которой показатель преломления призмы $n_2=1{,}2$?

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Маленький шарик падает с высоты $h=50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha=45°$ с горизонтом. Найдите расстояние между точками первого и второго соударений шарика с плоскостью. Соударения считать абсолютно упругими, сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Маленький шарик, подвешенный на нити длиной $l=1$ м, отклоняют от положения равновесия так, что нить составляет с вертикалью угол $\alpha=60°$, и отпускают без начальной скорости. В момент, когда шарик проходит положение равновесия, нить обрывается. Какой угол составляет с вертикалью скорость шарика в момент его падения на пол, если расстояние от точки подвеса нити до пола $h=2{,}5$ м?

3. Два тела, которые первоначально покоились на гладкой горизонтальной плоскости, расталкиваются зажатой между ними пружиной и начинают двигаться поступательно со скоростями $v_1=3$ м/с и $v_2=1$ м/с. Вычислите, какая энергия была запасена в пружине, если известно, что суммарная масса обоих тел $m=8$ кг, пружина невесома, трение отсутствует.

4. Два сосуда объемами $V_1=2$ л и $V_2=4$ л, заполненные одним и тем же газом, соединены друг с другом трубкой с краном и поддерживаются при постоянной температуре. При закрытом кране давление газа в первом сосуде $p_1=100$ кПа, а во втором $p_2=200$ кПа. На какую величину изменится масса газа в первом сосуде после открывания крана, если первоначальная масса газа в этом сосуде $m_1=18$ г? Объем трубки и крана не учитывать.

5. Найдите количество теплоты, переданное одноатомному газу при переводе его из состояния *1* в состояние *2* (рис. 12). При расчете принять $p_1=500$ кПа, $V_1=2$ л, $V_2=4$ л.

6. Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых воздушный, а другой заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены, как показано на рисунке 13, и заряжены до напряжения U_0. Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость воздушного конденсатора C.

7. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, разряжается через нагрузочное сопротивление на батарею с ЭДС $\mathcal{E}$ и очень малым внутренним сопротивлением (рис. 14). Какое количество теплоты выделится в нагрузочном сопротивлении после замыкания ключа?

8. Батарея замкнута на некоторое сопротивление. Если параллельно этому сопротивлению присоединить еще одно такое же сопротивление, то мощность, выделяемая во внешней цепи, не изменится. Во сколько раз изменится выделяемая во внешней цепи мощность, если оба сопротивления присоединить к батарее последовательно?

9. Электрический утюг мощностью $P=1$ кВт питается от сети с напряжением $U=220$ В. Утюг включается в сеть с помощью соединительного шнура длиной $L=1{,}5$ м. Каким должен быть диаметр каждого из медных проводов в шнуре, чтобы рассеиваемая на нем мощность не превышала $\eta=0{,}1\ \%$ от мощности утюга? Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}75\times10^{-8}$ Ом · м.

10. Луч света, лежащий в плоскости рисунка 15, падает на боковую грань AB призмы, имеющей при вершине угол 90°. В каких пределах лежат возможные значения угла падения α, если известно, что луч выходит из боковой грани AC? Показатель преломления призмы $n=1{,}25$.

Географический и химический факультеты

1. На Марсе время падения тела, отпущенного без начальной скорости, с некоторой высоты на поверхность планеты в $n=2{,}6$ раз больше времени падения с той же высоты на Земле. Во сколько раз период колебаний математического маятника на Марсе отличается от его периода колебаний на Земле? Сопротивлением атмосферы можно пренебречь.

2. Желоб состоит из двух досок, образующих двугранный угол, у которого ребро горизонтально, а плоскости составляют равные углы $\alpha=30°$ с горизонтом. В желобе лежит цилиндр массой $m=4$ кг, образующая которого параллельна ребру желоба. Какую силу нужно приложить в горизонтальном направлении к основанию цилиндра, чтобы он двигался вдоль желоба равномерно? Коэффициент трения между поверхностями желоба и цилиндра $\mu=0{,}1$.

3. Куб из пенопласта с ребром $a=0{,}5$ м, плывший по водоему, оказался зажатым под досками низкого горизонтального мостка (рис. 16). Какую горизонтальную силу необходимо приложить к кубу, чтобы сдвинуть его поступательно вдоль мостка? Плотность пенопласта $\rho_п=60$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3, высота мостка над уровнем воды $h=20$ см, коэффициент трения между поверхностью куба и досками мостка $\mu=0{,}3$.

4. В открытой с обоих концов горизонтальной трубке с площадью поперечного сечения $S=10$ см^2 на расстоянии $l=10$ см от одного из ее концов находится поршень. С этого же конца вставляют и начинают вдвигать в трубку другой поршень. При каком расстоянии между поршнями первый поршень сдвинется с места? Сила трения скольжения, действующая на поршень со стороны стенок трубки, $F=100$ Н, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Температуру считать постоянной. Толщиной поршней можно пренебречь.

5. В цилиндре под гладким поршнем площадью $S=5\cdot10^{-4}$ м^2 находится воздух при температуре $T_0=273$ К и давлении $p_0=10^5$ Па, равном атмосферному. Цилиндр лежит на горизонтальной плоскости, упираясь дном в вертикальную стенку (рис. 17). На той же плоскости лежит тело массой $m=5$ кг, соединенное с поршнем горизонтальным стержнем. До какой температуры необходимо нагреть воздух в цилиндре, чтобы тело сдвинулось с места? Коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu=0{,}3$.

6. Маленький шарик, обладающий массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-7}$ Кл, подвешен на невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. При помещении этой системы в однородное вертикальное электрическое поле сила натяжения нити в новом положении равновесия осталась такой же, какой была при отсутствии поля. Найдите величину напряженности поля.

7. Электрон движется в области пространства, где имеются однородное электрическое поле с напряженностью $E=0{,}5\cdot10^3$ В/м и однородное магнитное поле с индукцией $B=10^{-2}$ Тл, причем векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ имеют одинаковое направление. Найдите величину ускорения электрона в тот момент времени, когда его скорость равна $v=10^5$ м/с и составляет угол $\alpha=60°$ с направлением векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\times10^{11}$ Кл/кг.

8. Две одинаковые лампочки мощностью $P=100$ Вт каждая, рассчитанные на напряжение $U_0=127$ В, включены в сеть с напряжением $U=220$ В, как показано на рисунке 18. При каком сопротивлении резистора R лампочки горят в нормальном режиме?

9. На круглом плоском зеркале лежит шар радиусом R от глобуса, касаясь центра зеркала северным полюсом. Каков должен быть минимальный радиус зеркала, чтобы в нем можно было увидеть отражение любой точки северного полушария и части южного полушария до широты $\varphi=30°$?

10. В круглое отверстие в непрозрачном экране вставлена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см, на которую падает пучок световых лучей, параллельных ее главной оптической оси. На расстоянии $l=30$ см от линзы параллельно плоскости линзы расположен экран. Какое фокусное расстояние должна иметь собирающая линза, чтобы при замене ею рассеивающей линзы радиус светлого круга на экране не изменился?

Публикацию подготовили Д. Белов, А. Боголюбов, Д. Денисов, М. Потапов, В. Прошкин, В. Серов, Д. Силин, С. Чесноков

Рецензии и библиография

Прочтите интересную книгу

Недалеко от моего дома — киоск «Академкниги». Проходя мимо него, я останавливаюсь и просматриваю выставленные издания. Сколько интересных научно-популярных книг выпускается! К сожалению, нет возможности прочесть все. Приходится строго отбирать. Но и при самом строгом отборе дома накапливаются купленные, но непрочитанные книги. «Ничего,— успокаиваю я себя,— вот освобожусь и обязательно прочту.» И действительно: давненько купленная книга о чем-либо интересном, но знакомом только понаслышке, попадается под руку в более или менее свободное время и несколько дней служит основным чтением. В результате без больших усилий становишься «специалистом» в далекой от своей специальности области. Конечно, нельзя стать настоящим специалистом, читая только научно-популярные книги. Но можно узнать много интересного, особенно если написана книга специалистом без кавычек!

Среди научно-популярных книг есть такие, которые я покупаю без колебаний — каждую новую книжку «Библиотечки «Квант». Иногда, правда, мне дарит книжку автор. Почти все, и купленные, и подаренные, я прочитываю. И должен сказать, очень много получаю от чтения этих книг.

Физика (чтобы быть честным, признаюсь, что в «Библиотечке «Квант» я читаю книги по физике, по математике — совсем редко) стала такой огромной, такой разнообразной наукой, что знать ее всю профессионально — невозможно. А познакомиться с далекими областями хочется. И помочь в этом могут книжки из «Библиотечки «Квант».

Иногда, глядя на витрину киоска, мне становится грустно: глаз отмечает «постаревшие» книжки со знаменитым листом Мёбиуса на обложке. Почему они застоялись? Бóльшую их часть я знаю — это интересные книжки. Какую помощь они могли бы оказать учителю, лектору вуза, с каким удовольствием были бы прочитаны школьником, если бы кто-нибудь посоветовал ему эти книжки прочесть. «Слишком много напечатали»,— скажет критически настроенный читатель. Что значит «много»? Кажется, тираж ни одной книжки из «Библиотечки «Квант» не превысил количества школ в нашей стране. А ведь каждая книжка — это замечательное пособие для кружковой работы. Очень советую: пусть в каждой школе будет «Библиотечка «Квант». Думаю, если моему совету последуют, заметно повысится уровень знаний по физике и математике у выпускников наших школ. А главное, какое-то число способных ребят не загубят своих способностей — их встреча с физикой и математикой состоится...

* * *

Книжку из «Библиотечки «Квант», о которой пойдет речь — «Физика в мире полимеров», мне подарили ее авторы — доктора физико-математических наук Александр Юльевич Гросберг и Алексей Ремович Хохлов. Мы в «родстве»: они, как и я, ученики академика Ильи Михайловича Лифшица. И о своем учителе помнят. В книге есть статья-послесловие «Физика полимеров и биофизика в творчестве Ильи Михайловича Лифшица». В ней они говорят не только о содержательной стороне научного творчества И. М. Лифшица, но и о Лифшице-лекторе, Лифшице-учителе, Лифшице-человеке. «... Мы считаем своим долгом вспомнить здесь Илью Михайловича Лифшица (1917—1982), у которого нам посчастливилось учиться и который не только был автором многих излагаемых или упоминаемых в этой книге конкретных научных результатов, но и создал вокруг себя воодушевляющую атмосферу горячего интереса к науке.» Правда, эта цитата не из послесловия, а из предисловия. И заканчивается она словами: «Читателю предстоит теперь судить о нашей попытке воссоздать эту атмосферу в книге».

По-моему, попытка удалась...

* * *

Есть рецензии разных стилей. Цель одних — изложить содержание книги столь подробно и отчетливо, что книгу после рецензии можно вообще не читать. А если читать, то только для ознакомления с опущенными автором рецензии подробностями. Иногда, когда книгу трудно достать, такая рецензия очень важна. Но я хочу, чтобы Вы, дорогой читатель, прочли «Физику в мире полимеров». Поэтому этот стиль здесь неуместен. Тем более неуместен стиль разгромной рецензии — книга мне нравится. Она написана интересно об интересном.

Полимер — молекула, состоящая из огромного числа звеньев. Искусственные полимеры содержат от сотен до десятков тысяч звеньев, а в природных полимерах число звеньев достигает миллиарда (10^9) и даже десяти миллиардов. Уже этот факт делает полимер своеобразнейшим объектом. Например, поведение одной молекулы может описываться в терминах и методами статистической физики, а не механики, а предсказания, полученные на этом пути, оказываются достоверными. В одной молекуле полимера могут происходить фазовые переходы — а ведь это, казалось бы, характерная черта макроскопического объекта...

Для авторов полимер прежде всего физический объект, свойства которого можно объяснить, если понять, как движутся и как взаимодействуют между собой полимеры и их отдельные звенья. Характерная особенность книги — попытка не только рассказать о..., но и объяснить... Для этого авторам приходится обращаться к физике с ее основными законами. В этом смысле очень характерны два небольших параграфа (§ 5.6 «Энтропия» и § 5.7 «Энтропийная упругость идеального газа»), в которых рассказано об энтропии. «... среди подлинных приобретений всех цивилизованных языков за последние 100 лет одно из первых мест, несомненно, принадлежит слову энтропия» — так начинают свой рассказ авторы и аккуратно разъясняют это непростое понятие, не слишком затрудняя читателя математикой.*)

О математике в «Физике в мире полимеров». Конечно, без нее нельзя обойтись. Авторы — физики-теоретики, и это накладывает отпечаток на содержание книги: в ней ничего не говорится о постановке реальных экспериментов, хотя, конечно, описаны и объяснены результаты экспериментов. Физик-теоретик не может обойтись без математических формул, соотношений и, главное, рассуждений, основанных на математических уравнениях и их решении. В маленьком (на одну страничку) остроумном параграфе авторы обещают «делать упор не столько на сами математические формулы и уравнения, сколько на их физический смысл» (§ 4.1 «Математика в физике»). И, надо признаться, выполняют обещание. Даже в приложении «Фрактальная геометрия — новый математический язык». При этом математика отнюдь не забыта. Новому поколению естественников, со школьной скамьи знакомых с компьютерами, будет приятно узнать, какую роль играет вычислительная математика в физике полимеров.

Я не встречал статей, посвященных литературному стилю научно-популярных произведений. По-моему, их попросту нет. А жаль. Ведь об одном и том же и даже на одном и том же уровне можно рассказать по-разному. Можно так «засушить» изложение, что читатель начнет дремать на третьей странице.

А. Гросберг и А. Хохлов написали хорошо читаемую книгу. «Стиль — это человек»,— говорят французы. Именно литературный стиль авторов передает «воодушевляющую атмосферу горячего интереса к науке», которую они ощущали, будучи учениками Ильи Михайловича Лифшица.

Читая «Физику в мире полимеров», я часто завидовал авторам. Я не умею подбирать эпиграфы. А Гросберг и Хохлов — виртуозы. К каждой главе — удивительно подходящий эпиграф и при этом, как правило, остроумный. Один пример: заключительной главе «Полимеры и происхождение жизни» предпосланы две строчки Б. Заходера: «Что мы знаем о лисе? // Ничего. И то не все». А в самой главе — может быть, самое интересное, что есть в книге: как физики пытаются, не выходя за рамки естественной науки, объяснить происхождение жизни.

Очень советую: прочитайте книгу А. Ю. Гросберга и А. Р. Хохлова «Физика в мире полимеров»!

Доктор физико-математических наук, профессор М. Каганов

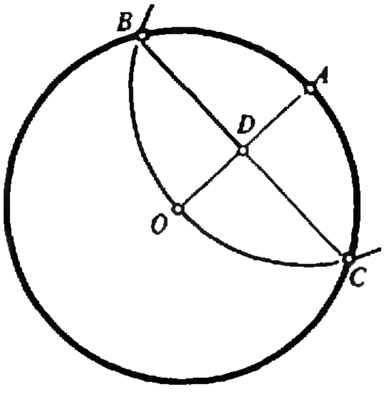
---

*) С энтропией любознательный ученик встретится не только в учебнике физики или на уроке. Недавно я наткнулся на статью Евгения Замятина «О литературе, революции, энтропии и прочем» (1923 г.). В ней есть такой пассаж: «Еретики — единственное (горькое) лекарство от энтропии человеческой мысли» (?!). Неплохо было бы, если бы учитель смог объяснить, о чем идет речь. И причем здесь энтропия?..

Разделим окружность на семь частей

Построить правильный семиугольник с помощью циркуля и линейки невозможно. Знаменитая теорема Гаусса утверждает, что можно построить лишь n-угольники при $n=2^m p_1 \ldots p_k$, где p_i — простые числа вида $2^{2^q}+1$ для произвольных натуральных q. В таком виде нельзя представить числа 7, 9, 11, 13, 14,..., а значит, правильные многоугольники с таким числом сторон не поддаются построению циркулем и линейкой.

«Квант» рассказывал о построении правильных n-угольников в 1981 году (см. статью А. Савина «Циркулем и линейкой», № 5, с. 34). Несмотря ни на что, наш читатель *Юрий Федотович Жуковский* из поселка Саласпилс Рижского р-на не сдается. Он предлагает замечательный способ приближенного построения равностороннего семиугольника, который при всей своей простоте дает удивительную точность. Погрешность составляет менее 0,2 %.



Рассмотрим окружность радиуса R. Из точки A на окружности проведем дугу того же радиуса (см. рис.), пересекающую данную окружность в точках B и C. Как известно, отрезки AB и AC равны стороне правильного 6-угольника. Пусть D — точка пересечения отрезков BC и AO. Тогда длина отрезка BD почти не отличается от длины стороны правильного 7-угольника. С помощью микрокалькулятора легко вычислить: $BD=R\cdot\sin 60^\circ\approx\approx 0{,}86602R$, а сторона 7-угольника приблизительно равна $0{,}86776R$.

Как видите, расхождение только в третьем знаке!

Ответы, указания, решения

внение касательной к графику функции

1. $\left(2;\ 2\frac{2}{3}\right);\ \left(3;\ 3\frac{1}{2}\right)$.
2. 135°.
3. $y=x^2+2x-3$.
4. $y=2x-4;\ y=6x-16$.
5. 6 кв. ед.
6. $y=8x+4$.

орные уравнения в кинематике

ажнение 5

1) Для оси *1*: $-L\sin(\beta-\alpha)=-g\cos\beta\cdot\tau^2/2$;
для оси *2*: $0=v_0\sin(\beta-\alpha)\cdot\tau-g\cos\alpha\cdot\tau^2/2$;
для оси *3*: $L\sin\alpha=v_0\sin\beta\cdot\tau-g\tau^2/2$;
для оси *4*: $L=v_0\cos(\beta-\alpha)\cdot\tau-g\sin\alpha\,\tau^2/2$;
для оси *5*: $L\cos\alpha=v_0\cos\beta\tau$.

чи для самостоятельной работы

1. $l_1:l_2:l_3:\ldots=1:2:3:\ldots$
2. $L=g\tau^2\cos\alpha/(2\sin(\alpha-\beta))$.
3. $h=3/4H$.
4. $v=\sqrt{v_0^2+(EeL/(mv_0)^2}=2{,}1\cdot10^6$ м/с.

ковский государственный верситет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\frac{3}{2}(3\sqrt{3}-4)$. Указание. Существуют два треугольника ABC с данными сторонами AC, BC и углом B (рис. 1). Только у одного из них высота, проведенная из вершины A, меньше $1/\sqrt{2}$.

2. $4/3;\ \pi k,\ k\in Z$.

3. $[-2;\ -1)\cup[0;\ 1]$. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}\leqslant\sqrt{x^2+x+1},\\ x>-1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{1-x}\geqslant\sqrt{x^2+x+1},\\ x<-1.\end{cases}$$

4. 0, $2\sin 1$. Указание. Левая часть уравнения — четная функция от x. Поэтому если x_0 — корень этого уравнения, то $-x_0$ — также его корень, так что *единственным* корнем может быть лишь $x_0=0$. Подставляя $x_0=0$, получим $a^2-2a\sin 1=0$, т. е. либо $a=0$, либо $a=2\sin 1$. Осталось убедиться, что при этих значениях и уравнение действительно имеет единственный корень.

5. $x=5$, $y=4$, $z=4$. Указание. Сумма выражений, стоящих под знаками логарифма, равна 3, откуда следует, что все они равны по 1. Для z при этом получается неравенство $z^2-9z+17<0$, которому удовлетворяют четыре целых значения z — это 3, 4, 5, 6. Числа x и y окажутся целыми лишь при $z=4$.

6. $1/\sqrt{3}$, $19/(25\sqrt{3})$. Пусть O — проекция вершины S пирамиды на плоскость основания ABC, $SD\perp AC$, тогда $BD\perp AC$ и точка O лежит на BD (рис. 2). По теореме Пифагора находим $BD=3$, $OD=1$, $SD=2$, так что двугранный угол с ребром $A'C$ равен 60°. Центры O_1 и O_2 сфер S_1 и S_2 лежат на биссекторной плоскости этого угла. Вместе с точками P_1 и P_2 касания сфер с плоскостью ABC их центры образуют плоскость P_2O_2P, перпендикулярную ABC. Обозначим через R радиус сферы S_1. Тогда $O_1P_1=R$, $O_2P_2=3R$, $O_1O_2=4R$, и, следовательно, $\angle O_2PP_2=30°$. Это означает, что плоскость O_2PP_2 перпендикулярна AC. Точка P_1 лежит на биссектрисе CK угла ACB, поэтому P_2 лежит на стороне BC ($PP_1/PP_2=$ $=1/3$).

Пусть O_2' и P_2' — проекции точек O_2 и P_2 на плоскость BSD, M и N — точки пересечения сферы S_2 с прямой SB, тогда

$$O_2'P_2'=MO_2=NO_2=3R,\ O_2O_2'=DP=$$

$$=\left|\frac{1}{2}AC-PC\right|=|\sqrt{3}-3R|,\ DP_2'=PP_2=3\sqrt{3}R,$$

$$MO_2'=NO_2'=\sqrt{9R^2-(\sqrt{3}-3R)^2}.$$

Теперь в треугольнике BSD (рис. 3) найдем расстояние $O_1'K$ от точки O_2' до прямой BS. Обозначим через α угол SBD, через β угол $O_2'BD$, тогда

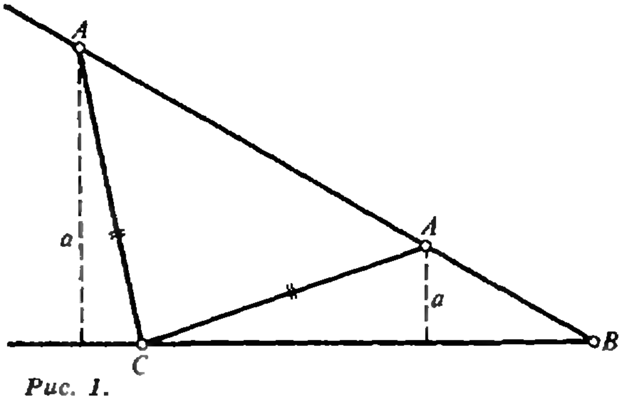


Рис. 1.

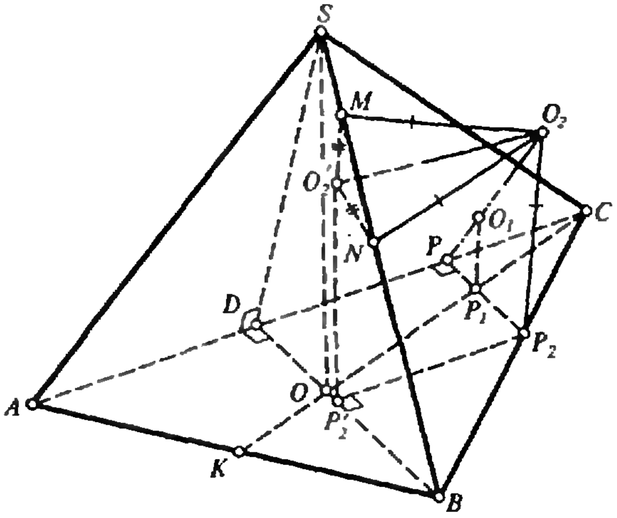


Рис. 2.

$\angle SBO_2' = |\alpha - \beta|$, $KO_2' = BO_2' \sin \angle SBO_2' = BO_2' \sin|\alpha - \beta|$.

Но

$$\sin\alpha = SO/SB = \sqrt{3}/\sqrt{7},\ \cos\alpha = 2/\sqrt{7},$$
$$\sin\beta = O_2'P_2'/BO_2' = 3R/BO_2',$$
$$\cos\beta = BP_2'/BO_2' = (3 - 3\sqrt{3}R)/BO_2',$$

поэтому

$$KO_2' = |(3 - 3\sqrt{3}R)\sqrt{3}/\sqrt{7} - 3R\cdot 2/\sqrt{7}|.$$

Выразив, наконец, MN через R, получим уравнение

$$\frac{6}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{(3R)^2 - (\sqrt{3} - 3R)^2 - \frac{1}{7}(6R - \sqrt{3}(3 - 3\sqrt{3}R))^2},$$

которое имеет три решения:

$$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ R_2 = \frac{19}{25\sqrt{3}},\ R_3 = \frac{19}{\sqrt{3}},$$

из которых всем условиям задачи удовлетворяют лишь первые два.

Вариант 2

1. $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.
2. 17.
3. $\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

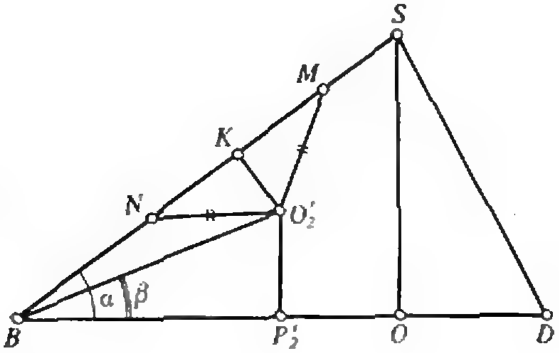


Рис. 3.

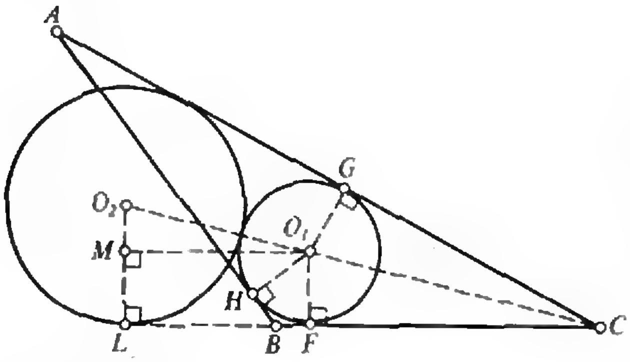


Рис. 4.

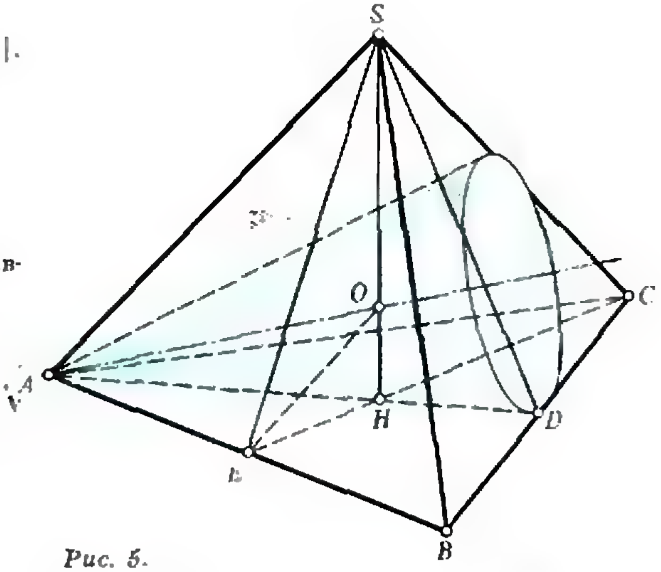


Рис. 5.

4. $\left[\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9}; \frac{8 - \sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17 + \sqrt{349}}{6}; \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9}\right]$.

Указание. Пусть $x = 9v^2 - 48v - 21$, $y = 9v^2 - 51v - 15$. Тогда данное неравенство перепишется так: $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant |x - y|$, или $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \geqslant 1$. После преобразований придем к неравенству $2(x + y) \leqslant 1 + (x - y)^2$.

5. $-\sqrt{15}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей. Тогда (рис. 4)

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{O_2M}{O_2O_1} = \frac{1}{4},\ \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \sqrt{15}. FC = GC = 5.$$

Периметр треугольника ABC находится по формуле $P = 2S/r = 18$. Пусть $AG = AH = x$. Тогда $AB = 4$, $AC = x + 5$, $BC = 9 - x$, а так как $S = \frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin C = \frac{1}{2}(x - 5)(x - 9) \times \sin C$, получаем уравнение $x^2 - 4x + 3$, причем нас устраивает больший корень $x = 3$. Остальное ясно.

6. $a \geqslant -7/2$. Указание. Данное неравенство имеет вид $|u| \leqslant v$ и поэтому эквивалентно системе $-v \leqslant u \leqslant v$, или системе

$$\begin{cases} v - u \geqslant 0, \\ v + u \geqslant 0. \end{cases}$$

Первое из этих неравенств дает

$$\log_6 x - x^2 + (3b + 1)x + (3b + 2)^2 \geqslant 0$$

и, в силу неравенств

$$\log_6 x < x \leqslant x^2 - (3b + 1)x + (3b + 2)^2,$$

справедливо при всех $x > 0$.
Второе из неравенств системы приводится к виду

$$\frac{10a + 3b + 36}{5}x^2 - (3b + 1)x + 3b + 1 \geqslant 0 \qquad (*)$$

и при $b = -1/3$ получим $(2a + 7)x^2 \geqslant 0$. Поэтому $a \geqslant -7/2$. При $a \geqslant -7/2$ неравенство (*) имеет решение $x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ при любом b.

Вариант 3

1. $\pm(2+\sqrt{5})$.
2. $(d^2\sin 2\alpha)/2$.
3. $\pi n/3$, $n\in Z$.
4. $a\sin(\alpha+\beta)(1+3\sin^2\beta)/12\sin\alpha\sin\beta$.

Указание. Пусть O — центр данной окружности. Применив теорему синусов для треугольника ABC, найдите AB, AD, AP, а затем запишите теорему косинусов для треугольника APO.

5. $3-\sqrt{a+5}$ при $a>-4$, $a\neq -1$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+a=(2-x)^2, \\ -\dfrac{a}{2}<x<2, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

6. 1) $\pi\sqrt{\dfrac{3-m}{5+m}}$; 2) $\left(0;\ \pi\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$; 3) $0<m\leqslant 1$.

Указание. 1) Ось конуса лежит на линии пересечения биссекторных плоскостей трехгранного угла с вершиной A (рис. 5). Пусть H — основание высоты, а SE — апофема пирамиды $SABC$, EO — биссектриса угла SEH. Если $AD>SD$ (т. е. при $m>1$), то часть конуса лежит *вне* пирамиды (как на рис. 5).

Пусть $AD=h$, $SD=k$. По условию $\dfrac{h}{k}=m$. Кроме того, $EH=h/3$. Пусть $OH=x$, $OS=y$. По свойству биссектрисы угла треугольника $\dfrac{x}{y}=\dfrac{h}{3k}$, а по теореме Пифагора $x+y=$ $=\sqrt{k^2-\dfrac{h}{9}}$.

Мы получим систему уравнений, из которой находим x и y. Положив далее $\alpha=\angle OAH$, получим, что $\sin\alpha=\dfrac{OH}{AO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{3-m}{5+m}}$, после чего находим радиус основания и высоту конуса. Дальнейшее ясно.

2) Из решения первого пункта видно, что $0<m<3$, причем на промежутке $(0;\ 3)$ функция $\dfrac{3-m}{5+m}=1+\dfrac{8}{m+5}$ убывает.

3) Конус целиком «сидит» внутри пирамиды, если угол γ между образующей конуса и его основанием меньше угла β наклона апофемы пирамиды к плоскости ее основания, т. е. при условии $\operatorname{tg}\gamma\leqslant\operatorname{tg}\beta$.

Вариант 4

1. 2. 2. $\dfrac{\pi}{3}(3k\pm 1)$, $k\in Z$.
3. $S=\dfrac{a}{4}\left(\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)^2$,

$P=\left(\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\left(1+\dfrac{a}{2}+\sqrt{1+\dfrac{a^2}{4}}\right)$.

Указание. Уравнение касательной в точке $x_0=-\dfrac{4\pi}{3}$ имеет вид $y=-\dfrac{a}{2}\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)+$ $+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, так что требуется найти площадь прямоугольного треугольника OXY, где X и Y — точки пересечения этой касательной с осями координат.

4. 750 м^3.
5. $3\sqrt{183}/2$. **Указание.** Фигура сечения — это пятиугольник $EKLMF$ такой, что $EK\parallel FM\parallel ML\parallel SA$ (рис. 6). Пользуясь теоремой Пифагора и свойствами подобных треугольников, получим $SA=SB=SC=SD=6$, $EF=$ $=2\sqrt{13}$ $EK=FM=\dfrac{1}{3}SA=2$, $LN=LC=$ $=\dfrac{2}{3}AS=4$.

Пятиугольник $EKSMF$ состоит из параллелограмма $EKMF$ и треугольника KSM, высоты которых равны $\dfrac{1}{2}LQ$ $(LQ\perp EF)$. Чтобы найти LQ воспользуйтесь тем, что $LQ=$ $=\sqrt{LP^2+PQ^2}$.

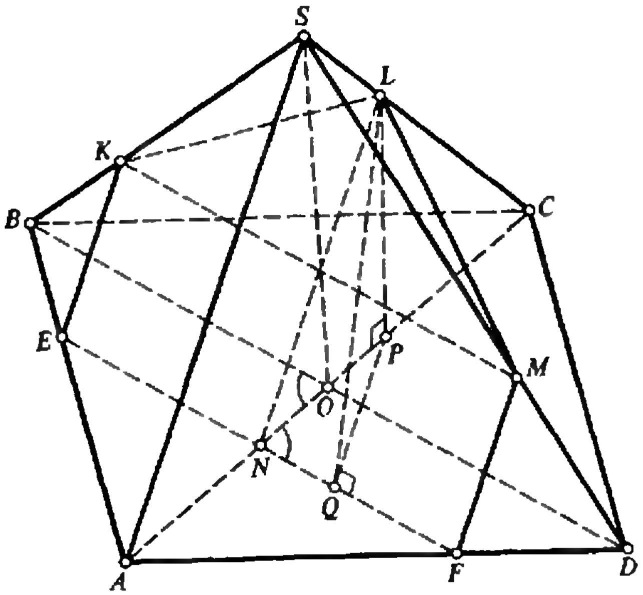


Рис. 6.

Вариант 5

1. $\dfrac{\pi}{3}(6k\pm 1)$, $k\in Z$.
2. $\left(\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{11}{3};\ \infty\right)$.
3. 45 км/ч.
4. $2\sqrt{34/15}$. **Указание.** Пусть MK — диаметр окружности (рис. 7). Точки P и N находятся по одну сторону от MK, поскольку $\angle KMN>\angle KMQ$, а PM — биссектриса угла NMQ. Пусть r — радиус окружности. Тогда

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2r}, \\ \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{r}, \\ \cos\beta=\dfrac{3}{r}. \end{cases}$$

5. $a=4\pi k\dfrac{1+4m}{1+2n}$; $b=2\pi k\dfrac{8l\pm 3}{16\pi k^2+2n+1}$;

$x=2\pi k$; $y=\dfrac{1+2n}{8k}$;

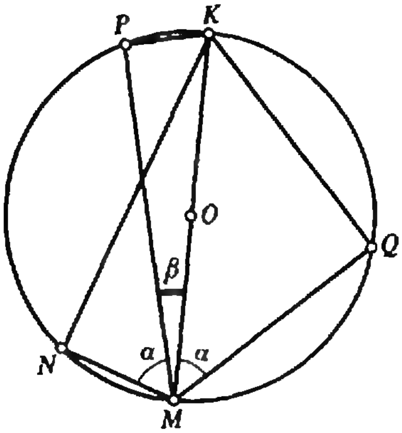


Рис. 7.

$$z=\frac{16\pi k^2+2n+1}{2\pi k(8l\pm 3)}(\operatorname{arctg}2+\pi r);$$
$k,\ l,\ m,\ n,\ r\in \mathbf{Z},\ k\neq 0.$

Указание. В уравнении данной системы выполните замену $t=\cos b(x+y)$. Из условия неотрицательности дискриминанта получите неравенство $\operatorname{tg} bz\geqslant 0$. С учетом этого неравенства правая часть неравенства системы из условия не больше, а левая не меньше 2. Поэтому исходная система эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases}1+\operatorname{tg} bz\cdot\sin^2 xy+\cos 2xy=2,\\(\cos x+\sin ay)\cdot\sin 2xy=2,\\2+2\sqrt{\operatorname{tg} bz}\cdot\cos b(x+y)+\cos 2b(x+y)=0,\end{cases}$$

которая, в свою очередь, эквивалентна системе

$$\begin{cases}\operatorname{tg} bz=2,\\\cos x=1,\\\sin ay=1,\\\sin 2xy=1,\\2+2\sqrt{\operatorname{tg} bz}\cdot\cos b(x+y)+\cos 2b(x+y)=0.\end{cases}$$

Вариант 6

1. $2-\log_3 2$.
2. 18 ч.
3. $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$. **Указание.** Угол B — тупой. Поэтому искомая площадь равна сумме площадей сектора MOB и треугольника AOM, где M — точка пересечения окружности со стороной AC.
4. $1-2\pi$. 5. $(-3;\ \infty)$.

6. $x<0$. **Указание.** Левая часть неравенства — убывающая функция, а правая — возрастающая. При $x=0$ левая и правая части равны.

Вариант 7

1. -2. 2. $1/3$.
3. $\pi(12k+5)/6,\ k\in \mathbf{Z}$.
4. $(0;\ 1/\sqrt[4]{5}]\cup(1;\ \sqrt[7]{25}]$. **Указание.** Выполните замену $y=\log_5 x$, после чего приведите неравенство к виду

$$\frac{15y-2}{4y}\leqslant 4-7y.$$

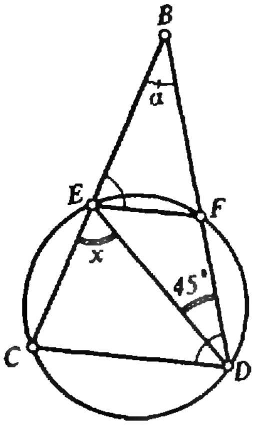


Рис. 8.

5. $(-2;\ 2)$, $(2;\ -2)$, $(2\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$. **Указание.** Уравнение приведите к виду

$$(3x^2-2m^2+mn)^2+\\+(3m^2-mn+2n^2-12x)^2+(x-2)^2=0,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases}x=2,\\2m^2-mn=12,\\3m^2-mn+2n^2=24.\end{cases}$$

6. Такого угла нет. **Указание.** Равенство углов BEF и BCD означает, что треугольники BEF и BCD подобны, причем окружность, описанная около треугольника CFD, пройдет через точку E и будет описанной около четырехугольника $CEFD$ (рис. 8). Пусть R_1 — ее радиус, а R_2 — радиус окружности, описанной около треугольника BEF. Поскольку $\frac{S_{CEFD}}{S_{BEF}}=\frac{9}{16}$, то $\frac{S_{BEF}}{S_{BCD}}=\frac{16}{25}$, и потому $\frac{EF}{CD}=\frac{4}{5}$.

По теореме синусов

$$2R_1=\frac{CD}{\sin x}=\frac{EF}{\sin 45^\circ},$$

следовательно,

$$\sin x=\frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

Из условия следует, что

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

С другой стороны, по теореме синусов $2R_2=\frac{EF}{\sin\alpha}$.

Таким образом,

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{CD}{EF}\frac{\sin\alpha}{\sin x}=\sqrt{2}\sin\alpha,$$

откуда $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. С другой стороны, $\sin\alpha=$ $=\sin(x-45^\circ)$, т. е. $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{5}}$, но тогда $\sin 2x=\frac{4}{5}$, $\cos 2x=\pm\frac{3}{5}$, $1-2\sin^2 x=$

$= \pm \frac{3}{5}$, т. е. либо $\sin^2 x = \frac{1}{5}$, либо $\sin^2 x = \frac{4}{5}$.

То и другое противоречит равенству $\sin x = \frac{5\sqrt{2}}{8}$.

Вариант 8

1. $\pi n/3$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. ± 6. 3. $[1;\ 5) \cup (10;\ \infty)$.

4. 1:6. Указание. Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$. Тогда $S_{KBL} = \frac{1}{3} S_{ABL} = \frac{1}{24} S$, а $S_{BLM} = \frac{1}{4} S$.

5. $5 < a < 7$. Указание. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} ac > 0, \\ b^2 - 4ac > 0, \\ ab < 0. \end{cases}$$

Вариант 9

1. Имеют.

2. $(-\infty;\ -5/4] \cup [-1/4]$.

3. 6/23. Указание. Пусть $\alpha = \angle ACK$. Тогда $\angle AKO = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, и по теореме синусов $\frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$, откуда $10\sin^2\alpha + 23\sin\alpha - 5 = 0$, т. е. $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. Кроме того, $AK = AQ \operatorname{tg} 2\alpha = BO \operatorname{tg} 2\alpha = BM \operatorname{tg}^2 2\alpha$.

4. $a = 8$, $b = 56$, $c = 392$. Указание. По условию $b = aq$, $c = aq^2$, где a и q — натуральные числа. Из делимости чисел $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$ и $4312 = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$ на b и c следует, что q может приниматься одно из трех значений 2, 7 или 14.

5. 7/4, 1/4. Указание. Пользуясь соотношением $A\sin\alpha + B\cos\alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi)$, убедитесь в том, что левая часть уравнения не больше $\sqrt{2}$ при любых x, причем она равна $\sqrt{2}$ только при $\operatorname{ctg} 2\pi x = 1$.

6. $a = -1$; $a = 2$. Указание. Поскольку $3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$, вместе с решением $(x_0;\ y_0)$ системе удовлетворяет также решение $(x_0;\ -y_0)$. Если решение единственно, то $y_0 = 0$.

Вариант 10

1. $\frac{\pi}{3}(6k \pm 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $(2;\ (7 + \sqrt{17})/4)$. 3. 2:5. 4. 2,1 кг.

5. 8. Указание. Высота h пирамиды находится из равенства $V = \frac{1}{3} rS$, где V — объем пирамиды, S — полная поверхность пирамиды, а r — радиус вписанного шара.

Вариант 11

1. $\frac{\pi}{12}(12k \pm 5)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $(0;\ \log_2 3)$.

3. $[-1;\ 2] \cup [3;\ 4]$.

4. $90\sqrt{3}$. Указание. Пусть $AO = x$, $DO = y$ (рис. 9), поскольку $\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO} = \frac{OB}{DO} = \frac{1}{2}$, получим $BC = 8$, $OC = \frac{1}{2}x$, $OB = \frac{1}{2}y$. Далее, $AC + BD = \frac{3}{2}(x + y) = 36$. Кроме того, из треугольника DEO, где $EO \perp DE$, имеем $OE^2 = OD^2 - DE^2$. Но $OE = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $DE = 16 - AE = 16 - \frac{1}{2}x$. Поэтому $\frac{3}{4}x^2 = y^2 - (16 - \frac{1}{2}x)^2$. Остальное ясно.

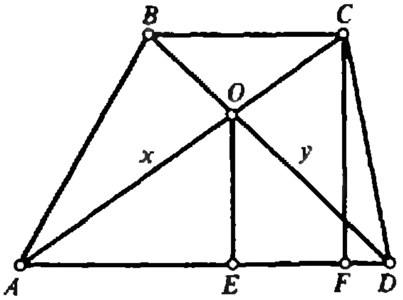


Рис. 9.

5. $(0;\ \frac{1}{54})$. Указание. Поскольку функция $a = f(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$ возрастает, необходимо найти решения системы

$$\begin{cases} 12x^3 - 7x > 6f(x) + 1, \\ x > 0; \end{cases}$$

а затем множество положительных значений a при этих значениях x.

Физика

Физический факультет

1. $h = gt_1t_2(4t + t_1 + t_2)/(2(t_1 + t_2))$.

2. $\omega_{\min} \leqslant \omega \leqslant \omega_{\max}$, где

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\sin\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \frac{R - h}{R},$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R}\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)\sin\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(2R - h)h}}{R}$$

(α — угол между радиусом, соединяющим шайбу с центром сферы, и вертикалью).

3. $V_{\text{погр}}/V_{\text{доски}} = 5/8$.

4. $\Delta x_{\max} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m^2gH}{k(M + m)}}$,

причем колебания происходят около нового положения равновесия с координатой $x_0 = (M + m)g/k$.

5. $H = \frac{p_0}{\rho_0 g}\left(\frac{L}{2d} - 1\right) + \frac{L(\rho - \rho_0)}{2\rho_0} - d$.

6. $A = \nu R(T_3 - T_4)(T_2T_4 - 2T_3T_4 + T_3T_1)/(2T_3T_4)$.

7. $I = \mathcal{E}I_0/(\mathcal{E} + RI_0) = 0{,}1$ А.

8. $z_n = 2\pi^2 Emn^2/(eB^2) > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

9. $x=d(n-1)/n=2$ см.
10. $\Delta x=\lambda/(2\sin\alpha)$.

Механико-математический факультет

1. $\mu=F(\beta-\alpha)/(mg(\beta-1)\alpha)\approx 0{,}25$.
2. $v=m\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)/(M(m+M))}\approx 31{,}3$ см/с.
3. $F=mg\sqrt{1+(\operatorname{ctg}^2\alpha)/4}\approx 1{,}1$ Н.
4. $v_{\min}=\sqrt{gl/(1+\beta)}\approx 1{,}1$ м/с.
5. $p=(\Delta p-p_0)T/T'=375$ кПа.
6. $\tau=p_н(\varphi_2-\varphi_1)MV/(100\ \%\ \alpha RT)\approx 15{,}5$ мин.
7. $I=U(R_1-R)/((R+3R_1)R)=2{,}5$ мА.
8. $r=\sqrt{R_1R_2}=2$ Ом.
9. $V=\pi a^2 b\sqrt{2n^2-1}/(4(\sqrt{2n^2-1}-1))\approx 35{,}7$ л.
10. $l=L\left|\dfrac{n_2}{\sqrt{2-n_2^2}}-\dfrac{n_1}{\sqrt{2-n_1^2}}\right|\approx 3{,}67$ см.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $l=4h(\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\sin^2 2\alpha)/\cos\alpha=$ $=8\,h\sin 45^\circ\approx 2{,}8$ м.
2. $\beta=\operatorname{arctg}\sqrt{l(1-\cos\alpha)/(h-l)}=30^\circ$.
3. $E_p=mv_1v_2/2=12$ Дж.
4. $\Delta m=m_1-m_1'=m_1(p_1-p_2)V_2/(p_1(V_1+V_2))=$ $=6$ г.
5. $Q=2p_1(V_2^2-V_1^2)/V_1=6$ кДж.
6. $A=CU_0^2(\varepsilon^2-1)/4$.
7. $Q=C(U-\mathscr{E})^2/2$.
8. $k=2(11+6\sqrt{2})/49\approx 0{,}8$.
9. $d=\sqrt{8\rho LP\cdot 100\ \%/(\pi\eta U^2)}\approx 1{,}2$ мм.
10. $\sqrt{n^2-1}<\sin\alpha<1$, $48^\circ 40'<\alpha<90^\circ$.

Географический и химический факультеты

1. $k=n=2{,}6$.
2. $F=\mu mg/\cos\alpha\approx 4{,}5$ Н.
3. $F=\mu ga^2(\rho_в(a-h)-\rho_п a)\approx 198$ Н.
4. $x=l/(1+F/(p_0S))=5$ см.
5. $T=T_0(1+\mu mg/(p_0S))\approx 353$ К.
6. $E=2\,mg/q=2\cdot 10^5$ В/м.
7. $a=(e/m)\sqrt{E^2+(vB\sin\alpha)^2}=1{,}76\cdot 10^{11}$ м/с^2.
8. $R=U_0(U-U_0)/(2P)\approx 59$ Ом.
9. $r_{\min}=R\operatorname{ctg}\varphi=\sqrt{3}\,R$.
10. $F'=Fl/(2F+l)=6$ см.

ант» для младших школьников
«Квант» № 1)

1. Легко заметить, что согласные — четные цифры. Их в ребусе пять и все они различны, значит, одна из них равна нулю. Но *М*, *С* и *Л* не равны нулю. Если нулю равняется *Н*, то *А*=5, *Х*=4, *М*=2 и *С*=4, что невозможно, поскольку *Х*=*С*, что противоречит условию. Значит, *Х*=0. Отсюда *О*=1, *А*=9, *Н*=8, *М*=2, *С*=4, *У*=3, *Л*=6, т. е. 2309+2309=4618.

2. Запишем теорему Пифагора в таком виде:

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b).$$

Отсюда мы видим, что все три числа не могут быть нечетными, поскольку при нечетных b и c число a четно. Все три числа не могут быть не делящимися на 3. Заметим, что остаток при делении числа на 3 равен 1 или 2. Если у чисел b и c эти остатки равны, то их разность, следовательно, и число a, делится на 3, а если они различны, то их сумма, следовательно, и число a, делится на 3.

3. Пусть на первом острове сидит x_1 аистов, на втором — x_2, на третьем — x_3, на четвертом — x_4 и на пятом — x_5. Заметим, что было съедено не меньше, чем $5x_1+$ $+4x_2+3x_3+2x_4+x_5=(x_1+\ldots+x_5)+x_4+2x_3+$ $+3x_2+4x_1$. Значит, $40\geqslant 30+x_4+2x_3+3x_2+4x_1$, откуда $x_4+2x_3+3x_2+4x_1\leqslant 10$. Это неравенство выполняется в единственном случае, когда $x_1=x_2=x_3=x_4=1$. Тогда $x_5=30-4=26$. Итак, на первом острове один аист, который съел 5 лягушек, на втором — тоже один аист, который съел 4 лягушки, на третьем — один аист, съевший 3 лягушки, на четвертом — один аист, съевший 2 лягушки и на пятом 26 аистов, которые съели 26 лягушек.

4. Шифр устроен следующим образом: цифра указывает номер буквы в слове, которым записывается цвет этой цифры. Например, цвет первой цифры — красный, первая буква этого слова — *К*. Таким образом, мы получим слово *КВАНТ*.

5. Числа, кратные одновременно 2, 3, 4 и 6 — это 12, 24, 36,... Поэтому Женя может жить на 13, 25, 37,... этажах, но из последнего условия задачи следует, что Петя живет непосредственно над Андреем, что возможно лишь в первом случае. Итак, Женя живет на 13 этаже, Вова — на 7, Петя — на 5, Андрей — на 4 и Таня — на 3 этаже.

курс «Математика 6—8»
«Квант» № 11 за 1990 г.)

7. Выигрывает второй игрок. Его стратегия — делать ходы, центрально-симметричные ходам противника. Действительно, квадрат 9×9 содержит 81 клетку. Из них 80 клеток (все, кроме центральной) разбиты на пары центрально-симметричных. (В качестве примера на рисунке 10 изображен случай квадрата 3×3.) В итоге клетки, входящие в пары, разделятся поровну между игроками, а центральная клетка достанется второму.

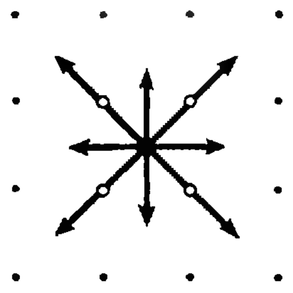


Рис. 10.

8. Решим более общую задачу. Пусть в первой строчке n чисел (в условии $n=1990$). Рассмотрим вторую строчку (длины $n-1$). Возможны два варианта: а) в ней нет ни одного числа, равного -1; б) такое число найдется. В случае а) все числа в первой строке равны -1 (т. к. есть хоть одно), и доказывать нечего. В случае б) рассуждаем так. В первой строке хотя бы одно число равно -1. Значит,

нам достаточно доказать, что в треугольнике, лежащем ниже первой строки (начиная со второй), найдется число, равное —1. Мы получили снова ту же задачу, но для строки меньшей длины и т. д. Таким способом мы каждый раз уменьшаем на 1 длину строки и на n-м шаге доберемся до последней, набрав по дороге n штук минус единиц. Задача решена.

Это поучительное рассуждение, в котором число неизвестных в задаче уменьшается на одно, а ее условие не меняется, называется *математической индукцией*.

9. **Ответ:** а) нельзя, б) можно.

Для доказательства заметим, что если числа a и b делятся на некоторое число c, то координаты точек $(a-b;\ a)$ и $(a;\ b-a)$ тоже делятся на c.

а) Оба числа 1990 и 3383 делятся на 199 ($3383=199\cdot17$). Поэтому координаты всех точек, связанных ломаной с точкой (1990; 3383), должны делиться на 199. Но координаты точки (19; 90) не делятся на это число. Следовательно, она не принадлежит ломаной.

б) Для обеих точек (234; 1001) и (611; 7007) наибольший общий делитель их координат равен 13. В самом деле, $234=13\cdot8^2\cdot2$, $1001=13\cdot11\cdot7$, $611=13\cdot47$, $7007=18\cdot11\cdot7^2$. Разделим все числа на 13 и предъявим ломаную, связывающую точки (18; 77) и (47; 539) (исходные точки связывает ломаная, растянутая в 13 раз). На самом деле, мы обе точки свяжем с точкой (0; 1). После чего точки окажутся связанными между собой.

$$(18;\ 77)\xrightarrow{(a;\ b-4a)}(18;\ 13)\xrightarrow{(a-b;\ a)}(5;\ 13)\rightarrow$$
$$\xrightarrow{(a;\ b-2a)}(5;\ 3)\xrightarrow{(a-b;\ b)}(2;\ 3)\xrightarrow{(a;\ b-a)}(2;\ 1)\rightarrow$$
$$\xrightarrow{(a-2b;\ b)}(0;\ 1).$$

$$(47;\ 539)\xrightarrow{(a;\ b-11a)}(47;\ 22)\xrightarrow{(a-2b;\ b)}(3;\ 22)\rightarrow$$
$$\xrightarrow{(a;\ b-7a)}3;\ 1)\xrightarrow{(a-8b;\ b)}(0;\ 1).$$

Задача решена. Остается заметить, что процедура, которой мы пользовались, называется *алгоритмом Евклида* (в честь великого древнегреческого математика). Его суть проста: от большего из двух чисел мы отнимаем меньшее столько раз, сколько требовалось, чтобы остаток стал меньше вычитаемого. Обычно алгоритм Евклида используют для отыскания наибольшего общего делителя двух чисел.

Поправка

К сожалению, в «Кванте» № 11 за 1990 год на с. 73 в материале «Заочная аэрокосмическая школа» допущены две опечатки. В задаче 11 оказалась пропущенной целая строка, в результате чего фраза, начинающаяся словами «Затем его изохорически охлаждают», получилась лишенной всякого смысла. На самом деле должно быть так: «Затем его изохорически охлаждают до начального давления и, наконец, изобарически сжимают до начального объема».

Формула, приведенная в задаче 12, должна иметь вид

$$p=p_0-p_0LM(T_0-T)/(RT_0^2).$$

Редакция приносит свои извинения читателям.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, В. Овсенко, Т. Петрова,
В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
Л. Тишков, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Е. Тихонова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 26.11.90. Подписано к печати 17.01.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,14.
Тираж 94 037 экз. Заказ 2251. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ШАХМАТНО-ДЕМОКРАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

В наше время демократии, когда решения принимаются большинством голосов, И. Акулич из Минска придумал весьма актуальную задачу. *Какое наибольшее число фигур можно расставить на доске так, чтобы каждая из них угрожала:*

а) не менее чем половине остальных;

б) не менее чем большинству остальных;

в) не менее чем квалифицированному большинству (т. е. 2/3) остальных?

Вот решение задачи, которое приводит И. Акулич.

Поскольку ферзь, поставленный на место ладьи, слона, короля или пешки, держит под обстрелом те же поля и сверх того еще некоторые, достаточно искать решения, в которых используются только ферзи и кони (поля, которым они угрожают, не совпадают).

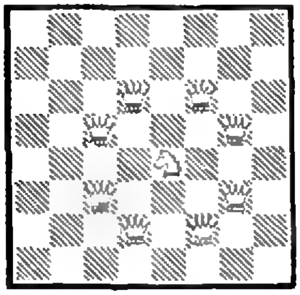
Оценим сверху искомое количество фигур. Пусть они уже расставлены и выполняется одно из условий а) — в). Рассмотрим самую правую фигуру самой нижней горизонтали, на которой имеются фигуры. Если это ферзь, то он может держать под обстрелом не более четырех фигур (слева, сверху, слева-сверху и справа-сверху от себя). Если это конь, то он тоже угрожает не более чем четырем фигурам (ниже рассматриваемой горизонтали фигур нет). Итак, среди фигур искомой расстановки имеется хотя бы одна, которая держит под обстрелом не более четырех фигур. Тогда для случая а) число остальных фигур не более 4, для случая б) — не более 3, для случая в) — не более 2. Поэтому наибольшее число фигур в каждом случае не превышает:

а) $1+4+4=9$;

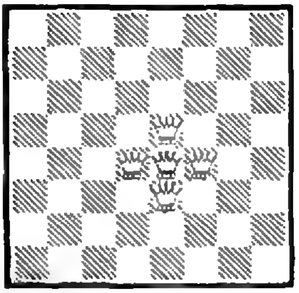
б) $1+4+3=8$;

в) $1+4+2=7$.

В случаях а) и б) максимумы достигаются. Соответствующая расстановка для а) приведена на диаграмме, для б) достаточно снять в данной позиции коня.



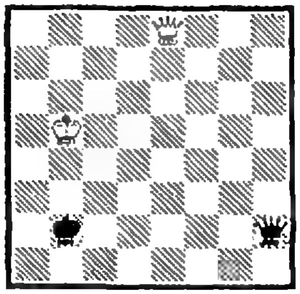
Сложнее обстоит дело со случаем в). Попробуйте сами доказать, что нельзя расставить ни семь, ни шесть фигур так, чтобы удовлетворить условию задачи. А пять фигур расставить можно.



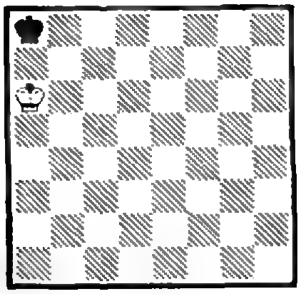
Каждый ферзь здесь угрожает не менее чем $4\times 2/3=2{,}66\ldots$ остальных, т. е. условие выполнено.

Из писем читателей

Представьте себе, что каждая сторона имеет на доске по королю и ферзю. Кажется удивительным, но возможна такая ситуация (ее придумал В. Сидоров), в которой ни белый, ни черный ферзи, несмотря на обширные просторы доски, не могут безнаказанно шаховать.



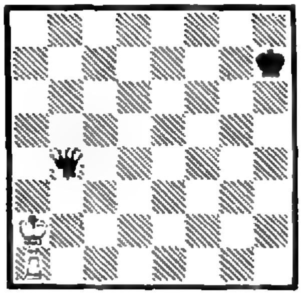
Следующая головоломка принадлежит А. Шурякову.



На какое поле нужно поставить ферзя белых, чтобы они не смогли объявить мат в 1 ход (позиция не должна быть матовой)?

Ответ неожиданный. Такое поле на доске единственное — b8! После 0...Кр:b8 мата в один ход нет, его нет вообще.

В «серийной» задаче (ходят только белые) определенный набор фигур требуется расположить так, чтобы серия ходов, заканчивающаяся матом, была как можно длиннее. В «Кванте» № 5 за 1988 год рассматривались позиции-квартеты и были приведены 22 рекорда. Вскоре один из них был побит семиклассником А. Поповым.



В этой позиции мат дается в 8 ходов вместо семи: **1. Лb1 2. Л:b4 3—7. Крb3—c4—d5—e6—f7 8. Лh4×.**

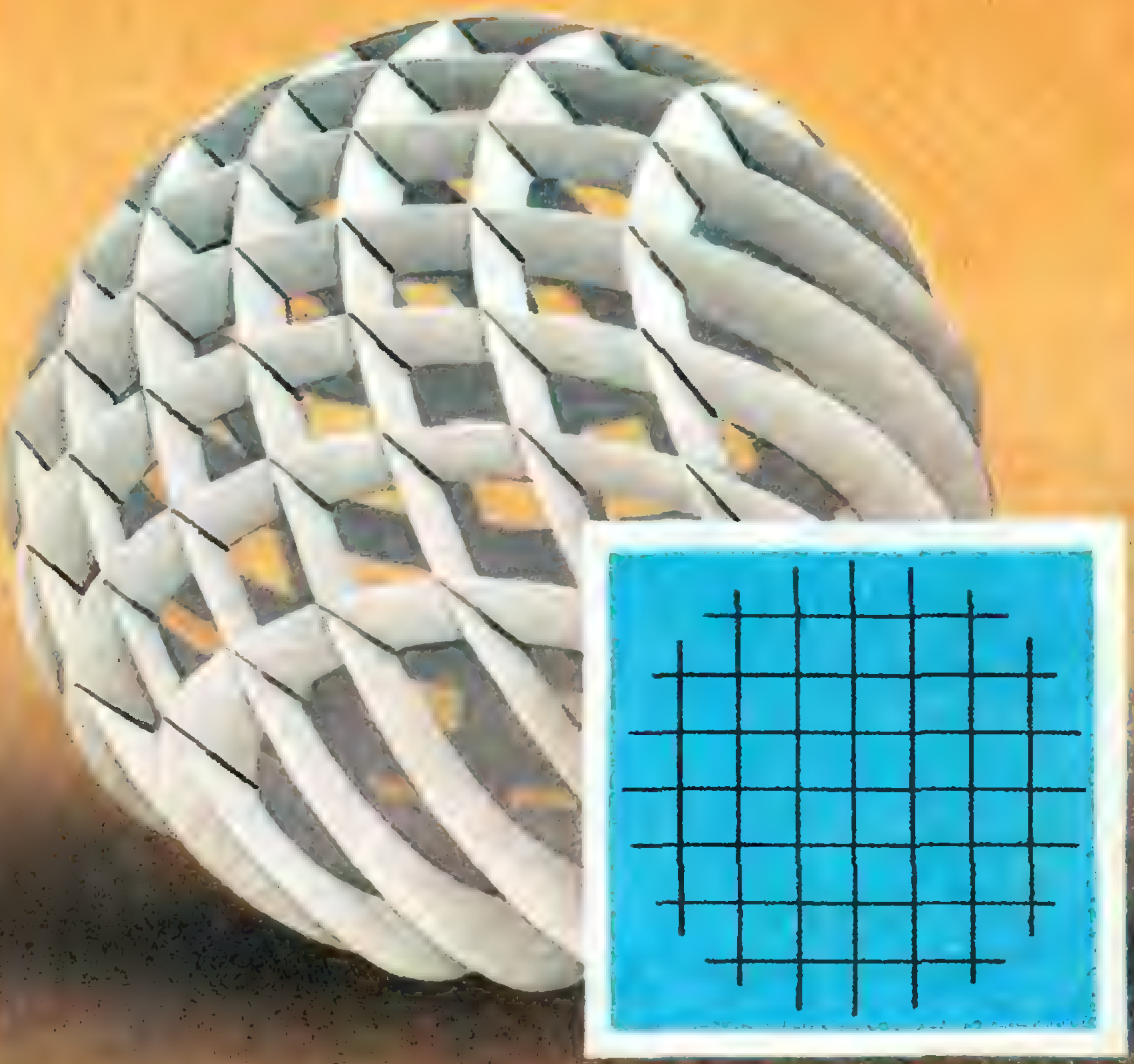
Многие читатели пытались побить рекорд, но все остальные присланные позиции оказались с браком: мат дается при помощи различных серий ходов, что в серийной задаче запрещено.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

В прошлом году в «Кванте» № 3 мы рассказали о том, как сделать из бумаги складную седловидную поверхность, и предложили читателям придумать собственные складные конструкции. Алексей Тукмаков из г. Светлого Калининградской области прислал складную модель шара из двух систем параллельных кругов. Более прочная модель получается, если заменить круги кольцами, как на рисунке внизу. Эта модель не только прочна и в то же время подвижна, но и очень красива. Вы убедитесь в этом сами, если изготовите ее. Определить размеры поможет рисунок справа, показывающий проекцию модели вдоль линий пересечения плоскостей колец.



НОМЕР
3

Квант

3 1991

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *А. Мигдал* Вычисления без вычислений
11 *В. Арнольд.* Меандры
13 *Ю. Соловьев.* Огюстен Луи Коши и математическая индукция
15 *В. Овсиенко.* Анализ и неравенства

Задачник «Кванта»

18 Задачи М1271 — М1275, Ф1278 — Ф1282
19 Решения задач М1246 — М1249, Ф1258 — Ф1262
29 ...Итак, задача полностью решена

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *Дж. Уокер.* Движение в час пик

Школа в «Кванте»

Физика 9, 10, 11:

37 О двух мерах взаимодействия
39 О ледниках, скороварках и теореме Карно
44 О чем рассказал спектр атома водорода
47 Избранные школьные задачи по физике
48 Конкурс «Математика 6—8»
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

49 *Р. Алексеев, Л. Курляндчик.* Сумма минимумов и минимум суммы

Практикум абитуриента

52 *Б. Орач.* Теорема Менелая

Р — значит ракета

56 *В. Туров.* Бросай вниз, если хочешь взлететь повыше
59 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**

Игры и головоломки

69 *Дж. Конвей.* Числовые фризы
71 **Ответы, указания, решения**
79 **Анкета 3 — 91**
«Квант» улыбается *(58)*

Наша обложка

1 *Излучины рек, узоры извилистых линий на древнегреческих вазах называют меандрами (от древнего названия реки Б. Мендерес в Турции). Пересечения извилистой красной реки с белой дорогой задают перестановки, которые также называются меандрами. О связанных с ними интересных исследовательских задачах рассказывается в статье В. Арнольда.*

2 *Монарх (эпохи Ренессанса) демонстрирует двору «часы мудрости» (миниатюра из манускрипта XV века). Физик-теоретик XX века в этом номере журнала (с. 2) рассказывает об осцилляторе, который является моделью любой колебательной системы (и в частности, тех самых древних часов).*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Тренировка пространственного воображения: из трех тел — одно.*

© «Квант», 1991

ВЫЧИСЛЕНИЯ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Академик А. МИГДАЛ

> *Если математика — это искусство избегать вычислений, то теоретическая физика — это искусство вычислять без математики.*

Высказывание, приведенное в качестве эпиграфа, возникло в результате споров физиков и математиков и нуждается в разъяснении. Даже самые простые вычисления в физике не обходятся без математики. Однако на первой, самой важной стадии работы физика-теоретика, когда устанавливается физическая картина явления, математика отступает на задний план и играет только подсобную роль. Но прежде чем говорить о связи физики и математики, следует пояснить, что такое теоретическая физика.

I. КАК РАБОТАЮТ ФИЗИКИ?

Экспериментаторы и теоретики

Существует два типа физиков — экспериментаторы и теоретики, причем эти две профессии почти никогда не совмещаются в одном лице. Физики-экспериментаторы исследуют соотношения между физическими величинами, или, говоря более торжественно, открывают законы природы, пользуясь экспериментальными установками, т. е. производя измерения физических величин с помощью приборов. Для этого надо глубоко понять изучаемые явления (чтобы знать, что и как измерять). Физики-теоретики изучают природу, пользуясь только бумагой и карандашом, т. е. выводя новые соотношения между наблюдаемыми величинами, опираясь на найденные ранее экспериментально и теоретически законы природы. Причина разделения этих двух профессий не только в том, что каждая из них требует своих специальных знаний: знания методов измерения — в одном случае и владения математическим аппаратом — в другом. *Главная причина в том*, что эти профессии соответствуют различным характерам мышления и различным формам интуиции. Интуиция, т. е. способность подсознательно находить правильный путь, играет важнейшую роль, особенно на первых стадиях работы. К сожалению, дар интуиции возникает не сразу, а в результате упорной работы, как награда за решение многих научных задач.

Поскольку теоретическая физика имеет дело с более отвлеченными понятиями, чем физика экспериментальная, физику-теоретику требуется более абстрактная форма интуиции, близкая иногда к интуиции математика. В прошлом веке, когда физика еще не была так специализирована, многие физики совмещали обе профессии. Так, Максвелл, который получил теоретически уравнения, описывающие все электромагнитные явления, занимался и экспериментами. Герц, который обнаружил экспериментально электромагнитные волны, был одновременно и хорошим теоретиком. И все-таки в каждом случае можно указать, какая из профессий главная: для Максвелла это — теоретическая физика, а для Герца — физика экспериментальная.

В XX веке одним из самых замечательных примеров «универсального» физика — и теоретика, и экспериментатора — был Энрико Ферми. На-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 8 за 1979 год.

ряду со многими другими работами Ферми создал теорию радиоактивного распада и вместе с физиками своей группы открыл экспериментально искусственную радиоактивность элементов, возникающую при бомбардировке нейтронами.

Еще одним примером выдающегося теоретика, тесно связанного с экспериментом, был академик Г. И. Будкер, у которого теоретическая физика совмещалась с замечательными инженерными идеями. Он руководил теоретической разработкой и практическим осуществлением ускорителя на встречных пучках заряженных частиц в новосибирском Академгородке.

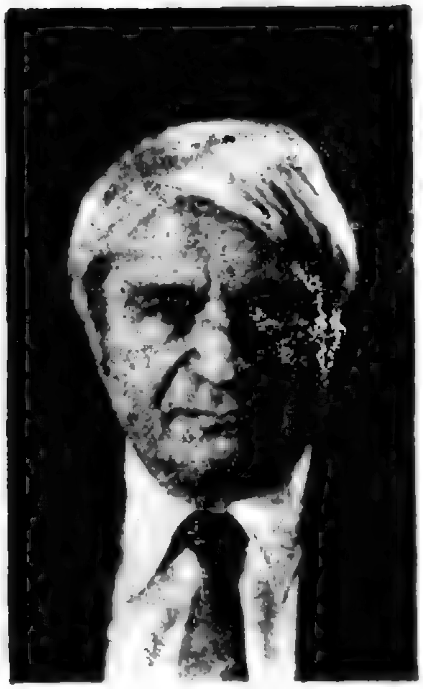
Однако это — редкие исключения, и молодой человек, интересующийся физикой, должен решить для себя, какую из двух профессий он выбирает.

В дальнейшем речь пойдет о работе физиков-теоретиков.

Физика и математика

Итак, задача физика-теоретика — получить соотношения между наблюдаемыми величинами с помощью математических выкладок. Не означает ли это, что теоретическая физика представляет собой нечто вроде прикладной математики? Такая точка зрения совершенно неверна. И по характеру задач, и по методам подхода к задачам математика и теоретическая физика категорически отличаются.

В математике важнейшую роль играют математическая строгость, т. е. логическая безупречность всех выводов, вытекающих из принятых аксиом, и исследование всех логически возможных соотношений. Задача физики — воссоздать по возможности точную картину мира без строгих «правил игры», опираясь на все известные экспериментальные и теоретические факты, используя основанные на интуиции догадки, которые в дальнейшем будут проверены на опыте. Так, математик исследует все логически возможные типы геометрий, физик же выясняет, какие гео-



А. Б. Мигдал (1911—1991)

В этом месяце академику Аркадию Бейнусовичу Мигдалу исполнилось бы 80 лет. Он не дожил до своего юбилея всего лишь месяц. А. Б. Мигдал принадлежал к знаменитой школе Ландау. Он пришел к Ландау в 1939 году, когда тому было 30 лет, а самому Мигдалу — 28 лет, так что Мигдал был скорее сотрудником и другом, чем учеником Ландау.

Уже с тех пор имя Мигдала было окружено легендами и мистификациями. Вот одна из легенд. Когда Ландау спросили, кто его любимый ученик, он будто бы ответил: «Померанчук. Хотя есть еще Мигдал... Но он ведь ленится!» И в этих словах было не осуждение, нет — скорее удивление.

На вопрос, что сейчас делает Мигдал, можно было услышать — работает с учениками над новой книгой. Или — пишет статью о психологии творчества. А можно — руководит подводной экспедицией на Дальнем Востоке. Или — в альплагере на восхождении. Или — работает над скульптурным портретом Эйнштейна. А еще Мигдал делал прекрасные ювелирные украшения. И выступал по телевидению. И... И все Мигдал делал прекрасно, но всему относился не дилетантски, а профессионально. Но как же ему еще хватало времени на физику? Ведь академиком «за так» не делают! Дело в том, что при всех увлечениях главной, постоянной любовью Мигдала всегда оставалась физика. Мигдал работал со страстью, у него всегда было много учеников, с которыми он возился, не жалея сил.

Все, кто знал Аркадия Бейнусовича Мигдала, всегда с благодарностью вспоминают не только совместную работу, но и человеческое общение, пронизанное теплотой, юмором и интеллигентностью.

метрические соотношения осуществляются в нашем мире.

Математик, даже если он занимается прикладными задачами, т. е. задачами, пришедшими не из математики, берется за решение только тех задач, которые не требуют дополнительных недоказанных предположений. Физик же, как правило, имеет дело с задачами, в которых имеющихся исходных данных недостаточно для решения, и искусство состоит в том, чтобы угадать, какие недостающие соотношения реализуются в природе. Именно для этих догадок требуется не математическая, а физическая интуиция.

Убедительность в физике достигается получением одного и того же результата из разных исходных предпосылок. При этом приходится вводить лишние, логически не необходимые аксиомы, каждая из которых сама по себе не абсолютно достоверна. Единственное условие состоит в том, чтобы уметь оценивать степень убедительности того или иного предположения и ясно понимать, какие предположения требуют дальнейшей проверки.

Если какая-либо область физики достигнет такого развития, что все ее результаты можно будет вывести из нескольких строго установленных экспериментально аксиом, то эта область перестанет быть частью развивающейся физической науки и перейдет в раздел прикладной математики или техники. Так произошло с классической механикой.

Разумеется, очень полезно анализировать структуру физической теории, т. е. выяснять, из каких исходных предпосылок получаются те или иные результаты. Однако центр тяжести в таком аксиоматическом подходе — не в общности и математической строгости выводов, а в правильном выборе исходных предположений и в оценке того, какие из них наиболее достоверно подтверждены опытом. А для этого требуется интуиция физика. В тех случаях, когда эту работу проделывает математик, он обязательно, хотя бы на время, делается физиком-теоретиком. Иначе он рискует оказаться, по выражению польского сатирика Леца, в положении эскимоса, который вырабатывает для жителей Конго правила поведения во время жары.

Итак, математика и физика — науки с разными задачами и с разными методами подхода к задачам.

В математике достоверность результатов достигается логической строгостью и анализом всех логически возможных решений. В физике рассматриваются только те решения, которые могут осуществляться в природе, и достоверность достигается многократной проверкой сделанных предположений. Математическая строгость в физике представляет собой невозможную и ненужную роскошь. Добиваться в физике математической строгости так же не нужно, как требовать от бригадиров лесоповала, чтобы они на работе разговаривали стихами. Но вместе с тем физик-теоретик должен свободно владеть математическим аппаратом, т. е. знать и уметь использовать все те математические методы, которые могут оказаться полезными при решении физических задач.

II. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

Попробуем показать на простых примерах, как работают физики-теоретики на первой, самой важной стадии работы, когда делается качественный анализ поставленной задачи. Как мы увидим, на этой стадии почти без всяких вычислений получаются грубые соотношения между входящими в задачу величинами. Следующая стадия работы — получение точных количественных соотношений с помощью математического аппарата теории — целиком опирается на первую стадию, во время которой проясняется физическая картина явления и возникает проект ожидаемого решения. Не имея такого предположительного проекта, нельзя приступать к поискам точного решения. Действительно, доказать удается только те утверждения, которые были заранее угаданы. Из этого правила почти не бывает исключений.

Одним из главных элементов качественного анализа является решение задачи на упрощенных моделях, в которых отброшено все несущественное. Усложнять решенную задачу несравненно проще, чем заново решать сложную.

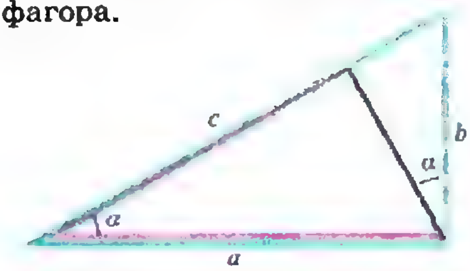
В некоторых простых случаях многое проясняет простой размерный анализ входящих в задачу величин и возможных соотношений между ними.

Размерные оценки

Для иллюстрации докажем теорему Пифагора, пользуясь соображениями размерности. Из размерности следует, что площадь S прямоугольного треугольника можно записать как произведение квадрата гипотенузы на некоторую функцию одного из острых углов: $S=c^2f(\alpha)$. Аналогичным образом можно представить площади двух подобных прямоугольных треугольников, которые получатся, если опустить высоту из прямого угла. Для этих треугольников роль гипотенузы играют катеты исходного треугольника. Поэтому

$$c^2f(\alpha)=a^2f(\alpha)+b^2f(\alpha).$$

Сократив на $f(\alpha)$, получим теорему Пифагора.



$$S_{\text{◺}}=S_{\text{△}}+S_{\text{◹}},\quad S_{\text{◺}}=c^2f(\alpha),$$
$$S_{\text{△}}=a^2f(\alpha),\quad S_{\text{◹}}=b^2f(\alpha)$$

В качестве другого примера рассмотрим задачу о нахождении периода колебаний грузика на пружине. Прежде всего выясним, какие величины могут входить в выражение для периода. Поскольку силы, действующие на грузик,— это сила тяжести и сила упругости, естественно предположить, что период колебаний зависит от ускорения свободного падения g и массы m грузика и от жесткости пружины k. Разумеется, такие величины, как температура и вязкость воздуха, не войдут в задачу, если мы пренебрегаем затуханием колебаний. (Чтобы упростить задачу, надо знать, чем можно пренебречь!) Из величин g, m и k можно составить только одну комбинацию, имеющую размерность времени,— $\sqrt{m/k}$. Следовательно, период T равен

$$T=C\sqrt{m/k}.$$

Ускорение g не вошло в ответ. Безразмерная константа C не может быть найдена из размерных соображений; можно только сказать, что она не очень велика и не очень мала,— она порядка единицы. Действительно, значение C должно быть найдено из решения ненаписанного нами уравнения движения грузика. А безразмерные коэффициенты, возникающие из решений уравнений, встречающихся в физике, как правило, оказываются порядка единицы*). Точное вычисление дает для C значение 2π.

Таким образом, мы без вычислений, пользуясь только размерным анализом, нашли примерную величину периода колебаний грузика на пружине.

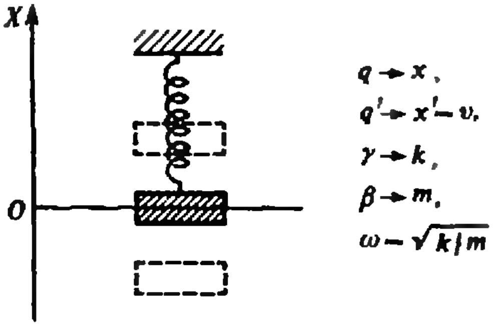
Пример обобщения — осциллятор

Во всех областях физики встречаются задачи, связанные с колебаниями систем около положения равновесия. Для понимания многих явлений, а следовательно, для качественного анализа этих явлений нужно знать общие свойства таких систем. Системы, совершающие колебания около положения равновесия, независимо от их устройства называют осцилляторами. Простейшие примеры осцилляторов — грузик на пружине, математический маятник. Более сложный пример — натянутая струна; у нее может быть много типов колебаний: колебания с пучностью посередине (основной тон), с одним узлом, двумя узлами и т. д. (обертоны). Таким образом, струна — это набор осцилляторов разных частот. Аналогичный пример — столб воздуха в органной трубе; его можно заставить колебаться с наинизшей частотой (основной тон) или с более высокой частотой, когда в некоторых точках воздушного столба частицы воздуха будут неподвижны (аналог узлов в колебаниях струны).

---

*) Это утверждение нельзя доказать в общем виде, но оно практически всегда справедливо, и этим фактом широко используются при всех оценках.

Общее свойство всех осцилляторов состоит в следующем: независимо от конкретного устройства осциллирующей (т. е. колеблющейся около положения равновесия) системы, энергия системы в любой момент времени может быть записана в виде



$$E=\gamma q^2/2+\beta q'^2/2, \qquad (*)$$

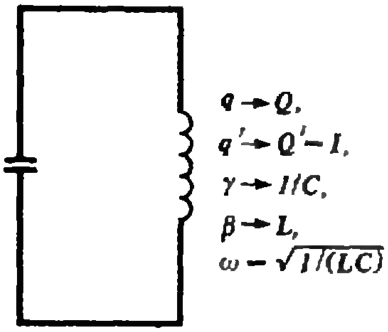
где q — величина, характеризующая отклонение от положения равновесия, а q' — скорость изменения величины q во времени (т. е. $q'=\Delta q/\Delta t$, где Δt — малый промежуток времени). Слагаемое $П=\gamma q^2/2$ — это потенциальная энергия осциллятора; коэффициент γ называют жесткостью осциллятора. Слагаемое $K=\beta q'^2/2$ — это кинетическая энергия осциллятора; коэффициент β называют массой осциллятора. (Вспомните, как записывается энергия простейшего осциллятора — грузика на пружине,— и вам станет понятно, почему γ называют жесткостью, а β — массой осциллятора.)

Как бы ни был конкретно устроен осциллятор, его угловая частота колебаний $\omega=2\pi/T$ выражается следующим образом через жесткость γ и массу β:

$$\omega=\sqrt{\gamma/\beta}.$$

Введение «обобщенного» осциллятора, координата которого — не обязательно расстояние от положения равновесия, а может иметь любой смысл, лишь бы энергия имела такую же структуру, как E в выражении (*), позволяет делать выводы о поведении колеблющейся системы без рассмотрения физической природы происходящих в ней процессов.

Для пояснения приведем еще один пример осциллятора, не похожий на все приведенные выше примеры. Допустим, имеется катушка индуктивности L из хорошо проводящей проволоки, концы которой присоединяют к конденсатору емкости C, имеющему заряд Q_0. В цепи возникают электромагнитные колебания. Если катушка сделана из сверхпроводника (для этого нужна низкая температура), колебания практически не будут затухать.



Энергия такой системы состоит из двух слагаемых: энергии магнитного поля в катушке и энергии электрического поля в конденсаторе. Энергия электрического поля конденсатора пропорциональна квадрату заряда Q, который в данный момент находится на обкладке конденсатора: $П=\frac{1}{C}Q^2/2$. Энергия магнитного поля катушки пропорциональна квадрату силы тока I, текущего в данный момент по катушке: $K=LI^2/2$. Но сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора со временем: $I=Q'$. Таким образом, энергия магнитного поля катушки $K=LQ'^2/2$.

Следовательно, энергия системы в любой момент времени равна

$$E=\frac{1}{C}Q^2/2+LQ'^2/2.$$

Наша система — осциллятор; роль координаты осциллятора играет заряд Q, потенциальная энергия осциллятора — энергия конденсатора, кинетическая — энергия магнитного поля катушки. Из записи энергии видно, что жесткость этого осциллятора — величина $1/C$, а роль массы играет индуктивность L. Сразу можем записать частоту колебаний: $\omega = \sqrt{1/LC}$.

Такой осциллятор называется электрическим колебательным контуром.

Как угадать решение?

Приведем пример того, как проясняются некоторые черты решения, прежде чем будет построен аппарат для точного решения задачи, до того как найдены уравнения, на основе которых задача будет решаться. Это заодно и пример более сложного анализа размерностей, чем в случае осциллятора.

Одна из труднейших и неразрешенных задач теоретической физики — связь гравитационных и электромагнитных явлений.

Если такая связь существует, то в результате решения каких-то еще не найденных уравнений будет получено безразмерное число*), дающее соотношение между гравитационной постоянной γ и величинами, характеризующими электромагнитные явления, такими, как скорость света c, заряд электрона e и его масса m. Если существенны квантовые явления, то в задачу может войти еще постоянная Планка h. Зная размерности величин γ, c, e, m, h, нетрудно убедиться, что из этих величин можно составить только две независимые безразмерные комбинации:

$$\alpha = e^2/\hbar c; \quad \xi = \hbar c/\gamma m^2$$

(напомним, что $\hbar = h/2\pi$).

Первая из этих комбинаций характеризует взаимодействие электрона с электромагнитным полем (безразмерный «заряд» электрона) и называется постоянной тонкой структуры. Подстановка численных значений дает $\alpha = 1/137$, $\xi = 5 \cdot 10^{44}$. Может ли такое большое число как ξ возникнуть в результате решения каких-либо разумных уравнений? Безразмерные числа, возникающие в результате решения физических задач, как мы уже говорили, имеют порядок нескольких единиц или долей единицы. Поэтому мы вправе ожидать, что величина ξ войдет в задачу в такой форме, чтобы в результате получилось число порядка 1. Пока мы применяли здравый смысл. Теперь должен быть сделан небольшой интуитивный логический скачок. Правдоподобно, что в теорию войдет комбинация

$$\alpha \ln \xi \sim 1.$$

Ясно, что знание такого соотношения облегчает поиски решения. Именно в такой форме входит величина ξ в существующие сейчас теоретические попытки решения задачи о связи электродинамики с гравитацией.

III. ПРЕДЕЛЬНОЕ УПРОЩЕНИЕ

Основная идея квантовой механики

Попробуем показать на другом примере, как, предельно упрощая задачу, можно определить главные черты явления. Этот пример пояснит, что такое качественный подход к задаче.

Согласно квантовой механике, энергия электрона в атоме может принимать только дискретные значения.

Возможные значения энергий электрона в атоме водорода даются выражением*)

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2}. \qquad (**)$$

Разности значений E_n для двух разных n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) определяют с большой точностью частоты наблюдаемых на опыте спектральных линий.

Основная идея квантовой механики состоит в том, что каждая частица (в данном случае — электрон) характеризуется неким волновым процессом с длиной волны

---

*) Для того чтобы соотношение между различными физическими величинами не зависело от выбора единиц, оно должно быть записано в виде безразмерной комбинации.

*) Физики, как правило, не пользуются системой СИ. *(Примечание автора.)*

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv},$$

где m — масса частицы, v — ее скорость. Дискретные значения энергии электрона получаются из того условия, что на длине орбиты, по которой движется электрон, должно укладываться целое число волн. Если радиус орбиты r, то n-ному состоянию электрона соответствует условие $2\pi r = \lambda n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$, или $mv_n = \hbar n/r$. Отсюда нетрудно найти кинетическую энергию в n-ном состоянии:

$$W_n = mv_n^2/2 = \hbar^2 n^2/2mr^2.$$

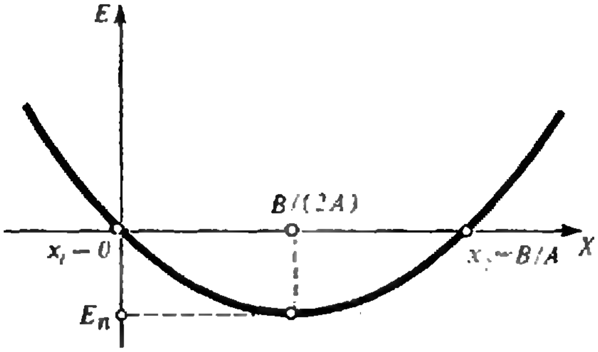
Полная энергия электрона складывается из кинетической энергии и потенциальной энергии в поле ядра, которая отрицательна и равна $U = -Ze^2/r$. Полная энергия электрона в атоме водорода равна

$$E_n(r) = \hbar^2 n^2/2mr^2 - e^2/r.$$

В нашем выводе мы предполагаем, что радиус орбиты r имеет фиксированное значение. Согласно квантовой механике, радиусы орбит «разбросаны» в окрестности классически устойчивой орбиты. В качестве оценки радиуса можно взять значение r, которое соответствует минимуму энергии $E(r)$.

Чтобы найти минимум $E(r)$, поступим следующим образом. Перепишем выражение для $E(r)$ в таком виде:

$$E = Ax^2 - Bx.$$



Мы ввели такие обозначения: $x = 1/r$, $A = h^2 n^2/2m$, $B = e^2$. Видно, что при $x_1 = 0$ и $x_2 = B/A$ значение E равно нулю. Внутри интервала $]x_1,\ x_2[$ E отрицательно. Где-то внутри этого интервала лежит минимум E. Будем для оценки считать, что $E_{\min}$ соответствует значение x в середине интервала, т. е. $x = B/2A$. Соответственно, $r = 1/x = 2A/B$, т. е.

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}.$$

(Отметим, что при $n=1$ это выражение дает верную оценку для радиуса атома в наинизшем состоянии.) Подставив это значение r_n в выражение для $E_n(r)$, получим

$$E_n = -\frac{me^4}{\hbar^2}\frac{1}{2n^2},$$

т. е. выражение, совпадающее с (**)!

В действительности электрон может с разной вероятностью находиться на любом расстоянии от ядра. Наше упрощение состояло в предположении, что это расстояние определенное, равное r, и находится из условия минимальности энергии. Разумеется, мы действовали грубо. Поэтому нельзя доверять числовому множителю впереди этой формулы, хотя он случайно получился правильным. Но всему остальному можно доверять! И множителю $me^4/\hbar^2$, и, что особенно важно, зависимости от «квантового числа» n.

Точное решение потребовало бы знания основного уравнения квантовой механики (уравнение Шредингера) и очень сложной (по школьным понятиям) математики. То, что мы получили, и есть качественное решение, когда результат получается с точностью до неизвестного числового множителя, но характер зависимости от параметров задачи передается точно. Качественное решение чрезвычайно облегчает получение точного решения, поскольку выясняются главные черты явления. Более того, если есть качественное решение, а точного не удается получить аналитически, можно без особых потерь в понимании задачи найти его с помощью вычислительных машин.

Еще одно обобщение — квантовые осцилляторы

Не сложнее решается задача о квантовании осциллятора. При этом нам не существенно, как реализован осциллятор — представляет ли он груз, колеблющийся на пружине, или электрический колебательный контур.

Обозначим через q обобщенную координату осциллятора. Запишем энергию осциллятора:

$$E=\gamma q^2/2+\beta q'^2/2.$$

Можно себе представить, что осциллятор — это некая «частица» с массой β, колеблющаяся на пружине с жесткостью γ. Для того чтобы сформулировать для этого объекта основную идею квантовой механики, введем длину волны λ волнового процесса, связанного с нашей «частицей»:

$$\lambda=2\pi\hbar/\beta q'.$$

В знаменателе стоит произведение «массы» на ее скорость. Так как скорость изменяется при движении частицы, то и длина волны тоже меняется — она минимальна вблизи положения равновесия и растет в тех областях, где скорость «частицы» мала.

Пусть «частица» движется в области от $-q_0$ до q_0. (Подчеркнем, что $2q_0$ — не размах колебаний осциллятора, а та область, в которой «дрожит» его координата.) Для того чтобы образовалась стоячая волна, на «длине» $2q_0$ должно укладываться целое число полуволн: $2q_0=(n+1)\lambda/2$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. В качестве оценки скорости возьмем значение скорости при $q=q_0$, т. е. $(q')_0=2\pi\hbar/\beta\lambda=$ $=\pi\hbar(n+1)/2\beta q_0$. Подставляя это значение в выражение для кинетической энергии, находим

$$W_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{8\beta}\ \frac{(n+1)^2}{q_0^2}.$$

Для полной энергии получаем

$$E_n(q_0)=\frac{(\pi\hbar)^2}{8\beta}\ \frac{(n+1)^2}{q_0^2}+\frac{\gamma q_0^2}{2}.$$

При малых значениях q_0 энергия велика из-за первого слагаемого, а при больших q_0 — из-за второго. Примерное значение q_0, дающее наименьшую энергию, получится, если приравнять оба слагаемых. Из этого условия находим

$$q_0^2=\frac{\pi\hbar(n+1)}{2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Подставляя в выражение для энергии, получаем

$$E_n=\frac{\pi}{2}\hbar\sqrt{\gamma/\beta}\,(n+1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\hbar\omega(n+1)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Величина $\omega=\sqrt{\gamma/\beta}$ представляет собой частоту колебаний классического осциллятора.

При точном расчете для энергии получается выражение

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, мы ошиблись в числовом множителе ($\pi/2$ вместо 1), а также в численном значении энергии в самом низшем состоянии, т. е. при $n=0$ $\left(\frac{\pi}{2}\hbar\omega\text{ вместо }\frac{1}{2}\hbar\omega\right)$. Но все остальное получилось точно! Теперь, когда результат получен, следует задуматься над тем, что́ мы использовали для его получения и что́ вытекает из полученных нами выражений для энергии осциллятора и для величины q_0^2.

Прежде всего, мы применили к нашему осциллятору, не интересуясь тем, как он устроен, принципы квантовой механики, установленные первоначально применительно к электронам. Конечно, естественно ожидать, что общие принципы должны быть такими же и для других частиц, массы которых отличаются от массы электрона. Действительно, такое обобщение с большой точностью подтвердилось опытом. Но почему эти же принципы можно применять и к такому объекту, как колебательный контур, где роль «координаты» играет заряд на обкладках конденсатора? Здесь мы подошли к важному предположению, которое широко использовалось и используется в теоретической физике XX века. Если две системы имеют энергию, одинаково зависящую от координат и скоростей, то такие системы обладают одинаковыми свойствами, несмотря на то, что «координаты» и «скорости» могут иметь совершенно разный смысл в этих системах.

Не было ни одного примера, где бы это предположение противоречило опыту. Поэтому мы вправе считать, что решили задачу о применении квантовой механики сразу для всех возможных осцилляторов.

Теперь подумаем, что означают полученные нами результаты. Как они переходят в формулы классической механики? Прежде всего, мы получили, что энергия изменяется не непрерывно, а порциями величины $\hbar\omega$. Правда, величина $\hbar$ очень мала, и для обычных макроскопических осцилляторов эта скачкообразность изменения энергии практически не наблюдается. Впрочем, есть такие особые макроскопические системы, где скачкообразность играет определяющую роль (например, лазеры). Правильность полученного нами выражения для энергии осциллятора проверена с большой точностью для многих видов осцилляторов.

Есть еще одно важное свойство квантового осциллятора, которое тоже нами получено. Когда энергия минимальна, классический осциллятор находится в покое в положении равновесия; между тем квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии совершает колебания (их называют «нулевые колебания»). Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $\hbar\omega$. При этом среднее значение координаты осциллятора равно нулю, а среднее значение квадрата координаты дается приведенной выше формулой для q_0^2. Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и играет важную роль в современной физике.

Если рассмотреть звуковые колебания в твердом теле как набор квантовых осцилляторов, то мы получим, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны, а совершают нулевые колебания. И этот факт был подтвержден опытами по рассеянию света при низких температурах! Если мы будем рассматривать электромагнитные волны, которые могут распространяться в пустом пространстве, как набор осцилляторов, то мы придем к заключению, что в пустоте, даже когда в ней нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля. И эти колебания также были обнаружены на опыте! Но это уже более сложный вопрос, который требует подробного обсуждения.

Понимание возникает в процессе работы

Мы ввели без объяснения несколько непонятных слов: квантование, волновой процесс, связанный с частицей, квантовый осциллятор и т. д. И начали действовать, не очень их понимая. Тем не менее мы нашли, как зависит энергия атома водорода от квантового числа n; узнали, что квантовый осциллятор в наинизшем энергетическом состоянии колеблется, и даже стали применять результаты квантования осциллятора к такому объекту, как колебания электромагнитного поля в пустоте. И в результате этих действий возникло хотя бы частичное понимание.

Итак, понимание возникает в процессе работы. Ведь если бы мы попытались добиться полного понимания до того, как начали наши простые вычисления, ничего бы не получилось. Понимание возникает не скачком, а по мере продвижения в работе. И наоборот, работа продвигается по мере углубления понимания.

Для того чтобы дистичь более глубокого понимания, надо самому решать задачи в данной области физики. Пассивное изучение дает только слабое представление о тех красотах, которые открываются при самостоятельной работе.

По традиции на первых заседаниях научного семинара В. И. Арнольда для студентов Московского университета его участникам предлагается несколько новых задач — точнее, тем для исследования. Среди них иногда встречаются чрезвычайно красивые задачи, формулировки которых понятны даже школьнику. Вот одна из этих тем.

МЕАНДРЫ

Академик В. АРНОЛЬД

Шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада также на восток. *Занумеруем мосты в порядке их следования* вдоль шоссе (с запада на восток). Проплывая под мостами вниз по реке, мы будем встречать их, вообще говоря, в другом порядке. Так, например, река на рисунке 1 проходит мосты в порядке 3, 4, 5, 2, 1. Таким образом, эта река определяет перестановку чисел от 1 до 5: (3 4 5 2 1). Ясно, что другая река могла бы протекать иначе и задавать другую перестановку. Но далеко не любая перестановка чисел (мостов) может быть реализована таким образом. (Попробуйте, например, придумать реку, проходящую мосты в порядке 2, 1, 3, 4, 5.) Мы будем называть перестановку *меандром*, если ее можно задать с помощью подходящей реки.

Основной вопрос для нас будет такой: сколько существует различных меандров (т. е. сколько перестановок номеров реализуется), если общее число мостов равно n? Обозначим число *различных меандров с n мостами* через $a(n)$. Легко видеть, что $a(1)=a(2)=1$, $a(3)=2$, $a(4)=3$ (рис. 2).

Задача 1. *Найдите следующие члены последовательности $a(n)$.*

Ответ: 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, 262, 538, 1828, 3926, 13820,...

Общая формула для $a(n)$ неизвестна. Неизвестны даже асимптотики $a(n)$ и $a(n+1)/a(n)$ при $n \to \infty$.

Задача 2. *Докажите, что река впервые пересекает шоссе под мостом, номер которого нечетен.*

Задача 3. *Докажите, что номера 1-го, 3-го, 5-го,... мостов (вдоль реки) нечетны, если нумеровать мосты вдоль шоссе, а номера 2-го, 4-го,... мостов — четны.*

Начнем классифицировать меандры с того, что зафиксируем первый вдоль реки мост. Обозначим через $a_i(n)$ число меандров с n мостами, для которых река впервые пересекает шоссе под i-м (вдоль шоссе) мостом. Согласно задаче 2,

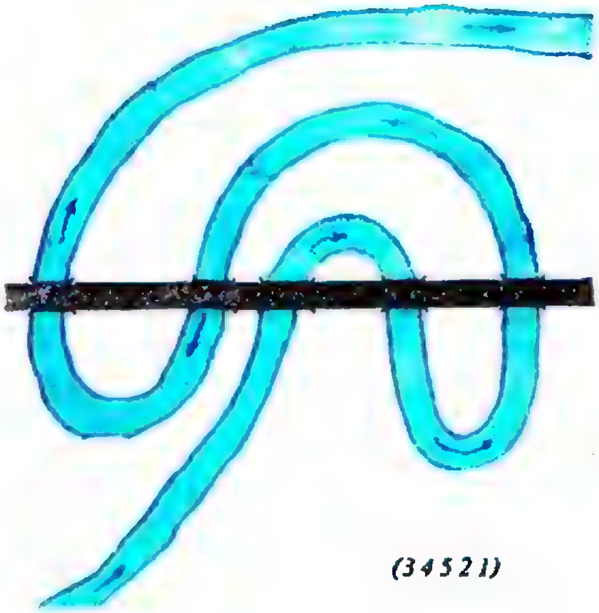


Рис. 1.

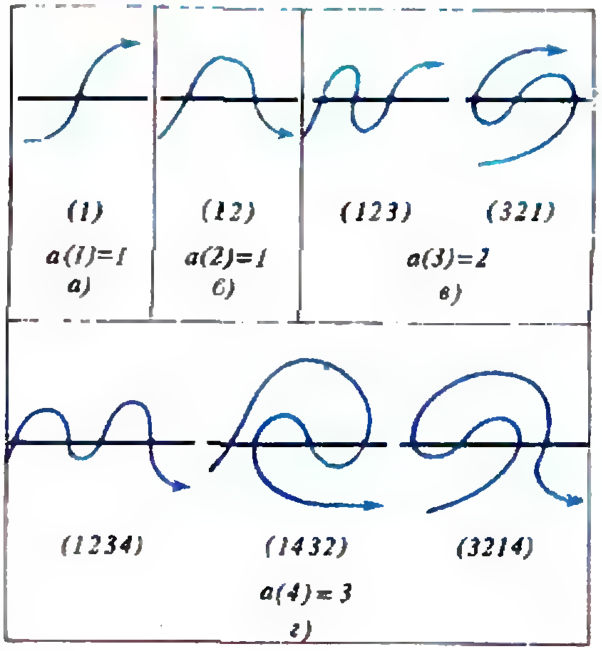


Рис. 2.

$$a(n)=a_1(n)+a_3(n)+\ldots+a_{2k-1}(n),$$

где $n=2k-1$ или $n=2k$.

Задача 4. *Составьте таблицу меандрических чисел $a_i(n)$ при небольших n.*

Ответ: для i, $n\leqslant 10$ см. таблицу.

$a_i(n)$ \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a(n)$	1	1	2	3	8	14	42	81	262	538
$a_1(n)$	1	1	1	2	3	8	14	42	81	262
$a_3(n)$			1	1	2	8	7	14	36	81
$a_5(n)$					3	3	7	11	28	57
$a_7(n)$							14	14	36	57
$a_9(n)$									81	81
$a_{11}(n)$										
$a_{13}(n)$										

Задача 5. *Найдите в этой таблице закономерности. Случайно ли число 14 появилось пять раз?*

Задача 6. *Докажите, что*

1) $a(n)=a_1(n+1)$,

2) $a_i(n)=a_j(n)$, если $i+j=n+1$ четно,

3) $a_i(n)=a_j(n)$, если $i+j=n+2$ четно, $i\geqslant 3$, $j\geqslant 3$,

4) $a_1(2k-1)=a_3(2k)$, 5) $a(2k+1)$ четно.

Задача 7. *Четно ли $a(16)$?*

Задача 8. *Докажите, что $a(n)$ нечетны только, если $n=2^r$.*

Задача 9. *Исследуйте поведение при $k\to\infty$ распределений $a_i(2k+1)$, где $i\geqslant 1$ и $a_i(2k)$, где $i\geqslant 3$.*

Задача 10. *Докажите, что всякая перестановка n мостов может быть реализована меандрирующей рекой, если шоссе и река находятся не на плоскости, а на подходящей поверхности, скажем на плоскости с приклеенными к ней ручками (рис. 3).*

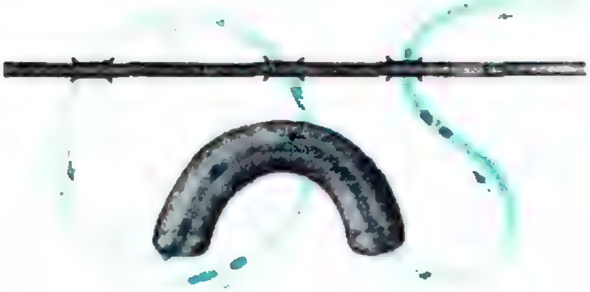


Рис. 3.

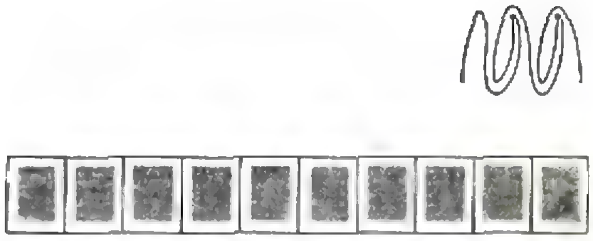


Рис. 4.

Минимальное число ручек такой поверхности назовем родом перестановки. Таким образом, все перестановки распределяются по родам. Обычные меандры — это перестановки рода нуль.

Задача 11. *Исследуйте распределение перестановок из n элементов по родам при $n\to\infty$.*

Задача 12. *Перенесите предыдущие рассмотрения на меандры, образованные несколькими реками.*

Замечания

1. Число таких обобщенных меандров, образованных системами замкнутых рек, на проективной плоскости при пересечении с бесконечно удаленным шоссе — это известные числа Каталана 1, 1, 2, 5, 14, 42,...

Число Каталана $c(n)$ проще всего определить как число способов расстановки скобок в произведении из n сомножителей. Например, $c(3)=2$. Два способа расстановки скобок — это $(ab)c$ и $a(bc)$. В произведении четырех сомножителей скобки можно расставить пятью способами:

$$((ab)c)d,\ (ab)(cd),\ (a(bc))d,$$
$$a((bc)d),\ a(b(cd)).$$

Поэтому $c(4)=5$ и т. д.

Числа Каталана обладают замечательным свойством неожиданно возникать в самых разных задачах. Подробнее об этом можно узнать из статьи М. Гарднера «Числа Каталана» («Квант», 1978, № 7, с. 20).

2. С задачей о меандрах связана следующая «задача о марках»: сколькими способами можно сложить в стопку ленту, состоящую из n марок (рис. 4; вверху показан один из способов складывания полоски). Об этой задаче рассказано в книге М. Гарднера «Математические досуги» (М.: Мир, 1972, с. 344—353).

(Окончание см. на с. 14)

ОГЮСТЕН ЛУИ КОШИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Это знаменитое неравенство, принадлежащее французскому математику О. Коши, было опубликовано в 1821 году. С тех пор оно традиционно считается одним из самых трудных числовых неравенств. За полтора века появилось несколько десятков различных доказательств этого неравенства. Традиция была начата самим Коши. Его доказательство занимало несколько страниц сложных выкладок. Я предлагаю читателям познакомиться с самым простым из известных мне доказательств. По-моему, оно так же красиво, как и поучительно. Но в начале нам понадобится несколько переформулировать неравенство Коши.

Зачем переформулировать одну и ту же задачу? Опытные математики знают, что это занятие совсем не так бесполезно, как это кажется... Простые доказательства сложных теорем как правило состоят из многочисленных переформулировок.

В первую очередь, в нашем неравенстве смущает устрашающий корень n-й степени, стоящий в правой части. Поделим на него обе части. Справа останется единица, а слева — среднее арифметическое чисел

$$y_1=\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}},\ \ldots,\ y_n=\frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}.$$

Переформулировка

При условиях

$$y_1>0,\dots,y_n>0,$$
$$y_1y_2\dots y_n=1$$

надо доказать, что

$$\frac{y_1+y_2+\dots+y_n}{n}\geqslant 1. \qquad (*)$$

А теперь вспомним о математической индукции. Будем доказывать неравенство Коши шаг за шагом, каждый раз увеличивая n на единицу. Для $n=1$ оно очевидно (и превращается в строгое равенство). Предположим, что нам удалось доказать неравенство при некотором n. Значит, теперь надо вывести его для $n+1$.

Индуктивный шаг

Нужно доказать, что если

$$z_1>0,\dots,z_n>0,\ z_{n+1}>0,$$
$$z_1z_2\dots z_nz_{n+1}=1,$$

то $z_1+\dots+z_n+z_{n+1}\geqslant n+1$. Воспользуемся неравенством (*), которое мы считаем доказанным для n чисел. Пусть $y_1=z_1,\dots,y_{n-1}=z_{n-1},\quad y_n=z_n\ z_{n+1}$. Тогда выполнены оба условия

$$y_1>0,\dots,y_n>0,$$
$$y_1y_2\dots y_n=1,$$

и мы предполагаем доказанным неравенство $y_1+\dots+y_n\geqslant n$, т. е.

$$z_1+z_2+\dots+z_{n-1}+z_n\cdot z_{n+1}\geqslant n.$$

Заметим, что до сих пор мы занимались одними переформулировками. Но где же само доказательство? Вот оно.

Если надо, то перенумеруем числа $z_1,\dots,z_{n+1}$ так, чтобы выполнялось $z_n>1,\ z_{n+1}<1$. (Ясно, что если все числа z_i не равны одновременно 1, то среди них найдутся два таких числа.) Теперь в последней формуле заменим произведение $z_n\cdot z_{n+1}$ на сумму z_n+z_{n+1}. Для этого надо показать, что $z_n+z_{n+1}\geqslant z_n\cdot z_{n+1}+1$, или

$$z_n+z_{n+1}-z_n\cdot z_{n+1}-1\geqslant 0.$$

Левую часть разложим на множители:

$$z_n(1-z_{n+1})-(1-z_{n+1})=$$
$$=(z_n-1)(1-z_{n+1})\geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно, так как $z_n>1,\ z_{n+1}<1$. Доказательство закончено.

А теперь — два слова об этом доказательстве. Единственное не вполне очевидное место в нем — это выбор чисел z_n, z_{n+1}. В целом же на нас работали элементарные переформулировки и математическая индукция.

Меандры

(Начало см. на с. 11)

3. Многочисленные рисунки меандров можно найти в последней работе Анри Пуанкаре «Об одной геометрической теореме», где он пытался доказать с их помощью, что отображение кольца в себя, сохраняющее площади и сдвигающее граничные окружности в разные стороны, имеет не менее двух неподвижных точек. Теорема Пуанкаре была доказана Биркгофом в 1913 году другим методом, но ее обобщение на отображения сферы с ручками было доказано Я. М. Элиашбергом в 1978 году с помощью меандров (число неподвижных точек, считая с кратностями, не меньше $2g+2$, где g — число ручек).

Из теории меандров вытекают также следующие теоремы:

(1) *Нестягиваемая несамопересекающаяся гладкая замкнутая кривая на проективной плоскости имеет не менее трех точек перегиба.*

(2) *Замкнутая плоская кривая имеет не менее 4 вершин (экстремальных точек кривизны).*

(3) *Назовем участок реки между двумя мостами положительным, если номер следующего моста (вдоль шоссе) больше. Докажите, что число точек перегиба реки не меньше числа сохранений знаков в последовательности знаков участков (меандры с 4 мостами на рисунке 2 имеют последовательности* $(+++)$, $(+--)$, $(--+)$*).*

АНАЛИЗ И НЕРАВЕНСТВА

Кандидат физико-математических наук
В. ОВСИЕНКО

Анри Пуанкаре говорил, что математика — это способ говорить одно и то же о совершенно разных вещах. Особенно это относится к математическому анализу, который подобно отмычке в руках опытного взломщика дает «универсальные ключи от всех дверей»...

Мы поговорим о трех совершенно разных задачах, которые решим одним и тем же способом. В основе решения будет хорошо известное из школьного курса утверждение: если производная некоторой функции больше нуля, то эта функция — возрастающая (и наоборот, если производная меньше нуля, то она — убывающая).

Неравенства на синус и косинус

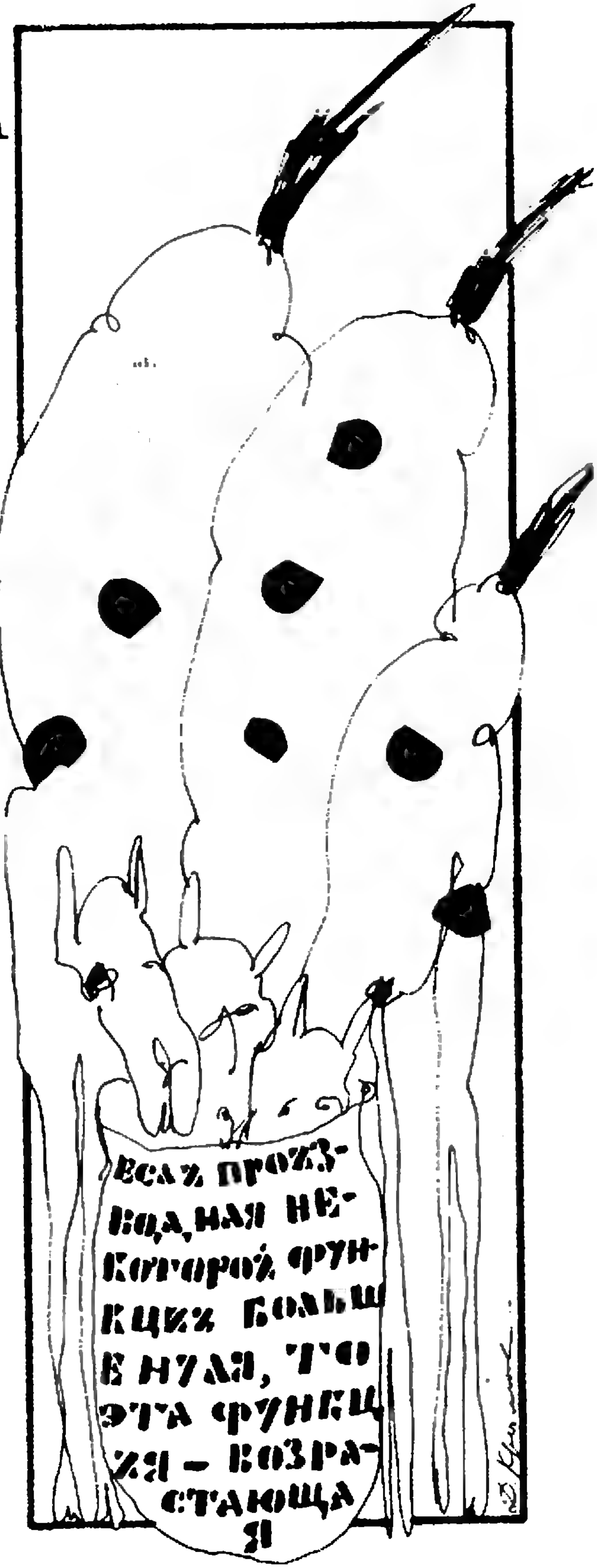
Неравенства

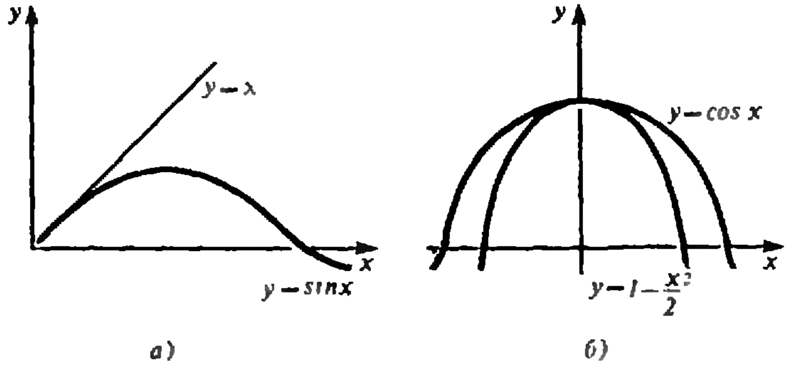
$$\sin x < x,$$
$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

справедливые при $x > 0$ (рис. 1), обычно доказываются (в школе) геометрически. Аналитическое доказательство, между тем, гораздо проще и не требует большой изобретательности.

Начнем с первого неравенства. Функции $y_1(x) = \sin x$ и $y_2(x) = x$ совпадают в нуле. Поэтому достаточно доказать, что при $x > 0$ вторая функция растет быстрее, чем первая (т. е. что $y(x) = x - \sin x$ возрастающая функция при $x > 0$). Но производная $y'(x) = 1 - \cos x$ больше нуля при $x > 0$. Неравенство доказано.

Для доказательства второго неравенства поступим точно так же. Функция $y(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ равна нулю при $x = 0$. Ее производная $y'(x) = -\sin x + x$. Таким образом, $y'(x) > 0$ при $x > 0$ (в силу первого





а)

б)

Рис. 1.

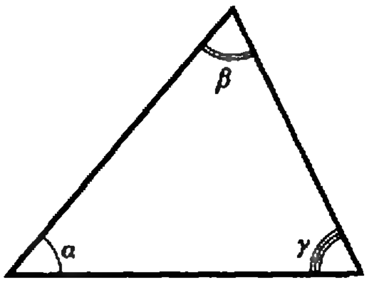


Рис. 2.

неравенства!), т. е. функция возрастает и, следовательно, положительна.

Упражнения

1. Докажите, что при $x>0$

а) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$,

б) $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Указание. Поступайте как и раньше. После дифференцирования пользуйтесь предыдущими неравенствами.

2*. Продолжите цепочку полученных неравенств на $\sin x$ и $\cos x$.

Неравенства в треугольнике

Для треугольника с углами α, β, γ (рис. 2) справедливо неравенство

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Докажем его. Во-первых, заметим, что равенство выполняется, если треугольник — правильный ($\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$).

Пусть треугольник равнобедренный, и его углы равны $\alpha=60^\circ+x$, $\beta=\gamma=60^\circ-\frac{x}{2}$, где x — некоторое число такое, что $-60^\circ<x<120^\circ$. Тогда выражение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ — функция от x:

$$f(x)=\sin(60^\circ+x)+2\sin\left(60^\circ-\frac{x}{2}\right).$$

Ее производная есть $f'(x)=\cos(60^\circ+x)-\cos\left(60^\circ-\frac{x}{2}\right)$. Ясно, что $f'(x)>0$ при $-60^\circ<x<0$ и $f'(x)<0$ при $0<x<120^\circ$. Поэтому функция $f(x)$ имеет максимум в точке $x=0$ и тем меньше, чем дальше x от нуля.

Пусть теперь при фиксированном α изменяются углы β и γ: $\beta=\delta-x$, $\gamma=\delta+x$. Тогда исходное выражение опять будет функцией от x:

$$f(x)=\sin(\delta-x)+\sin(\delta+x)+\sin\alpha.$$

Ее производная $f'(x)=\cos(\delta+x)-\cos(\delta-x)$. Снова $f'(x)$ больше нуля для отрицательных x и меньше нуля для положительных x. Другими словами, выражение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ тем меньше, чем сильнее треугольник отличается от равнобедренного.

Неравенство доказано, поскольку любой треугольник можно получить из равностороннего, сначала меняя угол α, а затем уже β и γ. Мы убедились, что при таком изменении выражение $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ будет все время убывать.

Упражнение 3. Докажите неравенства

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$,

б) $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$,

в) $\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma \leqslant \frac{1}{8}$,

если α, β, γ — углы некоторого треугольника.

Неравенство Коши

Для любых неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

между средним арифметическим и средним геометрическим. Оно называется *неравенством Коши*. Мы докажем его с помощью все того же способа, т. е. вычисляя производную от некоторой функции.

Для разминки начнем с доказательства совсем простого случая $n=2$.

Конечно, неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

доказывается разнообразными геометрическими способами (в том числе и очень красивыми). Мы же отработаем на нем наш метод. Пусть для определенности $a \leqslant b$. Тогда $b = a + x$, где x — некоторое неотрицательное число. Выражение $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$ становится функцией от x, имеющей вид

$$f(x) = \frac{2a+x}{2} - \sqrt{a(a+x)}.$$

При $x=0$ функция $f(x)=0$, ее производная $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{a+x}} > 0$. Поэтому функция $f(x)$ — возрастающая, т. е. среднее арифметическое тем больше среднего геометрического, чем больше разность $b - a = x$.

А теперь докажем неравенство Коши в общем случае. Фактически это доказательство — повторение предыдущего. Нам только потребуется знание производной функции $\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$. Она вычисляется в школьном учебнике: $\left(x^{\frac{k}{n}}\right)' = \frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}$.

Пусть для определенности $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Ясно, что при $a_1 = \ldots = a_n$ наше неравенство превращается в равенство. Мы возьмем n одинаковых чисел $a_1, a_1, \ldots, a_1$ и будем увеличивать их (начиная со второго), но не за один шаг, а в $(n-1)$ шагов. На первом шаге —

$$a_1, \underbrace{a_1+z, \ldots, a_1+z,}_{n-1}$$

(где $a_1 + z = a_2$),

на втором шаге —

$$a_1, a_2, \underbrace{a_2+y, \ldots, a_2+y}_{n-2}$$

(где $a_2 + y = a_3$).

В конце концов мы получим набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Мы докажем, что на любом шаге разница между средним арифметическим и средним геометрическим увеличивается. Тем самым мы не просто получим неравенство Коши, но даже увидим его «динамику». На m-м шаге мы имеем такой набор чисел:

$$a_1, \ldots, a_m, \underbrace{a_m+x, \ldots, a_m+x.}_{n-m}$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} - \sqrt{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$$

как функцию от x:

$$f(x) = \frac{a_1+\ldots+a_m(n-m+1)+(n-m)x}{n} - \\ - \sqrt[n]{a_1\cdot\ \ldots\cdot\ a_m(a_m+x)^{n-m}}.$$

Ее производная легко вычисляется:

$$f'(x) = \frac{n-m}{n} - \frac{n-m}{n}\sqrt[n]{\frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_m}{(a_m+x)^m}}.$$

Очевидно, что $f'(x) > 0$ при $x > 0$! Ведь под корнем в этом выражении стоит число

$$\frac{a_1a_2\ldots a_m}{(a_m+x)^m} = \frac{a_1}{a_m+x}\cdot\frac{a_2}{a_m+x}\cdot\ldots\cdot\frac{a_m}{a_m+x} < 1.$$

Неравенство Коши доказано.

Два других доказательства этого неравенства можно найти в статьях «Огюстен Луи Коши и математическая индукция», а также «Сумма минимумов и минимум суммы» в этом номере журнала. О достоинствах и недостатках всех трех доказательств судить читателям.

Задачник „Кванта"

Задачи

M1271—M1275, Ф1278—Ф1282

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1271» или «Ф1278». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1271. Дана полуокружность с диаметром AB. Постройте хорду MN, параллельную AB, так, чтобы трапеция $AMNB$ была описанной.

В. Сендеров

M1272. Докажите, что для любых n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1^2}-1\right)\left(\frac{1}{a_2^2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{a_n^2}-1\right)\geqslant(n^2-1)^n.$$

Л. Курляндчик

M1273. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC, как на основаниях, вне его построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, CBA_1 и CAB_1, у каждого из которых отношение высоты к основанию равно k. Такие же треугольники ABC_2, CBA_2 и CAB_2 построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади S, S_1 и S_2 треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ связаны соотношением

$$S_1\pm S_2=S(1+3k^2)/2$$

(знак «+» или «—» зависит от ориентации треугольника $A_2B_2C_2$ по отношению к ABC).

Р. Сарбаш, А. Елизаров

M1274. Докажите, что разность между числами

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}} \quad \text{и} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}}$$

по модулю не превосходит $\dfrac{1}{(n-1)!\,n!}$.

Г. Гальперин

M1275*. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... такова, что при любом $k>1$

$$a_{k+1}=a_{k-1}a_k+1.$$

Докажите, что при $k>9$ число a_k-22 — составное.

С. Генкин

Ф1278. Летевший вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадают на землю в течение промежутка времени t. Найдите скорость осколков в момент взрыва.

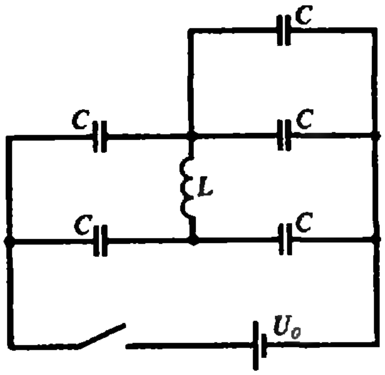
О. Савченко

Ф1279. Прочный цилиндрический сосуд объемом $V=10$ л, содержащий $m=3$ г кислорода, разделяют тонкой перепонкой, которая выдерживает разность давлений $\Delta p=1000$ Па. В левой части сосуда (она составляет 1/3 объема сосуда) включают нагреватель. Благодаря теплопроводности перепонки, тепло перетекает в правую часть сосуда. Известно, что при разности температур $\Delta T=1$ К за одну секунду перетекает количество теплоты $\Delta Q=0{,}2$ Дж. При какой максимальной мощности нагревателя перепонка останется целой в процессе длительного нагревания?

Р. Александров

Ф1280. В коробке с тремя выводами *А*, *Б* и *В* находится неизвестная схема, состоящая из резисторов. При помощи омметра измерены сопротивления между различными выводами: $R_{АБ}=10$ Ом, $R_{БВ}=20$ Ом, $R_{АВ}=30$ Ом. К точкам *А* и *В* подключают батарейку напряжением $U=1{,}5$ В, а между *Б* и *В* — амперметр, сопротивление которого $r=5$ Ом. Что он покажет?

А. Сашин



Ф1281. Из пяти одинаковых конденсаторов и катушки собрана схема, показанная на рисунке. Найдите максимальный ток через катушку после подключения батарейки напряжением U_0. Найдите также максимальное напряжение на параллельно соединенных конденсаторах. Сопротивление проводов считать малым.

А. Зильберман

Ф1282. Куб с ребром $a=10$ см, имеющий массу $M=1$ кг, подвешен на пружине жесткостью $k=400$ Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток упругих шариков, обладающих скоростью $v_0=20$ м/с на высоте первоначального положения основания куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно. Найдите период этих колебаний. Оцените время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза. Масса каждого шарика $m=1$ г, концентрация шариков в потоке $n=1000$ м$^{-3}$, столкновениями шариков между собой пренебречь.

И. Мартин

Решения задач

М1246—М1249, Ф1258—Ф1262

М1246. *Докажите, что в любой арифметической прогрессии, члены которой — натуральные числа найдутся два числа с одинаковой суммой цифр.*

Пусть a — первый член, а d — разность прогрессии. Можно считать, конечно, что $d>0$. Тогда все члены прогрессии вида $a+10^n d$, где n достаточно велико (так что $10^n>a$), имеют одинаковую сумму цифр, равную сумме всех цифр a и d.

С. Генкин

M1247. *Можно ли покрыть всю плоскость квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ... (без наложений), используя каждый квадрат не более а) десяти раз; б) одного раза?*

Ответ: а) можно; б) нельзя.

а) Пример покрытия (где квадрат со стороной 1 используется 4 раза, а остальные — по 3 раза) приведен на рисунке 1.

б) Предположим, что существует покрытие, в котором все квадраты различны. Поскольку сумма всех чисел, не превосходящих 2^{n-1}, меньше 2^n $(1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1)$, то к каждой стороне любого из квадратов нашего покрытия должна примыкать сторона большего квадрата. Отсюда следует, что каждая вершина квадрата должна лежать на стороне большего квадрата (если вершина B квадрата $ABCD$ лежит на стороне большего квадрата, примыкающего к стороне AB (рис. 2), то вершина C будет лежать на стороне большего квадрата, примыкающего к BC, и т. д.). Рассмотрим теперь наименьший из всех квадратов покрытия. Четыре квадрата будут примыкать к нему так, как показано на рисунке 3. Рассмотрим больший из этих квадратов — пусть он примыкает к стороне AB наименьшего (на рисунке — это голубой квадрат). Тогда вершина A этого квадрата не лежит на стороне большего, чем он, квадрата. Получили противоречие.

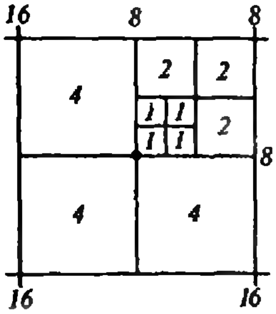


Рис. 1.

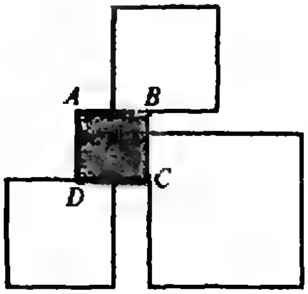


Рис. 2.

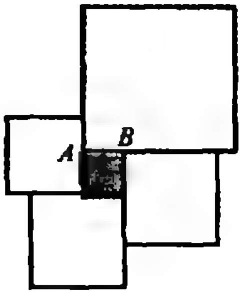


Рис. 3.

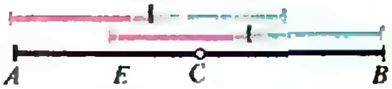
Д. Фомин

M1248. *На отрезке находятся несколько меньших отрезков, покрывающих его целиком.*

а) Докажите, что левые половинки этих отрезков покрывают не менее половины исходного отрезка.

б) Докажите, что если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину — правую или левую, — то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Заметим прежде всего, что можно исключить отрезки целиком содержащиеся в других отрезках. Далее, занумеровав отрезки в произвольном порядке, поочередно проделаем с каждым такую операцию: заменим его наименьшим отрезком с той же серединой так, чтобы отрезки по-прежнему покрывали исходный. (При этом выбранные половины сокращаются, и их объединение только уменьшится.) Повторяя эти операции, придем к системе, в которой каждый отрезок может иметь общие внутренние точки (пересекаться по отрезку) не более чем с одним из остальных. Таким образом, весь исходный отрезок разбит на куски, каждый из которых покрыт содержащимися в нем одним или двумя отрезками. Поэтому достаточно доказать утверждения лишь для случая двух отрезков. Это в обоих случаях нетрудно.



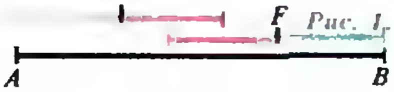


Рис. 1.

Рис. 2.

Утверждение а) очевидно, если левые половины отрезков не пересекаются: ведь сумма длин двух отрезков больше длины d их объединения, поэтому сумма их половин больше $d/2$. Если же левые половины пересекаются (рис. 1), то утверждение следует из того, что середина правого отрезка лежит правее середины C всего рассматриваемого куска AB, т. е. эти половины покрывают AC.

Утверждение б) очевидно, если хотя бы один из отрезков не меньше $2/3\ d$, где d — покрываемый ими кусок. В другом случае (рис. 2) расстояние между их серединами E и F не меньше $d/3$, а выбранные половины отрезков либо не пересекаются, либо покрывают отрезок EF.

Д. Фомин

М1249*. *В королевстве Олимпия $n>6$ городов, каждые два из которых соединены одной дорогой с односторонним движением. При этом не из каждого города можно проехать в любой другой (не нарушая правил движения).*

а) Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направление на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.

б) Верно ли это утверждение для $n=6$ городов?

Докажем сначала для $n=7$ городов утверждение а). Будем говорить, что два города эквивалентны, если из каждого из них можно проехать в другой. Тогда все 7 городов разобьются на группы эквивалентных между собой городов, причем из каждых двух групп одна «мажорирует» другую, в том смысле, что все дороги из одной группы ведут в другую. Рассмотрим случай, когда таких групп больше двух. Пусть y — предпоследняя группа (рис. 1). Выбрав в группе y любой город Y и изменив направления всех дорог, соединяющих его с другими городами, мы получим искомое: из Y можно теперь попасть в группу a, а из нее — в любой другой город; и наоборот, в Y можно попасть из последней группы z, а в нее — из любого другого города. Осталось рассмотреть случай, когда групп всего две (рис. 2). Пусть в группе a всего x городов, в группе b — $(7-x)$. Можно считать, что x не меньше 4 (иначе заменим все стрелки на противоположные). Разберем три случая: 1) $x=4$; 2) $x=5$; 3) $x=6$. Впрочем, сразу заметим, что случай $x=5$ невозможен, поскольку группа не может состоять из двух эквивалентных городов.

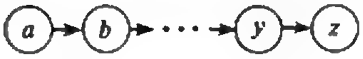


Рис. 1.

Рис. 2.

Для дальнейшего удобно использовать такую лемму:

В группе из любого числа $k>3$ эквивалентных городов всегда существует замкнутый путь, проходящий (по направлению стрелок) через все города по разу («гамильтонов цикл»).

Доказательство леммы приведем в конце решения.

Рассмотрим оставшиеся случаи. 1) При $x=4$ группа выглядит так, как показано на рисунке 3 (направление шестой, непоказанной дороги несущественно). В качестве нужного города надо выбрать C. 3) При $x=6$ группа a выглядит так, как показано на рисунке 4 (направление других дорог пока не существенно). Предполагая, что не существует города, при изменении направлений всех дорог в котором можно будет доехать из него до любого города из группы a, можно заключить, что дороги направлены так, как показано на рисунке 5. Но тогда в качестве нужного города можно выбрать любой из шести городов.

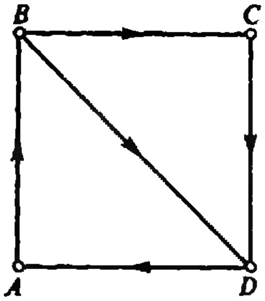


Рис. 3.

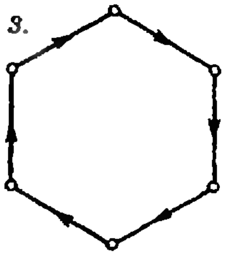


Рис. 4.

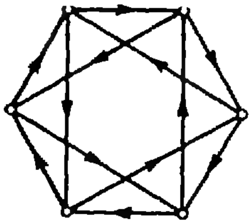


Рис. 5.

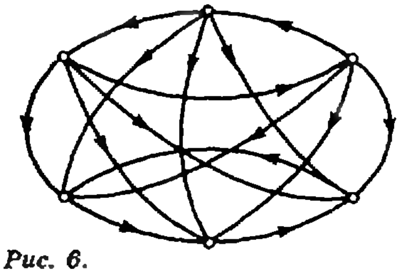


Рис. 6.

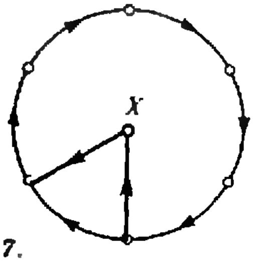


Рис. 7.

Итак, для $n=7$ утверждение задачи а) доказано.

При $n>7$ его можно доказать методом индукции. Прежде всего, выберем из городов такой, в который входит не менее двух дорог и из которого выходит не менее двух дорог. (Если такого города нет, то имеется 4 города, в каждый из которых входит не более одной дороги, или 4 города, из которых выходит не более одной дороги. Но это невозможно, поскольку у шести дорог между четырьмя городами 6 «начал» и 6 «концов».) Среди оставшихся $(n-1)$ городов по предположению индукции есть такой, «обращением» всех дорог в котором можно добиться желаемого эффекта. Он же, очевидно, годится и для всех n городов.

Рисунок 6 показывает, что для $n=6$ городов утверждение неверно, т. е. ответ на вопрос б) отрицателен. (Интересно, что этот пример единственный, как говорят, с точностью до изоморфизма.)

В заключение докажем лемму о гамильтоновом цикле (для $k=3$ городов она очевидна). Будем рассуждать по индукции. Удалим любой из $k>3$ городов — город X. Если оставшиеся $(k-1)$ городов после этого образуют несколько групп эквивалентности (как на рисунке 1, причем некоторые стрелки из группы z идут в X, а из X — в группу a), то поскольку в каждой из групп $a, b, \ldots, y, z$ по предположению индукции есть гамильтонов цикл, из них очевидно составляется гамильтонов цикл, проходящий через все k городов. Если же оставшиеся $(k-1)$ городов образуют одну группу эквивалентности, то в ней есть гамильтонов цикл, причем среди дорог, соединяющих эти города с X, есть как входящие в X, так и выходящие из него. Проходя по этому циклу, мы можем найти два соседних города таких, что из первого идет дорога в X, а во второй — приходит дорога из X (рис. 7). Таким образом, мы можем включить X в этот цикл.

Заметим, что с помощью этой леммы можно доказать утверждение а) сразу для любого n, большего 7,— примерно так, как это сделано выше для $n=7$ городов.

И. Итенберг, Д. Фомин

Ф1258. *На горизонтальном столе находится катушка радиусом R. На катушку намотана тонкая невесомая нить, радиус намотки равен r. Нить пропущена через маленькое отверстие на высоте h от поверхности стола $(h>R)$. В начальный момент катушка неподвижна, а нить вер-*

Ясно, что катушка, расположенная так, как показано на рисунке 1, начнет катиться вправо. Определим, в каком положении катушка будет иметь максимальную скорость.

В произвольный момент времени на катушку действуют три силы — сила натяжения нити T, равная по величине F, сила тяжести Mg и сила реакции опоры $F_р$ (рис. 2). Рассмотрим моменты всех сил относительно точки опоры. Силы Mg и $F_р$ имеют нулевые моменты, а момент силы T ускоряет вращение катушки по часовой стрелке и, следовательно, увеличивает скорость ее *тикальна (рис. 1). За нить начинают тянуть с постоянной силой F, и катушка катится по столу без проскальзывания. Найти максимальную скорость катушки. Масса катушки M. Считайте, что половина всей массы сосредоточена на оси катушки, а вторая половина распределена по внешнему ободу радиусом R. Нить считать гладкой.*

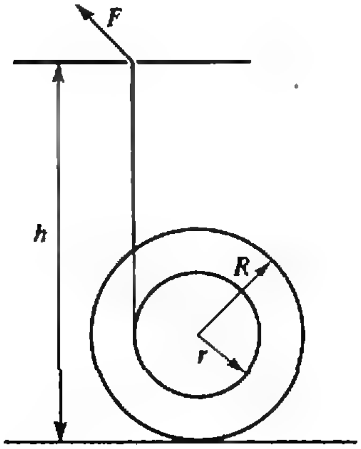


Рис. 1.

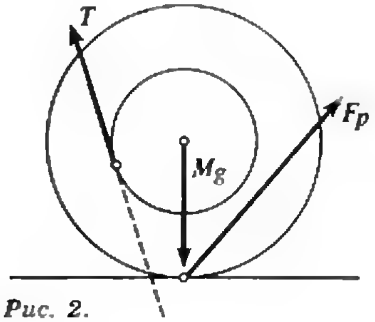


Рис. 2.

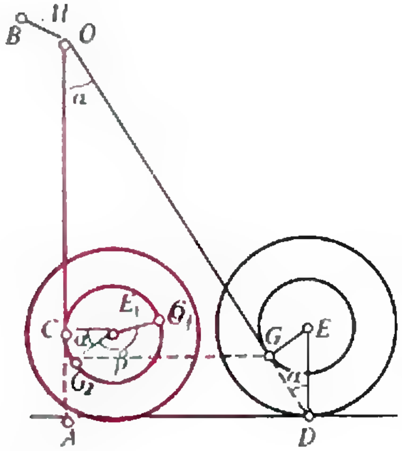


Рис. 3.

горизонтального движения вправо. Понятно, что максимальной эта скорость станет тогда, когда продолжение нити будет проходить через точку опоры (точка D на рисунке 3). При дальнейшем движении момент силы T станет тормозящим, через некоторое время катушка остановится и покатится назад.

Чтобы вычислить максимальную скорость катушки, воспользуемся законом сохранения энергии — кинетическая энергия катушки равна работе внешних сил. Единственный источник энергии здесь — экспериментатор, который тянет за конец нити с силой F. Работа этой силы равна

$$A = F\Delta l,$$

где Δl — длина участка нити, вытянутого через отверстие при движении катушки от начального до интересующего нас положения. Найдем Δl, сравнив «свободную» длину нити в начальном и конечном положениях (см. рис. 3).

Пусть точка O — это конец нити в начальный момент, а точка G — это точка касания нити и катушки в конечный момент. Чтобы найти положение этой точки в начальный момент, мысленно перекатим катушку обратно. При этом нить частично намотается на катушку, и точка G перейдет в точку G_1 (промежуточная точка G_2 получается из G параллельным переносом катушки из конечного положения в начальное). Итак, длина рассматриваемого участка нити в конечном положении равна $BO + OG$, в начальном $OC + \smile CG_1$. Приравнивая эти два выражения, найдем

$$\Delta l = BO = OC + \smile CG_1 - OG.$$

Вычислим все входящие сюда величины. Непосредственно из рисунка 3 получаем

$$OC = h - R,\ OG = OD - DG = h/\cos\alpha - R\cos\alpha.$$

Осталось вычислить длину нити, намотанной на катушке. Разложим эту длину на две:

$$\smile CG_1 = \smile CG_2 + \smile G_1G_2.$$

При перекатывании катушки из конечного положения в начальное ее угол поворота равен

$$\beta = \angle G_1E_1G_2 = \frac{EE_1}{R} = \frac{AD - r}{R} = \frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha - r}{R}.$$

Поэтому длина нити на участке от G_1 до G_2 есть

$$\smile G_1G_2 = r\beta = r\frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha - r}{R}.$$

Вместе с тем

$$\angle CE_1G_2 = \angle EDG = \alpha,$$

поэтому

$$\smile CG_2 = r\alpha.$$

Окончательно получим

$$\Delta l = h - R + \frac{r}{R}(h\,\mathrm{tg}\,\alpha - r) + r\alpha - \frac{h}{\cos\alpha} + R\cos\alpha,$$

или, выразив все функции угла α через $\sin\alpha = r/R$,

$$\Delta l = r\arcsin\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R} + (h-R)\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right).$$

Вычислим теперь кинетическую энергию движущейся катушки. Катушка, катящаяся без проскальзывания со скоростью v, вращается с линейной скоростью, тоже равной v, поэтому кинетическая энергия катушки равна

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 = \frac{3}{4}Mv^2.$$

Теперь из закона сохранения энергии $E_k = A$ получим ответ:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{F}{M}\left(r\arcsin\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R} + (h-R)\left(1-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)\right)}.$$

Интересно отметить, что формула дает осмысленную величину для v и при $r = R$, хотя в этом случае равновесие моментов сил (см. рис. 3) никогда не наступает — момент силы натяжения нити все время ускоряет катушку. Вместе с тем, хотя путь катушки и бесконечен, через отверстие проходит лишь конечный участок нити, и скорость катушки оказывается ограниченной.

А. Ходулёв

Ф1259. *Свисток издает звук частоты $f_0 = 2000$ Гц. Как изменится частота звука, если температура воздуха поднимется от 20 до 40 градусов по Цельсию? Какой тон будет издавать свисток в воздушном колоколе для подводных работ, в который подается дыхательная смесь из гелия и кислорода под давлением 1,5 атм? Парциальное давление кислорода принять равным 0,3 атм. Как изменится в этом колоколе тон речи человека? Нужно ли будет перестраивать гитару, чтобы она звучала в колоколе так, как снаружи?*

Частота свистка определяется размерами свистка (зависимость — обратная) и скоростью звука (зависимость — прямая). Если пренебречь изменением размеров свистка при нагреве от 20 до 40 градусов по Цельсию, то все определяется возрастанием скорости звука (которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры) в 313/293 = 1,033 раза. Значит, частота станет равной 2066 Гц. Разница, конечно, не очень большая, однако совершенно недопустимая для музыкальных инструментов — особенно в оркестре. При конструировании духовых инструментов принимают специальные меры, чтобы настройка практически не менялась при изменении температуры в заданных пределах. Подумайте сами, как этого можно достичь.

Второй вопрос несколько сложнее. Вспомним, что обычно мы дышим смесью кислорода (его молярная масса 32 г/моль) и азота (28 г/моль). Азота больше, и полученная газовая смесь имеет среднюю молярную массу 29 г/моль. Смесь гелия и кислорода имеет явно меньшую молярную массу, и поэтому скорость звука в смеси будет больше, а тон речи человека — выше (ведь «размеры» голосового аппарата остаются прежними). Остается найти молярную массу смеси кислорода и гелия. Это можно сделать так.

В объеме V число молей кислорода $\nu_к = p_к V/(RT)$, гелия $\nu_г = p_г V/(RT)$, а полная масса смеси $m = m_к + m_г = \mathrm{M}_к \nu_к + \mathrm{M}_г \nu_г$. Тогда молярная масса смеси

$$\mathrm{M} = (p_к \mathrm{M}_к + p_г \mathrm{M}_г)/(p_к + p_г) = 9{,}6 \text{ г/моль}.$$

Итак, высота тона возрастет в $\sqrt{29/9{,}6} = 1{,}74$ раза (получится «голос Буратино»), и частота тона станет равной 3480 Гц.

А вот гитару перестраивать не придется — частота колебаний струны определяется совсем другими параметрами.

А. Зильберман

Ф1260. *Хорошо всем известная бесконечная цепочка резисторов (рис. 1) содержит резисторы r и R. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами (разделенными ровно одним резистором r)? Чему равно сопротивление, измеренное между двумя узлами, которые находятся очень далеко друг от друга? Найти это сопротивление в общем случае, когда между интересующими нас точками включено ровно n резисторов r.*

В первом случае цепочку можно перерисовать так, как показано на рисунке 2, где ρ — сопротивление полубесконечной цепочки, изображенной на рисунке 3. Из соотношения

$$r + \frac{R\rho}{R+\rho} = \rho$$

легко получаем

$$\rho = r\left(1 + \sqrt{1 + 4R/r}\right)/2.$$

Тогда сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами A и B, будет равно

$$R_1 = R_{AB} = \frac{2R\rho r}{2R\rho + rR + r\rho} = \frac{2Rr}{\rho + 2R}.$$

Если узлы A и B находятся очень далеко друг от друга, то схему можно заменить такой, как на рисунках 4 и 5. Отсюда

$$R_\infty = R_{AB} = \frac{2\rho R}{2R + \rho}.$$

Пусть теперь между A и B включено N звеньев цепочки. Применим принцип суперпозиции. Подключим между узлом A и нижним проводом O батарею с ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 6). Если принять потенциал провода за ноль, то потенциалы и токи будут равны

$$\varphi_A = \mathscr{E},\ \varphi_B = \mathscr{E}(1 - r/\rho)^N,\ \varphi_0 = 0,$$
$$I_A = I = \mathscr{E}(1/R + 2/\rho),\ I_B = 0,\ I_0 = -I.$$

Если же вместо предыдущей взять батарею противоположной полярности и включить ее между O и B, то

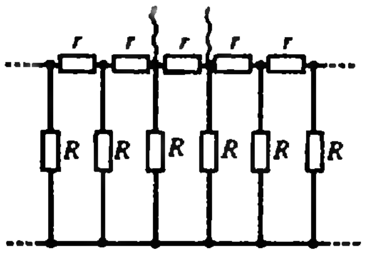


Рис. 1.

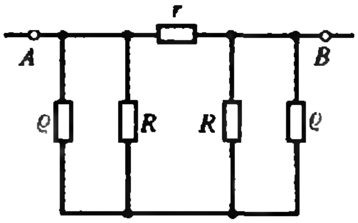


Рис. 2.

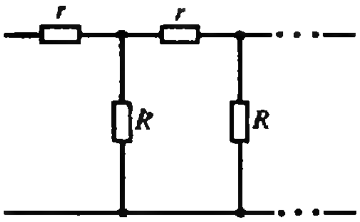


Рис. 3.

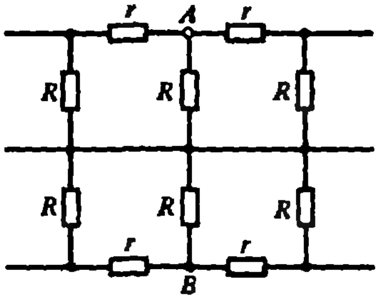


Рис. 4.

токи и потенциалы окажутся равными

$$\varphi'_A = -\mathscr{E}(1-r/\rho)^N,\ \varphi'_B = -\mathscr{E},\ \varphi'_0 = 0,$$
$$I'_A = 0,\ I'_B = -I,\ I'_0 = I.$$

Сложим токи и напряжения в этих двух ситуациях и получим

$$\varphi''_A = \mathscr{E}(1-(1-r/\rho)^N),\ \varphi''_B = -\mathscr{E}(1-(1-r/\rho)^N),\ \varphi''_0 = 0,$$
$$I''_A = I,\ I''_B = -I,\ I''_0 = 0.$$

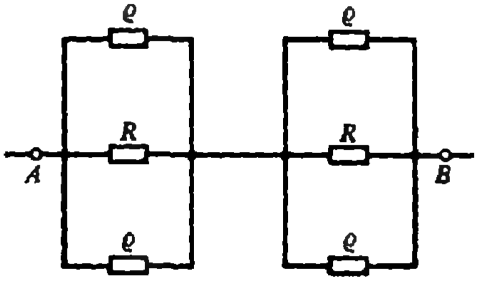


Рис. 5.

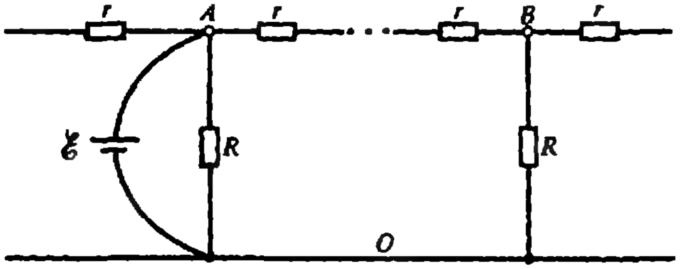


Рис. 6.

Поскольку через узел O ток не течет, можно считать, что сопротивление между узлами A и B равно

$$R_N = R_{AB} = \frac{\varphi''_A - \varphi''_B}{I} = \frac{2R\rho}{2R+\rho}\left(1-\left(1-\frac{r}{\rho}\right)^N\right).$$

Заметим, что при $N=1$ получается ответ для первого случая, а при $N\to\infty$ — для второго.

П. Родин

Ф1261. *К батарейке напряжением $U_0=4$ В последовательно подключены два конденсатора, емкости которых $C_1=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ. Катушку индуктивностью $L=1$ Гн подключают параллельно конденсатору C_1. Найти амплитуду тока в катушке. К моменту подключения катушки напряжения на конденсаторах считать установившимися. Потерями в цепи пренебречь.*

Для нахождения максимального тока через катушку проще всего воспользоваться законом сохранения энергии. В тот момент, когда ток через катушку максимален, ЭДС индукции равна нулю, и все напряжение батарейки оказывается приложенным к конденсатору C_2. До подключения катушки заряды каждого из конденсаторов были равны

$$q_0 = C_1C_2U_0/(C_1+C_2).$$

Значит, батарейка «протолкнула» по цепи дополнительный заряд

$$q_{\text{бат}} = \Delta q = C_2U_0 - q_0 = C_2^2U_0/(C_1+C_2)$$

и совершила при этом работу

$$A_{\text{бат}} = q_{\text{бат}}U_0.$$

Запишем баланс энергий:

$$W_{\text{нач}} + A_{\text{бат}} = W_{\text{кон}},$$

или

$$C_1C_2U_0^2/(2(C_1+C_2)) + C_2^2U_0^2/(C_1+C_2) = C_2U_0^2/2 + LI_{\text{м}}^2/2.$$

Отсюда находим максимальное значение тока в катушке:

$$I_м = C_2U_0/\sqrt{L(C_1+C_2)} = 6\cdot10^{-3}\,\text{А}.$$

Ток через катушку имеет нулевое среднее значение и изменяется по гармоническому закону, значит, амплитуда тока равна вычисленному значению. Попробуйте найти самостоятельно частоту колебаний в системе. На всякий случай — ответ: примерно 80 Гц.

Р. Александров

Ф1262. *Электрический вентилятор с асинхронным двигателем, включенный в сеть напряжением 220 В, развивает 1800 об/мин. Чтобы он не гудел так громко, его подключают через автотрансформатор к напряжению 127 В. С какой скоростью он будет вращаться? Считайте, что нагрузка на лопасти вентилятора определяется перегоняемым воздушным потоком. Трением в подшипниках пренебречь. Силу тока в обмотках статора считать зависящей только от приложенного напряжения.*

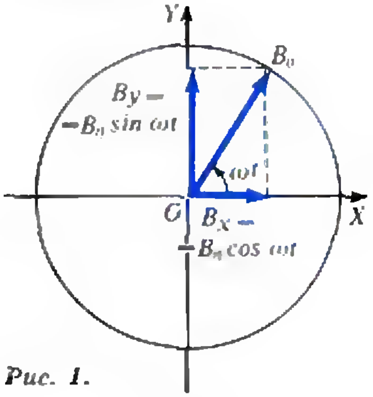


Рис. 1.

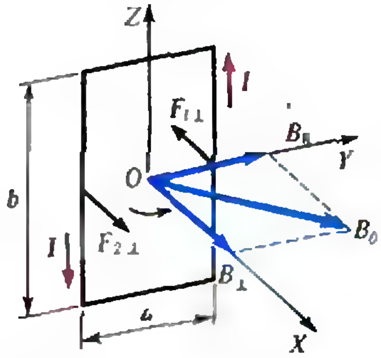


Рис. 2.

Основу асинхронного двигателя переменного тока составляют статор с несколькими обмотками, создающими вращающееся магнитное поле, и ротор, представляющий собой сплошной металлический цилиндр или конструкцию типа «беличье колесо».

В однофазном двигателе вращение магнитного поля достигается за счет сдвига по фазе на 90° *синусоидальных* переменных токов равной величины, текущих по двум взаимно перпендикулярным обмоткам статора.

При этом x-составляющая магнитного поля равна $B_x = B_0\cos\omega t$, y-составляющая — $B_y = B_0\sin\omega t$, а результирующее поле $\vec{B}_0$ вращается в плоскости XY против часовой стрелки с частотой ω питающих токов (рис. 1).

Рассмотрим силы, действующие на ротор, считая его для простоты прямоугольной металлической рамкой со сторонами a и b. Вначале обсудим случай, когда рамка с осью вращения OZ закреплена неподвижно в плоскости YZ, а вектор индукции магнитного поля $\vec{B}_0$, лежащий в плоскости XY, вращается вокруг оси рамки с частотой ω_0 против часовой стрелки (рис. 2). Составляющая поля, перпендикулярная плоскости рамки, равна

$$B_\perp = B_0\cos\omega_0 t,$$

параллельная —

$$B_\parallel = B_0\sin\omega_0 t.$$

Магнитный поток, пронизывающий рамку, равен

$$\Phi = B_\perp S = B_0S\cos\omega_0 t,$$

где $S = ab$ — площадь рамки. ЭДС индукции, возникающая в рамке, есть

$$\mathscr{E}_i = -\Phi'(t) = B_0S\omega_0\sin\omega_0 t,$$

а ток в рамке —

$$I = \mathscr{E}_i/R = B_0S\omega_0/R\sin\omega_0 t,$$

где R — омическое сопротивление. Вращающий момент относительно оси рамки создают только перпендикулярные плоскости YZ составляющие сил Ампера, действующих на стороны, параллельные оси,—

$$F_{1\perp} = F_{2\perp} = F = B_\parallel Ib = B_0^2bS\omega_0/R\sin^2\omega_0 t.$$

Суммарный момент этих сил

$$M = 2Fa/2 = B_0^2S^2\omega_0/R\sin^2\omega_0 t.$$

Его среднее за период $T = 2\pi/\omega_0$ значение равно

$$\bar{M} = B_0^2S^2\omega_0/(2R).$$

Поскольку физические процессы, рассмотренные выше, определяются только взаимной ориентацией и относительной угловой скоростью вращения поля и рамки, выражение для раскручивающего рамку момента сил в случае вращающейся вслед за полем с частотой ω рамки может быть получено простой заменой $\omega_0 \to \omega_0 - \omega$:

$$\bar{M}_{\text{р}} = B_0^2 S^2 (\omega_0 - \omega)/(2R).$$

При $\omega = 0$, когда рамка неподвижна, амплитуды индукционного тока и сил Ампера максимальны. При $\omega = \omega_0$, когда рамка вращается синхронно с полем, ЭДС индукции, ток и вращающий момент равны нулю, что может быть только в случае отсутствия нагрузки на вал двигателя.

В реальном устройстве, в частности — в нашем вентиляторе, ротор можно представить как совокупность нескольких рамок, однако и в этом случае раскручивающий момент сил будет пропорционален квадрату амплитуды индукции магнитного поля в зазоре статора и разности частот вращения поля и ротора. Максимальная величина индукции магнитного поля B_0 пропорциональна амплитуде I переменного тока, текущего через обмотки статора, а эта величина, по условию, пропорциональна напряжению U в сети. Поэтому

$$\bar{M}_{\text{р}} \sim B_0^2(\omega_0 - \omega) \sim I_0^2(\omega_0 - \omega) \sim U^2(\omega_0 - \omega).$$

Переходя от круговых частот к обычным, получим выражение вида

$$\bar{M}_{\text{р}} = \alpha U^2 (\nu_0 - \nu),$$

где α — постоянный коэффициент пропорциональности.

Теперь рассмотрим действие сил, вызывающих торможение ротора, которое в нашем случае обусловлено перегоняемым воздушным потоком. Пусть вентилятор создает струю воздуха площадью S, движущуюся со скоростью v. Тогда за малое время Δt в поток вовлекается масса воздуха $\Delta m = \rho S v \Delta t$, где ρ — плотность воздуха. Изменение механической энергии этого воздуха есть

$$\Delta E_k = \Delta m v^2/2 = \rho S v^3 \Delta t/2,$$

а механическая мощность, развиваемая вентилятором, равна

$$N = \Delta E_k/\Delta t = \rho S v^3/2.$$

Поскольку (из кинематических соображений) скорость струи пропорциональна частоте вращения лопастей, а мощность связана с моментом сил соотношением $N = M\omega$, для тормозящего момента сил, действующих на лопасть вентилятора, получаем

$$M_{\text{т}} \sim \omega^2, \text{ или } M_{\text{т}} = \beta \nu^2,$$

где β — постоянный коэффициент пропорциональности.

Приравнивая раскручивающий и тормозящий моменты сил, действующих на ротор двигателя, получаем уравнение

$$\alpha U^2 (\nu_0 - \nu) = \beta \nu^2, \text{ или } \nu^2 = k U^2 (\nu_0 - \nu),$$

где $k=\alpha/\beta$ — тоже коэффициент пропорциональности. Запишем это уравнение для разных значений ν и U:

$$\nu_1^2=kU_1^2(\nu_0-\nu_1),$$
$$\nu_2^2=kU_2^2(\nu_0-\nu_2),$$

где $\nu_0=50$ Гц, $\nu_1=1800/60$ Гц$=30$ Гц, $U_1=220$ В, $U_2=127$ В. Подставив эти значения и исключив k, получаем уравнение относительно искомой частоты ν_2:

$$\nu_2^2+15\nu_2-750=0,$$

откуда

$$\nu_2=21 \text{ Гц}.$$

Таким образом, после подключения к сети через автотрансформатор лопасти вентилятора будут вращаться со скоростью

$$n_2=21\cdot 60 \text{ об/мин}\approx 1260 \text{ об/мин}.$$

О. Фатьянов

...Итак, задача полностью решена

(по письмам читателей)

После публикации решения задачи М1194 («Квант» № 4, 1990, с. 34) в редакцию пришло несколько писем от читателей, в которых доказана гипотеза *Е. Гольберга* (Ленинград), уточняющая утверждение этой задачи. Напомним, о чем идет речь. Вот формулировка первого (существенного для нас) пункта задачи, составленной *А. Азамовым:*

М1194. *а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ площади S проводятся биссектрисы MF, MG, MH, ME треугольников AMB, BMC, CMD, DMA. Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполнены неравенства*

$$\frac{3}{8}S<S_0\leqslant\frac{1}{2}S.$$

Е. Гольберг доказал, что $S_0/S=1-A/2$, где

$$A=\frac{a^2}{(a+b)(d+a)}+\frac{b^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2}{(c+d)(b+c)}+\frac{d^2}{(d+a)(c+d)},$$

а числа a, b, c, d равны расстояниям от M до вершин A, B, C, D данного прямоугольника, и, пользуясь этим представлением, что $S_0/S>0{,}4$. Его предположение состояло в том, что точной нижней границей для отношения S_0/S является $\sqrt{2}-1=0{,}41...$ — значение, достигаемое в случае, когда $ABCD$ — квадрат, а M — одна из его вершин.

Первое доказательство этого предположения мы получили от *В. Кыртоаже* (Румыния). Применив равенство $a^2+c^2=b^2+d^2$ (следствие того, что $ABCD$ — прямоугольник), он вывел изящную формулу $A=1+(a-b+c-d)^2/(ac+bd)$. Отсюда с помощью тригонометрической замены $a=l\sin\alpha$, $b=l\sin\beta$, $c=l\cos\alpha$, $d=l\cos\beta$ (здесь $l=a^2+c^2=b^2+d^2$) он получил оценку $A\leqslant(2+c-1/c)/(1+c)\leqslant 2(2-\sqrt{2})$, где $c=\operatorname{ctg}(|\alpha-\beta|/2)$, из которой следует нужное неравенство. Читателям предлагается восстановить детали его изобретательных тождественных преобразований.

Десятиклассница 76-й школы Ленинграда *И. Егорова* выбрала аналитический путь доказательства. Она представила выражение для S_0/S, аналогичное приведенным выше, как функцию двух переменных: $x=d/c$ и $t=b/c$ (вспомним, что $a^2=b^2+d^2-c^2$) и исследовала ее на минимум с помощью производных. Объем заметки не позволяет воспроизвести здесь это довольно кропотливое исследование.

Остановимся подробнее на двух геометрических решениях. Оба они опираются на равенство $S_0/S=(1-s/S)/2$, где s — площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1), ограниченного прямыми, проведенными параллельно сторонам $ABCD$ через основания биссектрис E, F, G, H (это равенство приводилось в опубликованном решении задачи). И в обоих решениях показано, что отношение s/S можно увеличить, если поместить точку M в вершину прямоугольника, после чего уже совсем несложно доказать, что в этом частном случае оно будет максимальным для квадрата.

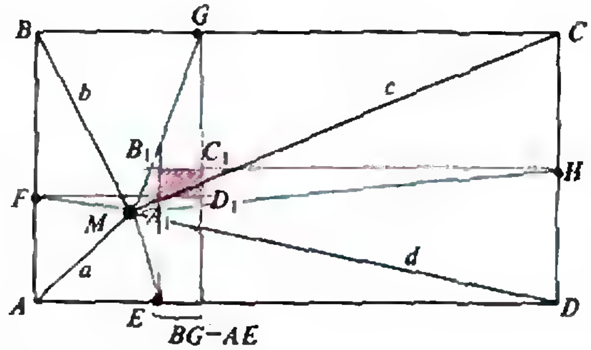


Рис. 1.

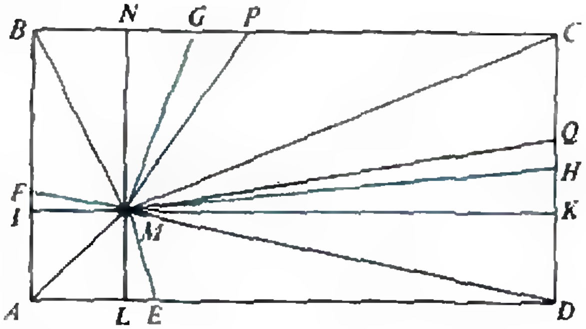


Рис. 2.

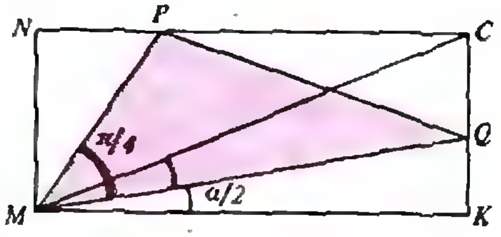


Рис. 3.

Пусть I, N, K, L — проекции точки M на стороны прямоугольника $ABCD$ (рис. 2). *Г. Хоцанян*, ученик 11-го класса школы им. А. Шагиняна (Ереван) показал, что если a — наименьшее из расстояний a, b, c, d, то при смещении точки M сначала в I, а затем в A, длина стороны A_1B_1 рассмотренного выше прямоугольника может только увеличиться (докажите!), и аналогично, движение M по пути $M \to L \to A$ увеличивает сторону A_1D_1. Следовательно, площадь s для точки A заведомо больше, чем для точки M.

Один из постоянных авторов «Задачника «Кванта»» *А. Михайлов* (г. Айзкраукле, Латвия) рассуждал иначе: он изменял не точку, а прямоугольник. А именно, предполагая, что $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, он заменил исходный прямоугольник $ABCD$ на прямоугольник $MNCK$ (см. рис. 2), *оставив точку M неизменной*. Тогда площади S, S_0 и s заменяются, соответственно на $S' = S_{MNCK}$, $S'_0 = S_{\Delta MPQ}$, где MP и MQ — биссектрисы углов NMC и CMK и $s' = NP \cdot KQ$ (на рисунке 2 прямоугольник площади s', соответствующий $A_1B_1C_1D_1$, не показан). Мы должны доказать, что $S_0/S > S'_0/S'$, т. е. что $s/S < s'/s'$. В опубликованном решении задачи было установлено, что $AE \leqslant BG$ и $AF \leqslant DH$. Следовательно, $LF \leqslant NG$, $IF \leqslant KH$. Отсюда $NP \geqslant NG \geqslant NG - LE = A_1D_1$, $KQ \geqslant KH \geqslant KH - IF = A_1B_1$, а значит,

$$\frac{s'}{S'} = \frac{NP \cdot KQ}{S_{MNCK}} \geqslant \frac{A_1D_1 \cdot A_1B_1}{S_{ABCD}} = \frac{s}{S},$$

что нам и было нужно.

Итак, остается рассмотреть тот частный случай задачи, когда данная точка находится в вершине прямоугольника (рис. 3). Это уже несложно. Приведем выкладки А. Михайлова

$$\frac{S'_0}{S'} = \frac{S_{\Delta MPQ}}{S_{MNCK}} = \frac{MP \cdot MQ \cdot \sin \angle PMQ}{2 \cdot MN \cdot MK} =$$

$$= \frac{\sin \pi/4}{2\cos(\pi/4 - \alpha/2)\cos \alpha/2} =$$

$$= \frac{1/\sqrt{2}}{\cos \pi/4 + \cos(\pi/4 - \alpha)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{2}\cos(\pi/4 - \alpha)} \geqslant \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1,$$

где $\alpha = \angle CMK$. Равенство достигается только при $\alpha = \pi/4$, т. е., когда $MNCK$ — квадрат.

Несложно доказать, что отношение s/S для прямоугольника $ABCD$ и точки A больше, чем аналогичная величина для вложенного в $ABCD$ прямоугольника $MNCK$ и точки M. Отсюда следует, что для фиксированного прямоугольника минимум S_0/S достигается, когда точка M находится в его вершине (что, впрочем, и доказывал Г. Хоцанян), и равен, как мы видели, $1/(1 + \sqrt{2}\cos(\pi/4 - \alpha))$.

О. М.

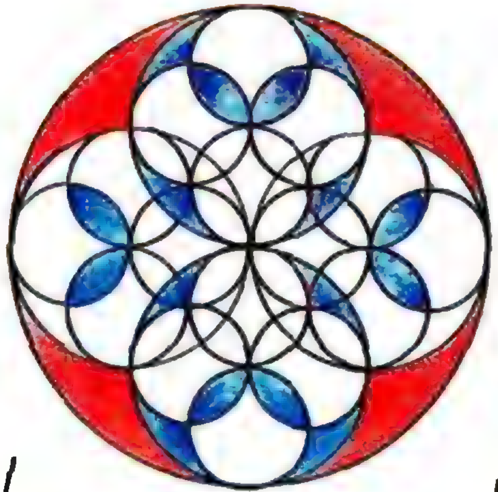
Поправка

В условии задачи М1258 (см. «Квант» № 12 за 1990 год) в пункте б) допущена неточность. Приводим правильную формулировку.

б) Докажите, что для любого набора из n чисел на окружности, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

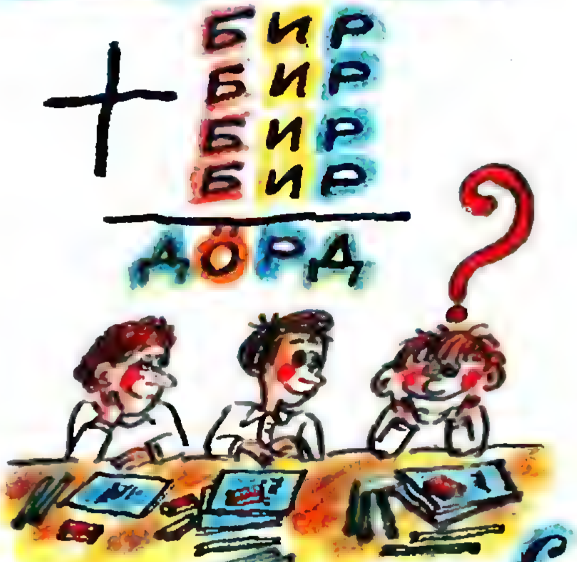
Срок отправки решения этой задачи продлевается до 15 мая.

Задачи



1. Покажите, что в орнаменте (см. рисунок) площадь фигур, окрашенных в красный цвет, равна площади фигур, окрашенных в синий цвет.

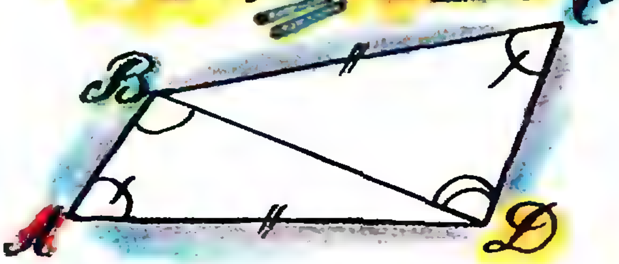
2. На королевских соревнованиях Франции по фехтованию первые четыре места разделили Атос, Портос, Арамис и д'Артаньян. Сумма мест, занятых Атосом, Портосом и д'Артаньяном, равна 6, сумма мест Портоса и Арамиса тоже равна 6. Какое место занял каждый из мушкетеров, если Портос занял более высокое место, чем Атос?



3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (По-азербайджански слова «БИР» и «ДОРД» означают «один» и «четыре».)

4. Коля заплатил 12 копеек за одну тетрадь, два карандаша и резинку. Саша — 27 копеек за две тетради, три карандаша и три резинки. Сколько заплатил Антон за две тетради, пять карандашей и одну резинку?

5. В четырехугольнике $ABCD$ сумма углов ABD и BDC равняется 180°, а стороны AD и BC равны (см. рисунок). Докажите, что углы при вершинах A и C этого четырехугольника равны.



Эти задачи нам предложили Сун Вей-цы (КНР), ученик 10 класса РФМШ г. Алма-Аты А. Сарсембаев, М. Сафаралиев, В. Вьюн, В. Произволов.

Дж. Уокер, скорее всего, знаком нашим читателям как автор великолепной книги «The flying circus of physics» — «Физический фейерверк» в русском переводе (2-е издание было выпущено издательством «Мир» в 1989 году).

В этом номере мы предлагаем статью Дж. Уокера из книги D. Halliday, R. Resnick «Fundamentals of Physics», Third edition extended, 1988 (John Wiley & Sons, N. Y.). Перевод О. Симоновой.

ДВИЖЕНИЕ В ЧАС ПИК

Дж. УОКЕР

Светофоры в небольшом городке обычно не требуют особо строгого регулирования. Транспортный поток через систему светофоров может быть случайным, но очереди при красном свете редко бывают длинными. А вот в большом городе, особенно в часы пик, тщательная регулировка необходима. Без нее «хвосты» машин вытягиваются и блокируют перекрестки, создавая то, что называют пробкой, и для освобождения машин из плена могут потребоваться часы.

Предположим, что вы должны спроектировать систему светофоров для улицы с односторонним движением, состоящей из нескольких полос. Каждый светофор дает зеленый свет в течение 50 секунд, желтый — 5 секунд и красный — 25 секунд (типичный светофор для городского участка с плотным движением). У вас может возникнуть искушение увеличить время горения зеленого сигнала и уменьшить время красного, чтобы «поддерживать» поток движущегося транспорта. Однако надо помнить, что движение на перпендикулярных улицах нельзя сдерживать слишком долго, иначе там образуются длинные очереди.

Как же рассчитать время включения зеленых сигналов на перекрестках? Ясно, что если вы будете включать все зеленые сигналы одновременно, то движение будет возможно только 50 секунд. При каждом включении зеленого света потоки машин будут двигаться по улице, пока все светофоры не переключатся на красный. Чтобы проехать как можно большее расстояние, у водителей возникает искушение гнать машины. Большие потоки машин, мчащиеся со скоростью, скажем, 55 миль в час ($\approx$90 км/ч) по улицам плотно населенного города, будут напоминать автомобильные гонки и явно будут опасны.

Лучше и безопаснее проект, в котором светофор на каждом перекрестке не переключается на зеленый свет, пока не приблизятся передние машины группы от предыдущего перекрестка. Предположим, например, что группа машин находилась на перекрестке I и движется к перекрестку II. Через какое время после включения зеленого сигнала на перекрестке I должен быть включен зеленый свет на перекрестке II? Пусть d — расстояние между двумя перекрестками и $v_г$ — скорость, которую, по вашему мнению, должна иметь группа машин (возможно, предел скорости). Требуемая временна́я задержка включения зеленого света на перекрестке II равна $d/v_г$. Если расстояние между перекрестками одинаково, задержка зеленого сигнала от одного перекрестка до другого всегда равна $d/v_г$, и водители, двигающиеся со скоростью $v_г$, проедут через всю систему светофоров без остановок. Схема работает так же хорошо, если расстояние между перекрестками различно. Вы просто учитываете нужные значения d, чтобы определить временну́ю задержку для зеленого сигнала на данном перекрестке. Гнать машину со скоростью, большей $v_г$, через такую систему светофоров бесполезно, так как придется останавливаться на красный свет.

Схему несколько меняют два фактора. Лидер группы должен видеть включение зеленого сигнала до того, как он подъедет к перекрестку, иначе он притормозит, боясь проехать на красный свет. Учитывая этот фактор, вы должны уменьшить временну́ю задержку включения зеленого сигнала на несколько секунд. Однако, если бы группа машин остановилась на несколько секунд на красный свет на перекрестке I, передней машине потребовалось бы несколько дополнительных секунд, чтобы отреагировать на включение там зеленого сигнала и набрать скорость. Таким образом, передняя машина не все расстояние между перекрестками движется со скоростью $v_г$. Этот фактор требует увеличения времени задержки включения зеленого сигнала на несколько секунд. В некоторых случаях эти два фактора могут компенсировать друг друга.

Все это показано на рисунке 1. Слева изображена система светофоров, справа — графики путей, проходимых машинами из группы, стоящей в момент времени $t=0$ перед перекрест-

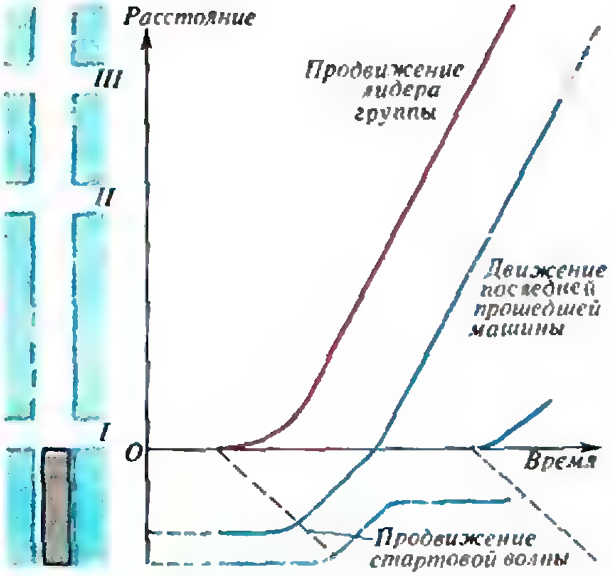


Рис. 1. Графическое изображение того, как группа машин, остановленная на перекрестке I, движется через систему светофоров.

ком I. Изогнутые участки графиков соответствуют ускорению и замедлению движения машин при переключении светофоров. Заметьте, что светофор на перекрестке II дает зеленый свет за несколько секунд до того, как к нему подъедет машина-лидер.

Но и с системой светофоров, работающих с задержкой, движение может застопориться. Проблема заключается в том, что, если группа остановилась, а потом при включении зеленого света начала двигаться, автомобили набирают скорость не одновременно, а в порядке очереди. По всей группе машин от лидера идет стартовая волна. (Вы можете измерить скорость стартовой волны, расположившись около остановившейся группы машин. Определите длину группы, умножив число машин на приблизительное среднее расстояние между передними бамперами. Затем измерьте время от включения зеленого сигнала до начала движения последней машины. Скорость стартовой волны — это длина группы, деленная на измеренное время. Обычно она равна 5 м/с (11 миль в час).) Так что по сравнению с лидером последнему автомобилю приходится не только проехать большее расстояние до перекрестка II, но еще и ждать, пока до него дойдет стартовая волна. Таким образом, при длинном «хвосте» перед светофором последней машине всегда потребуется гораздо больше времени, чтобы доехать до следующего перекрестка.

Если конец группы не успевает проехать на зеленый свет с остальными машинами (именно такую ситуацию иллюстрирует рисунок 1), последующие группы могут начать удлиняться. Рассмотрим случай, когда на перекрестке II остается хвостовая часть машин, как показано на рисунке 2. Назовем эту часть *A*. В то время как *A* ждет при красном свете, группа *B* на перекрестке I получает зеленый сигнал и начинает двигаться (ситуации *2*, *3*). Если светофор на перекрестке II отрегулирован на лидера группы *B* (т. е. с учетом того, что его средняя скорость меньше $v_{\text{г}}$), зеленый свет на перекрестке II задерживается, и передние машины группы *B* подъезжают к «хвосту» группы *A* до того, как первые автомобили *A* тронутся с места. Все осложняется еще и тем, что последние машины группы *A* должны ждать, пока до них дойдет стартовая волна.

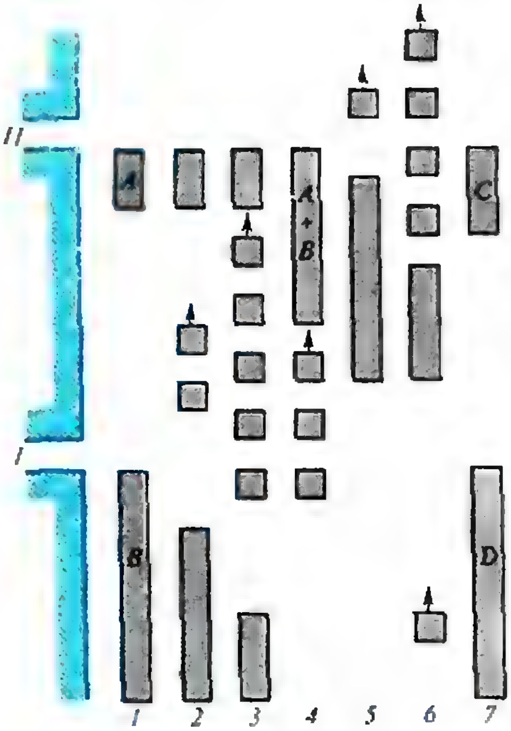


Рис. 2. При задержке зеленого света на перекрестке II группа остановленных машин может увеличиться (C+D больше A+B).

В результате *A* и *B* объединяются, образуя на перекрестке II новую группу. Она может оказаться слишком длинной, чтобы успеть полностью пройти перекресток II. Пусть *C* — хвостовая часть группы, остановленная следующим красным сигналом светофора на перекрестке II (ситуация 7 на рисунке 2). Если *C* длиннее *A*, ситуация ухудшается. Пока *C* пережидает красный свет, от перекрестка I подходит следующая группа (назовем ее *D*). Тогда объединенная из *C* и *D* группа может быть длиннее предыдущего объединения *A* и *B*, и в результате следующая хвостовая часть, оставленная на перекрестке II, будет длиннее *C*.

Если при каждом переключении сигналов новый «хвост», оставленный на перекрестке II, будет длиннее предыдущего, ситуация быстро может стать безнадежной. В конце концов «хвост» становится таким длинным, что тянется до перекрестка I. Предположим, что на этом перекрестке перед красным светофором I стоит группа машин. Получив зеленый свет, они въезжают на перекресток I. Так как эти машины не могут двигаться, пока до них не дойдет стартовая волна от перекрестка II, они находятся на том же месте, когда на перекрестке I загорается красный свет. Водители на перпендикулярной улице не могут проехать на зеленый сигнал своего светофора — перекресток I блокирован. Очереди на боковых улицах удлиняются, блокируются другие перекрестки. Затор быстро распространяется, пока весь район не превратится в одну большую стоянку.

Пробка может образоваться даже при хорошей системе светофоров. Однажды я попал в пробку в Кливленде, когда в дневные часы пик внезапно начался сильный снегопад. Поскольку улица, по которой я ехал, была скользкой, машины-лидеры группы ехали медленно. Стартовые волны также двигались медленнее обычного. Примерно за 20 минут «хвосты» вытянулись почти до предыдущих перекрестков, блокируя их. На 2 мили по моему маршруту и по пяти параллельным артериям движение почти остановилось. Я чуть-чуть продвигался только потому, что машины на внешнем конце маршрута постепенно выезжали в пригород. Как только они отделялись от группы, стартовая волна начинала степенно двигаться по двухмильному отряду и давала мне возможность продвинуться на несколько автомобильных корпусов вперед. Для поездки, которая обычно занимала пять минут, потребовалось более двух часов!

Ситуацию с пробкой, вызванной внезапным снегопадом, бывает невозможно облегчить. Однако пробки, вызываемой неожиданно длинными группами машин, можно избежать, если инженер или компьютер вмешается в нормальную последовательность смены сигналов. Допустим, что через систему дистанционных датчиков вы обнаруживаете постепенное накопление автомобилей, скажем, на перекрестке II. Пусть *A* — задержанная там группа машин в момент нашего вмешательства, а *B* — группа машин, оставленная на перекрестке I. В зависимости от того, какова длина *A*, си-

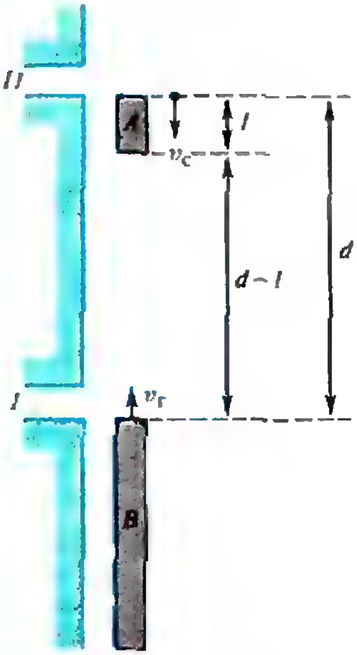


Рис. 3. Факторы, важные для определения относительных моментов включения зеленого света на соседних перекрестках I и II.

туацию можно «разрядить» двумя путями. Можно на обоих перекрестках одновременно дать зеленый свет; но при достаточно длинном «хвосте» A этот путь может и не сработать. Можно включить зеленый светофор на перекрестке II раньше, чем на перекрестке I. Какой путь выбрать? Это зависит от соотношения длины l «хвоста» A и расстояния d между перекрестками.

Если передние машины B движутся к «хвосту» A с постоянной скоростью $v_г$, для прохождения этого отрезка им требуется время $(d-l)/v_г$ (см. рис. 3). Между тем стартовая волна движется вдоль A со скоростью $v_с$, и для достижения тыла A ей требуется время $l/v_с$. Чтобы авангард группы B достиг тыла A в момент, когда те машины начинают двигаться, время между включениями зеленого сигнала светофора на перекрестках I и II должно быть

$$t=\frac{d-l}{v_г}-\frac{l}{v_с}=\frac{1}{v_г}\left(d-l\left(1+\frac{v_г}{v_с}\right)\right).$$

Если

$$\frac{l}{d}=\frac{v_с}{v_с+v_г},$$

то $t=0$ — это значит, что при таком соотношении между l и d перекрестки I и II следует «открывать» одновременно. При

$$l>d\,\frac{v_с}{v_с+v_г}$$

время t оказывается отрицательным, т. е. светофор II должен переключаться на зеленый свет на время t раньше, чем светофор I. Если же

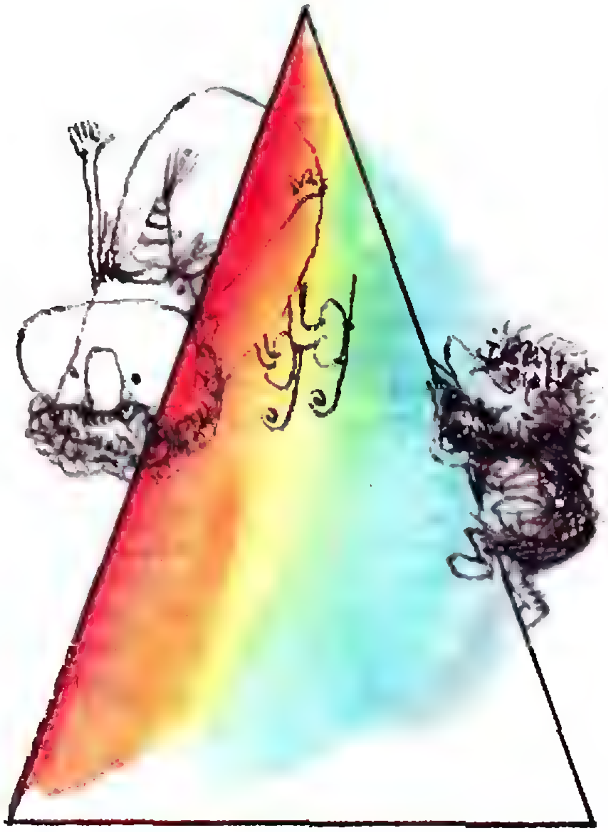
$$l<d\,\frac{v_с}{v_с+v_г},$$

то первым включается зеленый свет на перекрестке I. При типичных значениях скорости движения 10 м/с (22 мили в час) и скорости стартовой волны 5 м/с одновременное включение зеленого света необходимо при $l/d=1/3$. Если $l/d>1/3$, зеленый сигнал на перекрестке II следует включать раньше, чем на перекрестке I.

Можно сказать, что мы нашли скорость, с которой движется по улице «волна» включения зеленых сигналов. Если $l/d<1/3$, эта волна движется в направлении движения машин и с такой же, как у них, скоростью. При $l/d=1/3$ зеленый свет включается одновременно на всех перекрестках. Если $l/d>1/3$, «зеленая волна» движется в направлении, противоположном движению машин.

Этот результат — только приблизительная оценка, так как в вычислениях игнорируется три факта. Передние машины группы B начинают движение, набирая скорость после остановки. Их водители должны видеть, что «хвост» A начал двигаться, заранее, до того, как они приблизятся к нему, иначе они снизят скорость или остановятся из предосторожности. Последние машины A, разумеется, должны набрать скорость до подхода машин B. Надеюсь, вы получите удовольствие от точного расчета с учетом этих дополнительных факторов.

Как бы вы спроектировали систему светофоров для оптимизации транспортных потоков на улице с двухсторонним движением? Есть ли способ предотвратить остановки машин на такой улице? Можете ли вы смоделировать на компьютере движение групп машин через систему светофоров? Если да, то вы сможете исследовать проблему пробок, не попадая в них.



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «О двух мерах взаимодействия» предназначена девятиклассникам, заметка «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — десятиклассникам, «О чем рассказал спектр атома водорода» — одиннадцатиклассникам.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

О двух мерах взаимодействия

Известно, что движение тела изменяется при действии на него других тел. Характеристикой, или, как говорят, *мерой взаимодействия* является сила. Она и входит в уравнение движения, выражающее второй закон Ньютона. Чем интенсивнее взаимодействие тел, тем больше его результат — ускорения каждого из них.

Но сила — не единственная мера взаимодействия. Есть и другая, не менее важная его характеристика. Это потенциальная энергия взаимодействия. Сила и потенциальная энергия как будто бы мало похожи одна на другую. Одно различие между ними сразу бросается в глаза: сила — величина векторная, потенциальная энергия — скалярная. Тем не менее между двумя этими величинами, характеризующими одно и то же взаимодействие, *должна существовать и действительно существует* связь. О ней и пойдет речь в этой заметке.

Гравитационное взаимодействие. Пусть тело массой m движется вниз по гладкой наклонной плоскости с углом наклона α. Направим координатную ось X вдоль плоскости, как это показано на рисунке 1, и рассмотрим движение тела на участке между точками с координатами x_1 и x_2.

На тело действуют сила тяжести и сила реакции опоры, но проекция последней на ось X равна нулю, так что *она нас не будет интересовать*. Проекция же силы $\vec{F}=m\vec{g}$ на ось X равна

$$F_x = -mg\sin\alpha. \qquad (1)$$

Потенциальная энергия тела (точнее, системы «тело — Земля») в начальной точке равна mgh_1, а в конечной она равна mgh_2, где h_1 и h_2 — высоты, отсчитываемые от некоторого условно выбранного нулевого уровня. Таким образом, при переме-

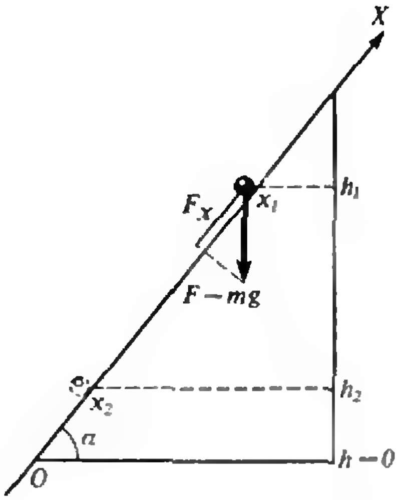


Рис. 1.

щении тела из первого положения во второе потенциальная энергия E_p изменилась на величину

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1 = -mg(h_1 - h_2).$$

Координата x тела при этом изменилась на величину

$$\Delta x = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2).$$

Из рисунка 1

$$\frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} = \sin\alpha.$$

Следовательно,

$$\Delta E_p = -mg(x_1 - x_2)\sin\alpha = mg\Delta x\sin\alpha. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (2) и (1), получаем

$$F_x = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}.$$

Это значит, что проекция вектора силы $\vec{F}$ на ось X равна взятому с противоположным знаком изменению потенциальной энергии, приходящемуся на единицу перемещения вдоль оси X. Крутая наклонная плоскость отличается от пологой тем, что на каждую единицу пути вдоль нее приходится большее изменение потенциальной энергии, чем вдоль пологой. По крутому склону горы труднее взбираться потому, что каждый шаг по нему связан с бо́льшим изменением потенциальной энергии, чем на пологом склоне.

Читатель сам легко сможет убедиться в том, что для проекции вектора силы на ось Y получается аналогичная формула: $F_y = -\frac{\Delta E_p}{\Delta y}$. А если при движении тела изменяется и координата z (тело движется не по плоскости, а в пространстве), то и для проекции F_z можно получить подобную же формулу: $F_z = -\frac{\Delta E_p}{\Delta z}$.

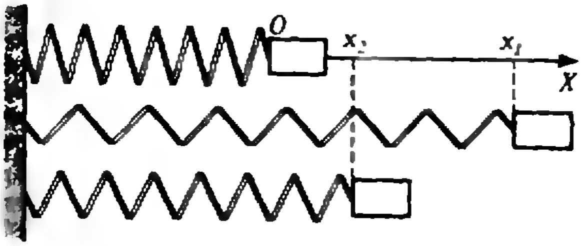


Рис. 2

Упругое взаимодействие. Рассмотрим теперь случай, когда тело движется под действием силы упругости, например, пружины. В верхней части рисунка 2 показана недеформированная пружина с прикрепленным к ней телом. Направим координатную ось X вдоль оси пружины, а начало координат свяжем с правым концом недеформированной пружины.

Пусть теперь пружина растянута так, что координата ее конца стала x_1. На тело действует сила упругости, равная $-kx_1$. Допустим, что под действием этой силы тело передвинулось в положение x_2, где сила упругости стала равной $-kx_2$. Но мы будем считать, что на тело всюду действует постоянная сила, равная среднему значению $-k\frac{x_1 + x_2}{2}$, так что проекция силы на ось X равна

$$F_x = -k\frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (3)$$

А какова потенциальная энергия? В начальном положении она равна $kx_1^2/2$, а в конечном — $kx_2^2/2$. Значит, изменение потенциальной энергии

$$\Delta F_p = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{k}{2}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2). \qquad (4)$$

Сравнивая равенства (4) и (3), находим, как и в случае силы тяжести,

$$F_x = \frac{\Delta E_p}{x_1 - x_2} = -\frac{\Delta E_p}{\Delta x}.$$

И здесь изменение потенциальной энергии на единицу перемещения вдоль координатной оси равно проекции силы на эту ось. «Сильная» пружина (с большой жесткостью k)

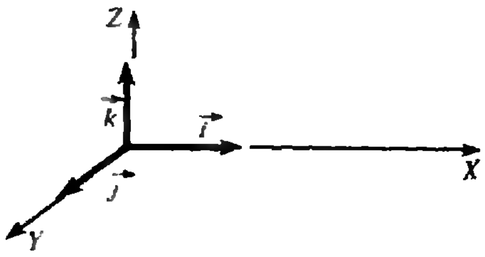


Рис. 3.

отличается от «слабой» (с малой жесткостью) тем, что на единицу длины перемещения приходится большее изменение потенциальной энергии. «Сильная» пружина подобно крутому склону, «слабая» — склону пологому.

Новое слово — градиент. В формулах $F_x=-\Delta E_p/\Delta x$, $F_y=-\Delta E_p/\Delta y$ и $F_z=-\Delta E_p/\Delta z$ слева стоят проекции вектора силы $\vec{F}$. Отсюда следует, что и величины $\Delta E_p/\Delta x$, $\Delta E_p/\Delta y$ и $\Delta E_p/\Delta z$ тоже должны быть проекциями какого-то вектора, хотя потенциальная энергия E_p — величина скалярная. Что это за вектор?

Проведем следующую чисто математическую операцию. Направим мысленно вдоль трех осей координат X, Y и Z три вектора, по модулю равных единице (их так и называют единичными векторами); обозначим их $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (рис. 3). Умножив проекции вектора $\vec{F}$ на соответствующие единичные векторы, получим три векторные величины — $F_x\vec{i}$, $F\vec{j}$ и $F_z\vec{k}$, их называют *составляющими* вектора $\vec{F}$ по осям координат. Вектор $\vec{F}$ выражается через свои составляющие так:

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}.$$

Но можно написать и так:

$$\vec{F}=-\left(\frac{\Delta E_p}{\Delta x}\vec{i}+\frac{\Delta E_p}{\Delta y}\vec{j}+\frac{\Delta E_p}{\Delta z}\vec{k}\right).$$

Величина, стоящая в скобках в правой части равенства,— это вектор. Называется он градиентом потенциальной энергии и обозначается символом grad, так что

$$\vec{F}=-\operatorname{grad} E_p. \qquad (5)$$

В этом и состоит связь между двумя мерами взаимодействия — силой и потенциальной энергией: *сила равна взятому с противоположным знаком градиенту потенциальной энергии.*

Как направлен этот странный вектор? Из формулы (5) видно, что направлен он в сторону увеличения потенциальной энергии. Если, например, речь идет о силе тяжести, то потенциальная энергия растет по мере подъема тела. Туда, по вертикали вверх, и направлен вектор $\operatorname{grad} E_p$. Можно, конечно, сказать и иначе: сила тяжести направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии. В общем случае вектор градиента потенциальной энергии всегда указывает направление наиболее интенсивного изменения этой величины.

Итак... Мы нашли связь между двумя мерами взаимодействия для тех случаев, когда оно проявляется в виде тяготения и упругости. Но существует и такое механическое взаимодействие, которое проявляется в виде трения. Для него единственная мера, единственная характеристика — сила (сила трения). С этой силой потенциальная энергия не связана, потому что сила трения не зависит от координат, в то время как потенциальная энергия — функция координат.

Таким образом, в механике используются обе меры взаимодействия — сила и потенциальная энергия, но сила пригодна во всех случаях, а потенциальная энергия — нет.

Заметим в заключение, что в квантовой механике, описывающей явления микромира, мерой взаимодействия служит исключительно потенциальная энергия. Силы в уравнения квантовой механики не входят.

А. Кикоин

О ледниках, скороварках и теореме Карно

Если спросить у школьника, почему в морозный день коньки хорошо скользят по льду, то скорее всего можно услышать простой и очевидный ответ: «Конек трется о лед, между ними образуется тонкая водяная смазка, она и обеспечивает скольжение». Однако школьнику, более искушенному в физике, такой ответ покажется слишком простым и потому неинтересным. «Нет,— скажет он,— дело здесь не в трении, а в давлении конька на лед. При повышении давления температура плавления льда становится меньше 0 °С, а лед под коньком тает.» Что же, в принципе и такой

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Многочлены

В ряду важнейших математических понятий одно из первых мест занимают многочлены. Многочленом от одной переменной, как известно, называется функция вида $P_n(x)=a_nx^n + a_{n-1}\times\times x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$. Число n называется степенью многочлена. Если рассмотреть совокупность всех многочленов, то их свойства полностью аналогичны свойствам целых чисел. Действительно, сумма, разность и произведение многочленов всегда являются многочленами. При этом выполняются коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы. Отношение двух многочленов уже не всегда будет многочленом, и для них, как и для чисел, имеет место «деление с остатком», т. е. для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, где $n \geqslant m$, существует многочлен $D_{n-m}(x)$ степени $n-m$ — частное и многочлен $R_k(x)$ степени $k < m$ — остаток, для которых выполняется равенство $P_n(x)=Q_m(x)\times\times D_{n-m}(x)+R_k(x)$. В том случае, когда $Q(x)=x-a$, остаток $R_0(x)$ будет иметь нулевую степень, т. е. будет числом. В конце XVIII века французский математик Э. Безу (1730—1783) обнаружил, что этот остаток равняется $P(a)$.

Аналогию многочленов с целыми числами можно было бы продолжить. Но многочлены имеют более сложную структуру, чем целые числа. Одной из важнейших характеристик многочлена является набор чисел x, для которых он обращается в нуль,— корни многочлена. Корни многочленов первой степени умели находить еще писцы Древнего Египта и Древнего Вавилона. Вавилоняне умели находить и корни многочленов второй степени, т. е. умели решать квадратные уравнения.

Находить корни многочленов третьей степени, т. е. решать кубические уравнения, люди научились лишь в XVI веке. История открытия формулы корней кубического уравнения — одна из самых ярких и драматических страниц в истории математики. Нетрудно показать, что простой заменой переменной любое кубическое уравнение можно привести к виду $x^3+px=q$. Для случая положительных p и q эту задачу решил Ш. Ферро (1465—1526). Однако в то время отрицательные числа еще не вошли в обиход математиков, и ему предстояло научиться решать уравнения $x^3+q=px$, $x^3+px+q=0$ и $x^3=px+q$. Ш. Ферро сообщил свой метод зятю и ученику А. Фиоре, и тот вызвал на математический турнир по решению уравнений третьей степени замечательного итальянского математика Никколо Тарталью (1499—1557). За несколько дней до начала турнира Тарталья нашел общий метод решения кубических уравнений и во время соревнований за два часа решил все 30 предложенных ему задач, его соперник не смог решить ни одной из 30 задач, предложенных ему Тартальей.

Найденная Тартальей формула решения уравнения $x^3+px+q=0$

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

получила название «формулы Кардано» в честь другого итальянского математика Дж. Кардано (1501—1576), который узнал ее от Н. Тартальи и, вопреки договоренности, опубликовал в своей книге. Вскоре один из учеников Дж. Кардано Л. Феррари (1522—1565) нашел формулу для решения уравнений четвертой степени.

И лишь еще через два века в работах выдающихся математиков Ж. Лагранжа (1736—1813), П. Руффини (1765—1822) и Н. Абеля (1802—1829) было показано, что нет общей формулы для нахождения корней уравнений пятой и более высоких степеней. А в работах Э. Галуа (1811—1832) был найден метод, с помощью которого для любого многочлена можно определить, выражаются ли его корни через радикалы.

Дальнейшее развитие теории многочленов связано с введением в математику комплексных чисел. В 1799 году выдающийся немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) доказал теорему, которая по праву называется «основной теоремой алгебры»: *всякий многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень (вещественный или комплек-*

сный). Отсюда и из теоремы Безу следует, что уравнение n-ой степени имеет ровно n корней (среди них могут быть и кратные).

Еще в XVI веке французский математик Ф. Виет (1540—1603) обнаружил соотношения между корнями многочлена $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ и его коэффициентами:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1,$$
$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+$$
$$\ldots+x_{n-1}x_n=a_2,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^na_n.$$

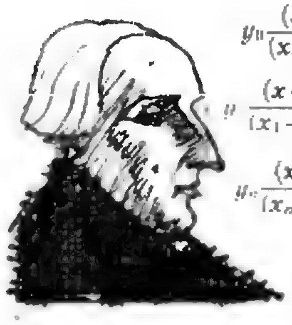
Эти соотношения, называемые формулами Виета, верны и в том случае, если некоторые (или все) корни являются комплексными числами. Формулу Виета для квадратного трехчлена x^2+px+q вы знаете:

$$x_1+x_2=-p,$$
$$x_1x_2=q.$$

Многочлены — это самые простые и наиболее изученные функции в математике. Их легко дифференцировать и интегрировать, прослеживать ход их поведения. Очень часто в поисках закономерности, связывающей значения неизвестной функции от некоторого аргумента, предполагают, что такой функцией является многочлен. Этому способствует то обстоятельство, что соответствующий многочлен всегда можно написать. Его в свое время предложил И. Ньютон (1643—1727), и он получил название «интерполяционный многочлен Ньютона». В заданных точках x_0, x_1, ..., x_n этот многочлен принимает заданные значения y_0, y_1, ..., y_n.

Вот этот многочлен

$$y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}+$$
$$y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}+\ldots$$
$$y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}.$$



Нетрудно заметить, что степень этого многочлена равна n.

Если мы хотим исследовать некоторую функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0, то ее очень полезно приблизить многочленом

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+$$
$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

предложенным английским математиком Б. Тейлором (1685—1731).

Вопросами приближения функции, заданной на отрезке, при помощи многочленов, для которых значение функции отличается от значения многочлена в каждой точке не более чем на заданное число, например на 0,001, занимались выдающиеся математики, в частности К. Вейерштрасс (1815—1897) и П. Л. Чебышёв (1821—1894). Широко известны «многочлены Чебышёва». Это многочлены вида $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, значения которых наименее отклоняются от нуля (обратите внимание, что коэффициент при x^n равен 1). Чебышёв доказал, что такими многочленами являются многочлены

$$T_n(x)=$$
$$=\frac{1}{2}\cos(n\arccos x).$$

В математике рассматриваются также многочлены от нескольких переменных.

Так, многочлены первой степени от двух переменных описываются выражением $ax+by+c$, а многочлены второй степени от двух переменных — выражением $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$. Если приравнять это выражение к нулю, то получим уравнение кривой второго порядка. К их числу относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

ответ имеет право на существование — температура плавления льда действительно понижается при увеличении внешнего давления. Но физика — наука количественная, и поэтому, чтобы выяснить, имеет ли это физическое явление какое-нибудь отношение к катанию на коньках, необходимо сделать численные оценки.

Прежде всего обсудим, что такое температура плавления (или точка таяния) льда, чем она интересна. Как известно, при достижении этой температуры лед перестает нагреваться, и поглощаемое им тепло целиком идет на таяние льда. Если же тепло перестанет поступать, оставшийся лед и вода будут находиться в тепловом равновесии. Таким образом, температура плавления — это температура равновесия между водой и льдом при данном давлении. Так, при давлении 1 атм она равна 0 °С. А на сколько изменится эта температура при увеличении давления до 1,01 атм?

Оказывается, рассчитать смещение точки плавления льда нам поможет... теорема Карно. Да, да, та самая теорема, в которой идет речь о максимальном КПД тепловых машин. «При чем же здесь точка плавления льда?» — спросите вы. Дело в том, что Карно доказал теорему о максимальном КПД циклической тепловой машины любого типа, независимо от того, что в нее заложено в качестве рабочего тела: идеальный газ, тающий лед или мыльная пленка. Необходимо соблюсти лишь одно условие: машина должна получать тепло только при температуре T_1, а отдавать — только при температуре T_2 (на промежуточных этапах теплообмен не должен происходить). Максимальный КПД такой машины (ее называют идеальной машиной Карно) реализуется при медленном, обратимом режиме ее работы и, независимо от рабочего вещества машины, равен

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}, \qquad (1)$$

где A — работа машины за цикл, Q_1 — количество теплоты, полученное машиной от нагревателя.

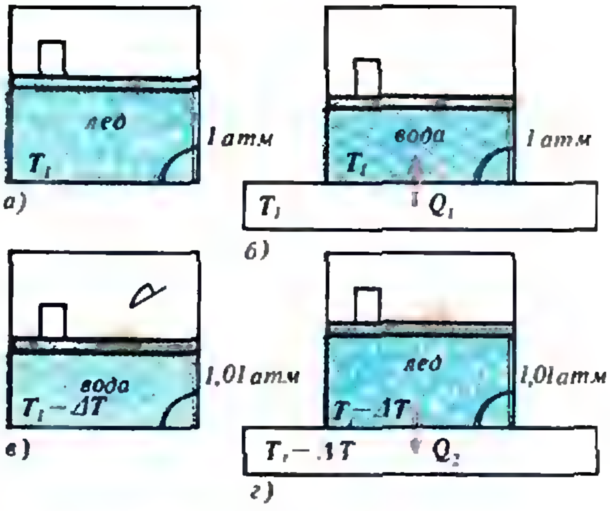


Рис. 1.

Давайте представим нашу воображаемую машину Карно в виде цилиндра с поршнем (рис. 1, *а*). Заложим в нее лед массой m под давлением $p_1=1$ атм при температуре $t_1=0$ °С ($T_1=273$ К). Постоянное давление будем обеспечивать грузом, лежащим на поршне. Чтобы подчеркнуть, что вода и лед находятся в равновесии, в уголке сосуда мы изобразили небольшое количество воды.

Опишем по этапам, как будет происходить один цикл в нашей машине Карно.

1) Поставим цилиндр на нагреватель (термостат), имеющий температуру T_1, и передадим системе количество теплоты $Q_1=\lambda m$, необходимое для плавления всего льда (λ — удельная теплота плавления). При этом поршень с грузом немного опустится (рис. 1, *б*), так как объем льда $V_л=m/\rho_л$ больше, чем объем воды $V_в=m/\rho_в$. На графике в координатах p, V (рис. 2) этому процессу соответствует линия *1—2*.

2) Снимем сосуд с термостата и теплоизолируем его (рис. 1, *в*), после чего будем медленно увеличивать давление до тех пор, пока оно не станет равным $p_1+\Delta p=1{,}01$ атм (для этого будем потихоньку подсыпа́ть на поршень песочек). При этом температура системы понизится до значения $T_2=T_1-\Delta T$, равного температуре плавления льда при давлении 1,01 атм.

3) Поставим сосуд на термостат с температурой T_2 и будем отбирать

тепло до тех пор, пока вся вода снова не замерзнет (рис. 1, *г*). На графике (см. рис. 2) этому процессу соответствует линия *3—4*.

4) Осталось только теплоизолировать сосуд и медленно снять с поршня весь песок — и мы вернемся к начальному состоянию.

Теперь проведем расчеты. Работу за цикл легко найти из графика в координатах p, V — она равна площади фигуры, ограниченной графиком:

$$A=\Delta p(V_л-V_в)=\Delta p\left(\frac{m}{\rho_л}-\frac{m}{\rho_в}\right).$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, равно

$$Q_1=\lambda m.$$

Поэтому из теоремы Карно (1) получаем

$$\Delta p\left(\frac{m}{\rho_л}-\frac{m}{\rho_в}\right)\Big/(\lambda m)=\Delta T/T_1,$$

или, для любой температуры $T_1=T$,

$$\Delta T=\Delta p\,\frac{T}{\lambda}\left(\frac{1}{\rho_л}-\frac{1}{\rho_в}\right). \qquad (2)$$

Это соотношение называют уравнением Клапейрона — Клаузиуса. Подставив в него численные значения, получим, что при $\Delta p=0{,}01$ атм $\Delta T=9{,}2\cdot10^{-5}$ К. Видно, что эффект очень слабый. Для изменения температуры плавления на 1 К, например, придется создать давление ≈ 133 атм. Вернемся, однако, к нашим конькам.

Давление человека в коньках можно оценить как $p=mg/S\approx 600$ Н/2 см^2$=30$ атм. Тогда смещение точки плавления под коньками составит $\approx 0{,}3$ К, что, конечно, очень мало в морозный день. Так что прав оказался «наивный» школьник: смазка образуется в первую очередь за счет трения. А какова же в таком случае роль коньков? Ведь они все-таки нужны! Не обсуждая подробно «физику катания», отметим один очевидный факт: для смазки поверхности конька, площадь которой мала, нужно растопить гораздо меньше льда, чем для смазки подошвы ботинка.

Встречаются ли в окружающей нас действительности такие давления, при которых происходит заметное смещение точки плавления льда? Безусловно, встречаются. Приведем лишь один пример — преодоление препятствий сползающим по склону тяжелым ледником. В том месте, где ледник упирается в кусок скалы или камень, создается очень большое давление, и лед начинает подтаивать. Ледник как бы оплывает камень в своем движении, пропуская его сквозь себя. После «снятия» давления вода на леднике снова замерзает.

«Это, конечно, интересно, но уж очень экзотично,— скажете вы.— Неужели это все, чего мы достигли?» Нет, конечно. Посмотрим внимательно на наш результат. Мы научились вычислять, как меняется температура равновесия двух фаз — жидкость (вода) и твердое тело (лед) — при изменении внешнего давления. Самое замечательное то, что вместо этих фаз можно взять любые другие, лишь бы они находились в тепловом равновесии друг с другом. Например, жидкость — пар, металл — расплав, твердое тело — пар и т. д. Другими словами, уравнение Клапейрона — Клаузиуса справедливо не только для плавления, но и для любого другого процесса перехода вещества из одной фазы в другую (испарение, сублимация и пр.). В формулу (2) тогда войдут плотности вещества в этих фазах и соответствующая удельная теплота фазового превращения.

В качестве примера рассмотрим переход вода — пар.

Как вы знаете, пар, находящийся в равновесии с водой, называют насыщенным. Зависимость между температурой насыщенного пара и его давлением используется для расчета влажности воздуха, определения точ-

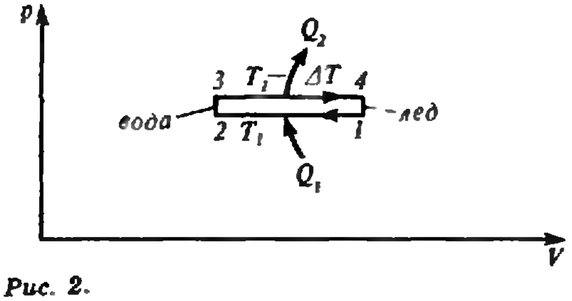


Рис. 2.

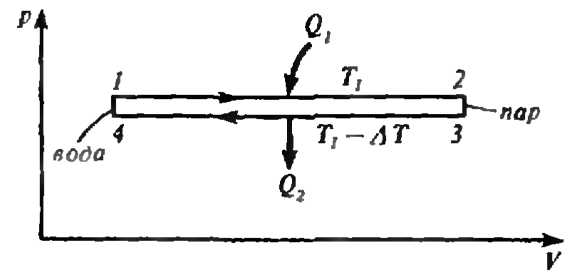


Рис. 3.

ки росы и т. д. Кроме всего прочего, температура насыщенного пара (температура равновесия вода ⇄ пар) определяет точку кипения воды при данном внешнем давлении. Так, при давлении 1 атм температура кипения равна 100 °С (373 К). С другой стороны, хорошо известно, что давление насыщенного пара растет при увеличении температуры. На этом свойстве — росте температуры кипения с давлением основан, в частности, принцип работы скороварки, где продукты готовятся при большем давлении и большей температуре.

В чем же различие между процессами таяния льда и испарения воды? Почему в одном случае температура равновесия фаз с ростом давления уменьшается, а в другом увеличивается? Дело вот в чем. Когда лед поглощает тепло и плавится, объем системы уменьшается (плотность воды больше плотности льда), а когда вода поглощает тепло и испаряется, объем системы увеличивается (плотность насыщенного пара меньше плотности воды). Однако график цикла в координатах p, V и в том, и в другом случае должен идти по часовой стрелке — иначе работа машины за цикл будет отрицательной. Сравните ход обоих графиков (см. рис. 2 и 3) и вы поймете, почему в одном случае большему давлению соответствует меньшая температура, а в другом — наоборот. Попробуйте, кроме того, продумать последовательность действий, которые надо совершить с сосудом, содержащим воду и пар, чтобы получился изображенный на графике цикл Карно.

Мы же завершим наш рассказ численной оценкой смещения точки кипения при увеличении давления от 1 атм до 1,01 атм. Для этого в формуле (2) заменим удельную теплоту плавления льда на удельную теплоту парообразования воды r, а плотность льда — на плотность насыщенного пара $\rho_п$:

$$\Delta T=\Delta p\,\frac{T}{r}\left(\frac{1}{\rho_п}-\frac{1}{\rho_в}\right).$$

Плотность насыщенного водяного пара при $T=373$ К и $p=1$ атм найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\rho_п=\frac{pM}{RT}\approx 0{,}58\ \text{кг/м}^3.$$

Подставляя численные значения, для $\Delta p=0{,}01$ атм получаем $\Delta T\approx 0{,}28$ К.

Как видите, в этом случае эффект довольно заметный: чтобы увеличить температуру кипения на 1 К, надо поднять давление всего на 0,035 атм, что вполне реально даже при обычных условиях.

А. Черноуцан

О чем рассказал спектр атома водорода

Как известно, наибольшей простотой отличается излучение изолированных атомов, например атомов одноатомных газов или паров некоторых металлов. Такие спектры представляют собой набор дискретных спектральных линий разной интенсивности, соответствующих разным длинам волн. Их называют линейчатыми спектрами.

При свечении газов или паров, молекулы которых состоят из нескольких атомов возникают полосатые спектры — совокупности групп спектральных линий. Наконец, излучение, испускаемое нагретыми жидкостями и твердыми телами, обладает непрерывным спектром, который содержит все возможные длины волн.

Кроме спектров испускания, существуют и спектры поглощения. Пропустим, например, сквозь пары натрия свет от источника, дающего непрерывный спектр. Тогда в желтой области непрерывного спектра возникают две темные линии — линии спектра поглощения натрия. Очень важным является свойство обратимости спектральных линий: атомы поглощают свет, содержащий те спектральные линии, которые эти же атомы испускают. Замечательно, что атом каждого химического элемента создает линейчатый спектр с только ему одному присущим сочетанием спектральных линий, расположенных в различных местах шкалы электромагнитных волн — как в ее видимой области, так и в соседних невидимых ультрафиолетовой и инфракрасной областях. Подобно тому как на Земле нет двух людей с одинаковыми лицами, в природе нет двух химических элементов, атомы которых обладали бы одинаковыми спектрами.

Оказывается, линейчатые спектры очень тесно связаны с поведением так называемых валентных электронов атома. Дело в том, что электроны в атоме располагаются вокруг ядра слоями, или оболочками, где электроны имеют различные энергии. Кроме того, в разных оболочках содержится не одинаковое число электронов. В самой далекой от ядра, так называемой внешней энергетической оболочке, у разных атомов имеется различное число электронов — от одного до восьми. Например, у атома натрия только один электрон находится во внешней оболочке, у атома углерода таких «внешних» электронов четыре, у хлора — семь. Химики называют внешние электроны валентными — ими определяется валентность атомов, т. е. их способность вступать в химические соединения с другими атомами. Физики называют внешние электроны атомов оптическими — этими электронами определяются все оптические свойства атомов и в первую очередь их спектры.

Линии Бальмера в спектре атома водорода. Атом водорода — простейший из атомов, он состоит всего из одного протона (ядра) и одного электрона. Поэтому линейчатый спектр атома водорода тоже наиболее прост. Именно с изучения этого спектра начала свой путь теоретическая спектроскопия — учение о спектрах атомов, молекул, веществ в различных агрегатных состояниях.

Впервые линии в спектре водорода наблюдал и подробно описал немецкий физик И. Фраунгофер. Это были знаменитые теперь фраунгоферовы темные линии поглощения в солнечном спектре. Они возникают, когда излучение Солнца проходит сквозь газы, окружающие его хромосферу. Вначале Фраунгофер обнаружил всего 4 линии, которые впоследствии стали называться линиями H_α, H_β, H_γ и H_δ.

В 1885 году И. Бальмер, учитель физики средней школы в городе Базеле (Швейцария), тщательно проанализировал снимки, полученные Фраунгофером и его последователями, и заметил следующее. Если ввести некоторое (как его назвал Бальмер, основное) число k, то длины волн линий H_α, H_β, H_γ и H могут быть выражены таким образом:

$$\lambda_{H\alpha}=9/5\,k,\ \lambda_{H\beta}=4/3\,k,$$
$$\lambda_{H\gamma}=25/21\,k,\ \lambda_{H\delta}=9/8\,k.$$

Умножив на 4 числители и знаменатели в дробях 4/3 и 9/8, Бальмер получил удивительную закономерность: числители в выражениях длин волн всех линий можно представить как последовательность квадратов чисел —

$$3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,$$

а знаменатели — как последовательность разностей квадратов —

$$3^2-2^2,\ 4^2-2^2,\ 5^2-2^2,\ 6^2-2^2.$$

Таким образом, Бальмеру удалось записать одну формулу для длин волн четырех линий:

$$\lambda=k\,\frac{n^2}{n^2-2^2},$$

где $n=3$, 4, 5 и 6 соответственно для линий H_α, H_β, H_γ и H. Если λ измерять в ангстремах (1 Å$=10^{-10}$ м), то число k по Бальмеру оказывается равным 3645 Å.

Вскоре были обнаружены другие линии в спектре поглощения водорода (сейчас известно около 30 линий только в видимой области спектра), и их длины волн тоже «укладывались» в формулу Бальмера. О том, с какой точностью это получается, судите по таблице, где приведены результаты наблюдения и вычисления длин волн (в ангстремах) первых семи линий, для которых число n изменяется от 3 до 9:

	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
$\lambda_{\text{набл}}$	6562,80	4861,33	4340,47	4101,74	3970,06	3889,00	3835,38
$\lambda_{\text{вычисл}}$	6562,80	4861,38	4340,51	4101,78	3970,11	3889,09	3835,43

Эти цифры показывают, что в спектроскопии вычисления производятся с необычайной точностью. До появления спектроскопических расчетов считалось, что наибольшую точность имеют вычисления в астрономии. Однако оказалось, что точность вычислений в спектроскопии не только не уступает, но в ряде случаев и превосходит астрономическую точность.

Бальмер надеялся, что спектры других атомов, более сложных, чем водород, тоже можно будет описывать формулами, похожими на открытую им формулу. По его мнению, отыскание «основного числа» для атомов других элементов будет очень сложной задачей. К счастью для всей атомной физики, и особенно для спектроскопии, Бальмер ошибся. Величина k вошла в спектральные формулы излучения атомов всех химических элементов (правда, сами формулы отличаются от бальмеровской целым рядом поправочных членов).

Постоянная Ридберга. Полный спектр атома водорода. В 1890 году шведский физик-спектроскопист Ридберг записал формулу Бальмера в «перевернутом» виде», для величины $N=1/\lambda$. Она называется волновым числом и показывает, какое число длин волн в вакууме укладывается на единичной длине. Волновое число легко связать с частотой света ν:

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=cN,$$

где c — скорость света. В спектроскопии всегда имеют дело с волновыми числами, а не с частотами. Это связано с тем, что длины волн, а следовательно, и волновые числа, можно определять опытным путем с гораздо большей точностью, чем частоты. (Заметим, что иногда волновое число обозначают той же буквой ν, что и частоту колебаний. Правда, из контекста обычно бывает ясно, о чем именно идет речь, но порой это вносит ненужную путаницу.)

«Перевертывая» формулу Бальмера, получаем для волнового числа

$$N=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{k}\,\frac{n^2-4}{n^2}=\frac{4}{k}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Обозначим постоянную величину $4/k$ через R (первая буква в фамилии Ридберга). Тогда окончательно формулу Бальмера можно записать в том виде, в каком она обычно используется:

$$N=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ \text{где}\ n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

Формула Бальмера показывает, что с увеличением числа n волновые числа «соседних» спектральных линий имеют все более близкие значения (разность между ними уменьшается) — происходит сближение спектральных линий. Все спектральные линии, волновые числа которых вычисляются по формуле Бальмера, образуют спектральную серию Бальмера. Наибольшее число спектральных линий серии Бальмера (37 линий) было обнаружено в спектре солнечной хромосферы и протуберанцев (облаках раскаленных газов, образующихся на Солнце и выбрасываемых из него). Постоянная Ридберга была с большой точностью измерена на линиях серии Бальмера. Она оказалась равной $R=109677{,}581\ \text{см}^{-1}$.

Удивительное совпадение результатов измерений длин волн линий спектра водорода в видимой области спектра с вычислениями по формуле Бальмера побудило исследователей изучить спектр водорода в других областях. Эти поиски увенчались успехом. Кроме серии Бальмера, в спектре атома водорода были обнаружены другие серии, причем все они описывались спектральными формулами, аналогичными формуле Бальмера.

Так, в далекой ультрафиолетовой части спектра — в области длин волн ~1200 Å и менее — Лайман открыл серию линий, называемую теперь серией Лаймана:

$$N=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ \text{где } n=2, 3, 4, \ldots$$

В инфракрасной части спектра обнаружилось три серии спектральных линий: в области длин волн от 10 000 до 20 000 Å — серия Пашена, описываемая формулой

$$N=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ \text{где } n=4, 5, 6, \ldots,$$

в области длин волн, близких к 40 000 Å,— серия Брэккета

$$N=R\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ \text{где } n=5, 6, \ldots,$$

наконец, в очень далекой инфракрасной области, вблизи 75 000 Å — серия Пфунда

$$N=R\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{n^2}\right),\ \text{где } n=6, 7, \ldots$$

Таким образом, все спектральные линии, обнаруженные у атома водорода в разных частях спектра, можно охватить одной общей формулой — формулой Бальмера — Ридберга

$$N=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

В этой формуле для каждой серии линий число m имеет постоянное значение от 1 до 5: $m=1, 2, 3, 4, 5$, а внутри данной серии число n принимает ряд возрастающих численных значений, начиная от $m+1$.

Б. Яворский

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. На стержень действуют две параллельные силы, равные $F_1=10$ Н и $F_2=25$ Н и направленные в противоположные стороны. Определите точку приложения и величину силы, уравновешивающей силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, если их точки приложения расположены на расстоянии $l=1{,}5$ м друг от друга.

2. К гвоздю, вбитому в стенку, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, касаясь стенки, как показано на рисунке 1. Радиус оси катушки $r=0{,}5$ см, радиус ее щечек $R=10$ см. Коэффициент трения между стенкой и катушкой $\mu=0{,}1$. При каком угле α между нитью и стенкой катушка висит неподвижно?

3. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены шарики массой m каждый. В третьей вершине находится шарик массой $2m$. Найдите положение центра масс этой системы.

4. Однородная тонкая пластинка имеет форму круга радиусом R, в котором вырезано круглое отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки. Где находится ее центр тяжести?

5. Сосуд с водой уравновешен на весах. Сохранится ли равновесие, если опустить палец в воду, не касаясь при этом дна сосуда?

10 класс

6. Сопротивление резистора R рассчитывают по показаниям вольтметра и амперметра, включенных так, как показано на рисунке 2, причем при расчете не вносят поправок на внутренние сопротивления приборов. Какова будет погрешность при измерении сопротивления

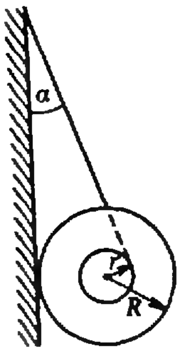


Рис. 1.

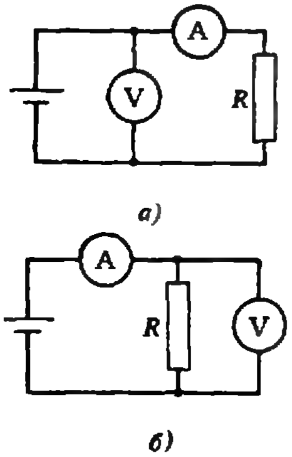


Рис. 2.

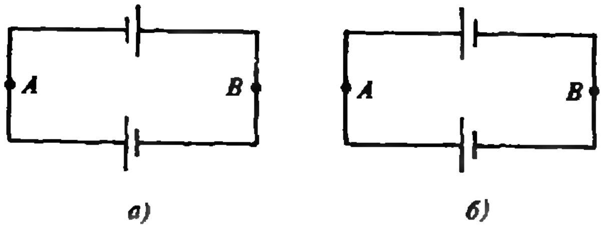


Рис. 3.

резистора в двух случаях: $R_1=1$ Ом и $R_2=0{,}5$ кОм? Сопротивления амперметра и вольтметра равны соответственно $R_а=0{,}1$ Ом и $R_в=1$ кОм.

7. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на реостат. Постройте графики изменения тока, напряжения, полезной мощности, полной мощности и КПД при изменении сопротивления реостата R.

8. Два одинаковых аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r соединены так, как показано на рисунке 3. Найдите разность потенциалов между точками A и B. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

9. От источника с напряжением $U=750$ В необходимо подвести к потребителю мощность $P=5$ кВт. Какое сопротивление может иметь линия передачи, чтобы потери мощности в ней не превышали 10 % от мощности, дошедшей до потребителя?

10. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В. Какую механическую работу совершает мотор за одну секунду при протекании по его обмотке тока $I_1=2$ А, если при полном затормаживании якоря в цепи течет ток $I_2=3$ А?

11 класс

11. Сколько процентов от скорости света должна составлять скорость протона, движущегося в ускорителе, чтобы увеличение его массы составило 25 %?

12. При взаимодействии ядер алюминия ${}^{27}_{13}$Al с x-частицами образуются ядра изотопа магния ${}^{27}_{12}$Mg и ${}_1y$-частицы. При взаимодействии же y-частиц с ядрами алюминия ${}^{27}_{13}$Al образуются ядра изотопа магния ${}^{24}_{12}$Mg и z-частицы. Какие широко известные частицы x, y, z участвуют в этих ядерных реакциях?

13. При распаде π-мезона на два фотона зарегистрировано, что эти фотоны разлетаются под углами $\alpha=30°$ и $\beta=60°$ к направлению движения мезона. С какой скоростью двигался мезон до распада?

14. Протон, летевший со скоростью $v_0=7{,}5\cdot10^4$ м/с, сталкивается с покоящимся невозбужденным атомом водорода. После столкновения протон летит в том же направлении, но со скоростью $v_1=1{,}5\cdot10^4$ м/с; атом же переходит в состояние с более высокой внутренней энергией. Какова длина волны фотона, который может испустить атом, возвращаясь в невозбужденное состояние?

15. Какая энергия выделяется при термоядерной реакции

$${}^2_1\text{H}+{}^3_1\text{H}\to{}^4_2\text{He}+{}^1_0n?$$

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 мая 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

19. На плоскости расположен равносторонний треугольник ABC. Укажите все такие точки M этой плоскости, для которых оба треугольника ABM и ACM — равнобедренные.

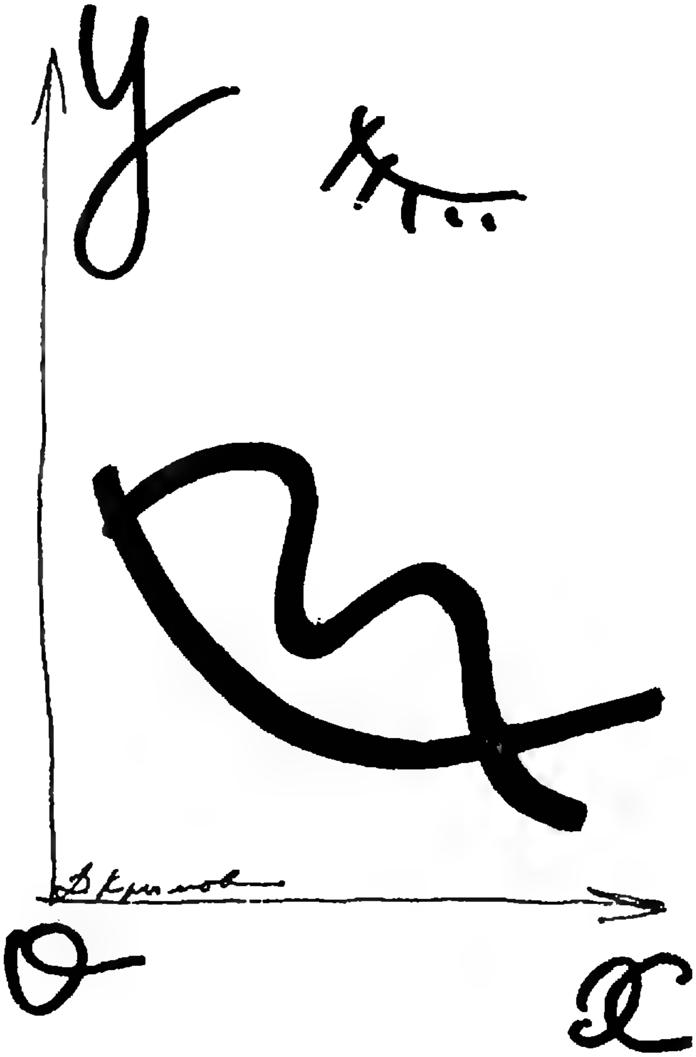
А. Савин

20. Андрей делит по своему усмотрению кучку из 200 спичек на 6 кучек (каждая из них содержит по крайней мере одну спичку), а затем Борис выравнивает количество спичек в двух из этих кучек, беря несколько спичек из одной кучки. Число спичек, взятых Борисом, назовем выигрышем Андрея. Борис стремится взять как можно меньше спичек. Как надо играть Андрею, чтобы он обеспечил себе максимально возможный выигрыш?

Х. Хаимов

21. На шахматной доске горизонтали и вертикали занумерованы числами от 1 до 8. На ней расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Для каждой ладьи вычислим произведение номеров горизонтали и вертикали, на которых она стоит. Возьмем сумму этих произведений. Докажите, что для расстановки ладей, центрально-симметричной данной, полученная аналогичным образом сумма равняется первоначальной.

В. Произволов



Математический кружок

Сумма минимумов и минимум суммы

Р. АЛЕКСЕЕВ,
Л. КУРЛЯНДЧИК

В этой статье речь пойдет об одном общем методе, с помощью которого можно доказать многие знаменитые неравенства. Исходная идея совсем проста. Две произвольные функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные, скажем, на некотором отрезке $[a, b]$, достигают своих минимумов (вообще говоря) в разных точках (рис. 1). Справедливо неравенство

$$\min f(x)+\min g(x)\leqslant\min (f(x)+g(x)).$$

В самом деле, минимум суммарной функции $f(x)+g(x)$ достигается в какой-нибудь точке отрезка $[a; b]$. В этой точке значения функций $f(x)$ и $g(x)$ не меньше своих минимумов. Ясно, что неравенство превращается в равенство, если минимумы $f(x)$ и $g(x)$ достигаются в одной и той же точке.

Точно так же обстоит дело и в случае n функций:

$$\min f_1(x)+\ldots+\min f_n(x)\leqslant$$
$$\leqslant\min (f_1(x)+\ldots+f_n(x)).$$

Доказательство легко получить по индукции. В правой части будем выделять по одной функции: $\min (f_1(x)+\ldots+f_n(x))\geqslant\min (f_1(x)+\ldots+f_{n-1}(x))+\min f_n(x)$ и так далее.

Минимумы квадратичных функций и квадратичные неравенства

Начнем с квадратичных функций вида $f(x)=ax^2+2bx$, где $a>0$. Чтобы найти минимум, выделим полный квадрат

$$ax^2+2bx=a\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)=$$
$$=a\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a}.$$

Итак, минимум достигается при $x=-\frac{b}{a}$ и равен $f\left(-\frac{b}{a}\right)=-\frac{b^2}{a}$.

Теперь к n функциям

$$f_1(x)=a_1x^2+2b_1x,$$
$$f_2(x)=a_2x^2+2b_2x,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_n(x)=a_nx^2+2b_nx$$

применим наше основное неравенство. Функция $f_i(x)$ имеет минимум при $x=$

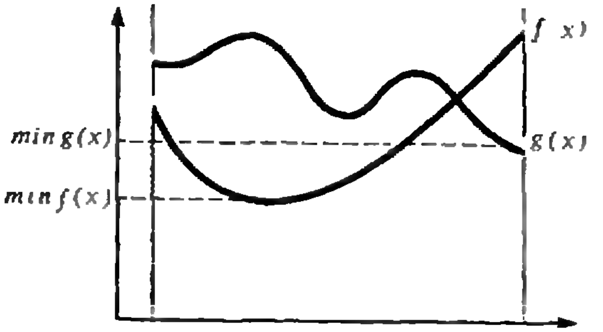


Рис. 1.

$= -\frac{b_i}{a_i}$, равный $-\frac{b_i^2}{a_i}$, а минимум суммарной функции достигается при

$$x = -\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n}$$

и равен $-\frac{(b_1+\ldots+b_n)^2}{a_1+\ldots+a_n}$. Поэтому в результате мы получим

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\ldots+\frac{b_n^2}{a_n} \geqslant \frac{(b_1+\ldots+b_n)^2}{a_1+\ldots+a_n}$$

(для удобства мы поменяли знаки в левой и правой частей).

Теперь нам уже несложно доказать несколько известных неравенств.

Упражнение 1. Выведите из последней формулы

а) неравенство Коши — Буняковского

$$\sqrt{(c_1^2+\ldots+c_n^2)(d_1^2+\ldots+d_n^2)} \geqslant c_1d_1+\ldots+c_nd_n,$$

б) неравенство о среднем квадратическом и среднем арифметическом

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n},$$

в) неравенство о среднем арифметическом и среднем гармоническом

$$\frac{b_1+\ldots+b_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{b_1}+\ldots+\frac{1}{b_n}}.$$

Указание. а) Сделайте замену $b_1=c_1^2, \ldots, b_n=c_n^2$, $a_1=c_1d_1, \ldots, a_n=c_nd_n$, б) положите $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$, в) положите $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Экспоненциальные функции

Теперь вместо квадратичной функции рассмотрим более сложную: $f(x)=ae^x-bx-b$ (где $a, b>0$).

Упражнение 2. Найдите наименьшее значение этой функции.

Ответ. Наименьшее значение достигается при $x=\ln\frac{b}{a}$. Оно равно $-b\ln\frac{b}{a}$.

Таким образом, для n функций

$$f_1=a_1e^x-b_1x-b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n=a_ne^x-b_nx-b_n$$

(где все числа a_i и b_i положительны) основное неравенство дает

$$b_1\ln\frac{b_1}{a_1}+\ldots+b_n\ln\frac{b_n}{a_n} \geqslant$$
$$\geqslant (b_1+\ldots+b_n)\ln\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n}.$$

После несложных преобразований:

$$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{b_1}\cdot\ \ldots\ \cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{b_n} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{b_1+\ldots+b_n}{a_1+\ldots+a_n}\right)^{b_1+\ldots+b_n}.$$

Упражнение 3. Выведите из этого утверждения

а) неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом)

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ \ldots\ \cdot a_n},$$

б) красивое неравенство

$$b_1^{b_1}\cdot\ \ldots\ \cdot b_n^{b_n} \geqslant \left(\frac{b_1+\ldots+b_n}{n}\right)^{b_1+\ldots+b_n},$$

в) весьма полезное неравенство

$$c_1b_1+\ldots+c_nb_n \geqslant c_1^{b_1}\cdot\ \ldots\ \cdot c_n^{b_n},$$

где $b_1+\ldots+b_n=1$.

Указание. Положите а) $b_1=b_2=\ldots=b_n=\frac{1}{n}$,

б) $a_1=\ldots=a_n=1$, в) $b_1+\ldots+b_n=1$; $c_1=\frac{a_1}{b_1}, \ldots, c_n=\frac{a_n}{b_n}$.

Конечно, существуют другие способы доказательства всех этих неравенств. Но в каждом случае приходится придумывать свой способ. Здесь же все они получены общим методом.

Функции двух переменных. Неравенство Гельдера

Основной принцип — сумма минимумов нескольких функций не превосходит минимума их суммы — сохраняет силу и для случая функций нескольких переменных. Причем его доказательство в этом случае не меняется.

Рассмотрим простейшую функцию двух переменных — линейную:

$$f(x;y)=ax+by.$$

Как это ни удивительно, но с помощью этой элементарной функции можно получить совсем непростые неравенства.

Задача. *Докажите неравенства*

а) $\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2} \geqslant$
$\geqslant \sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2}$,

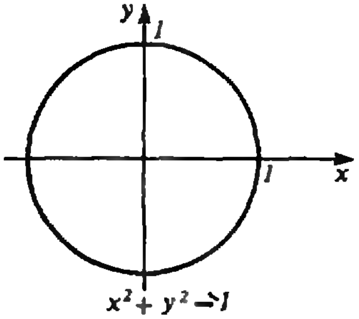


Рис. 2.

б) $(a_1^p+\ldots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b_1^q+\ldots+b_n^q)^{\frac{1}{q}} \geqslant$ $\geqslant a_1b_1+\ldots+a_nb_n$, *если* $p>0$, $q>0$ — *числа такие, что* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *(неравенство Гельдера).*

Решение. Как обычно, рассмотрим n функций

$$f_1(x;\ y)=a_1x+b_1y\ ,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$f_n(x;\ y)=a_nx+b_ny\ .$$

Самое главное — правильно выбрать множества, на которых мы рассматриваем наши функции. Ведь наши функции определены на плоскости и мы можем находить минимумы на любой фигуре!

а) Рассмотрим окружность радиусом 1 с центром в начале координат (рис. 2). Что же означает *геометрически* линейная функция $f(x;\ y)=$ $=ax+by$? Это *скалярное произведение* векторов с координатами $(a;\ b)$ и $(x;\ y)$. Но скалярное произведение — это произведение длин векторов на косинус угла между ними. Косинус угла — минимальный для коллинеарных векторов, а длина вектора $(x;\ y)$ не меняется, если конец вектора лежит на окружности. Значит, минимум функции $f(x;\ y)$ достигается на векторе с координатами $(x_0;\ y_0)$, коллинеарном $(a\ ;\ b)$ (рис. 3). Такой вектор равен $\overline{(x_0;\ y_0)}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, а скалярное произведение

$$\overline{(x_0;\ y_0)}\cdot\ \overline{(a;\ b)}=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Итак, в случае окружности

$$\min(ax+by)=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Теперь нам ничего не стоит доказать неравенство а). Слева в нем стоят минимальные значения функций $f_1, \ldots, f_n$

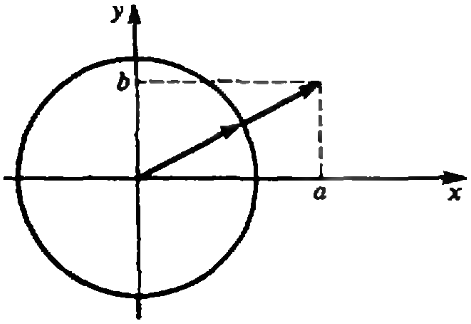


Рис. 3.

на окружности, а справа — минимум их суммы.

б) Возьмем множество, которое состоит из точек $(x;\ y)$, для которых

$$x^{\frac{1}{p}}\cdot y^{\frac{1}{q}}=1.$$

Найдем минимум функции $f(x;\ y)=$ $=ax+by$ на этом множестве. Конечно, мы могли бы решить эту не совсем простую задачу аналитически (и советуем читателям попробовать сделать это), но, к счастью, накопленный нами запас знаний позволяет избежать этого. Воспользуемся неравенством в) из упражнения 3:

$$ax+by=\frac{1}{p}\cdot pax+\frac{1}{q}\cdot qby\geqslant$$

$$\geqslant(pax)^{\frac{1}{p}}\cdot(qby)^{\frac{1}{q}}=(pa)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb)^{\frac{1}{q}}.$$

Проверьте, что неравенство достигается, если $\frac{x}{y}=\frac{b}{a}$. Итак, минимум функции $f(x;\ y)$ на нашем множестве равен $(pa)^{\frac{1}{p}}\cdot(qb)^{\frac{1}{q}}$. Если мы положим $a=\frac{c^p}{p}$, $b=\frac{d^q}{q}$ (т. е. будем брать линейную функцию $\frac{c^p}{p}x+\frac{d^q}{q}y$), то этот минимум окажется равным cd. Ну, а если мы сделаем то же самое с каждой из наших функций $f_1, \ldots, f_n$:

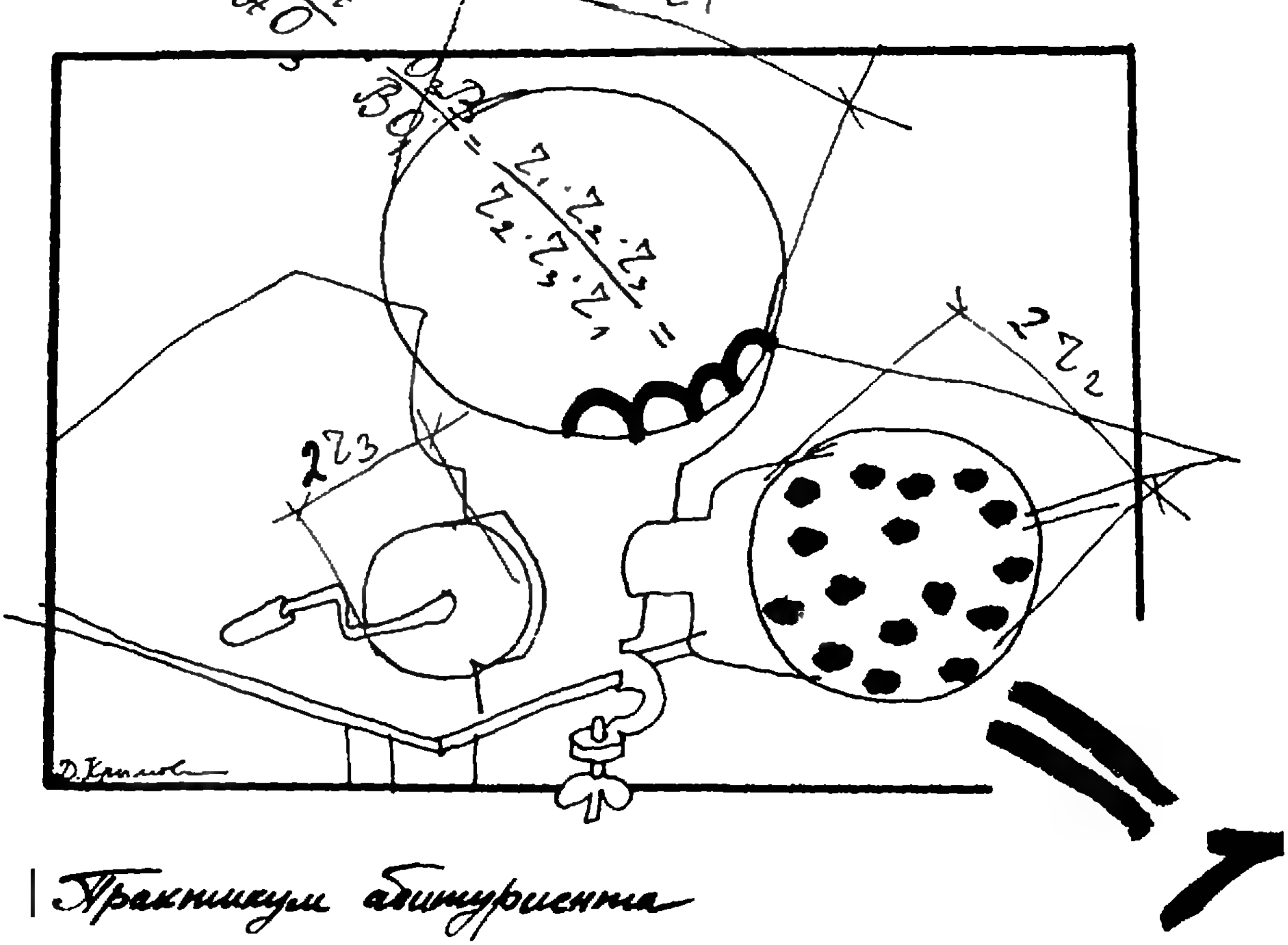
$$a_1=\frac{c_1^p}{p},\ b_1=\frac{d_1^q}{q},\ \ldots,$$

$$\ldots,\ a_n=\frac{c_n^p}{p},\ b_n=\frac{d_n^q}{q},$$

то мы получим неравенство Гельдера!

А теперь давайте сравним неравенство Коши — Буняковского с неравен-

(Окончание см. на с. 55)



Практикум абитуриента

Теорема Менелая

Б. ОРАЧ

Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики.

Пусть $\triangle ABC$ пересечен прямой, не параллельной стороне AB и пересекающей две его стороны AC и BC соответственно в точках B_1 и A_1, а прямую AB в точке C_1 (рис. 1), тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

(Чтобы не запутаться, в каком порядке идут буквы в формуле, придерживайтесь следующего правила: двигайтесь по контуру треугольника от вершины до точки пересечения с прямой и от точки пересечения до следующей вершины.)

Доказательство. Из вершин треугольника проведем параллельные друг другу отрезки до пересечения с секущей прямой. Образуются три пары подобных треугольников. Из подобия получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{m}{n},$$

$$\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{n}{l},$$

$$\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{l}{m}.$$

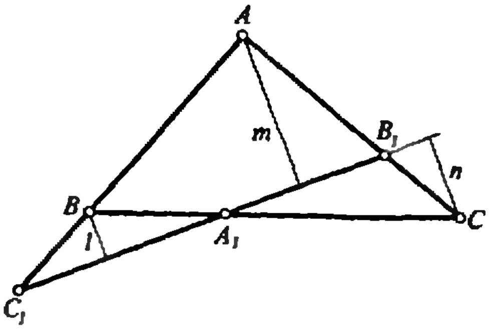


Рис. 1.

Осталось перемножить полученные пропорции:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{m\cdot n\cdot l}{n\cdot l\cdot m}=1.$$

Теорема доказана.

Эта теорема дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского (I в. н. э.).

Чтобы продемонстрировать ее эффективность, рассмотрим решение одной задачи двумя способами: векторным и с помощью теоремы Менелая.

Задача 1. *Пусть AD — медиана $\triangle ABC$ (рис. 2). На AD взята точка K так, что $AK:KD=3:1$. В каком отношении прямая BK делит площадь $\triangle ABC$?*

Очевидно, отношение площадей треугольников ABP и CBP равно отношению отрезков AP и PC. Итак, решение задачи сводится к нахождению отношения AP/PC.

Векторное решение. Вектор $\overline{AK}$ выразим двумя способами через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Прежде всего, $\overline{AK}=\frac{3}{4}\overline{AD}$. Но $\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$ (формула середины отрезка). Значит,

$$\overline{AK}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})=$$
$$=\frac{3}{8}\overline{AB}+\frac{3}{8}\overline{AC}. \qquad (1)$$

Обозначим $\frac{PK}{KB}=\frac{m}{n}$, $\overline{AP}=x\cdot\overline{AC}$.

Применяя к BP теорему о делении отрезка в данном отношении, имеем

$$\overline{AK}=\frac{m}{m+n}\overline{AB}+\frac{n}{m+n}\overline{AP}.$$

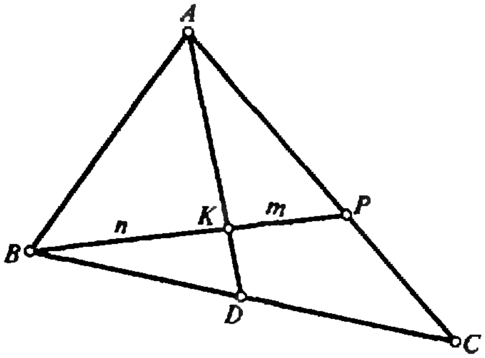


Рис. 2.

Но $AP=x\cdot\overline{AC}$, значит,

$$\overline{AK}=\frac{m}{m+n}\overline{AB}+\frac{nx}{m+n}\overline{AC}. \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$\frac{m}{m+n}\overline{AB}+\frac{nx}{m+n}\overline{AC}=\frac{3}{8}\overline{AB}+\frac{3}{8}\overline{AC}.$$

Используя однозначность разложения вектора $\overline{AK}$ по двум неколлинеарным векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, получаем систему

$$\begin{cases}\frac{m}{m+n}=\frac{3}{8},\\ \frac{n}{m+n}=\frac{3}{8x},\end{cases}$$

откуда $x=3/5$, т. е. $AP/AC=3/5$, и

$$\frac{AP}{PC}=\frac{3}{2}.$$

Решение с помощью теоремы Менелая. Применяя эту теорему к треугольнику ACD и секущей прямой BP, имеем

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DK}{AK}=1,$$

$$\frac{AP}{PC}\cdot 2\cdot\frac{1}{3}=1,\quad \frac{AP}{PC}=\frac{3}{2}.$$

Преимущество применения теоремы Менелая очевидно.

Очень часто при решении задач нужна не сама теорема Менелая, а теорема, обратная к ней.

Рассмотрим треугольник ABC. Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат прямым BC, AC, AB соответственно, т. е. лежат на сторонах треугольника или их продолжениях (рис. 3).

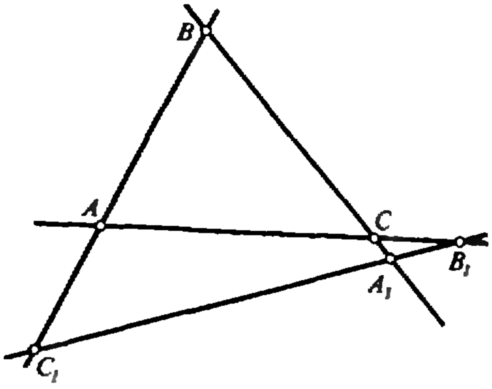


Рис. 3.

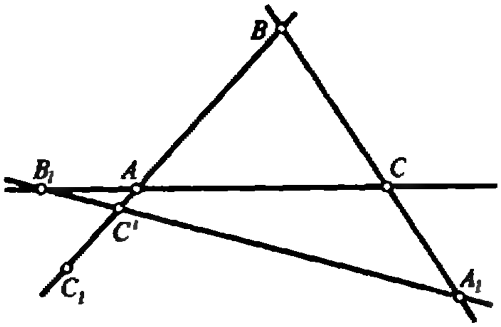


Рис. 4.

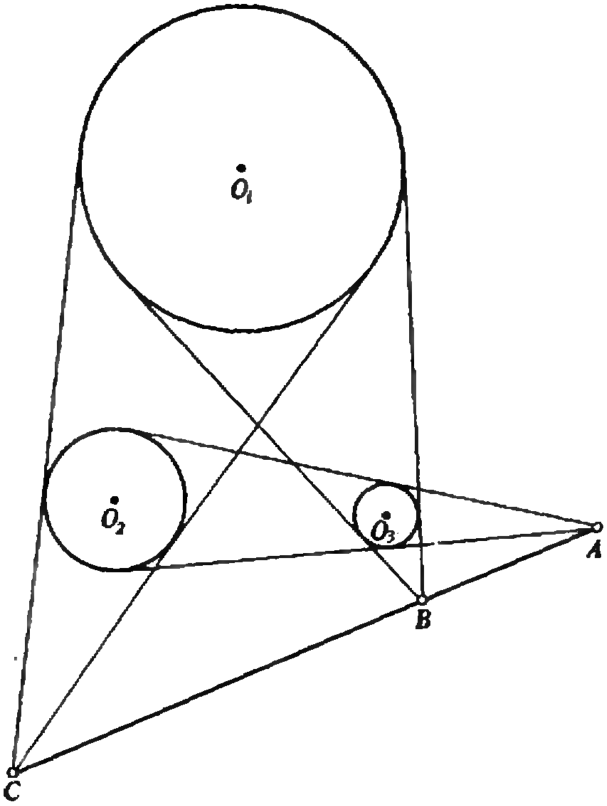


Рис. 5.

Если $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{CA}=1$, *то точки* A_1, B_1, C_1 *лежат на одной прямой.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. точка C_1 не лежит на прямой A_1B_1 (рис. 4). Пусть C' — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB. Тогда, согласно прямой теореме Менелая, $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\left|\frac{CA_1}{A_1B}\right|\cdot\left|\frac{BC'}{C'A}\right|=1$. Но очевидно, что $\left|\frac{BC_1}{C_1A}\right|\neq\left|\frac{BC'}{C'A}\right|$. Поэтому соотношение в условии теоремы не может быть выполнено. Мы получили противоречие. Теорема доказана.

Следующая красивая задача, вероятно, так же как и теорема Менелая, известна с глубокой древности. Она не раз использовалась на олимпиадах, а в отдельных случаях — и на вступительных экзаменах...

Задача 2. *Три окружности разных радиусов расположены на плоскости так, что ни одна из них не лежит целиком в круге, ограниченном другой. Каждой паре окружностей сопоставим точку пересечения внешних двойных касательных. Докажите, что полученные три точки лежат на одной прямой (рис. 5).*

Решение. Пусть радиусы окружностей с центрами O_1, O_2, O_3 равны r_1, r_2, r_3 соответственно. Тогда $\left|\frac{O_1C}{CO_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}$, так как окружности с центрами O_1 и O_2 гомотетичны относительно точки C, а отношение радиусов $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|$ — коэффициент гомотетии. Аналогично, $\frac{O_2A}{AO_3}=\frac{r_2}{r_3}$; $\frac{O_3B}{BO_1}=\frac{r_3}{r_1}$. Таким образом, $\frac{O_1C}{CO_2}\cdot\frac{O_2A}{AO_3}\cdot\frac{O_3B}{BO_1}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{r_3}\cdot\frac{r_3}{r_1}=1$. По теореме, обратной к теореме Менелая, точки A, B, C принадлежат одной прямой.

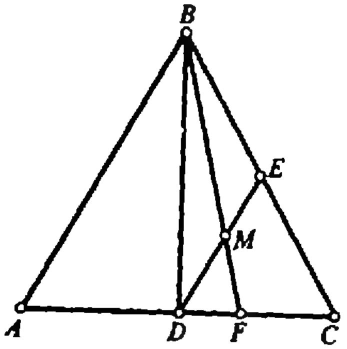


Рис. 6.

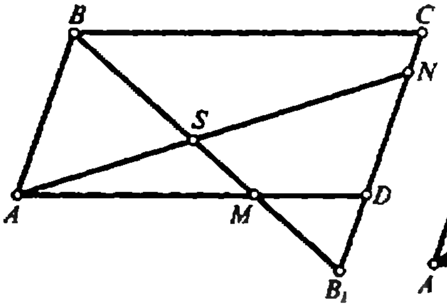


Рис. 7.

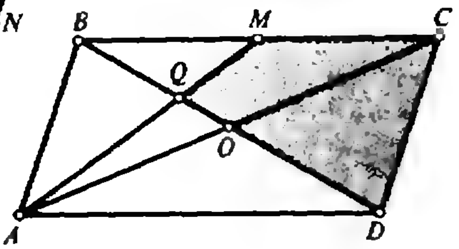


Рис. 8.

Упражнения

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC даны соответственно точки M и N такие, что $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. В каком отношении точка S пересечения отрезков BN и CM делит каждый из этих отрезков?

2. В $\triangle ABC$ биссектриса AD делит BC в отношении 2:1. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

3. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC точки E и F так, что $AD:DB=3:2$, $BE:EC=1:3$ и $BF:FC=4:1$. В каком отношении прямая AE делит отрезок DF?

4. Ортоцентр H треугольника ABC делит высоту пополам. Докажите, что $\cos\angle C=\cos\angle A\cdot\cos\angle B$, где $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы при вершинах.

5. В правильном треугольнике ABC со стороной a точка E — середина BC, D — середина AC, $F\in DC$, $BF\cap DE=M$, $S_{ABMD}=\frac{5}{8}S_{ABC}$. Найдите MF (рис. 6).

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит отрезок AD в отношении p, а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислите отношение $AS:SN$ (рис. 7).

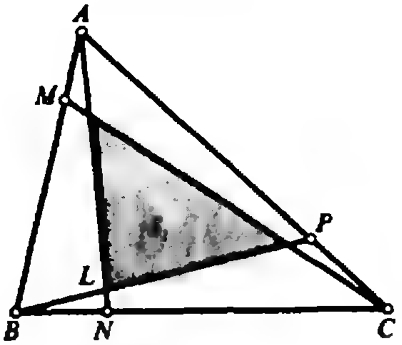


Рис. 9.

7. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $QMCD$ (рис. 8).

8. Стороны $\triangle ABC$ разделены точками M, N и P так, что $AM:MB=BN:NC=CP:PA=1:4$. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного прямыми AN, BP и CM, к площади треугольника ABC (рис. 9).

Сумма минимумов и минимум суммы

(Начало см. на с. 49)

ством Гельдера. Ясно, что первое — частный случай второго при $p=q=2$. Поэтому, если ввести «длину» вектора $(a;\ b)$ по правилу $|(a;\ b)|_p=(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$, то окажется, что скалярное поизведение двух векторов

$$(a;\ b)\cdot(c;\ d)\leqslant|(a;\ b)|_p\cdot|(c;\ d)|_q$$

не превосходит произведения их «длин».

В этом состоит геометрическая интерпретация неравенства Гельдера и его смысл.

Итак, метод ясен. Мы доказали довольно-таки большое количество неравенств (и среди них несколько классических), пользуясь весьма скромным набором функций. Возможно, что читатели смогут доказать другие интересные неравенства с помощью этого метода.

Упражнение 4. Докажите следующие неравенства $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ — положительные числа

а) $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1\dots b_n}\leqslant\sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}$,

б) $(1+a_1)\dots(1+a_n)\geqslant(1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n})^n$ (неравенство Гюйгенса),

в) $(a_1^p+\dots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(b_1^q+\dots+b_n^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant$

$\leqslant a_1b_1+\dots+a_nb_n$, если $q<0$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(неравенство Гельдера «наоборот»),

г) $(a_1^p+\dots+a_n^p)^{\frac{1}{p}}+(b_1^p+\dots+b_n^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant$

$\geqslant((a_1+b_1)^p+\dots+(a_n+b_n)^p)^{\frac{1}{p}}$, где $p>1$ (неравенство Минковского). Докажите, что если $p<1$, то неравенство меняется на противоположное.

Указания. а) Рассмотрите линейную функцию $y=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ от n переменных на множестве, состоящем из наборов $(x_1, \dots, x_n)$ таких, что $x_1\cdot\ldots\cdot x_n=n$. б) Положите в предыдущем неравенстве $b_1=\dots=b_n=1$. г) Снова рассмотрите линейную функцию $y=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ на множестве, задаваемом условием:

$$x_1^q+\dots+x_n^q=1,$$

где число q определяется условием $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Р-значит ракета

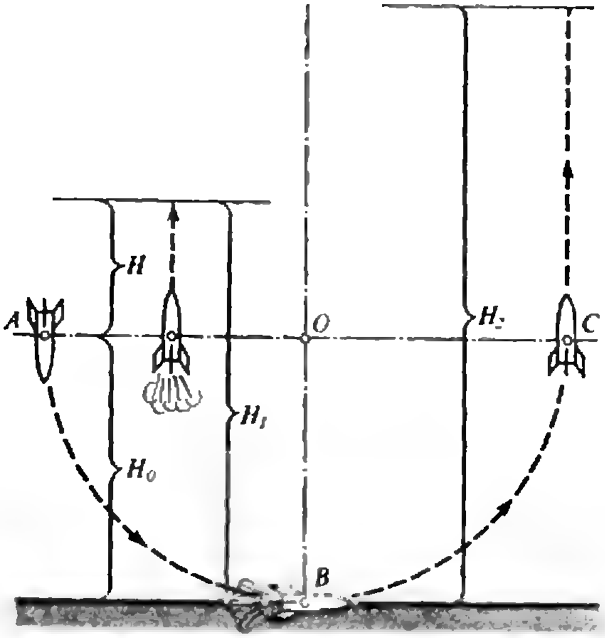
Бросай вниз, если хочешь взлететь повыше

В. ТУРОВ

Представим себе, что у нас есть одноступенчатая ракета, имеющая наибольшую высоту подъема H в поле тяготения планеты, и самолет или аэростат достаточной грузоподъемности, способный поднять указанную ракету на высоту H_0. Какой наибольшей высоты позволяет достичь подобная система?

Обычно ответ на этот вопрос следует практически мгновенно: «В соответствии с законом сохранения энергии, наибольшая высота $H_1=H+H_0$» — и является ошибочным. В чем же дело?

Рассмотрим математический маятник с нитью длиной H_0, точка подвеса которого O находится на высоте H_0 над поверхностью планеты (см. рисунок). К свободному концу нити прикрепим нашу ракету, отведем ее в крайнее левое положение (в точку A) и отпустим свободно падать. Пусть в тот момент, когда ракета проходит самую нижнюю точку (точку B) траектории (считаем, что ракета движется «носом вперед»), включается ее двигатель, а когда ракета достигает крайнего правого положения (точка C), она освобождается от крепления к нити и движется далее свободно. Рассчитаем, на какую высоту H_2 она поднимется.



Для простоты предположим, что поле тяготения является однородным (ускорение свободного падения $g=\mathrm{const}$), а время работы двигателя пренебрежимо мало по сравнению со временем подъема ракеты «по инерции». Это позволяет считать, что двигатель мгновенно сообщает ракете приращение импульса, а масса ракеты уменьшается скачком на величину массы израсходованного топлива — горючего и окислителя. (При учете конечности времени работы двигателя и непрерывного изменения массы ракеты все основные выводы качественно сохраняются и претерпевают лишь количественные изменения.) Кроме того, пренебрежем силами трения в атмосфере и будем считать, что КПД двигателя равен единице.

В соответствии с законом сохранения энергии и с учетом сделанных предположений, получим, что перед включением двигателя ракета имеет в точке B скорость $v_1=\sqrt{2gH_0}$. После включения двигателя скорость ракеты станет $v_2>v_1$. Для вычисления этой величины перейдем в инерциальную систему отсчета, скорость которой совпадает со скоростью ракеты в точке B до включения двигателя. В этой системе импульс ракеты в точке B до включения двигателя был

$$P_1'=0.$$

Так как в точке B на ракету не действуют внешние силы, имеющие горизонтальную составляющую, то, в соответствии с законом сохранения импульса, после включения двигателя ракета в движущейся системе приобретет импульс

$$P_2'=mv_2'=\Delta P'=\Delta mc',$$

где m — масса ракеты без топлива и окислителя, Δm — масса выбрасываемых двигателем газов, равная массе горючего и окислителя, v_2', $\Delta P'$ и c' — соответственно скорость ракеты, импульс и скорость выбрасываемых двигателем газов в движущейся системе отсчета после включения двигателя.

Если вернуться в неподвижную систему координат, то скорость ракеты после включения двигателя будет

$$v_2=v_2'+v_1=\Delta m/m\, c'+v_1.$$

Еще раз используем закон сохранения энергии и получим выражение для наибольшей высоты подъема ракеты в рассматриваемом случае:

$$H_2=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{1}{2g}(v_2'^2+v_1^2+2v_2'v_1).$$

Учтем, что

$$v_2'^2/(2g)=H,\ v_1^2/(2g)=H_0.$$

Тогда

$$H_2=H+H_0+2\sqrt{HH_0}>H_1=H+H_0.$$

В случае $H=H_0$ имеем

$$H_2=2H_1.$$

Полученный ответ может вызвать внутреннюю неудовлетворенность, хотя в рамках сделанных предположений противоречий нет. Ситуация прояснится, если обратить внимание на то, что, когда двигатель включается у движущейся ракеты, происходит перераспределение химической энергии топлива и запасенной при подъеме на высоту H_0 гравитационной энергии между кинетической энергией ракеты и кинетической энергией выброшенных двигателем газов, причем в пользу ракеты.

Рассмотрим баланс энергий для различных способов запуска ракеты. В начальный момент полная энергия системы равна

$$E=(m+\Delta m)gH_0+W,$$

где W — химическая энергия топлива. При «традиционном» способе запуска ракеты на высоте H_0 после включения двигателя энергия равна

$$E=(m+\Delta m)gH_0+\frac{\Delta mc'^2}{2}+\frac{mv_2'^2}{2}.$$

В этом случае механическая энергия ракеты, определяющая высоту ее подъема, равна

$$E-\frac{\Delta mc'^2}{2}-\Delta mgH_0.$$

При включении двигателя в точке B эта же энергия E распределяется таким образом:

$$E=\frac{mv_2^2}{2}-\frac{\Delta mc^2}{2},$$

где c — скорость выбрасываемых газов относительно неподвижной системы отсчета. Часть энергии, используемая для набора высоты, в этом случае будет равна

$$E-\frac{\Delta mc^2}{2}.$$

Так как $c=c'-v_1$, то $c^2=c'^2-2c'v_1+$ $+v_1^2=c'^2-2c'v_1+2gH_0$. Видно, что

$$\frac{\Delta mc^2}{2}<\frac{\Delta mc'^2}{2}+\Delta mgH_0,$$

т. е.

$$E-\frac{\Delta mc'^2}{2}-\Delta mgH_0<E-\frac{\Delta mc^2}{2}.$$

На то обстоятельство, что ракета может взлететь выше, если запустить ее столь необычным способом, впервые указал в своей книге «Введение в космонавтику» замечательный ученый А. Штернфельд. Докторант Сорбонны и инженер отдела С. П. Королева в РНИИ, этой колыбели ракетостроения в нашей стране, преподаватель техникума в маленьком уральском городке и лауреат Международной премии Галабера по астронавтике, которой он был удостоен вместе с Ю. А. Гагариным, — таковы лишь отдельные штрихи жизни этого удивительного человека, обладавшего уникальной способностью видеть новое в казалось бы давно изученных проблемах.

В 1974 году издательство «Наука» выпустило вторым изданием книгу А. Штернфельда «Введение в космонавтику», а в 1987 году там же вышла биографическая книга В. Прищепы и Г. Дроновой «Ари Штернфельд — пионер космонавтики». Хотелось бы обратить внимание читателей журнала на эти книги.

„Квант" улыбается

Можно ли построить правильный $2^{16}(2^{16}+1)$-угольник?

На эту тему разгорелся спор, когда однажды за столом собрались поклонники «Кванта».

Математик-логик. Да! Поскольку $2^{16}+1$ — простое число Пьера, то, как доказал Карл, такой правильный многоугольник построить можно.

Математик-историк. Он и был построен немецким профессором Гермесом. Удвоение числа сторон не представляет труда. Изложение занимает солидный чемодан и хранится в Геттингенском университете. Кто захочет, может прочитать.

Математик-редактор. Но его работу до сих пор никто не рецензировал! И неизвестно, верна она или нет!

Математик-методист. Возможность построения не вызывает сомнений. Но вопрос ставится несколько по-иному — как это сделать вот здесь. (Кладет на стол лист бумаги, карандаш, линейку и циркуль.)

Математик-философ. Не понимаю, в чем загвоздка — доказано, что способ построения существует; известно, что доказательство вполне конструктивное. Следовательно, можно!

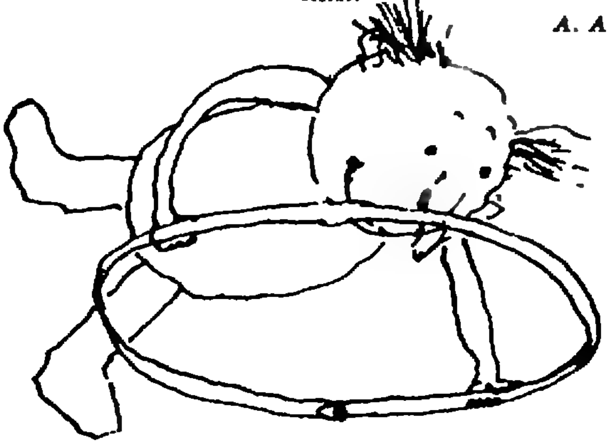
Математик - экономист. Можно — не можно, надо подсчитать (вынимает микрокалькулятор). Если для построения каждой стороны потратить, скажем, секунду, и работу организовать в три смены, то ... О-го-го — 136 лет. Нет, нельзя!

Математик - кибернетик. А компьютер зачем? Составим программку... За час с небольшим справимся!

Физик-теоретик. Дайтека и я прикину (начинает вертеть в руке карандаш). Если атомы углерода... в один слой..., а диаметр описанной окружности пускай 30 см,... расстояние между соседними ячейками в кристаллической решетке графита 1,4 Å, то ... м-м-м... длина окружности $9{,}4\cdot10^{9}$ Å, ... В принципе можно расставить на окружности нужное число атомов углерода! ...Вот только на равном расстоянии... м-м-м... колебания ...

Физик-экспериментатор. Зачем эти расчеты? (Берет циркуль и чертит окружность.) Пожалуйста. Пусть кто-нибудь из вас, не вставая с места, докажет мне, что это не есть правильный 4 295 032 832-угольник!

А. Азамов



Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 112, \\ 2x - 7y = 1. \end{cases}$$

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$6 \sin^2 x = 5 - 13 \cos x + 3 \cos 2x.$$

3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 14$, $AC = 15$, $BC = 13$ через основание высоты CH проводятся прямые, параллельные прямым AC и BC, которые пересекают соответственно стороны BC и AC треугольника в точках M и N. Прямая MN пересекает продолжение стороны AB в точке D. Найдите длину отрезка BD.

4. Решите неравенство

$$\frac{x-1}{(x+1) \log_3 (x^2+x+1/2)} \geqslant 0.$$

5. Ребро куба $ABCDA'B'C'D'$ равно $2a$. Отрезок PQ, концы которого лежат на прямых AB' и BC', пересекается с прямой CD' в точке O и делится этой точкой пополам. Найдите длину отрезка PQ.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$1 - 8 \cos^2 x = 9 \sin 2x + 3 \cos 2x.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 + 2x - 24| > 6x + 8.$$

3. Около равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) с углом B, равным $30°$, описана окружность S радиусом R, AD — ее диаметр, проведенный из точки A. Найдите радиус окружности, касающейся стороны AC данного треугольника, диаметра AD и окружности S.

4. На координатной плоскости задана парабола $y = x^2/2 + x + 13/2$ и касательная к ней, параллельная прямой $y = 6x$. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются: точка касания, точка пересечения касательной с осью абсцисс и вершина данной параболы.

5. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через вершину A и середину бокового ребра SC проведено сечение плоскостью, параллельной диагонали BD основания $ABCD$. Известно, что площадь сечения равна 9, а плоскость сечения образует угол $60°$ с плоскостью основания. Найдите объем данной пирамиды.

Вариант 3

(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)

1. Решите уравнение

$$\log_x 2 + \log_{2x} 4 = \log_{8x} 16.$$

2. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$2 \cos^2 x = 1 - 7 \sin x - 2 \cos 2x.$$

3. Прямая l_1 касается окружностей O_1 и O_2 внешним образом (т. е. окружности лежат по одну сторону от прямой l_1), расстояние между точками касания равно 24. Прямая l_2 является внутренней общей касательной (т. е. окружности лежат по разные стороны от прямой l_2), расстояние между точками касания в этом случае равно 7. Наименьшее расстояние между точками окружностей O_1 и O_2 равно 1. Найдите радиусы данных окружностей.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x+22}}{x+4} < 1.$$

5. В основании прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$, боковые ребра имеют длину 4. Пусть K — точка пересечения диагоналей BC' и $B'C$ боковой грани $BB'C'C$. Сфера, центр которой принадлежит призме, касается граней ABC, $AA'B'B$, $AA'C'C$ и прямой $A'K$. Найдите радиус сферы.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

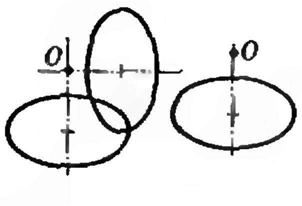


Рис. 1.

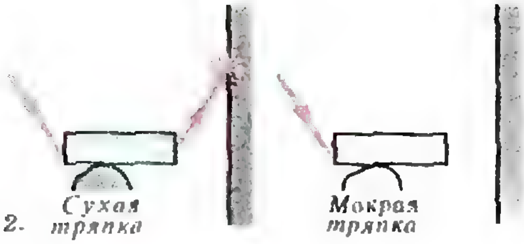


Рис. 2.

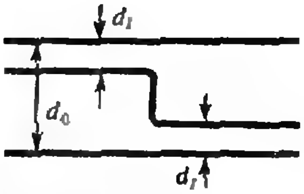


Рис. 3.

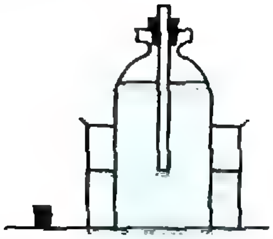


Рис. 4.

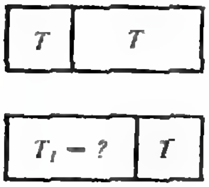


Рис. 5.

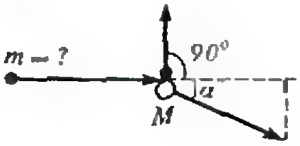


Рис. 6.

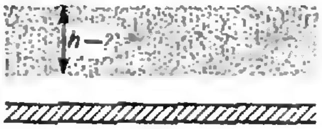


Рис. 7.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. Два одинаковых равномерно заряженных тонких кольца сначала расположены так, что их оси пересекаются под прямым углом в точке O (рис. 1). Затем кольца совмещаются. Во сколько раз изменится напряженность электрического поля в точке O, находящейся в обоих случаях на расстоянии радиуса от центров колец? (68 %)

2. Самолет движется вдоль отвесной стены. Под каким углом к направлению движения самолета пилот слышит эхо, отраженное от этой стены? Скорость звука v, скорость самолета u. (78 %).

3. Ствол пружинной пушки направлен под углом 45° к гладкому полу. Масса снаряда равна массе пушки. Определите отношение высот подъема снаряда при выстрелах из незакрепленной и закрепленной пушки. (32 %)

4. Оцените, какой максимальный вес покажут пружинные весы при взвешивании тела массой один килограмм в космическом корабле, движущемся по околоземной круговой орбите. (13 %)

5. Луч лазера пускают на торец бруска из оргстекла, при этом за бруском на экране наблюдается яркое пятно света (рис. 2). После того как к бруску в некотором месте прикасаются мокрой тряпкой, пятно света на экране исчезает. Прикосновение сухой тряпкой такого эффекта не вызывает. Объясните явление. (64 %)

Вариант 2

1. Рассеивающая линза вставлена в круглое отверстие радиусом R в непрозрачной стенке. Точечный источник света расположен в фокусе линзы. Чему равен радиус освещенной области на экране, удаленном от линзы на фокусное расстояние? (32 %)

2. В плоский конденсатор с расстоянием между пластинами d_0 вставили изогнутую в середине проводящую пластину (рис. 3). Расстояния от этой пластины до ближайших обкладок d_1. Во сколько раз изменилась емкость конденсатора? (44 %)

3. Если мячик падает с высоты h на твердый пол, то он отскакивает на высоту $h/3$. На нитях длиной l подвешивают рядом два таких мячика. Нить с одним мячиком отклоняют на угол 90° от вертикали, и мячик отпускают. На какие углы отклонятся нити после соударения мячиков? (28 %)

4. Детский воздушный шарик надут водородом и свободно висит в воздухе.

Оцените толщину его растянутой резиновой оболочки. (33 %)

5. Через дно сосуда проходит трубка, закрытая пробкой. В сосуд наливают воду, накрывают его вторым сосудом и затем переворачивают эту систему. Вода из первого сосуда почти не выливается. Если же вынуть пробку из трубки, то вода из первого сосуда выливается, но не полностью (см. рис. 4). Объясните явление. (44 %)

Вариант 3

1. Сосуд разделен подвижным поршнем на объемы $V/3$ и $2V/3$, содержащие газ с температурой T (рис. 5). До какой температуры T_1 нужно нагреть газ слева от поршня, чтобы отношение объемов сменилось на обратное? Справа температура газа поддерживается прежней. (80 %)

2. После упругого столкновения с покоящейся частицей массой M налетающая частица полетела под прямым углом к первоначальному направлению движения, а частица массы M — под углом α к этому направлению (рис. 6). Найдите массу m налетающей частицы. (56 %)

3. Изолированную металлическую первоначально незаряженную пластику в течение времени τ освещают ультрафиолетовым светом. Под его действием из пластины вылетает облако электронов, начальная скорость которых перпендикулярна пластине и равна v_0. Полное число электронов, вылетевших с единицы площади, n, заряд электрона e, его масса m. Найдите толщину облака h через время t после окончания облучения (рис. 7). (22 %)

4. Оцените силу давления света настольной лампы на стол. (30 %)

5. Световод состоит из множества круглых в сечении стеклянных волокон, собранных в пучок. Если луч лазера ввести в такой световод параллельно его оси, то выходящий из другого конца свет дает на экране пятно круглой формы. Если же вводить свет под углом к оси световода, то на экране появляется пятно в виде кольца. Объясните явление. (31 %)

Публикацию подготовили Г. Меледин, М. Фокин

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма второго, третьего и четвертого членов убывающей арифметической прогрессии в три раза больше квадрата разности этой прогрессии. Сумма третьего и шестого ее членов равна двум. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-2}{2x-3}\right) \geqslant -1.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

4. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна косинусу угла наклона боковой грани к плоскости основания, а площадь основания равна синусу этого же угла. Найдите объем пирамиды.

5. Из вершин B и C треугольника ABC к его сторонам AB и AC соответственно проведены перпендикуляры, пересекающиеся в точке D. Найдите длину стороны AC, если известно, что угол ABC острый, угол BAD равен α, а расстояние от точки A до прямой BC равно a.

6. Решите неравенство $|66f(x)-90| \leqslant 24$, если известно, что уравнение $3f(x)+x=4$ имеет два корня, сумма которых равна $-\frac{2}{11}$, и функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\frac{1}{2^c}(|x|^a+|x|^b)^c$, где a, b, c — некоторые положительные числа.

Вариант 2

1. Найдите двузначное число, если известно, что при делении этого числа на сумму его цифр в частном получится 4 и в остатке 3, если же из искомого числа вычесть удвоенную сумму его цифр, то получится 25.

2. Найдите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\cos\alpha = a$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

3. Решите неравенство

$$\log_2 x - 4\log_x 2 + 3 \geqslant 0.$$

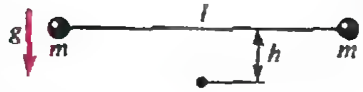


Рис. 1.

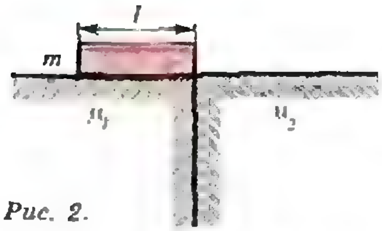


Рис. 2.

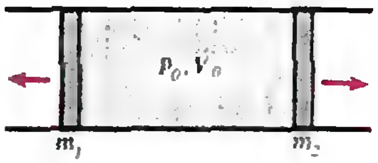


Рис. 3.

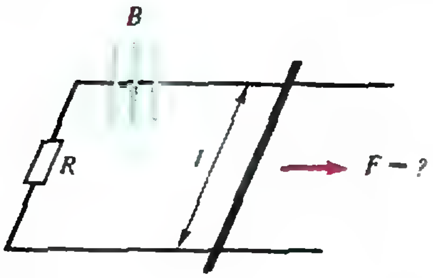


Рис. 4.

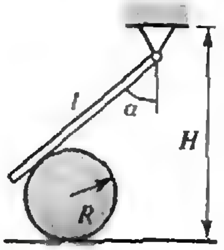


Рис. 5.

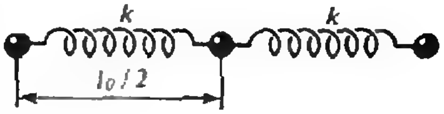


Рис. 6.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+5-6\sqrt{x-4}}=2.$$

5. В треугольнике ABC перпендикуляр, опущенный из центра описанной окружности на биссектрису угла B, проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC. Найдите величину угла B.

6. В куб вписан шар. Другой шар касается первого шара и трех граней куба. Найдите отношение объемов шаров.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два маленьких шарика массой m каждый, соединенные невесомой нерастяжимой нитью длиной l, падают с высоты h так, что нить своей средней точкой налетает на горизонтально расположенный гвоздь (рис. 1). Какой должна быть высота h, чтобы нить оборвалась, если предельно допустимое натяжение нити T_0? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Брусок массой m и длиной l лежит на стыке двух столов (рис. 2). Какую работу надо совершить, чтобы брусок перетащить волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между ним и столами μ_1 и μ_2 соответственно?

3. В длинной гладкой пустой теплоизолированной трубе находятся два поршня с массами m_1 и m_2 (рис. 3). Пространство объемом V_0 между ними заполняется одноатомным газом при давлении p_0. Поршни отпускают. Определите их максимальные скорости, если масса газа много меньше массы поршней.

4. Во сколько раз сила электрического взаимодействия между электроном и протоном больше силы их гравитационного взаимодействия? Заряд электрона и протона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, масса протона $M=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

5. Проводящая перемычка длиной l скользит в однородном магнитном поле с индукцией B по проводящим рельсам, замкнутым на сопротивление R (рис. 4). Какую силу нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью v?

6. Участок стены площадью $S=1$ м^2 освещается светом с длиной волны $\lambda=3310$ Å. Все падающее излучение полностью поглощается, конкретно — ежесекундно поглощается $N=10^{24}$ с$^{-1}$ квантов света. Каково давление, оказываемое светом на стену? Свет падает перпендикулярно поверхности стены.

Вариант 2

1. На высоте $H=40$ см от пола к горизонтальной оси прикреплен стержень длиной $l=30$ см и массой $m=0{,}5$ кг (рис. 5). Стержень отклонен от вертикали на угол $\alpha=30^\circ$ и касается шара радиусом $R=10$ см, лежащего на полу. Определите силу трения между шаром и полом и между шаром и стержнем, если вся система находится в равновесии.

2. Какова должна быть площадь плоской льдины толщиной $h=40$ см, чтобы удержать на воде груз массой $m=100$ кг? Глубина погружения льдины должна быть $h_1=38$ см. Плотность льда $\rho_л=900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3.

3. Одноатомный идеальный газ изотермически расширился из состояния с давлением $p_1=10^6$ Па и объемом $V_1=1$ л до состояния с вдвое бо́льшим объемом. Най-

дите внутреннюю энергию газа в конечном состоянии.

4. Три одинаковых невесомых шарика, расположенные вдоль одной прямой, соединены двумя одинаковыми пружинами жескостью k каждая (рис. 6). Расстояние между крайними шариками l_0. Затем всем шарикам сообщили одинаковый по величине и знаку заряд, при этом расстояние между крайними шариками стало l. Найдите величину сообщенного заряда.

5. Заряженная частица проходит ускоряющую разность потенциалов $\Delta\varphi$ и влетает в область однородного магнитного поля с индукцией B под углом α к магнитным силовым линиям. Определите отношение заряда частицы к массе, если шаг спирали, по которой движется частица, равен h.

6. На пути сходящегося пучка поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=10$ см, в результате чего лучи сошлись на расстоянии $f=5$ см от линзы. Где пересекутся лучи, если линзу убрать?

Публикацию подготовили А. Бортаковский, Г. Солохина

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}(1-\cos x)}=-\sin x+6\cos x.$$

2. При делении натурального трехзначного числа A на произведение цифр сотен и десятков получили в частном 25 и в отстатке 4, а при делении на произведение цифр десятков и единиц — в частном 12 и в остатке 14. Кроме того, известно, что число $(A-6)$ делится на 31 без остатка, причем частное от такого деления равно произведению цифр сотен и единиц числа A. Найдите число A.

3. Найдите все значения $a\in\mathbf{R}$, при каждом из которых неравенство

$$1-\log_{\frac{1}{7}}(x^2+1)\geqslant\log_7(ax^2+4x+a)$$

выполняется при любом действительном x.

4. Правильная треугольная пирамида $SABC$ пересечена плоскостью, проходящей через центр описанного около этой пирамиды шара параллельно ребрам SA и BC. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что длина высоты SH пирамиды равна h, а отношение расстояния от центра шара до плоскости основания ABC пирамиды к расстоянию от центра шара до вершины S равно q.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(\cos 4x)(\sin x+2\cos x)^2=5\cos^3 4x.$$

2. Трое рабочих должны изготовить некоторое количество деталей. Сначала работал лишь первый рабочий, а через некоторое время к нему присоединился второй. Когда $1/6$ часть всей работы была выполнена, к работе приступил третий рабочий. Закончили работу они одновременно. Известно, что на выполнение половины всей работы первому и второму рабочим, работающим совместно, требуется на 2,5 часа меньше, чем одному третьему на выполнение всей работы. Сколько времени работал первый рабочий, если первый и второй рабочие обработали по одинаковому числу деталей, а третий — в 2 раза больше каждого из них, проработав на 1 час меньше второго рабочего?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a,\ a\in\mathbf{R}.$$

4. В прямой круговой конус с вершиной S вписана треугольная пирамида $SABC$, у которой все боковые грани имеют одинаковую площадь. Найдите объем пирамиды $SABC$, если известно, что длина образующей конуса равна l и $\angle ASB=2\alpha$.

Физика

Устный экзамен

В 1990 году впервые из билетов вступительного экзамена были исключены чисто теоретические вопросы и вместо них предложены три сравнительно несложные задачи. Для их решения необходимы как знание основ теории, так и умение быстро и правильно пользоваться стандартными методами решения задач.

Четвертая задача билета, как и раньше, была комплексной.

Время подготовки к ответу осталось прежним (30—45 мин).

Билет 1

1. При изобарическом нагревании газа ему было передано количество теплоты $Q=800$ Дж. При этом его внутренняя энергия увеличилась на $\Delta U=700$ Дж. На сколько увеличился объем газа? Давление газа $p=10^5$ Па.

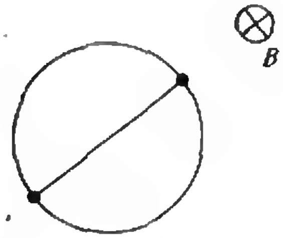


Рис. 1.

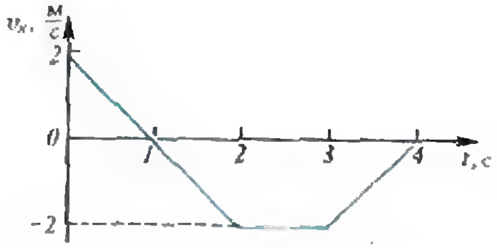


Рис. 2.

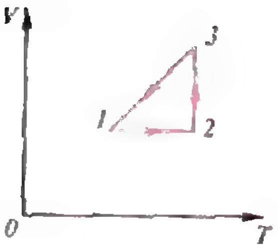


Рис. 3.

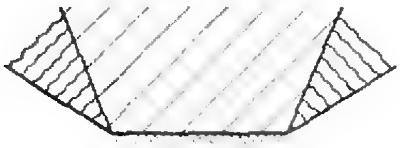


Рис. 4.

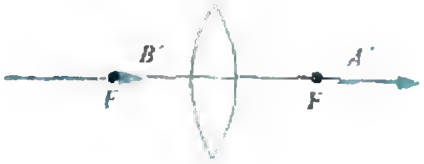


Рис. 5.

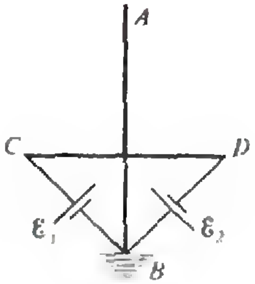


Рис. 6.

2. Определите работу выхода электрона из металла, если для прекращения фототока между пластинами из этого материала следует создать задерживающее напряжение U. Пластины облучаются светом с длиной волны λ.

3. На рисунке 1 показан плоский контур из тонких проводов, находящийся в однородном магнитном поле, которое направлено за плоскость рисунка (перемычка контура совпадает с диаметром кольца). Индукцию поля начали уменьшать. Укажите направление индукционных токов в контуре.

4. Тело тянут по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v в течение времени τ. При этом температура тела увеличивается на Δt. Считая, что вся работа внешних сил пошла на увеличение внутренней энергии тела, и пренебрегая теплоотдачей, найдите угол между силой, с которой тянут тело, и горизонтом. Удельная теплоемкость тела c, коэффициент трения между телом и поверхностью μ.

Билет 2

1. Пользуясь графиком зависимости проекции скорости от времени (рис. 2), постройте график зависимости координаты точки от времени. В начальный момент $t=0$ координата точки $x=0$.

2. На V, T-диаграмме (рис. 3) показан замкнутый процесс идеального газа. Изобразите этот процесс в координатах p, V.

3. На рисунке 4 показаны: 1) область полной видимости в плоском зеркале некоторого прямого предмета AB (заштрихована прямыми линиями); 2) области частичной видимости предмета в зеркале (заштрихованы волнистыми линиями). Определите расположение предмета AB.

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C_0=5\cdot10^{-9}$ Ф заряжен до напряжения $U=\mathscr{E}=2$ В. Какую работу нужно совершить, чтобы, раздвигая обкладки, увеличить расстояние между ними в $n=2$ раза? После зарядки конденсатор отключен от источника.

Билет 3.

1. Тело массой m лежит неподвижно на наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту. Укажите все силы, действующие на тело.

2. Определите давление, при котором $V=1$ м^3 газа содержит $N=2{,}4\cdot10^{26}$ молекул. Температура газа $t=60$ °C.

3. На рисунке 5 показано изображение $A'B'$ некоторого прямого непрерывного предмета AB в собирающей линзе. Изображение получилось состоящим из двух полубесконечных частей, одна из которых действительная, а другая — мнимая. Восстановите расположение предмета AB.

4. На заземленный в точке B высокоомный проводник AB (рис. 6) положили такой же проводник так, что в их средних точках образовался надежный контакт. К точкам C и B, а также D и B проводниками с малым сопротивлением подсоединили источники с ЭДС $\mathscr{E}_1=4$ В и $\mathscr{E}_2=1$ В. Определите потенциал точки A. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

Публикацию подготовили
В. Архипов, В. Грушин, Н. Мирошин,
А. Руденко, Д. Храмченков

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\frac{x}{x+1} \geqslant 2.$$

2. Решите уравнение

$$x^2+2x-9=\sqrt{6+4x+2x^2}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\operatorname{ctg} 3x.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{x+1}(-6x-2x^2) \geqslant \log_{x+1}(1-3x).$$

5. В треугольнике ABC площадь равна $30\sqrt{3}$, угол $A=60°$. Проведена окружность с центром на BC, которая касается сторон AB и AC. Радиус этой окружности равен $\frac{60\sqrt{3}}{23}$. Найдите стороны треугольника ABC.

6. При каких значениях параметра a существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая соотношению

$$ax^2+(3a+2)y^2+4axy-2ax+$$
$$+(4-6a)y+2=0.$$

Вариант 2

1. Решите уравнеиие

$$4x\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}-1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x^2-2x+2-|x|} \leqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{tg} 2x+2\operatorname{ctg} x=\sin 5x.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{17}(3x^2-21x+18)-2\log_{289}x \leqslant 1+\frac{1}{\log_2 17}.$$

5. В треугольнике ABC касательная к вписанной окружности, параллельная BC, пересекает AB и AC в точках M и N, прнчем $MN=13/14$. Найдите отрезки, на которые сторону BC делит вписанная окружность, если $BC=13$, а $\angle A=120°$.

6. Угол на плоскости образован прямыми l_1 и l_2, имеющими уравнения $y=0$ и $y=-x+1$. В точках $B_1\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $B_2\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$ находятся шарики. При ударе шарик B_1, отразившись от l_2, затем от l_1 и затем снова от l_2, попал в шарик B_2. Найдите координаты точки второго отражения шарика от прямой l_2.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С каким ускорением должна бежать по доске собака массой m, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

2. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки стоят два рыбака, массы которых M_1 и M_2. На сколько сместится лодка, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

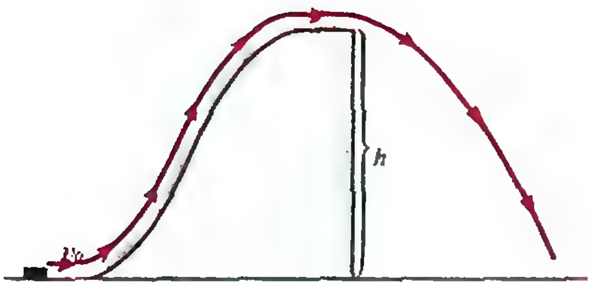
3. Шайба, скользящая по горизонтальной поверхности со скоростью $v_0=20$ м/с, поднимается на трамплин высотой $h=10$ м, верхняя часть которого горизонтальна, и соскальзывает с него в воздух (см. рисунок). Чему равна дальность полета шайбы в воздухе?

4. Воздух находится в открытом сверху вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой $m=20$ кг и сечением $S=20$ см^2. После того как сосуд стали двигать вверх с ускорением $a=5$ м/с^2, высота столба воздуха между поршнем и дном сосуда уменьшилась на 20 %. Считая температуру постоянной, найдите по этим данным атмосферное давление. Треинем между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

5. Смешали $V_1=1$ м^3 воздуха с влажностью $\varphi_1=20$ % и $V_2=2$ м^3 воздуха с влажностью $\varphi_2=30$ %, имеющих одинаковую температуру. Определите влажность образовавшейся смеси, если она занимает объем $V=3$ м.

6. Протон, летящий в направлении ядра атома гелия, на очень большом расстоянии от него имеет скорость $v=2\cdot10^4$ м/с. На какое расстояние сможет приблизиться протон к ядру? Масса протона $m=1{,}67\times10^{-27}$ кг, масса ядра атома гелия $M=6{,}68\cdot10^{-27}$ кг, заряд протона $e=1{,}6\times10^{-19}$ Кл.

7. При электролизе раствора H_2SO_4 с сопротивлением $r=0{,}4$ Ом за время $\tau=30$ мин выделилось $V=3{,}3$ л водорода



(при нормальных условиях). Определите мощность, израсходованную на нагревание электролита. Число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{33}$ 1/моль, величина элементарного заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

8. Ионы, ускоренные напряжением $U = 10$ кВ, попадают через щель в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл перпендикулярно линиям вектора магнитной индукции. В магнитном поле ионы движутся по дуге окружности и, совершив половину оборота, попадают на фотопластинку. На каком расстоянии друг от друга будут находиться следы, образованные однозарядными ионами водорода и гелия? Заряды ионов $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, массы ионов $m_1 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг и $m_2 = 6{,}68 \times 10^{-27}$ кг соответственно.

9. Самолет летит горизонтально со скоростью $v = 720$ км/ч. Чему равна разность потенциалов, возникающая между концами крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_в = 50$ мкТл? Размах крыльев самолета $l = 20$ м. Чему равна максимальная ЭДС, которая может возникнуть при полете самолета, если горизонтальная составляющая поля Земли $B_г = 20$ мкТл? Как должен лететь при этом самолет?

10. На рассеивающую линзу падает цилиндрический пучок лучей, параллельных оптической оси; диаметр пучка $a = 5$ см. За линзой на расстоянии $l = 10$ см поставлен экран, на котором получается круглое световое пятно диаметром $b = 25$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили С. Бенеславский, В. Варфоломеев, А. Кисунько, М. Красненков, И. Матусевич, В. Сорокин

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет информатики и экономики)

1. Упростите выражение и вычислите его значение при $a = 5$

$$\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}}\right)^{-1} \frac{a - \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} - 1} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1}.$$

2. Найдите количество целых чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{2x^2 - 5x - 35} > 1{,}8.$$

3. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

4. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x + 3y - 9} + \sqrt[4]{2y - x + 11} = 3, \\ \sqrt{2y - x + 11} - \sqrt{3y + x - 9} = 3. \end{cases}$$

5. Первоначальная стоимость единицы продукции равнялась 75 руб. В течение первого года производства она повысилась на некоторое число процентов, а в течение второго года снизилась (по отношению к повышенной стоимости) на такое же число процентов, в результате чего она стала равна 72 руб. Определите проценты повышения и понижения стоимости единицы продукции.

6. К кривой $y = 3x^2 - 8x + 1$ проведена касательная параллельно прямой $4x + 2y - 1 = 0$. Найдите ординату точки касания.

7. Вычислите без таблиц

$$\operatorname{ctg} 80° \operatorname{ctg} 70° + \operatorname{ctg} 70° \operatorname{ctg} 30° + \operatorname{ctg} 30° \times \operatorname{ctg} 80°.$$

8. Решите уравнение

$$\frac{1}{\log_6(x+1)} - \frac{\log_2(6-x)}{\log_2(x+1)} = 1.$$

9. Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^3 x} = 4.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-\pi; 2\pi]$.

10. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки длиной 9 и 16. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

11. В основании пирамиды лежит ромб с острым углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды, если радиус вписанной в ромб окружности равен $\sqrt{3}$.

12. Найдите сумму всех целочисленных значений параметра a, при которых квадратный трехчлен $x^2+2ax+a^2+4a$ отрицателен при всех x, удовлетворяющих условию $1<x<3$.

Вариант 2

(факультеты металлургии черных металлов и сплавов, цветных, редких металлов и сплавов, технологический)

1. Найдите ординату вершины параболы $y=2(x+1)(x+3)$.

2. Найдите меньший из корней уравнения

$$2^{x^2+10x}=0{,}5^9.$$

3. Вычислите без таблиц

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+\arccos 0{,}8\right).$$

4. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{8}{2}}}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2}\right):\frac{1}{(ab)^{-\frac{1}{2}}}.$$

5. Решите уравнение

$$x^2-7x+\sqrt{x^2-7x+8}=12.$$

В ответе запишите произведение его корней.

6. Найдите сумму девяти первых членов арифметической прогрессии, если разность между седьмым и третьим членами равна 8, произведение второго и седьмого членов равно 75, причем известно, что все члены прогрессии положительны.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$x^4-8x^2+7.$$

8. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника на 3 больше длины другого катета. Найдите длину большего катета, если площадь треугольника равна 9.

9. В тонне руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 400 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Сколько килограммов железа осталось в руде после удаления указанных 400 кг примесей?

10. Найдите сумму корней уравнения (в градусах)

$$\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x,$$

принадлежащих отрезку $[0;\ \pi]$.

11. Найдите длину промежутка, являющегося множеством решений неравенства

$$\log_{x+3}0{,}5>0{,}5.$$

12. Одна из вершин куба и центры его граней, не содержащие эту вершину, служат вершинами пирамиды. Найдите ее объем, если сторона куба равна 3.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело массой $m=150$ кг движется равномерно по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы, направленной под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость $\mu=0{,}33$. Определите работу по перемещению тела на расстояние $l=71{,}5$ м.

2. Деревянный брусок высотой $h=10$ см с площадью основания $S=400$ см^2 плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду и отпустили. Найдите частоту колебаний бруска. Силу трения не учитывать. Плотность дерева $\rho=0{,}8$ г/см^3.

3. Какой путь пройдут санки по горизонтальной поверхности после спуска с горы высотой $h=25$ м, имеющей наклон $\alpha=30°$ к горизонту? Коэффициент трения не меняется на всем пути и равен $\mu=0{,}25$.

4. При разрушении вращающейся части машины осколки могут отлететь под углом $\alpha=60°$ к горизонту со скоростью $v=3$ м/с. Какой минимальной высоты надо поставить ограждение на расстоянии $l=0{,}5$ м от машины, чтобы осколки не вылетели за пределы ограждения?

5. Воздух, находящийся при температуре $t_1=20$ °С, имеет влажность 100 %. При этом давление насыщенного пара $p_{\text{н}1}=2330$ Па. Какое количество росы (в граммах) выпадет из $V=1$ м^3 воздуха, если его охладить до температуры $t_2=17$ °С, при которой давление насыщенного пара $p_{\text{н}2}=1962$ Па? Охлаждение водяного пара считать изохорическим.

6. Определите плотность смеси, состоящей из $m_1=8$ г водорода и $m_2=64$ г кислорода, при температуре $t=27$ °С и давлении $p=101$ кПа.

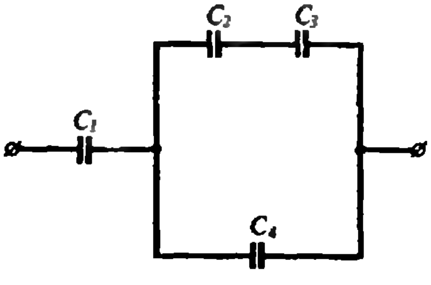


Рис. 1.

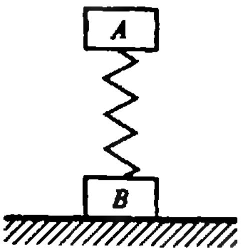


Рис. 2.

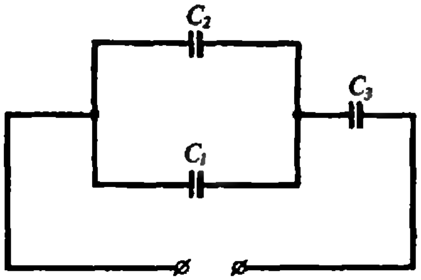


Рис. 3.

7. Чему равно внутреннее сопротивление одного источника тока, если при включении восьми таких источников двумя параллельными группами по четыре источника, соединенных последовательно в каждой группе, на нагрузочном сопротивлении $R=3$ Ом выделяется такая же мощность, как в случае последовательного соединения всех восьми элементов?

8. Заряженные шарики находятся на расстоянии $r=0{,}5$ м друг от друга и отталкиваются с силой $F=3{,}24$ Н. Общий заряд шариков $q=5\cdot10^{-5}$ Кл. Найдите разность между бóльшим и меньшим зарядами шариков.

9. Конденсаторы соединены по схеме, указанной на рисунке 1: $C_1=C_2=2$ мкФ, $C_3=3$ мкФ, $C_4=1$ мкФ. Напряжение на обкладках конденсатора емкостью C_4 равно $U=200$ В. Определите напряжение на всей батарее конденсаторов.

10. Определите угол между отраженным и преломленным лучами, если угол падения α луча на границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\alpha=n_2/n_1$.

Вариант 2

1. Тело A массой $m_1=1$ кг и тело B массой $m_2=4{,}1$ кг соединены между собой пружиной, как показано на рисунке 2. Тело A совершает свободные гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой $x_m=1{,}6$ см и циклической частотой $\omega=2{,}5$ с$^{-1}$. Пренебрегая массой пружины, найдите наибольшую силу давления этих двух тел на опорную горизонтальную плоскость.

2. С башни высотой $h=25$ м брошен горизонтально камень массой $m=0{,}2$ кг со скоростью $v_0=15$ м/с. Найдите кинетическую энергию камня через $t=1$ с после начала движения.

3. Два груза, массы которых $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг, связаны перекинутой через неподвижный блок нитью. В начальный момент времени оба груза были неподвижны и второй груз находился выше первого на $h=1$ м. Через какое время после начала движения грузы будут находиться на одинаковой высоте?

4. Каким должен был бы быть период обращения Земли вокруг своей оси, чтобы тела на экваторе находились в состоянии невесомости?

5. Сколько молекул содержится в объеме $V=1$ мм^3 газа при температуре $t=27$ °С и давлении $p=10^{-11}$ мм рт. ст.?

6. Один моль кислорода при температуре $t=0$ °С нагревается при постоянном давлении. Какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы его объем увеличился в два раза? Удельная теплоемкость кислорода при указанных условиях равна $c_p=0{,}92$ кДж/(К · кг).

7. Во сколько раз увеличится разность потенциалов на обкладках конденсатора емкостью C_3 (рис. 3) при пробое конденсатора емкостью C_2, если $C_1=200$ пФ, $C_2=600$ пФ, $C_3=800$ пФ?

8. Батарейка для карманного фонаря имеет ЭДС $\mathcal{E}=4$ В и внутреннее сопротивление $r=2$ Ом. Сколько таких батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу мощностью $P=60$ Вт, рассчитанную на напряжение $U=120$ В?

9. Определите абсолютную величину ЭДС индукции, возникающей в прямом проводнике длиной $l=0{,}4$ м, пересекающем магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл под углом $\alpha=60°$ к линиям магнитной индукции со скоростью $v=0{,}6$ м/с.

10. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч света падает из воздуха на одну из граней призмы перпендикулярно ей. Найдите угол между лучом, выходящим из призмы, и продолжением луча, падающего на призму. Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

Публикацию подготовили
В. Башкиров, Г. Левшина, Б. Разумейко

Числовые фризы

Дж. КОНВЕЙ

Вот простенькая арифметическая игра. Напишите два ряда единиц и соедините их зигзагом из единиц, как в приводимом примере (точками отмечены места, куда в дальнейшем будут вписываться числа):

```
1   1   1   1   1   1   1   1   1 ...
  1   .   .   .   .   .   .   .
    1   .   .   .   .   .   .   .
      1   .   .   .   .   .   .
    1   .   .   .   .   .   .   .
  1   .   .   .   .   .   .   .
    1   .   .   .   .   .   .   .
      1   1   1   1   1   1   1   ...
```

А теперь начните заполнять пустые места по «правилу ромба»: для четырех соседних чисел, расположенных ромбом,—

```
    С
З       В
    Ю
```

произведение $З \cdot В$ на 1 больше $С \cdot Ю$, т. е.

$$В=(С \cdot Ю+1)/З.$$

Вот что получится в нашем примере:

```
1   1   1    1    1   1   1
  1   2   2    4    2   1
    1   3   7    7    1
      1   10  12   3    1
    1   3   17   5    2   1
  1   2   5    7    3   1
    1   3   2    4    1
      1   1    1    1   1
```

Попробуйте и другие зигзаги. Вы обнаружите несколько любопытных закономерностей.

1. Все деления выполняются нацело, т. е. все числа в таблице будут натуральными.

2. В каждой строчке вновь появляется единица.

3. После этого строчки можно не продолжать, потому что новые единицы образуют точно такой же зигзаг, как тот, с которого вы начали, только перевернутый вверх ногами, так что полная таблица будет периодической:

```
1   1   1    1    1   1   1   1    1    1
  1   2   2    4    2   1   3    2    4   1
    1   3   7    7    1   2   5    7    3   1
      1   10  12   3    1   3   17   5    2   1
    1   3   17   5    2   1   10  12   3    1
  1   2   5    7    3   1   3    7    7   1
    1   3   2    4    1   2   2    4    2   1
      1   1    1    1   1   1    1    1   1   1
```

Можете ли вы это объяснить?

Нечто похожее происходит и если умножение заменить сложением. На этот раз надо начать с двух рядов нулей, соединенных зигзагом из нулей, а ромбики достраивать по правилу $В+З=(С+Ю)+1$, или

$$В=(С+Ю+1)-З.$$

На сей раз, конечно, во всех строках выскакивают нули:

```
0   0   0   0      0      0     0   0   0
  0   1   2    5      6      4    3   0
    0   2   6     10     9     6   2   0
      0   5   10     12     10   4   1   0
    0   2   8     11     12    7   2   0
  0   1   4    8      10     8   4   0
    0   2   3     6      5     4   1   0
      0   0    0      0      0   0   0   0
```

Можете ли вы объяснить, почему числа здесь не становятся отрицательными, почему строки заканчиваются нулями и почему эти нули образуют точную (не перевернутую) копию исходного зигзага?

Если отказаться от зигзага из единиц, соединяющего крайние ряды, можно все равно наткнуться на интересные узоры. Например, на мультипликативные фризы*), в которых каждый ряд состоит из одинаковых положительных чисел:

---

*) Мультипликативный — значит связанный с умножением (в данном случае, по правилу ромба), фризом или бордюром называют периодически повторяющийся рисунок на бесконечной полосе.

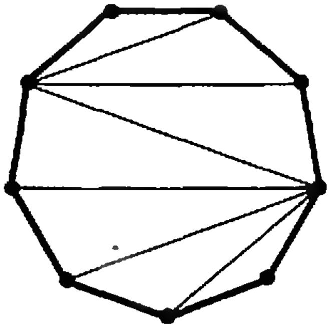
$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\
 & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Вы видите, что числа здесь уже не целые. Что же это за числа? Подсказка: ответ связан с многоугольниками.

Мультипликативные фризы из натуральных чисел тоже связаны с многоугольниками. Как? Вторая подсказка: многоугольник для самого первого нашего примера выглядит так:



От редакции. Этой статьей мы открываем публикацию переводов из «Квантума» — советско-американского журнала, который можно назвать младшим братом «Кванта». Он начал издаваться в США в начале прошлого года, а в этом месяце подписчики получат уже 6-й номер. Пока бо́льшую часть его материалов составляют переводы статей из «Кванта», но предполагается увеличение американской доли, и мы собираемся знакомить наших читателей со всеми наиболее интересными статьями американских авторов. К ним, безусловно, относятся заметки под рубрикой «Математические сюрпризы», которую ведет в «Квантуме» человек, наверняка знакомый читателям «Кванта», — профессор Принстонского университета Джон Конвей. Его имя появлялось на страницах нашего журнала совсем недавно (см. заметку «Кубики Мак-Магона и таблица Конвея» в «Кванте» № 12 за 1990 год), не раз встречались мы с ним и раньше, скажем, он придумал игру «жизнь», ставшую знаменитой благодаря книгам Мартина Гарднера.

Мы не сомневаемся, что числовые фризы увлекут многих наших читателей и дадут материал для самостоятельных исследований. О фризах упоминается и в книге Гарднера «Крестики-нолики» (М., Мир, 1988, с. 228), где можно найти литературные ссылки. В «Кванте» тоже встречались числовые узоры, получающиеся по правилу ромба, — см. задачу М1209, решение которой опубликовано в 7-м номере за прошлый год. Мы надеемся получить от вас письма с ответами на вопросы, поставленные Конвеем, и тогда вновь вернуться к числовым фризам.

Публикацию подготовил В. Дубровский

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи по физике

1. Очевидно, что модуль уравновешивающей силы $\vec{F}$ равен разности модулей действующих на стержень сил:

$$F=F_2-F_1=15\ \text{Н}.$$

Ясно также, что точка приложения уравновешивающей $\vec{F}$ лежит на прямой, соединяющей точки приложения сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, справа от большей силы (рис. 1). Обозначим искомое расстояние через x. Тогда по правилу моментов получаем

$$F_1(l+x)-F_2x=0,$$

и

$$x=F_1l/(F_2-F_1)=1\ \text{м}.$$

Заметим, что в случае $F_1=F_2$, т. е. когда на тело действует так называемая пара сил, уравновешивающей силы, в обычном смысле этого слова, нет. Под действием пары сил тело приходит во вращательное движение вокруг его центра тяжести.

2. Силы, действующие на катушку, изображены на рисунке 2. Запишем условия равновесия катушки в виде

$$N-T\sin\alpha=0,$$
$$Tr-F_{\text{тр}}R=0.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}}=\mu N$, получаем

$$\sin\alpha=\frac{r}{\mu R}=\frac{1}{2},\ \text{и}\ \alpha=30^\circ.$$

3. Заменим два маленьких шарика одним, находящимся посередине между ними и обладающим массой $2m$. Тогда центр масс системы трех шариков лежит на середине биссектрисы угла, в вершине которого находится шарик массой $2m$.

4. Из соображений симметрии ясно, что центр тяжести пластинки лежит на ее оси на некотором расстоянии x от центра круга. Если вложить обратно вырезанную часть пластинки, то центр тяжести пластинки сместится в ее центр. Запишем соответствующее правило моментов (см. рис. 3):

$$m_1gx-m_2gR/2=0.$$

Но

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{R^2-R^2/4}{R^2/4}=3,$$

поэтому получаем

$$3x=R/2,\ \text{и}\ x=R/6.$$

5. На опущенный в воду палец действует выталкивающая сила. Согласно третьему закону Ньютона, такая же по величине, но противоположная по направлению сила действует на воду и через нее — на дно сосуда. Следовательно, сосуд с водой перевесит, т. е. равновесие нарушится.

6. Сопротивление резистора, рассчитанное по схеме *а*), больше истинного на величину сопротивления амперметра. Поэтому погрешность измерения равна

$$\delta=\frac{\Delta R}{R}=\frac{R_a}{R},\ \delta_1=10\ \%,\ \delta_2=0{,}02\ \%.$$

Сопротивление, рассчитанное по схеме *б*), меньше истинного на величину $R-RR_\text{в}/(R+R_\text{в})$. В этом случае погрешность измерения равна

$$\delta=\frac{R}{R+R_\text{в}},\ \delta_1\approx 0{,}1\ \%,\ \delta_2\approx 33\ \%.$$

Таким образом, для измерения малых сопротивлений лучше пользоваться схемой *б*), а для измерения больших сопротивлений — схемой *а*).

7. См. рис. 4.

8. В первом случае по цепи течет ток $I=2\mathscr{E}/(2r)=\mathscr{E}/r$. Разность потенциалов между точками A и B равна

$$U=\mathscr{E}-Ir=0.$$

Во втором случае ток в цепи отсутствует, поэтому

$$U=\mathscr{E}.$$

9. Мощность источника, равная произведению тока в линии на напряжение, должна быть на 10 % больше потребляемой мощности:

$$IU=1{,}1P.$$

Потери мощности в линии передачи равны

$$I^2R=0{,}1P.$$

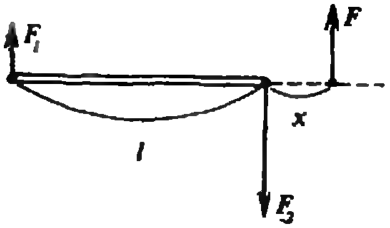


Рис. 1.

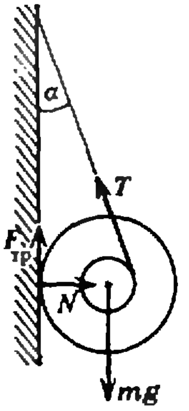


Рис. 2.

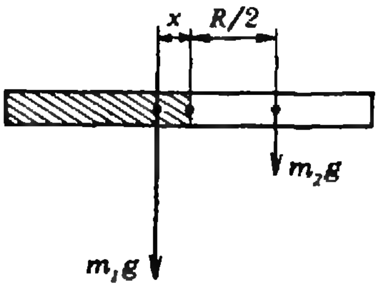


Рис. 3.

Отсюда получаем

$$R=\frac{0{,}1U^2}{(1{,}1)^2P}\approx 9\ \text{Ом}.$$

10. Согласно закону сохранения энергии, механическая работа равна разности энергии, потребляемой электромотором от батареи, и тепловой энергии, теряемой в его обмотке:

$$A=\mathscr{E}I_1t-I_1^2rt.$$

Сопротивление обмотки r найдем тоже из закона сохранения энергии, но записанного для случая полного затормаживания якоря:

$$0=\mathscr{E}I_2t-I_2^2rt.$$

Таким образом,

$$A=\mathscr{E}I_1(1-I_1/I_2)t=8\ \text{Дж}.$$

11. Из формулы зависимости массы от скорости

$$m=m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

получаем

$$v/c=\sqrt{(1-(m_0/m)^2}=0{,}6=60\ \%.$$

12. Из первой ядерной реакции

$$x+{}^{27}_{13}\text{Al}\rightarrow{}^{27}_{12}\text{Mg}+{}_1y$$

следует, что первая неизвестная частица не имеет электрического заряда. Значит, это нейтрон:

$$x={}^1_0n.$$

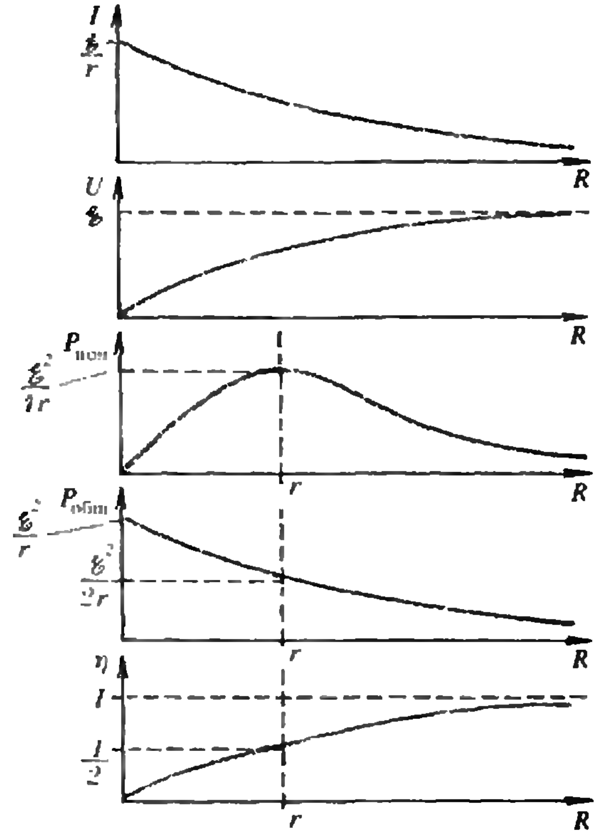


Рис. 4.

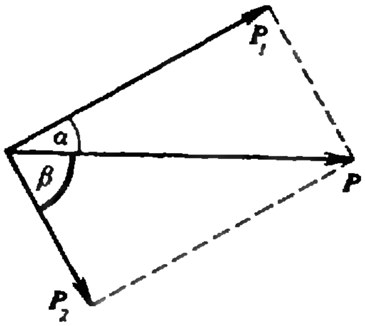


Рис. 5.

Тогда из первой же реакции получаем, что вторая неизвестная частица — протон:

$$y={}^1_1p.$$

Остается записать вторую ядерную реакцию:

$${}^1_1p+{}^{27}_{13}\text{Al}\rightarrow{}^{24}_{12}\text{Mg}+z,$$

откуда находим

$$z={}^4_2\alpha.$$

13. Запишем для замкнутой системы «π-мезон — два фотона» законы сохранения энергии и импульса (см. рис. 5):

$$\begin{aligned}&E=E_1+E_2,\\&P=P_1\cos\alpha+P_2\cos\beta,\\&0=P_1\sin\alpha-P_2\sin\beta.\end{aligned}$$

Учитывая, что $E=mc^2$, $P=mv$, $P_1=E_1/c$ и $P_2=E_2/c$, найдем искомую скорость v мезона (массой m):

$$v=c\sin(\alpha+\beta)/(\sin\alpha+\sin\beta)\approx 2{,}2\cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

14. Обозначим изменение внутренней энергии атома водорода через ΔE. Тогда длина волны фотона, который может излучить атом, возвращаясь в невозбужденное состояние, будет равна

$$\lambda=hc/\Delta E.$$

Теперь воспользуемся законами сохранения импульса и энергии для процесса столкновения атома водорода с протоном:

$$\begin{aligned}&mv_0=mv_1+Mv,\\&\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}+\Delta E.\end{aligned}$$

Поскольку масса протона m практически равна массе атома водорода M, получим

$$\Delta E=mv_1(v_0-v_1),$$

и

$$\lambda=hc/(mv_1(v_0-v_1))\approx 1{,}3\cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

15. Энергия, выделяемая при данной ядерной реакции, равна разности энергии связи ядра гелия и суммарной энергии связи ядер дейтерия и трития:

$$\begin{aligned}E=&(2m_p+2m_n-m_{^4\text{He}})c^2-\\&-(2m_p+3m_n-m_{^2\text{H}}-m_{^3\text{H}})c^2=\\&=(m_{^2\text{H}}+m_{^3\text{H}}-m_{^4\text{He}}-m_n)c^2=\\&=(2{,}01355+3{,}01550-4{,}00159-1{,}00866)\times\\&\times 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{16}/1{,}6\cdot 10^{-13}\ \text{МэВ}\approx\\&\approx 17{,}7\ \text{МэВ}.\end{aligned}$$

[illegible]сибирский государственный [illegible]ерситет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. (4; 1).
2. $\arccos(-1/4)$.
3. 25/4. **Указание.** Из прямоугольных треугольников ACH и BCH найдем, что $AH=9$, $BH=5$. Затем из подобия треугольников HBM и ABC получаем $BM=65/14$ и $NH=117/14$. Осталось найти BD из подобия треугольников DHN и DBM.
4. $(-\infty;\ -(1+\sqrt{3})/2)\cup(-1;\ (\sqrt{3}-1)/2)\cup[1;\ +\infty)$.
5. $5a\sqrt{2}$. **Указание.** Пусть P' и O' — соответственно проекции точек P и O на плоскость $ABB'A'$. Поскольку O — середина PQ и $OO'=2a$, то $PP'=4a$, но тогда $PP'=2B'C'$, и, значит, $P'B'=B'B$. Рассмотрите теперь треугольник QBP', лежащий в плоскости грани $ABB'A'$. В этом треугольнике QB' и BO' — медианы. Их точка пересечения и совпадает с центром K грани $ABB'A'$. Отсюда $BO'=3BK/2=3a\sqrt{2}/2$. Далее получим, что $P'O'=\sqrt{34}\,a/2$, а затем находим PQ.

Вариант 2

1. $\operatorname{arctg} 5+\pi n,\ -\operatorname{arctg} 1/2+\pi n,\ n\in Z$
2. $(-\infty;\ -4+4\sqrt{2})\cup(8;\ +\infty)$.
3. $2(\sqrt{3}-1)R/3$. **Указание.** Пусть O — центр данной окружности, O' — искомой. Если радиус искомой окружности равен x, то $OO'=R-x$. Треугольник AOC — правильный (убедитесь в этом). Поскольку AO' — биссектриса угла OAC, найдем $AO'=2x$. Уравнение для определения x получим, записав теорему косинусов для треугольника AOO'.
4. 36. **Указание.** Если $(x_1;\ y_1)$ — координаты точки касания, то $y'(x_1)=x_1+1=6$.
5. $27\sqrt{6}/2$. **Указание.** Пусть M, K и N — точки пересечения секущей плоскости соответственно с ребрами SD, SC и SB, а M', K' и N' их проекции на плоскость основания $ABCD$. Тогда $BN'=DM'=BD/6$, $CK'=CA/4$. Площадь четырехугольника $AM'K'N'$ равна $9\cos 60^\circ=9/2$. Отсюда находим сторону основания, а затем и высоту пирамиды.

Вариант 3

1. $2^{3+2\sqrt{3}}$; $2^{3-2\sqrt{3}}$. **Указание.** Выполните замену $y=\log_2 x$.
2. $\pi+\arcsin 1/3$.
3. 31/2 и 17/2. **Указание.** Пусть K, L и M, N — соответственно точки касания l_1 и l_2 с окружностями O_1 и O_2, по условию $KL=24$, $MN=7$. Если r_1 и r_2 — радиусы O_1 и O_2 (для определенности пусть $r_1\geqslant r_2$), то, опуская перпендикуляры O_2P на O_1K и O_1Q на O_2N и учитывая, что $O_1O_2=r_1+r_2+1$, получите из прямоугольных треугольников O_1PO_2 и O_1QO_2 два уравнения для определения r_1 и r_2: $4r_1r_2+2(r_1+r_2)=575$, $r_1+r_2=24$.
4. $[-22/3;\ -4)\cup(1;\ +\infty)$.
5. 3/4. **Указание.** Центр O сферы лежит в плоскости $AA'K$. Пусть P и N — точки касания сферы с плоскостью основания ABC и прямой $A'K$ соотвественно, L — точка пересечения прямой KA' с основанием. Покажите, что если искомый радиус R, то $AP=2R$. В то же время LO — биссектриса острого угла прямоугольного треугольника $AA'L$. Пусть $\angle ALA'=2\alpha$, тогда $\cos 2\alpha=3/5$, $\operatorname{tg}\alpha=1/2$ и $PL=AP=2R$.

Физика

Вариант 1

1. Напряженность поля в точке O от одного кольца равна E и направлена вдоль оси. Тогда от перпендикулярных колец напряженность в точке O равна $\sqrt{2}E$, а от совмещенных — $2E$. т. е. она увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.
2. За время t самолет пройдет путь $S_0S_1=ut$ (рис. 6), а звук — $S_0^{*}S_1=S_0AS_1=vt$, где S_0^{*} — изображение точки S_0. Отсюда

$$\cos\alpha=ut/(vt),\quad \alpha=\arccos(u/v).$$

3. Пусть скорость пушки после выстрела V, горизонтальная скорость снаряда v, а вертикальная u. Если пушка не закреплена, то по закону сохранения импульса $v=V$. Так как угол наклона ствола пушки 45° и относительно нее горизонтальная составляющая скорости равна вертикальной, то $v+V=u$. Таким образом, $u=2V$. Для закрепленной пушки $v'=u'$ (подчеркнем, что $u'\neq u$). Энергия сжатой пружины в обоих случаях одинакова, поэтому из закона сохранения энергии

$$m(v^2+u^2)/2+mV^2/2=mv'^2/2+mu'^2/2.$$

подставляя $u^2=4V^2$, $v^2=V^2$ и $v'^2=u'^2$, получаем $u'^2=3V^2$. Так как высота подъема снаряда $h=u^2/(2g)$, то отношение высот

$$h/h'=(u/u')^2=4/3.$$

4. Груз, помещенный в центр масс корабля, движущегося по круговой орбите, будет находиться в состоянии невесомости, когда $m\omega^2r=GmM_З/r^2$. Чем дальше от центра масс находится груз, подвешенный на пружине, тем большая сила необходима для удержания этого груза в положении равновесия и тем сильнее, следовательно, растягивается пружина. Пусть груз находится на предельном расстоянии h — у стенки. Тогда по второму закону Ньютона

$$m\omega^2(r+h)=\frac{GmM_З}{(r+h)^2}+T.$$

С учетом предыдущего получаем

$$T=m\omega^2(h+r)-\frac{m\omega^2r}{(1+h/r)^2}\approx$$

$$\approx m\omega^2(h+r)-m\omega^2r(1-2h/r)=3m\omega^2h.$$

Так как $m\omega^2R_З=mg$, то $T\sim 3mgh/R_З$. Полагая $R_З\approx 6\cdot 10^6$ м, $h\sim 2$ м, $m=1$ кг, находим

$$T\sim 10^{-5}\,Н.$$

5. Если прикоснуться сухой тряпкой (или совсем не прикасаться) к области, на которую падает преломленный на торце луч света, то он может испытать (в опыте так и происходит) полное внутреннее отражение от границы орг-

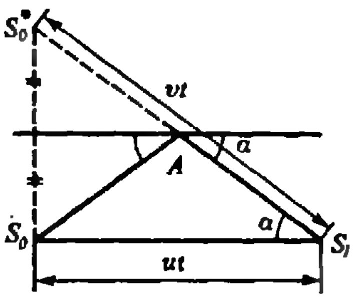


Рис. 6.

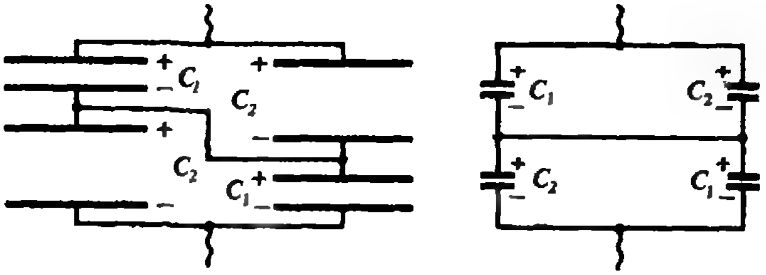


Рис. 7.

стекло — воздух и идти дальше почти без потерь. Если же прикоснуться мокрой тряпкой, то свет уже не испытает полного внутреннего отражения, а в значительной степени выйдет через грань наружу и поглотится в тряпке. Сильно ослабленный пучок света создает едва заметное пятно на экране.

Вариант 2

1. $R_x = 3R$.

2. Нарисовав эквивалентные схемы (рис. 7), получаем, что изменившаяся емкость

$$C_x = (C_1 + C_2)/2, \text{ где } C_1 = \varepsilon_0 S/(2d_0),$$
$$C_2 = \varepsilon_0 S/(2(d_0 - d_1)).$$

Начальная же емкость была

$$C_0 = \varepsilon_0 S/(d_0).$$

Таким образом, емкость увеличилась в

$$C_x/C_0 = d_0^2/(4d_1(d_0 - d_1)) \text{ раз.}$$

3. По условию, отношение энергий мячика после отскока и до него равно 1/3. В системе центра масс удар мячика о мячик происходит как удар мячика о твердую стенку, после которого остается лишь треть от энергии до удара, т. е. скорость уменьшается в $\sqrt{3}$ раз. В этой же системе отсчета скорость до удара равна $1/2\sqrt{2gl}$, а после удара — $\sqrt{gl/6}$. В начальной системе отсчета скорости мячиков после соударения равны

$$v_{1,2} = \pm u + 1/2\sqrt{2gl} = \sqrt{gl/2}\,(1 \pm 1/\sqrt{3}).$$

Отсюда находим искомые углы отклонения

$$\varphi_{1,2} = \arccos\left(1 - v_{1,2}^2/(2gl)\right) = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

(знак «+» — для налетающего мячика).

4. Введя радиус шарика R, плотность воздуха $\rho_в$, водорода ρ_{H_2} и резины $\rho_р$, а также толщину оболочки δ, по условию равновесия имеем

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_в = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{H_2} + 4\pi R^2 \delta \rho_р \sim 4\pi R^2 \delta \rho_р.$$

Отсюда при $R = 20$ см, $\rho_в \sim 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $\rho_р \sim 1$ г/см^3 получаем

$$\delta \sim R\rho_в/(3\rho_р) \sim 0{,}1 \text{ мм.}$$

5. При переворачивании системы с закрытой трубкой разрежение над водой не дает ей вылиться. После вынимания пробки давление над водой в трубке — атмосферное; вода полностью выливается из трубки и частично из сосуда, куда пузырями входит воздух. В широком сосуде уровень воды достигает конца трубки (так как и там и там — атмосферное давление).

Вариант 3

1. $T_1 = 4T$.

2. Из закона сохранения импульса (обозначив скорость налетающей частицы до удара v, после ее рассеяния u, а для частицы с массой M после удара — V)

$$MV \sin\alpha = mu, \quad MV \cos\alpha = mv$$

и закона сохранения энергии

$$mv^2/2 = mu^2/2 + MV^2/2$$

находим

$$m = M\frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} = M \cos 2\alpha.$$

3. Облако и пластина образуют плоский конденсатор с полем напряженностью $E = en/\varepsilon_0$. На верхней границе облака скорость электронов v_0, а на нижней они имеют ускорение $a = eE/m = e^2n/(m\varepsilon_0)$. К моменту времени t верхние электроны пройдут путь $h_1 = v_0(t + \tau)$, а нижние — $h_2 = v_0 t - at^2/2$, отсюда искомая толщина облака

$$h = h_2 - h_1 = v_0\tau + \frac{e^2nt^2}{2m\varepsilon_0} \text{ при } t < \frac{2v_0}{a}.$$

Через время $t_0 = 2v_0/a$ нижние электроны начнут возвращаться на пластину, а верхние не изменят свое движение, поэтому при $t \geqslant 2v_0/a$ $h = v_0(t + \tau)$.

4. Пусть мощность лампочки P, скорость света c, тогда $F \sim \eta P/c$, где коэффициент η учитывает, что не все фотоны попадают на стол, некоторая часть света падает на стол под углом, свет лишь частично поглощается столом. Положив $\eta \sim 10^{-1}$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $P = 40$ Вт, получаем

$$F \sim 10^{-8}\text{Н}.$$

5. Лучи, входящие под углом к оси волокна и падающие на левую и правую половины сечения волокна, поворачиваются при многократных отражениях от цилиндрических стенок волокна в противоположные стороны. Чем ближе к стенке волокна входит луч, тем больше отражений он испытывает. Угол луча относи-

тельно оси волокна сохраняется при всех отражениях, поэтому конус света на выходе имеет тот же угол.

[redacted]ковский авиационный
итут им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. 18.

2. $(-\infty; \frac{4}{3}]\cup(2; +\infty)$.

3. $2\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

4. $\frac{3-\sqrt{5}}{6\sqrt{8\sqrt{3}}}$. Указание. Пусть S_1 и S_2 — площади боковой поверхности и основания пирамиды соответственно, α — угол наклона боковых граней к плоскости основания. Тогда $S_2=S_1\cos\alpha$. Кроме того, по условию $S_1=\cos\alpha$, $S_2=\sin\alpha$. Поэтому $\sin\alpha=\cos^2\alpha$ и $S_2=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $S_1=\cos\alpha=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. Теперь без труда находим сторону основания и высоту пирамиды.

5. $\frac{a}{\cos\alpha}$. Указание. Точки A, B, C и D лежат на окружности с диаметром AD. Поэтому $\angle BCD=\angle BAD=\alpha$, и, значит, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $AC=\frac{a}{\cos\alpha}$

6. $\left[-\frac{13}{11}; -1\right]\cup\left[1; \frac{13}{11}\right]$. Указание. Неравенство $|66f(x)-90|\leqslant 24$ равносильно неравенству $1\leqslant f(x)\leqslant\frac{57}{33}$. (*) Поскольку один из корней уравнения $3f(x)+x=4$ равен 1 ($f(1)=1$), второй корень этого уравнения равен $-13/11$, причем $f(-13/11)=f(13/11)=57/33$. Так как функция f возрастает при $x\geqslant 0$, множество положительных решений неравенства (*) — отрезок $[1; 13/11]$.

Вариант 2

1. 47.

2. $\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3. $\left[\frac{1}{16}; 1\right)\cup[2; +\infty)$.

4. $[13; +\infty)$. Указание. После замены $y=\sqrt{x-4}$ уравнение приводится к виду $|y-1|-|y-3|=2$.

5. 60°. Указание. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC (рис. 8) окружности, BD — биссектриса угла B, K — середина отрезка AC. По условию M — точка пересечения медиан. Треугольник OBE — равнобедренный. Поэтому OH — биссектриса угла BOK. По свойству биссектрисы $OK/OB=KM/MB=1/2$. Итак, отрезок OK равен половине радиуса описанной окружности. Это значит, что $\angle AOC=120°$, а $\angle B=60°$.

6. $(2-\sqrt{3})^3$. Указание. Диагональное сечение AA_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через центры O и O_1 шаров (рис. 9). Пусть ребро куба равно 2, а $O_1K_1=r$. Чтобы найти r, воспользуйтесь тем, что $AO=AO_1+O_1O$, т. е. равенством $\sqrt{3}=r\sqrt{3/2}+r+1$.

Физика

Вариант 1

1. При $T_0\geqslant 3mg$ $h=\frac{l}{4}\left(\frac{T_0}{mg}-3\right)$, при $T_0<3mg$ высота h может быть любой.

2. $A=mgl(\mu_1+\mu_2)/2$.

3. $v_1=\sqrt{\frac{3p_0V_0}{m_1(1+m_1/m_2)}}$, $v_2=\sqrt{\frac{3p_0V_0}{m_2(1+m_2/m_1)}}$.

4. $F_{эл}/F_{гр}=e^2/(4\pi\varepsilon_0 GmM)\approx 2{,}2\cdot 10^{39}$.

5. $F=B^2l^2v/R$.

6. $p=Nh/(S\lambda)=2\cdot 10^{-3}$ Н/м^2 (здесь h — постоянная Планка).

Вариант 2

1. $F_{тр\,1}=F_{тр\,2}=$
$$=\frac{mgl\sin\alpha\cos\alpha}{2(1+\sin\alpha)(H/\cos\alpha-R/\operatorname{tg}(45°-\alpha/2))}=$$
$=0{,}735$ Н.

2. $S=m/(\rho_в h_1-\rho_л h)=5$ м^2.

3. $U_2={}^3/_2 p_1V_1=1{,}5\cdot 10^3$ Дж.

4. $q=\pm l\sqrt{2\pi\varepsilon_0 k(l-l_0)/5}$.

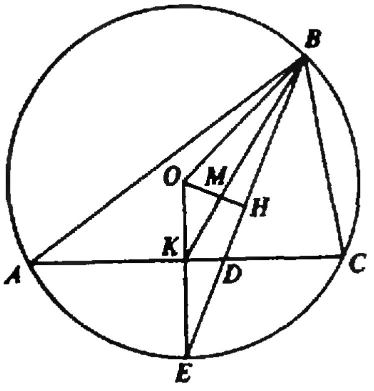


Рис. 8.

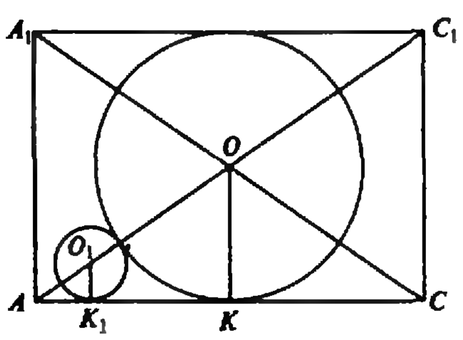


Рис. 9.

5. $q/m=8\pi^2\cos^2\alpha\Delta\cdot\varphi/(B^2h^2)$.
6. $d=Ff/(F-f)=0{,}1$ м.

[redacted]ковский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\pi(4k+3)/2$, $\operatorname{arctg}3+2\pi k$, $k\in Z$.

2. 254.

3. $2<a\leqslant 5$. **Указание.** Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(7-a)x^2-4x+7-a\geqslant 0,\\ ax^2+4x+a>0.\end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяют значения a, для которых

$$\begin{cases}4-(7-a)^2\leqslant 0,\\ 4-a^2<0.\end{cases}$$

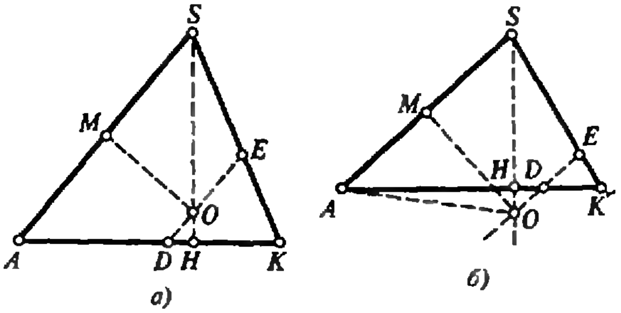
4. **Указание.** Центр O описанной сферы лежит на высоте пирамиды и может находиться либо внутри, либо вне ее. Сечение пирамиды плоскостью, параллельной AS и BC, является прямоугольником (докажите это!). Плоскость ASH пересекается с пирамидой по треугольнику ASK (рис. 10), а с секущей плоскостью по прямой DE. По условию $OH/OS=q$, т. е. в первом случае (рис. 10, *а*) $(h-R)/R=q$, т. е. $R=h/(1+q)$, во втором случае (рис. 10, *б*) $R=h/(1-q)$, а прямая DE пересекается с треугольником ASK по отрезку лишь при $0<q<1/3$ Пусть $AS=l$. Из подобия треугольников SMO и ASH получаем $R=\dfrac{l^2}{2h}$, откуда находим l, а затем и сторону основания пирамиды. Длину отрезка DE, равную стороне прямоугольника сечения, получим из подобия треугольников DEK и ASK, а вторую сторону прямоугольника найдем, зная, что она относится к стороне основания как SE/SK. После вычислений получаем ответ:

1. $S=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}h^2\dfrac{(1+3q)\sqrt{1-q}}{(1+q)^3}$,

если точка O лежит внутри пирамиды, при этом $0<q<1$;

2. $S=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}h^2\dfrac{(1-3q)\sqrt{1-q}}{(1+q)^3}$,

если точка O лежит вне пирамиды, т. е. при $0<q<\dfrac{1}{3}$;



а) *б)*

Рис. 10.

3. $S=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}h^2$

при $q=0$, т. е. если точка O совпадет с точкой H.

Примечание. При $0<q<\dfrac{1}{3}$ возможны 2 ситуации — точка O может находиться как вне, так и внутри пирамиды $SABC$.

Вариант 2

1. $\dfrac{\pi}{8}(2k+1)$, $\dfrac{1}{10}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\dfrac{\pi k}{5}$, $-\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\dfrac{\pi k}{3}$, $k\in Z$. 2. 10 ч. 3. $\log_2\dfrac{a^2-1}{2a-6}$ при $a\in(-1,\ 3-2\sqrt{2}]\cup(3;\ 3+2\sqrt{2}]$, при остальных значениях a решений нет.

4. **Указание.** Поскольку боковые грани пирамиды $SABC$ — равнобедренные треугольники, имеющие равные площади, возможны 3 случая: а) все плоские углы при вершине S равны 2α; б) два из них равны 2α, а третий равен $\pi-2\alpha$; в) два из плоских углов равны по $\pi-2\alpha$, третий 2α. Вычисляя объем пирамиды в каждом из трех случаев, получаем

Ответ:

а) $V_1=\dfrac{1}{3}l^3\sin^2\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$,

б) $V_2=\dfrac{1}{2}l^3\cos^2\alpha\sqrt{4\sin^2\alpha-1}\left(\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

в) $V_3=\dfrac{1}{3}l^3\sin^2\alpha\sqrt{3-4\sin^2\alpha}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$

(объемы для первого и третьего случаев оказались равными, но пирамиды при этом различны!).

Физика

Билет 1

1. В соответствии с первым началом термодинамики,

$$Q=\Delta U+A.$$

Так как давление газа оставалось постоянным,

$$A=p\Delta V.$$

Отсюда получаем

$$\Delta V=(Q-\Delta U)/p=10^{-3}\ \text{м}^3=1\ \text{л}.$$

2. Фототок прекращается, когда даже самые быстрые из вылетевших электронов полностью затормаживаются задерживающим напряжением U:

$$eU=E_{k\max}.$$

Формулу Эйнштейна для фотоэффекта можно записать в виде

$$hc/\lambda=A+E_{k\max}.$$

Таким образом,

$$A=hc/\lambda-eU.$$

3. По перемычке ток не идет, в кольце ток течет по часовой стрелке.

4. На тело действуют (рис. 11): внешняя сила $\vec{F}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $F_{\text{тр}}$. Работа внешней

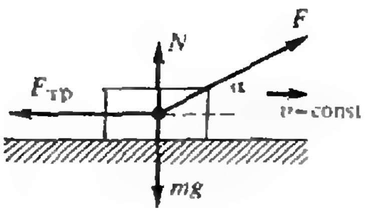


Рис. 11.

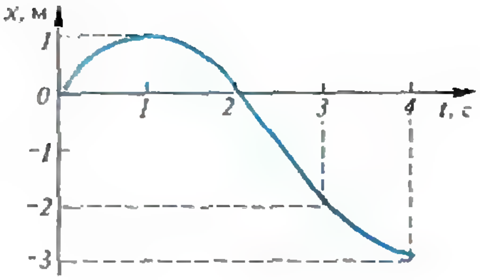


Рис. 12.

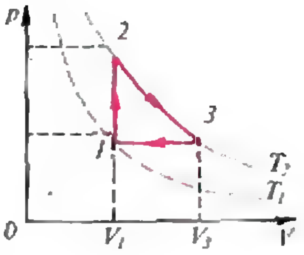


Рис. 13.

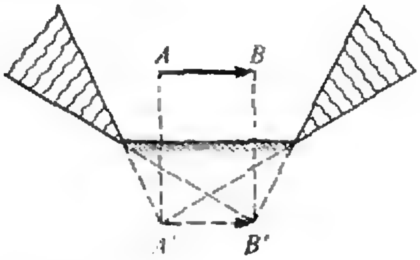


Рис. 14.

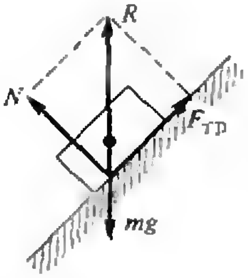


Рис. 15.

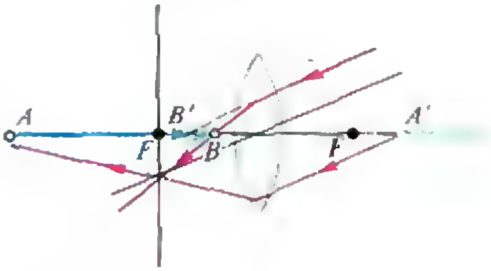


Рис. 16.

силы за время τ равна

$$A = F\cos\alpha \cdot v\tau.$$

Изменение внутренней энергии тела за то же время равно

$$\Delta U = cm\Delta t.$$

По условию задачи

$$F\cos\alpha \cdot v\tau = cm\Delta t.$$

Так как тело движется с постоянной скоростью, сумма всех действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0,$$

или, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат:

$$F\cos\alpha - F_{тр} = 0,$$
$$mg - F\sin\alpha - N = 0.$$

Сила трения скольжения, как известно, равна

$$F_{тр} = \mu N.$$

Окончательно получаем

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{gv\tau}{c\Delta t} - \frac{1}{\mu}\right).$$

Билет 2

1. См. рис. 12.
2. См. рис. 13.
3. См. рис. 14.
4. Поскольку конденсатор после зарядки отключен от источника, в процессе раздвигания обкладок заряд на них не меняется, а совершенная работа равна разности конечной и начальной энергий конденсатора:

$$A = E_к - E_н = \frac{q^2}{2C_к} - \frac{q^2}{2C_н},$$

где

$$q = C_0\mathscr{E},\ C_н = C_0,\ C_к = \frac{C_н}{n} = \frac{C_0}{n}.$$

Таким образом,

$$A = (n-1)\mathscr{E}^2 C_0/2 = 10^{-8}\ Дж.$$

Билет 3

1. На тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{R}$, равная по величине и направленная противоположно силе тяжести (рис. 15). (Часто силу реакции $\vec{R}$ раскладывают на две составляющие, равные нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и силе трения $F_{тр}$.)
2. $p = NkT/V \approx 1{,}1 \cdot 10^3$ кПа, где k — постоянная Больцмана.
3. См. рис. 16.
4. Обозначим точку контакта высокоомных проводников через O. Потенциалы точек O и A равны, потенциал точки B равен нулю. Часть схемы, по которой текут токи, может быть представлена в виде, изображенном на рисунке 17. Выберем направления токов, как указано на рисунке, и для участка OB запишем три уравнения:

$$\varphi_O - \varphi_B = I_1 R + \mathscr{E}_1,$$
$$\varphi_O - \varphi_B = I_0 R,$$
$$\varphi_O - \varphi_B = I_2 R - \mathscr{E}_2.$$

Отсюда, учитывая, что сумма токов, вытекающих из точки O, равна нулю:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

получаем

$$\varphi_A = \varphi_O = (\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)/3 = 1\ В.$$

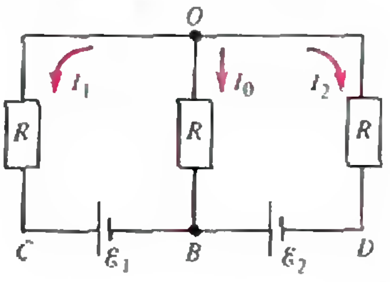


Рис. 17.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $[-2; -1)$. 2. -5; 3. 3. $\pi(4k+1)/16$, $k\in Z$.
4. $[-1/2; 0)$.
5. $AB=15$, $AC=8$, $BC=13$.
6. $0<a<2$. Указание. При $a=0$ уравнение имеет вид $2y^2+4y+2=0$, так что любая пара $(x, -1)$ ему удовлетворяет. При $a\neq 0$ рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Для него $D/4=a(a-2)(y+1)^2$, и при $a(a-2)<0$ уравнение имеет единственное решение $y=-1$, $x=3$. Если $a<0$ и $a\geqslant 2$, уравнение относительно x имеет решение при любом y.

Вариант 2

1. $-1/8$; $1/8$. 2. $(-\infty; -1]\cup(1; 2)$.
3. $\pi n/5$; где $n\neq 5k$, $n, k\in Z$.
4. $[1/3; 1)\cup(6; 18]$.
5. 6; 7.
6. $(4/5; 1/5)$. Указание. Построим прямую l_1', симметричную прямой l_1 относительно l_2, затем прямую l_2', симметричную прямой l_2 относительно l_1'. После этого построим точку B_2', симметричную B_2 относительно l_2, B_2'', симметричную B_2' относительно l_1' и, наконец, B_2''', симметричную B_2'' относительно l_2'. В результате траектория шарика превратится в отрезок B_1B_2'''. Точка B_2''' имеет координаты $(4/3; 1/6)$. Прямая B_1B_2''' пересекает прямую l_2' в точке $(6/5; 1/5)$. Отсюда следует, что второе отражение от прямой l_2 произойдет в точке $(4/5; 1/5)$.

Физика

1. $a=Mg\sin\alpha/m$, $\mu=M\,\mathrm{tg}\,\alpha/m$.
2. $x=l(M_1-M_2)/(M+M_1+M_2)$.
3. $l=\sqrt{2h(v_0^2-2gh)/g}=20$ м.
4. $p_a=m(a(1-k)/k-g)/S=10^5$ Па, где $k=0{,}2$.
5. $\varphi=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/(V_1+V_2)=27\%$.
6. $r=e^2(m+M)/(\pi\varepsilon_0 mMv^2)=1{,}7$ нм.
7. $P=r(2pVeN_A/(RT\tau))^2=96{,}4$ Вт.
8. $d=2/B\sqrt{2U}(\sqrt{m_2/e}-\sqrt{m_1/e})=0{,}29$ м.
9. $U=B_вlv=0{,}2$ В;
$\mathscr{E}_{max}=lv\sqrt{B_в^2+B_г^2}=0{,}215$ В;
под углом $\alpha=\mathrm{arctg}(B_г/B_в)\approx 22°$ к горизонту.
10. $F=la/(b-a)=2{,}5$ см.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 3/2. 2. 8. 3. 8. 4. (1; 3). 5. 20. 6. -4. 7. 1. 8. 5. 9. 6. 10. 5. 11. 24. 12. -15.
Указание. Пусть $f(x)=x^2+2ax+a^2+4a$. Функция f на интервале (1; 3) отрицательна тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)\leqslant 0, \\ f(3)\leqslant 0, \end{cases}$$

т. е. при $a\in[-3-2\sqrt{2}; -1]$.

Вариант 2

1. -2. 2. -9. 3. $-0{,}75$. 4. -3. 5. -8. 6. 99. 7. -9. 8. 6. 9. 375. 10. 315. 11. 0,75. 12. 2,25.

Физика

Вариант 1

1. $A=\mu mgl\cos\alpha/(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=22{,}5$ кДж.
2. $\nu=\sqrt{\rho_0 g/(\rho h)}/(2\pi)=1{,}8$ Гц (здесь $\rho_0=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
3. $l=h(1/\mu-\mathrm{ctg}\,\alpha)=57$ м.
4. $H_{min}=l\,\mathrm{tg}\,\alpha-gl^2/(2v^2\cos^2\alpha)=0{,}32$ м.
5. $\Delta m=MV/R(p_{н1}/T_1-p_{н2}/T_2)=2{,}5$ г (здесь $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды).
6. $\rho=\dfrac{p}{RT}\,\dfrac{m_1+m_2}{m_1/M_1+m_2/M_2}=0{,}49$ кг/м^3
(здесь $M_1=2\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, $M_2=32\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода).
7. $r=0{,}25R=0{,}75$ Ом.
8. $\Delta q=\sqrt{q^2-16\pi\varepsilon_0 Fr^2}=46$ мкКл.
9. $U_{общ}=420$ В.
10. $\delta=90°$.

Вариант 2

1. $F_д=(m_1+m_2)g+m_1\omega^2x_m=51{,}1$ Н.
2. $E_k=m(v_0^2+g^2t^2)/2=32$ Дж.
3. $t=\sqrt{h(m_1+m_2)/(g(m_2-m_1))}=0{,}55$ с.
4. $T=2\pi\sqrt{R/g}=85$ мин (здесь R — 6400 км — радиус Земли).
5. $N=\rho ghV/(kT)=320$ (здесь $\rho=13{,}6\times10^3$ кг/м^3 — плотность ртути, $h=10^{-11}$ мм, $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/k — постоянная Больцмана).
6. $Q=c_p\nu MT=8$ кДж (здесь $M=32\times10^{-8}$ кг/моль — молярная масса кислорода, $\nu=1$ моль).
7. $k=1+C_3/(C_1+C_2)=2$.
8. $n=40$.
9. $|\mathscr{E}|=Blv\sin\alpha=0{,}2$ В.
10. $\varphi=60°$.

Квант для младших школьников (см. «Квант» № 2)

1. Третий жених получит 6 слив, второй — на одну больше половины первого остатка, который равен 14 сливам, что, в свою очередь, на одну сливу меньше половины первоначального количества слив. Отсюда следует, что слив в корзине было 30.
2. Докажем это утверждение, исходя из того, что сумма k первых нечетных чисел равняется k^2. Рассмотрим разность между суммой первых $(k+n)$ нечетных чисел и суммой первых k нечетных чисел. Таким образом, мы получим сумму n последовательных нечетных чисел $(k+n)^2-k^2=n(2k+n)$. Очевидно, что это число делится на n при любых k.

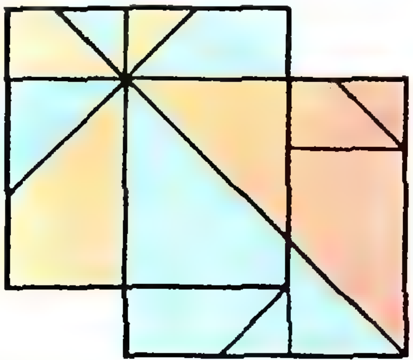


Рис. 18.

3. Пусть первоначальное число имеет вид $\overline{kk}$. Тогда это число равно $11k$, а его квадрат — $121k^2$. Пусть квадрат числа $\overline{kk}$ имеет вид $\overline{aabb}$. Запишем его следующим образом: $1100a+11b$. Так, $121k^2=1100a+11b$. Сократив на 11, получим $11k^2=100a+b$ или $11k^2=99a+a+b$. Отсюда $a+b=11$, а $k^2=9a+1$. Выражение справа является квадратом только для $a=7$ $(1\leqslant a\leqslant 9)$, отсюда $b=4$ и $k=8$.

4. Двух елок недостаточно, так как в этом случае Л=1 и невозможно подобрать значение для Е. А для трех елок имеется два решения: $5162+5162+5162=15486$ и $5124+5124+5124=15372$.

5. На рисунке 18 показано, как из частей квадрата сложить такой же квадрат, диагональ которого делит его на две равные части: красную и синюю.

[illegible]урс «Математика 6—8»

[illegible]«Квант» № 12 за 1990 г.)

10. Для того чтобы отвесить 2 килограмма крупы от имеющихся 9 килограммов с помощью двух гирь за три взвешивания, надо сначала разделить крупу ровно пополам, одну из половин снова разделить пополам и от полученного отвесить с помощью двух гирь 0,25 кг, в результате чего останется ровно 2 кг. С помощью одной гири также можно отвесить 2 килограмма крупы за три взвешивания. Для этого положим гирю на одну из чашек весов, рассыпем крупу по чашкам так, чтобы весы оказались в равновесии. В результате получим на одной чашке 4,4 кг, на другой — 4,6 кг. Вторым взвешиванием разделим пополам 4,4 кг крупы и с помощью гири третьим взвешиванием отвесим от полученного 0,2 кг.

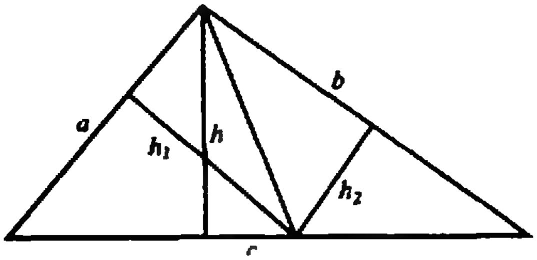


Рис. 19.

11. Из соотношения площадей треугольников (рис. 19) получим, что $ch=ah_1+bh_2$. По условию $c\geqslant a$, $c\geqslant b$, поэтому $ch\leqslant c(h_1+h_2)$, отсюда $h\leqslant h_1+h_2$.

12. Нетрудно заметить, что разность чисел 987 654 321 и 123 456 789 — число 864 197 532, в котором цифры от 1 до 9 встречаются ровно по одному разу. Поэтому эти три числа удовлетворяют условию задачи.

Дорогой читатель!

Редакция получила много писем с пометкой «Анкета — 90». Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении. В ближайших номерах мы планируем дать обзор читательских писем и начать публикацию ответов на ваши вопросы. Конечно, на все вопросы ответить на страницах журнала

Анкета 3—91

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

____

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились?

____

____

____

____

мы не сможем, поэтому будем отбирать наиболее часто встречающиеся.

В этом году мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 3—91».

Анкета 3—91

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 1—3 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши вопросы и пожелания:

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, В. Овсиенко, Т. Петрова, В. Тихомирова

Номер оформили:
Д. Крымов, Н. Кузьмина, С. Лухин,
Э. Назаров, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.01.91. Подписано к печати 19.02.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09 Уч.-изд. л. 7,96.
Тираж 94 771 экз. Заказ 2505. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

НОВОСТИ МИКРОМИРА

В Лондоне состоялась первая Олимпиада компьютерных игр. Участвовали 85 программ из 16 стран, в том числе из СССР. Состязания проводились по 15 играм: шахматам, бриджу, го, шашкам, рэндзю, реверси и др. Главный организатор Олимпиады — хорошо знакомый любителям компьютерных шахмат Д. Леви.

В шахматном турнире участвовали трехкратный чемпион мира «Фиделити» (США, авторы программы Д. и К. Шпраклен) и пятикратный «Мефисто» (ФРГ, программа принадлежит англичанину Р. Лэнгу), но сюрпризом турнира стала победа программы Э. Шредера «Ребел» (ФРГ) — 7,5 очков из восьми. Этот шахматный микрокомпьютер до сих пор держался в тени. «Мефисто» завоевал «серебро» (6,5 очков), «бронза» досталась «Фиделити».

Ричард Лэнг получил некоторую компенсацию... в турнире по рэндзю. Его старая программа, написанная еще в 1982 году, поделила первое место.

Вскоре после Олимпиады в югославском городе Порторож состоялось девятое первенство мира среди микрокомпьютеров. «Мефисто» набрал те же 6,5 очков, но в семи партиях, и в шестой раз подряд завоевал шахматную микрокорону. «Ребел» отстал на очко.

Затем «Мефисто» «отправился» на международные состязания в Вену. В главном турнире, проходившем по швейцарской системе, он разделил 51-е место с несколькими международными мастерами. Удачнее сложились его дела в турнире по быстрым шахматам (30 минут на партию). Впереди оказались венский мастер Р. Лендаай и «Мефисто» — 4,5 очков из 5, причем «Мефисто» в хорошем позиционном стиле обыграл победителя главного турнира международного мастера с солидным рейтингом 2555 Л. Олля.

«Мефисто» — Л. Олль
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Кc3 Кc6 3. g3 g6 4. Сg2 Сg7 5. d3 e6 6. Сe3 d6 7. Кf3 Кge7 8. 0—0 Кd4 9. Фd2 Кec6 10. Сg5 Фa5 11. К:d4 cd 12. Кe2 Ф:d2 13. С:d2 Сd7 14. Лad1 Крe7 15. Сg5+ f6 16. Сd2 f5. После размена ферзей позиция уравнялась, но понятно желание мастера проявить активность против своего электронного соперника. В результате у черных образуются слабости, которые в конце концов подведут их.

17. ef gf 18. Кf4 Лhc8 19. Кh5 Сh8 20. Лc1 d5 21. Лfe1 Крd6 22. Кf4 a5 23. c4 dc3 24. bc Лab8 25. Кh3 d4 26. c4 Крe7 27. Сf4 Лa8 28. a3 Крf6 29. Кg5 Лe8 30. К:h7+ Крg6 31. Кg5 e5 32. Сd2 Сf6 33. h4 Сe7 34. Лb1 Лab8 35. С:c6 bc 36. Кf3 Сd6 37. Л:b8 С:b8 38. С:a5. Черные уже без двух пешек.

38...c5 39. Лb1 e4 40. Л:b8! Л:b8 41. Кe5+ Крh5 42. К:d7 Лa8 43. Сe1 Л:a3 44. К:c5 ed 45. Крf1 f4 46. Сd2 f3 47. Кe4 Лa1+ 48. Сe1 Лc1 49. Кd2 Крg4. Олль проявил максимум изобретательности, и сейчас белые оказались бы в полном цугцванге, если бы... не их пешка «h». 50. h5! Кр:h5 51. К:f3 Л:c4 52. g4+! Компьютер никогда не упускает возможности провести маленькую тактическую операцию. 52...Крh6 53. Сd2+ Крg7 54. Кe5. Черные сдались.

А вот еще одна интересная победа «Мефисто». Международный мастер И. Иванов два года назад первым из сильных шахматистов попал под пресс «Дип сот». Теперь же его одолел и микрочемпион.

«Мефисто» — И. Иванов
Английское начало

1. d4 g6 2. c4 Сg7 3. Кc3 c5 4. Кf3 cd 5. К:d4 Кc6 6. e3 Кf6 7. Кc2 b6 8. Сe2 Сb7 9. 0—0 Лc8 10. Сf3 Сa6 11. b3 Кe5 12. Сb2 К:f3+ 13. Ф:f3 Лc5 14. Кd5 Л:d5 15. cd С:f1 16. Л:f1 0—0 17. d6! Не свойственная старым программам позиционная жертва пешки. Впрочем, в случае ее принятия — 17...ed — черные быстро лишатся пешки d6, а вслед за ней, возможно, и d7.

17...e6 18. e4 Кe8 19. С:g7 Кр:g7 20. Фc3+ Фf6 21. e5! Фf4 22. g3 Фe4 23. Кe3 f6 24. Фc8 К:d6 25. ef+ Л:f6 26. Ф:d7+ Кf7 27. Ф:a7 h5. Ценой пешки мастер оживил свои фигуры и, видимо, рассчитывал расправиться с машиной на королевском фланге. 28. Лd1 h4 29. Ф:b6. «Мефисто» ничего не боится и смело забирает вторую пешку. 29...Кg5 30. Крf1 hg 31. hg Фf3 32. Лd7+ Крh6 33. Кd1 Кe4 34. Крg1! Кg5 35. Фd4 Кh3+ 36. Крf1 g5 37. Фd3 Фh1+ 38. Крe2 Лf5 39. Фc3 Кg1+ 40. Крd2 Лe5 41. Кe3 Фe4 42. Фc8. Черные сдались.

«Мефисто» одолел и Юдит, самую юную из трех знаменитых сестер Полгар, правда, в сеансе одновременной игры.

Ю. Полгар — «Мефисто»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ed cd 4. c4 Кf6 5. Кc3 e6 6. Кf3 Сb4 7. cd К:d5 8. Сd2 Кc6 9. Сd3 0—0 10. 0—0 Кf6 11. Сg5 h6. Кажется, это — теоретическая новинка. В партии Джурич — Тарьян (Вршац, 1983) после 11...Сe7 12. Лc1 b6?! 13. С:f6 С:f6 14. Кe4 Сb7 15. К:f6+ Ф:f6 16. Сe4 Лac8 17. Лc3 белые получили явный перевес.

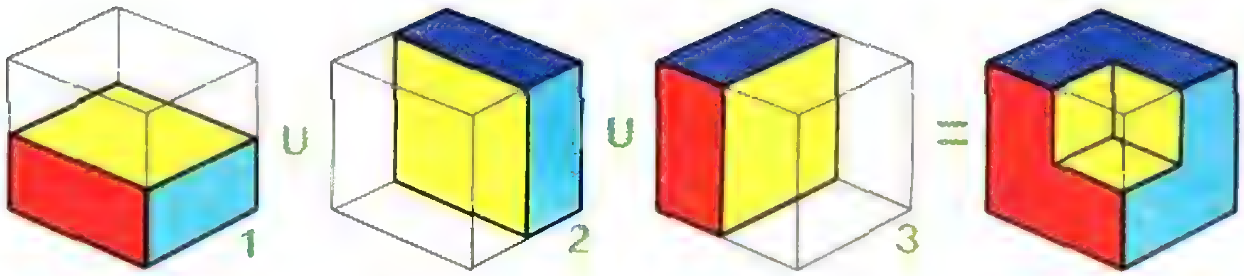
12. Сh4 g5 13. Сg3 a6 14. a3 Сe7 15. Фd2 b5 16. h4 Кh5 17. Сh2 Сb7 18. hg hg 19. Сe4 Кa5 20. С:b7 К:b7 21. Лae1 Кg7 22. Кe4 f6 23. b4 Фd5 24. Кc3 Фb3!? 25. Лe3 Кf5 26. Лd3 g4 27. Кe1. (Правильно 27. Кe2!?) 27...Лac8 28. К:b5 Фc4 29. Кc3 Крf7 30. d5? Рывок в центре ведет к печальным последствиям. 30...e5 31. d6 Кb:d6 32. Кd5 Фc1 33. Фe2 Лc4 34. К:e7?! Кр:e7 35. С:e5 f6 36. Ф:e5+ Крd7 37. b5 Лc5 38. Л:d6+ К:d6 39. Фg7+ Лf7 40. Ф:g4+ Крc7 41. Кd3 Фg5 42. Фd4 Лd5 43. Фa7+ Крd8 44. Фb8+ Крd7 45. ba Ф:g2+. Белые сдались.

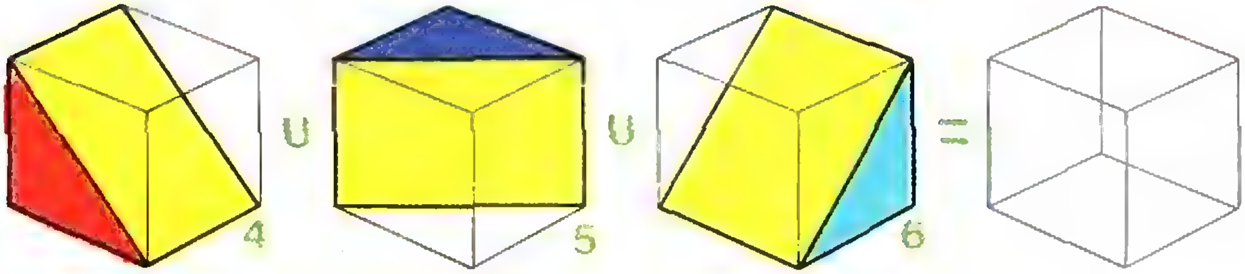
Е. Гик

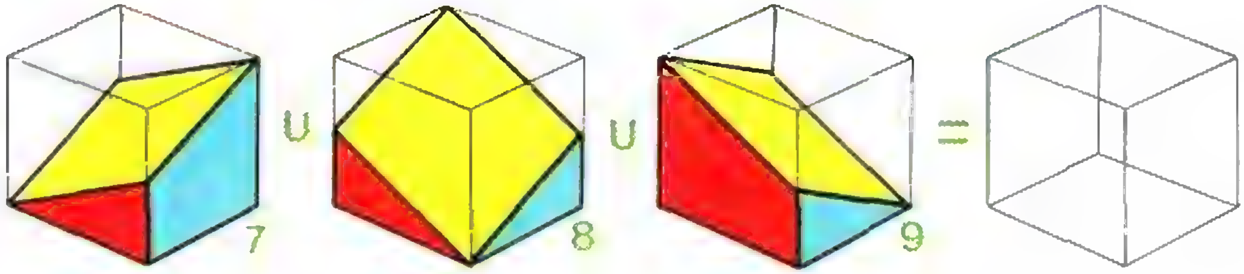
70 коп.
Индекс 70465

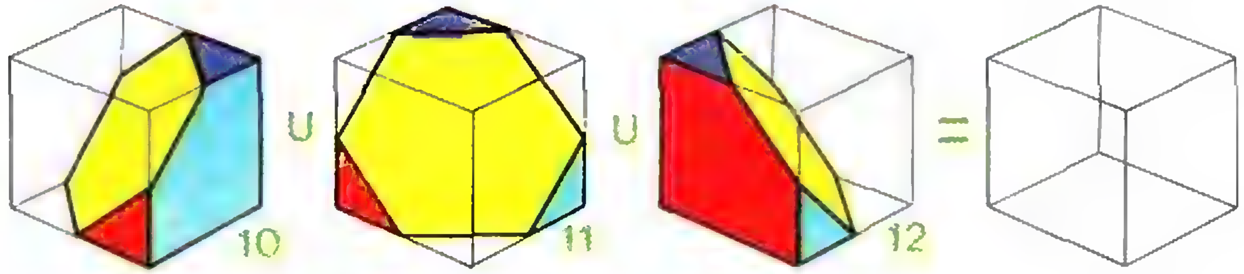
Потренируйте ваше пространственное воображение: найдите объединение трех половинок куба, показанных в левых частях трех нижних равенств, и нарисуйте его в правых частях, как это сделано в примере вверху.

В. Канев









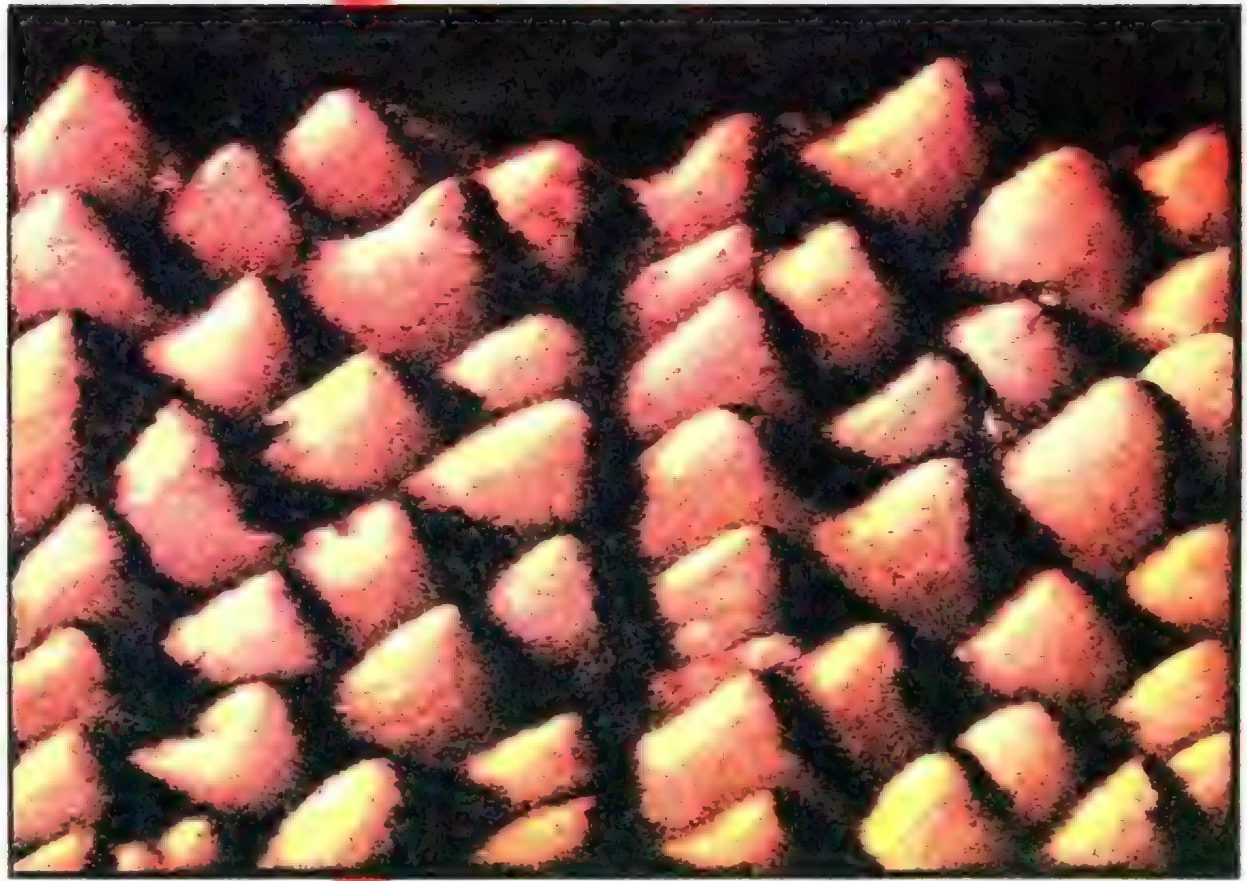
НОМЕР
4

ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный
физико-математическ журнал

1 2 3 **4** 5 6 7 8 9 10 11 12



Осязающие микроско

1991

Квант

4 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *А. Володин.* Осязающие микроскопы
8 *В. Болтянский.* Загадка «аксиомы параллельных»
14 *Л. Курляндчик, А. Файбусович.* История одного неравенства
20 *В. Фабрикант.* Моя первая научная неудача

Задачник «Кванта»

24 Задачи М1276—М1280, Ф1283—Ф1287
25 Решения задач М1251—М1255, Ф1263—Ф1267
33 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *Е. Игнатьев.* О шифрах
40 Калейдоскоп «Кванта»

Школа в «Кванте»

Математика 9—11:

42 Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения
44 Конкурс «Математика 6—8»

Лаборатория «Кванта»

45 *Я. Амстиславский.* Интерференция света... на письменном столе
48 *И. Кочубей.* Вслед за Бойлем и Ломоносовым...

Практикум абитуриента

49 *А. Черноуцан.* Изменение механической энергии

Р — значит ракета

56 *В. Николаев.* 25 из 30

Информация

61 Заочная физическая школа при МГУ
62 Юные математики встречаются на Кубани
63 II Фестиваль юных математиков в Краснодаре
64 Варианты вступительных экзаменов 1990 г.

Вузы мира

69 Финальный экзамен по физике в США
77 Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается *(55)*
Реклама *(19, 68)*

Наша обложка

1 *Можно ли увидеть атомы? Увидеть — нет, но осязать — да. Как получено изображение отдельных атомов периодической структуры кристалла, вы узнаете из статьи «Осязающие микроскопы».*
2 *Картина бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) — еще одно «изображение периодической структуры».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Тренировка пространственного воображения: фигуры из половинок куба.*

© «Квант», 1991

ОСЯЗАЮЩИЕ МИКРОСКОПЫ

Кандидат физико-математических наук
А. ВОЛОДИН

Человека всегда привлекал микромир — мир предметов, которые нельзя увидеть глазом. Исследования природы микромира неоценимы. Они спасли человечество от великого множества страшных болезней, позволили инженерам создать чудеса микроэлектроники, ученым — понять природу большинства явлений, происходящих в нашем, видимом, мире.

Но чтобы понять устройство микромира, его надо прежде всего увидеть. Вот для того чтобы рассмотреть невидимый мир, датский исследователь А. Левенгук в 1674 году и изобрел оптический микроскоп, хорошо известный теперь каждому школьнику. В нем используется система преломляющих свет линз — для вывода из области фокуса увеличенного изображения объекта. Минули столетия; за это время оптический микроскоп настолько хорошо поработал в различных областях науки, что по праву стал одним из ее символов. Однако его возможности оказались ограниченными: он позволял рассматривать лишь мир микронных размеров. Ученых же влекли субмикронные объекты, измеряемые сотнями и десятками нанометров. Однако от первого микроскопа Левенгука, позволившего получать увеличение всего в 200 раз, современные оптические микроскопы ушли недалеко — их увеличение не превышает 1000. В чем же дело?

Запрет Аббе

Свыше 100 лет назад известный немецкий физик и оптик Э. Аббе установил, что для любого микроскопа, работающего с фокусируемым линзами светом или другим излучением, будут существовать принципиальные ограничения, и главное из них обуславливается дифракцией — способностью волны огибать объект; она «скрывает» детали меньшие, чем половина длины волны излучения. А поскольку длина волны видимого света составляет доли микрона, то в оптический микроскоп нельзя рассмотреть предмет субмикронных размеров.

Чтобы продвинуться в субмикронный мир, логично использовать излучение меньшей длины волны, например рентгеновское, или поток электронов (напомним, что электрон, как всякая элементарная частица, одновременно является и волной). Так в 30-х годах нашего века возникла электронная микроскопия.

У частиц излучения, независимо от его природы, есть универсальная характеристика — энергия. Чем больше энергия, тем короче длина волны. Прибор, построенный по принципу оптического микроскопа, но работающий с потоком электронов, преломляемым специальными магнитными линзами, называется электронным микроскопом. Электронные волны примерно в тысячу раз короче световых, поэтому увеличение лучших электронных микроскопов достигает одного миллиона. Но досталось оно непросто: электронный микроскоп в тысячи раз больше, сложнее и дороже оптического и имеет существенный недостаток — он разрушает исследуемый объект. Дело в том, что под действием электронов с энергиями в десятки электронвольт гибнет все живое, а в кристаллических материалах возникают дефекты — нарушения регулярного расположения атомов. И тем не менее электронный микроскоп позволил сделать большой шаг в изучении субмикронного мира.

А можно ли другим путем проникнуть в глубины микромира?

Как был преодолен запрет Аббе

Совсем недавно, в середине 80-х годов путь развития средств микроскопии круто изменился. Если раньше прогресс достигался в рамках запрета Аббе за счет уменьшения длин волн излучения, строящего изображение в микроскопе, то теперь этот запрет был просто обойден. Появились микроскопы нового поколения — сканирующие микрозондовые, которые позволяли исследовать поверхности с очень близкого расстояния. И если прежние микроскопы основывались на принципах «зрения», то приборы нового поколения действуют по принципу «осязания», причем они не только дают информацию о форме и расположении мельчайших деталей предмета, но и характеризуют их свойства. Так, магнитный зондовый микроскоп «ощущает» неоднородность намагниченности предмета, электрический — микрораспределение электрических полей, тепловой — различие температур и т. д. Итак, всем основным физическим параметрам теперь соответствует свой зондовый микроскоп. А зондовые микроскопы, основанные на туннелировании электронов и на действии сил межатомного взаимодействия, позволяют рассматривать даже отдельные атомы.

Но не будем забегать вперед и начнем с оптического зондового микроскопа.

Осязание светом

Представим себе непрозрачную коническую оболочку с крошечным отверстием в вершине, таким, что на его диаметре не уместится и половина длины волны света (рис. 1). Если через такую оболочку пропускать свет, он далеко не пройдет, так как световая волна не «пролезет» в отверстие таких размеров и отразится обратно. И все же по другую сторону отверстия свет можно обнаружить, но лишь в непосредственной близости — опять на расстоянии половины длины волны. Вот такой «провисающий» свет и используется в оптических микроскопах нового поколения. (Свойство «провисания» имеет квантовомеханическую природу, характерно для любой волны или частицы и называется туннелированием.)

Поместим вблизи отверстия, на расстоянии, меньшем его диаметра, изучаемый объект. На его поверхности появится световое пятно размером, примерно равным диаметру отверстия. Отраженный предметом свет можно уловить фотопреобразователем — прибором, превращающим слабые потоки света в электрический сигнал. Этот сигнал можно усилить и снова изобразить световой точкой на

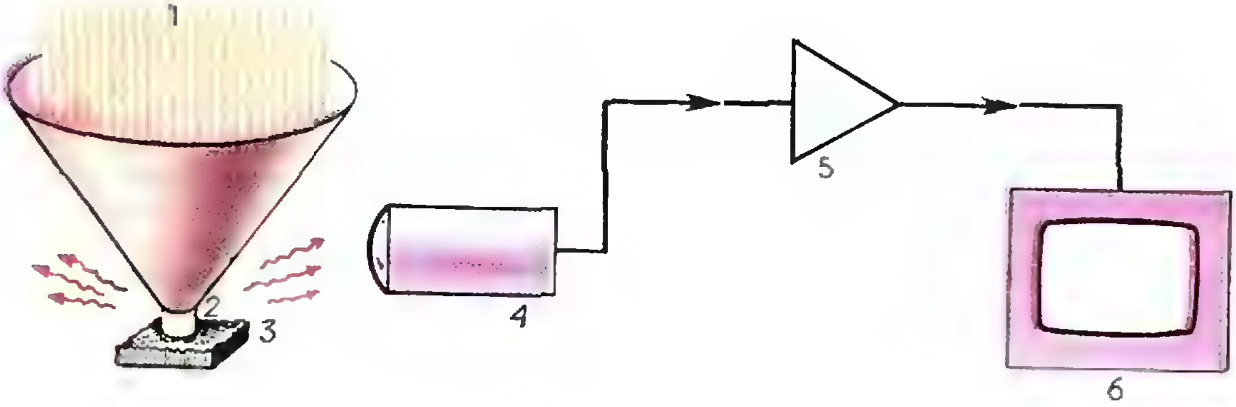


Рис. 1. Оптический сканирующий микроскоп ближнего поля. 1 — падающий свет. 2 — «провисающий» свет. 3 — изучаемый объект. 4 — фотопреобразователь. 5 — усилитель. 6 — монитор.

экране монитора. Яркость точки на экране будет соответствовать интенсивности улавливаемого света. Станем теперь водить острием-зондом вдоль поверхности предмета строка за строкой. Световое пятно, выходящее из зонда, пробежит всю исследуемую поверхность. Такая процедура называется сканированием поверхности. Если точками разной яркости отмечать на экране монитора пройденный зондом путь, на экране появится изображение поверхности. Разрешение, характеризующее полученное изображение, соответствует диаметру освещающего поверхность пятна, т. е. существенно меньше $\lambda/2$. (Напомним, что минимальный, еще наблюдаемый размер деталей предмета называется разрешением микроскопа.) Итак, запрет Аббе преодолен! Новый прибор, с помощью которого удалось это сделать, получил название оптического сканирующего микроскопа ближнего поля. Как это ни парадоксально, такой оптический микроскоп позволяет рассматривать детали, во много раз меньшие длины световой волны!

Пьезоэлектрические пальцы микроскопа

Но как можно сканировать поверхность предмета со столь высокой точностью? Для этого сконструированы прецизионные пьезоэлектрические манипуляторы, простейший из которых показан на рисунке 2. Он сделан из специальной керамики, слегка меняющей размеры при изменении приложенного электрического поля, для чего манипулятор помещают между пластинами конденсатора. Часто сами пластины наносятся на поверхность керамического манипулятора в виде электродов из тонкого слоя металла. Меняя напряжение на электродах на 0,1 В, можно удлинять такой стержень всего на 0,1 нм, т. е. на величину поперечника атома. (Слой металла на поверхности манипулятора достаточно тонок, чтобы, растягиваясь, не препятствовать этому перемещению.)

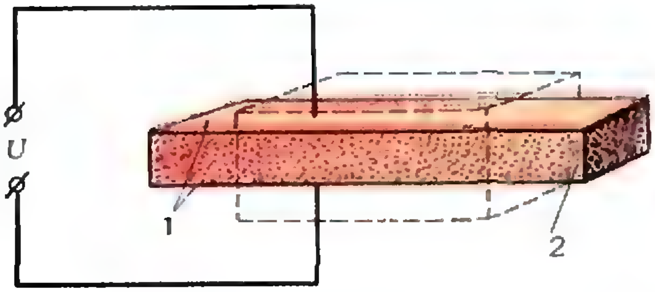


Рис. 2. Пьезоэлектрический манипулятор. 1 — электроды, 2 — пьезокерамика.

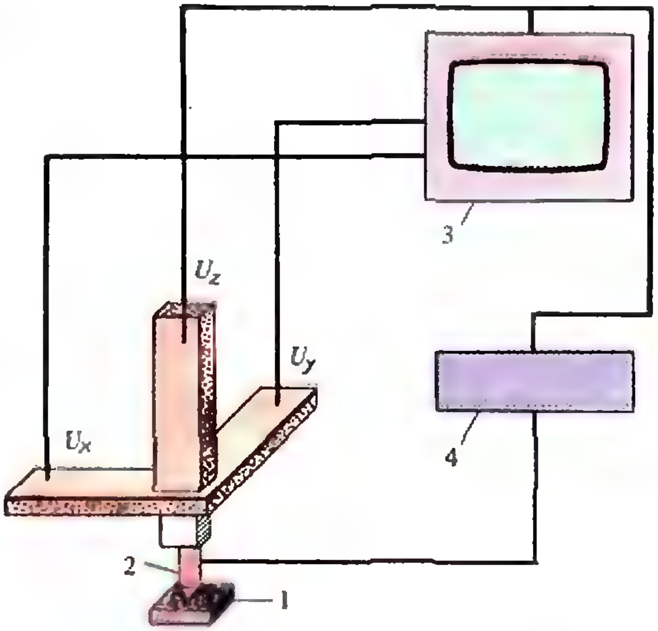


Рис. 3. Сканирующий зондовый микроскоп. 1 — изучаемый объект, 2 — зонд, 3 — дисплей, 4 — система обратной связи.

Простая конструкция из трех стержней-манипуляторов, соединенных в одной точке перпендикулярно друг другу, как показано на рисунке 3, может двигать зонд, помещенный в месте соединения, во всех пространственных направлениях. Три управляющих напряжения, U_x, U_y и U_z, зададут координаты смещения зонда x, y и z. Меняющиеся напряжения U_x, U_y перемещают зонд по поверхности исследуемого предмета, сканируя ее по параллельным строкам, отстоящим друг от друга на заданное расстояние (подобно лучу на экране телевизора). А напряжение U_z двигает зонд вверх и вниз; если U_z поддерживать неизменным, то при сканировании поверхности из-за неровностей удалялась бы или приближалась к зонду. Но это неудобно для регистрирующей системы — сигнал сильно меняется, да и при больших неровностях зонд может сталкиваться с ними. Чтобы избежать этого, в прибор вводят элемент самоорганизации — отрицательную обратную связь. Она заставляет зонд двигаться вверх и вниз в соответствии с рельефом поверхности.

Туннельный микроскоп осязает атомы

Подробнее действие системы обратной связи рассмотрим на примере сканирующего туннельного микроскопа; он первым появился в семействе зондовых микроскопов. За его изобретение Г. Биннинг и Г. Рорер, сотрудники знаменитой компьютерной фирмы IBM в Цюрихе, были удостоены Нобелевской премии 1986 г. В нем зондом служит чрезвычайно острая металлическая игла. Если проводить аналогию с оптическим зондовым микроскопом, то роль отверстия зонда в туннельном микроскопе играет острие иглы, из которого вместо света «провисают» квантовомеханические волны электронов, содержащихся в металле острия (рис. 4). Длина таких электронных волн примерно в тысячу раз меньше световой, и, соответственно, «освещать» они могут площадку в тысячу раз меньшего размера, чем оптический зонд. Когда такая электронная волна касается исследуемой проводящей поверхности (а происходит это при расстояниях между зондом и поверхностью около 1 нм), электрон с острия может перепрыгнуть на поверхность, иначе говоря, «туннелировать». Туннелирование означает появление электрического тока в цепи зонд — поверхность, правда, тока очень слабого — в миллиардные доли ампера, но усиление его средствами современной электроники проблемы не представляет. Важно, что он чрезвычайно сильно зависит от расстояния между острием и поверхностью. Так, уменьшение расстояния на пару ангстрем, т. е. примерно на размер атома, увеличивает туннельный ток в тысячу раз. Функция, отражающая эту зависимость,— экспоненциальная (показательная функция с основанием $e = 2{,}718...$).

Вернемся теперь к системе обратной связи, которая обеспечивает качественную работу всякого зондового микроскопа. Она представляет собой сложную и чувствительную электронную схему, улавливающую изменение туннельного тока и изменяющего напряжение U_z, приложенное к вертикальному манипулятору. Пьезоэлектрический манипулятор перемещает зонд так, чтобы туннельный ток оставался постоянным. Это возможно лишь при сохранении неизменным расстояния между зондом и поверхностью. Таким образом, обратная связь не дает зонду ни отойти от поверхности, ни столкнуться с ней. Из-за чрезвычайной чувствительности туннельного тока к расстоянию до поверхности точность действия обратной связи очень высока — 0,1—0,01 Å. В результате острие движется по траектории, старательно повторяющей рельеф сканируемой зондом поверхности. И поскольку напряжение U_z пропорционально высоте места поверхности, над которым в данный момент находится острие, оно служит удобной мерой рельефа. Информация о рельефе поверхности записывается в память ЭВМ и после обработки, состоящей в фильтрации, т. е. устранении шумовых и паразитных сигналов, выводится на дисплей в виде «топографической карты» поверхности (рис. 5). Обычно карта полуто-

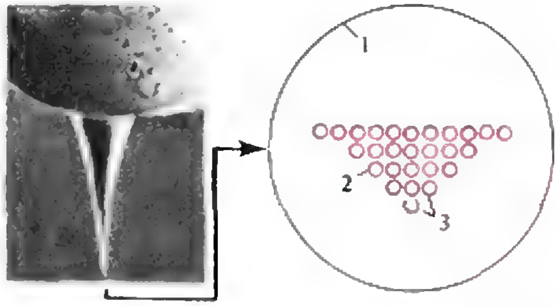


Рис. 4. Зонд туннельного сканирующего микроскопа. 1 — «увеличенное» острие. 2 — атомы, 3 — облака электронов, слева — острие (электронномикроскопическая фотография).

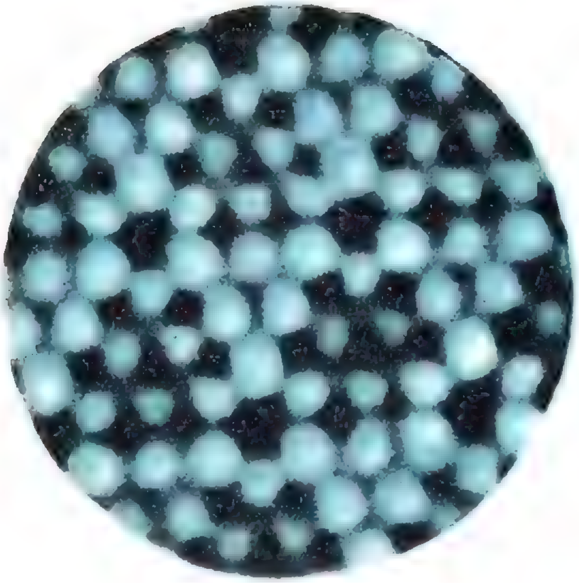


Рис. 5. «Топографическая карта» поверхности кристалла кремния.

новая, т. е. на ней высота рельефа обозначается интенсивностью раскраски. Отчетливо видны положения отдельных атомов кремния в периодической кристаллической структуре (максимальный перепад высот 2 Å). Пример туннельно-микроскопического изображения рельефа поверхности кристалла кремния показан также на обложке журнала.

В настоящее время с помощью сканирующих туннельных микроскопов получены детальные изображения поверхностей многих кристаллических и полимерных материалов с атомным разрешением. Сканирующий туннельный микроскоп имеет беспрецедентное увеличение — 100 миллионов!

Исследователи уже успели привыкнуть к тому, что пьезоэлектрические манипуляторы можно перемещать с точностью, соответствующей атомным размерам. Они научились даже использовать острие туннельного микроскопа как инструмент для работы в нанометровом микромире — острием толщиной в один атом можно точно попасть в выбранное место молекулы и разрезать ее на части. А можно «подцепить» какой-нибудь атом и перенести его в нужное место. В лаборатории фирмы IBM ученым удалось сделать надписи, выложенные из цепочек атомов. Надпись, символизирующая эмблему фирмы, была составлена из отдельных атомов ксенона на поверхности кристалла никеля. Она собрана острием туннельного микроскопа из хаотически разбросанных по поверхности атомов ксенона, прилипших к никелю. Чтобы из-за теплового движения атомы не разбегались по поверхности, опыт проводился при очень низкой температуре —269 °С. Это, конечно, рекламное достижение, однако оно показывает, насколько развилась нанотехнология — умение строить в микромире искусственные структуры, которые в будущем составят основу электронных устройств фантастически малых размеров.

Микроскоп ощущает отталкивание атомов

И все же при всей своей привлекательности сканирующий туннельный микроскоп имеет существенный недостаток — для него пригодны лишь *электропроводящие объекты.* Большинство же материалов покрыто изолирующим слоем окислов. Заманчивые для изучения биологические объекты тоже часто не проводят ток. Может ли сканирующий туннельный микроскоп осязать «непроводящие» атомы? Оказалось, может. Достаточно между его острием и поверхностью объекта-изолятора поместить мельчайшую крупинку алмаза, прикрепленную к тонкой металлической полоске, как показано на рисунке 6.

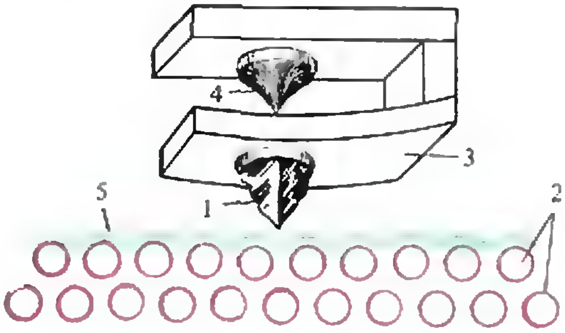


Рис. 6. Зонд микроскопа на атомных силах. 1 — крупинка алмаза, 2 — атомы, 3 — пружинная пластинка, 4 — острие, 5 — облака электронов.

Острый край крупинки будет отталкиваться электронными облаками атомов поверхности. Конечно, потребуется так приблизить крупинку, чтобы электронные облака ее края и поверхности перекрывались. Полоска металла действует как пружинка, прижимающая крупинку к поверхности.

Станем теперь сканировать этим «бутербродом» поверхность. Двигаясь вверх-вниз, крупинка будет отслеживать неровности рельефа. Ее движение будет регистрироваться по изменению тока туннелирования, текущего с острия на металлическую полоску. И в такой прибор, называемый микроскопом на атомных силах, встраивают систему обратной связи, работающую примерно так же, как в сканирующем туннельном микроскопе. Перемещая весь зонд-«бутерброд» по вертикали, эта система поддерживает отклонение полоски с крупинкой (а значит, и отталкивающую атомную силу) постоянным. Микроскоп на атомных силах тоже имеет сверхвысокое атомное разрешение. В качестве примера на рисунке 7 приведена полученная с его помощью карта слоя полимеризованных молекул сложного органического вещества. Она раскрашена компьютером наподобие географической: цветовая шкала в нижней части рисунка показывает высоту рельефа.

Биты информации под микроскопом

Вы, конечно, знаете, что такое бит информации. Когда информация записывается с высокой плотностью на магнитном диске ЭВМ, в поверхностном слое диска образуются намагниченные и ненамагниченные участки микронных или субмикронных размеров. Однако в какой микроскоп вы бы ни смотрели на диск, ничего бы там не увидели. Но вот в семействе зондовых микроскопов появился прибор, «осязающий» эти магнитные участки диска,— речь идет о микроскопе на магнитных силах. Он совсем просто получается из атомно-силового микроскопа, достаточно алмазную крупинку заменить на крошку магнитного материала железа или никеля. Магнитная крошка будет испытывать действие полей намагниченных участков, и в результате сканирования поверхности диска мы получим карту распределения магнитных сил — биты информации станут видимыми.

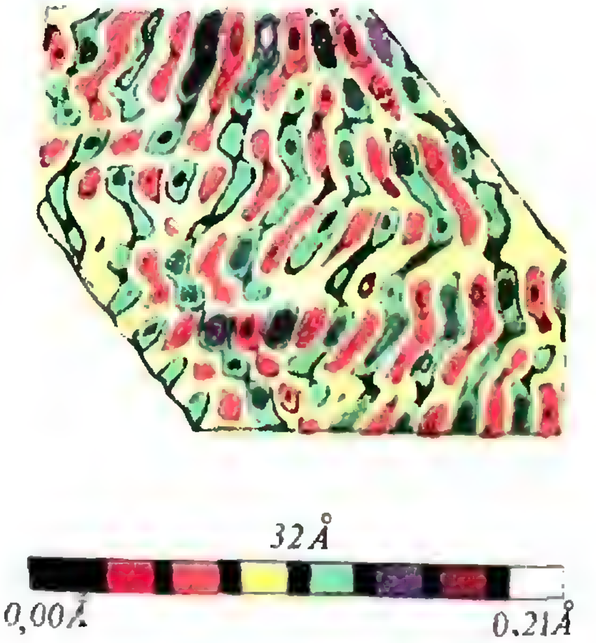


Рис. 7. Карта слоя полимеризованных молекул, полученная с помощью атомно-силового микроскопа.

* * *

Итак, мы познакомились с некоторыми представителями обширного и могучего семейства сканирующих зондовых микроскопов. Несмотря на свою молодость, они уже многое умеют. Несомненно, по мере «взросления» эти микроскопы не только распахнут перед нами микромир атомов и молекул, но и позволят работать в нем, вносить нужные изменения, строить новые объекты.

ЗАГАДКА «АКСИОМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ»

Доктор физико-математических наук
В. БОЛТЯНСКИЙ

Необычная ассоциация

В одном городе учредили ассоциацию коллекционеров, объединившую филателистов, нумизматов, собирателей игольных ушков и т. п. Решили, что правление ассоциации должно состоять из нечетного числа персон (это удобно при голосовании). Решили также, что правление разместится в одном здании, причем у каждой персоны (т. е. члена правления) будет свой телефонный аппарат внутренней связи. А чтобы не усложнять устройство внутренней связи, решили коммутатор не устанавливать, а прямо соединить каждую персону телефонными линиями с какими-либо тремя персонами.

— Ну, что же,— сказал один из учредителей ассоциации,— я думаю, такая организация работы правления достаточно удобна.

— Особенно мне нравится,— сказал второй (известный Собиратель математических диковинок),— что работу правления можно описать абстрактной аксиоматической схемой. Судите сами, у нас есть три первоначальных понятия: «персона», «линия», «соединяет», и мы хотим, чтобы выполнялись следующие *аксиомы:*

1) число персон нечетно;

2) каждая линия соединяет ровно две персоны;

3) каждая персона соединена линиями ровно с тремя другими персонами.

— Ну, а какой смысл в этой аксиоматике? Можно ли из нее вывести какие-либо теоремы, чтобы получилась «теория», отражающая работу нашего правления?

— Отчего же, извольте! Во-первых, аксиома 1 показывает, что хотя бы одна персона существует (ведь нуль — четное число!). Далее, аксиома 3 убеждает нас, что поскольку есть хотя бы одна персона, то найдутся еще три другие, так что общее число персон не меньше четырех. Наконец, еще раз применяя аксиому 1, находим, что *общее число персон не меньше пяти.* Такова первая теорема этой «теории».

— Что же, это утверждение, в самом деле, можно считать теоремой, поскольку вы его доказали, т. е. логически вывели из аксиом.

— Или вот еще пример очень простой теоремы: *среди любых пяти персон обязательно найдутся две, которые не соединены линией.*

— Ну, это понятно: иначе к каждому из этих пяти было бы подведено не менее четырех линий.

— Совершенно верно! Кстати, вы сказали: линия «подведена» к персоне. Этому можно дать четкое определение в рамках нашей аксиоматики. Именно, если A — некоторая персона и l — линия, соединяющая ее с некоторой другой персоной, то пару $(A;\, l)$ будем называть *вводом.*

— И теперь можно сказать, что каждая персона A участвует ровно в трех вводах $(A;\, l_1)$, $(A;\, l_2)$, $(A;\, l_3)$. Это и будет означать, что к A «подведены» три линии l_1, l_2, l_3 (аксиома 3).

— Прекрасно! — заулыбался Собиратель математических диковинок.

— Продолжая ваше рассуждение, можно сформулировать следующую теорему: *число всех вводов нечетно.* Ведь персон — нечетное число (аксио-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 3 за 1976 год.

ма 1), и каждая участвует ровно в трех вводах.

Внезапно лицо Собирателя омрачилось. Голос его стал унылым.

— К сожалению, можно доказать также и то, что число вводов четно. Ведь каждая линия l (соединяющая, скажем, персоны A и B) участвует в двух вводах: (A; l) и (B; l), так что число всех вводов вдвое больше числа всех линий.

— Да, но это же противоречит предыдущей теореме?

— В том-то и беда. Выходит, наша аксиоматика *противоречива*, раз из нее можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Так что лопнула наша теория: систему связи, описываемую аксиомами 1, 2 и 3, просто невозможно осуществить.

Другая аксиоматика

— Что же нам делать? Пойти на то, чтобы число членов правления было четным? Но ведь нам так хотелось этого избежать.

— Почему же, есть и другой выход,— ответил Собиратель математических диковинок.— Оставим аксиомы 1 и 2 прежними, а третью аксиому заменим следующей:

3′) каждая персона соединена линиями ровно с четырьмя другими персонами.

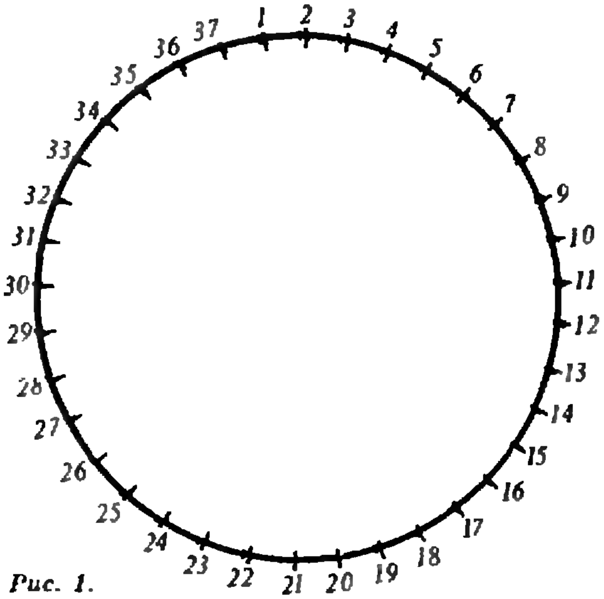


Рис. 1.

Правда, придется проложить большее число линий, но зато аксиоматика станет непротиворечивой, да и теоремы сохранятся. По-прежнему, общее число персон не менее пяти; из любых шести персон найдутся две, которые не соединены линией; общее число вводов будет четным (и здесь уже нет никакого противоречия). Можно будет доказать и дальнейшие теоремы.

— Позвольте, но почему вы так уверены в отсутствии противоречий? Да, с числом вводов теперь все в порядке; но, возможно, доказывая все новые и новые теоремы, мы все же натолкнемся когда-нибудь на противоречие. Ведь не будете же вы утверждать, что заранее знаете *все* теоремы, которые можно доказать в теории, основанной на этой новой аксиоматике! А если так, то кто же может гарантировать отсутствие противоречий?

— О, здесь я вполне уверен! Сейчас я объясню вам причину такой уверенности. Вы ведь, надеюсь, не сомневаетесь в «правильности» арифметики?

— Нисколько не сомневаюсь; но арифметика-то тут причем?

— А вот причем. Я сейчас из «материала» арифметики построю, как говорят математики, *модель* для рассматриваемой аксиоматики. Кстати, сколько персон (ориентировочно) будет в правлении?

— Думаю, не меньше 30 человек.

— Прекрасно! Условимся считать «персонами» числа 1, 2, ..., 36, 37. Удобно расположить их на окружности (рис. 1), чтобы за 37 «следующим» было число 1. Теперь «линиями» будем называть пары чисел, причем лишь такие пары, в которых числа стоят либо рядом, либо через одно на этой окружности. Например, «линиями» будут пары (1; 3), (4; 5), (37; 2); а вот пара (3; 6) «линией» не будет — числа стоят слишком далеко друг от друга.

— Кажется, я понял, что вы хотите. В этой, как вы сказали, модели, есть 37 «персон», т. е. нечетное число (аксиома 1). Каждая линия

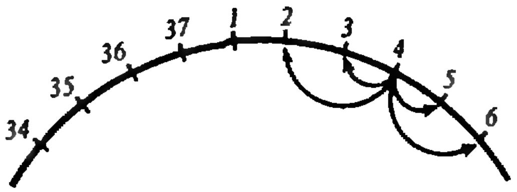


Рис. 2.

соединяет ровно две персоны (аксиома 2), так как пара состоит из двух чисел. Кроме того, ясно, что к каждой «персоне» проведены ровно четыре линии (аксиома 3); это можно пояснить схемой, показанной на рисунке 2. Значит, в этой модели выполняются все аксиомы 1, 2, 3. Однако почему же это гарантирует непротиворечивость рассматриваемой аксиоматики?

— Так ведь модель-то эта «сделана» из чисел! Если бы из аксиом 1, 2 и 3 можно было вывести две противоречащие друг другу теоремы, то это противоречие обнаружилось бы и в этой модели. Выходит, что, рассуждая о числах, мы могли бы получить противоречие. Но, кажется, в непогрешимости арифметики вы не сомневаетесь?

— Ну, что же, я понял ваши доводы. И, позвольте, повторю их, так сказать, в общем виде. Вы рассматриваете две теории: P и Q. Теория P (в качестве нее была взята арифметика) не вызывает сомнений, рассматривается, как незыблемая и непогрешимая. Теория же Q — это новая теория, определяемая списком аксиом. Нам нужно получить гарантии непротиворечивости теории Q. Для этой цели применяется такой прием: из понятий теории P, как из «строительного материала», пытаются построить модель теории Q, т. е. такую схему, в которой все аксиомы теории Q выполняются; если это удается сделать, то тем самым непротиворечивость теории Q доказана.

Странная геометрия

— Мы несколько отошли от обсуждения вопросов, связанных с ассоциацией коллекционеров. Но поскольку я коллекционирую математические диковинки, я хочу сейчас предложить вам одну из них: довольно необычную модель геометрии.

— С удовольствием «взгляну» на эту диковинку.

— Представьте, что из плоскости удалена (или, как говорят математики, *выколота*) одна точка O (она, конечно, есть, но мы как бы не считаем ее «точкой»). Все же остальные точки (отличные от O) по-прежнему будем считать точками.

— В этом весь фокус?

— Минуточку терпения. Каждую окружность, проходящую через эту выколотую точку O, будем теперь называть «прямой» (сюда же отнесем и «окружности бесконечного радиуса», т. е. прямые, проходящие через O). На рисунке 3 изображено несколько «прямых».

— Это уже необычно. Берем заведомо искривленные линии и объявляем их «прямыми». Только зачем это?

— Давайте, для примера, проведем «прямую» через две точки A и B. Как это сделать?

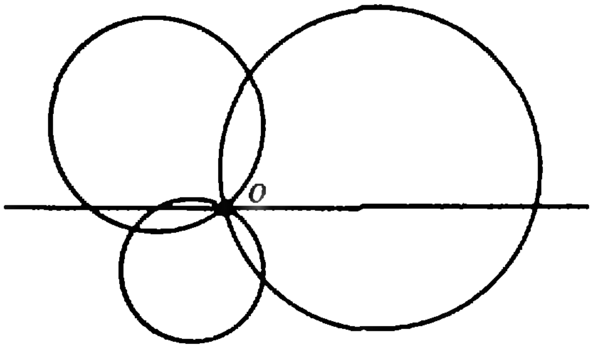


Рис. 3.

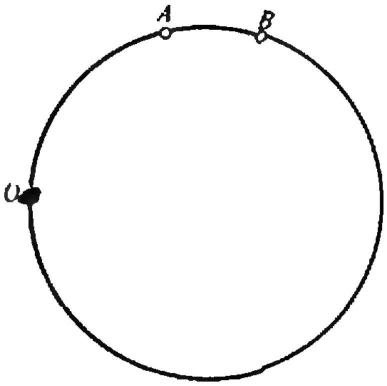


Рис. 4.

— Вы хотите, чтобы «прямая» проходила через точки A и B. Кроме того, раз это «прямая», то она должна проходить и через точку O. Значит, надо провести окружность через три точки A, B, O (рис. 4). Это сможет сделать каждый школьник.

— Но такая «прямая» *существует* и притом *только одна.* Вы согласны?

— Да, поскольку три точки однозначно определяют окружность.

— Значит, в этой модели выполняется аксиома: *через две разные точки проходит прямая и притом только одна.*

— Кажется, меня начинает интересовать ваша диковинка.

— А теперь посмотрите на рисунок 5. На нем изображен треугольник ABC. Чтобы найти сумму углов этого треугольника, можно взять сумму отмеченных углов при точке O. А углы эти составляют вместе развернутый угол. Значит, в этой модели *сумма углов треугольника равна 2d.*

— Потрясающе!

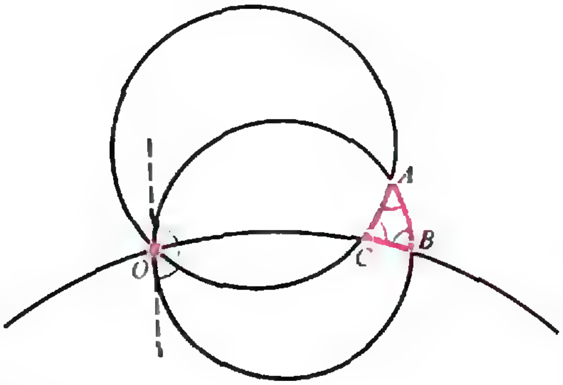


Рис. 5.

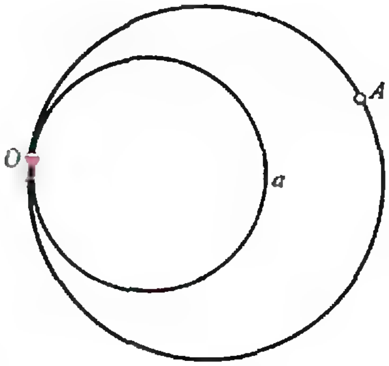


Рис. 6.

— Заметьте еще, что в этой модели через точку, лежащую вне данной «прямой», проходит единственная «прямая», не пересекающая данную. Это будет окружность, касающаяся данной «прямой» в точке O (рис. 6): ведь точка O считается выколотой, так что две изображенные «прямые» не имеют общих точек.

— Выходит, что в этой модели выполняется и «аксиома параллельных»?

— Совершенно верно. И вообще, в этой модели выполняются все аксиомы (а значит, и теоремы) той геометрии, которая изучается в школе (ее называют *геометрией Евклида,* по имени ученого, который свыше 2000 лет назад дал систематическое ее изложение). Правда, я описал модель не до конца. Не было сказано, как измерять длины, какие треугольники следует считать равнобедренными, и т. д. Кроме того, надо добавить еще точку ∞ *) для полноты этой модели. Но сущность дела ясна: мы построили модель обычной (евклидовой) геометрии.

— Что же получается? Исходная теория P — это геометрия, и из «материала» этой теории построена модель той же самой теории?

— Совершенно справедливо! Привел же эту модель я лишь для того, чтобы показать, что не так уж странно считать кривые линии «прямыми» в некоторой модели **).

Трагедия Лобачевского

— А теперь — еще один экспонат из коллекции математических диковинок. Речь идет о геометрии, открытой великим русским математиком Н. И. Лобачевским.

— Насколько я знаю, он построил геометрию, в которой через точку можно провести более одной параллельной к данной прямой (рис. 7).

— Верно. И хотя все рассуждения Лобачевского были логически безу-

---

*) ∞ — это «бесконечно удаленная точка».

**) Читателю мы советуем понять, «что», в этой модели «к чему»; для этого полезно воспользоваться инверсией.

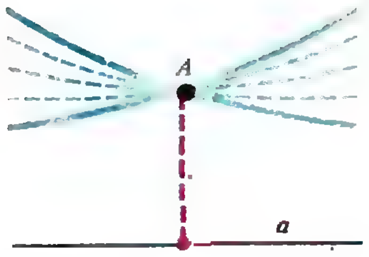


Рис. 7.

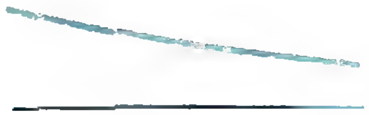


Рис. 8.

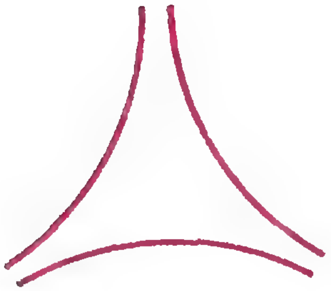


Рис. 9.

пречны, он при жизни так и не добился признания своих идей. Слишком уж необычны были выводы.

— Например?

— Ну, например, параллельные прямые сближаются (рис. 8). Можно даже построить «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны (рис. 9). И хотя на рисунке 9 изображены кривые линии, в геометрии Лобачевского существуют прямые, которые именно так расположены. Далее, сумма углов треугольника всегда меньше $2d$ и т. д. и т. п.

— Но ведь это же все не так на самом деле!!!

— Вот, вот! То же говорили и современники Лобачевского. А он понимал, что дело-то здесь в том, противоречива или же нет та геометрия, которая получается из положенных в ее основу аксиом; кроме того, разговоры: «в действительности все не так»,— основаны лишь на том, что нашим наблюдениям доступна небольшая часть пространства, где различия между евклидовой геометрией и его геометрией не заметны (лежат за пределами точности измерений). И, кстати, современная физика все более подтверждает это.

— Удивительно. Но вы, насколько я понял, хотели говорить о чисто математическом подтверждении правильности геометрии Лобачевского?

— Точнее, о ее *непротиворечивости*.

— Ах, понимаю! Видимо, вы хотите сказать, что из «материала» какой-то теории P, в правильности которой мы не сомневаемся, можно построить *модель геометрии Лобачевского*?

— Совершенно верно! И этой теорией P является евклидова геометрия!

— И что же, Лобачевский знал об этом?

— Нет, но он построил другую замечательную модель. Ему удалось из «материала» своей геометрии построить модель евклидовой геометрии.

— Значит, если бы все были уверены в непогрешимости геометрии Лобачевского и сомневались в правильности геометрии Евклида, то этой моделью можно было бы убедить всех, что геометрия Евклида тоже непротиворечива! А ведь желательно, чтобы все было наоборот.

Запоздалая справедливость

— Вы теперь видите, что Лобачевский хорошо понимал, что такое модель, и как можно было бы доказать непротиворечивость его геометрии. Надо было, приняв евклидову геометрию за исходную теорию P, построить из ее «материала» модель теории Q — геометрии Лобачевского. Но такие модели были найдены лишь после смерти ученого.

— Кто же сделал это?

— Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре и другие ученые*).

— И что же, эти модели очень сложны?

— Нет. Вот как, например, строится модель, найденная выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре**). В этой модели рассматриваются

---

*) См., например, статью С. Гиндикина «Феликс Клейн» («Квант», 1975, № 12).

**) В статье С. Гиндикина «Волшебный мир Анри Пуанкаре» («Квант», 1976, № 3) рассказывается о модели, в которой «точками» служат точки верхней полуплоскости, а «прямыми» — вертикальные лучи и ортогональные к граничной прямой верхние полуокружности. Подумайте, почему это одинаковые модели (вспомните об инверсии).

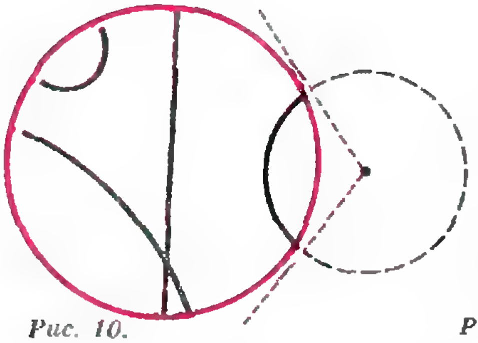


Рис. 10.

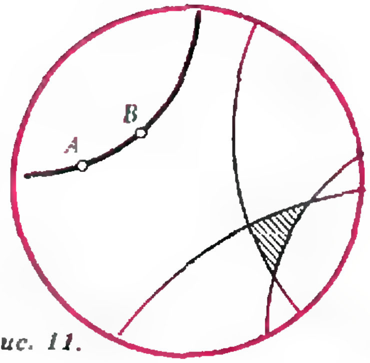


Рис. 11.

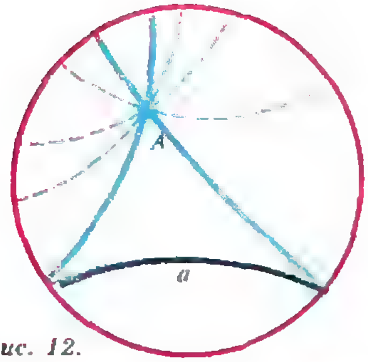


Рис. 12.

только точки, лежащие внутри некоторого круга K. «Прямые» же определяются так: берется окружность (или прямая), пересекающая под прямым углом окружность круга K, и часть этой окружности, лежащая внутри K, объявляется «прямой». На рисунке 10 показано несколько «прямых» в этой модели.

— Эта модель немного напоминает модель геометрии Евклида, о которой мы говорили раньше.

— И, обратите внимание, в этой модели тоже можно доказать, что через две точки проходит единственная «прямая». Можно в этой модели рассматривать треугольники (рис. 11). А рисунок 12 показывает, что через точку вне «прямой» a можно провести *бесконечно много* «прямых», не пересекающихся с «прямой» a. Две из них (те, которые касаются прямой a на границе круга K, т. е. как бы в «бесконечно удаленных точках») параллельны прямой a. Ну, а на рисунке 13 изображен «бесконечный треугольник», стороны которого попарно параллельны. Короче, это есть модель именно геометрии Лобачевского.

— А другие ученые, имена которых вы назвали, построили такую же модель?

— О нет! Сейчас известно много разных моделей геометрии Лобачевского. Например, в работах Клейна и Кэли построена модель, в которой тоже рассматриваются только точки, лежащие внутри некоторого круга K, но «прямыми» у них считаются *хорды* этого круга (без концов). На этой модели еще проще увидеть, что через точку вне «прямой» a проходит бесконечно много «прямых», не пересекающихся с a (рис. 14). Однако углы, например, в этой модели измеряются сложнее, чем в модели Пуанкаре.

— Да, ваши «математические диковинки» очень интересны. Теперь понятно значение открытия Н. И. Лобачевского, который не только построил совершенно необычную геометрию, но и положил начало для нахождения все новых и новых «геометрий». Я слышал, что математика сейчас рассматривает много разных пространств и геометрий, причем они применяются в физике и других областях. Наверно, и в вашей коллекции есть немало удивительных пространств, геометрий, математических «миров»?

— Есть, конечно. Но об этом поговорим как-нибудь в другой раз.

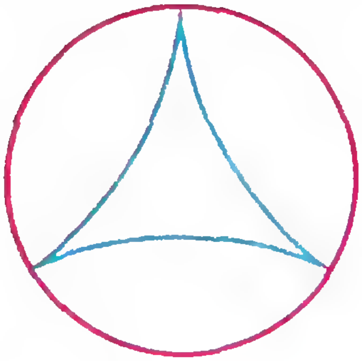


Рис. 13.

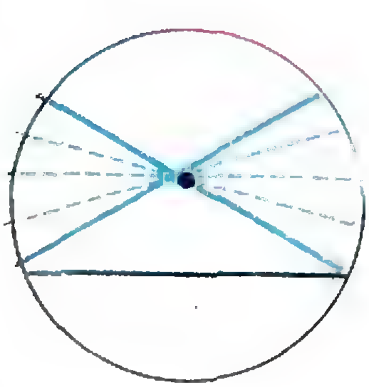


Рис. 14.

ИСТОРИЯ ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА

Л. КУРЛЯНДЧИК, А. ФАЙБУСОВИЧ

Мы расскажем о неравенстве

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}{}^{*)},$$

исследовать которое впервые предложил американский математик Шапиро на страницах журнала «The American Mathematical Monthly» в 1954 году. Эта задача привлекла внимание многих математиков во всем мире. Весьма существенный вклад в ее решение внес советский школьник (читатель «Кванта»!) Володя Дринфельд, ставший впоследствии лауреатом Филдсовской премии **).

В 1958 году профессор Морделл из Кембриджа доказал это неравенство для $n\leqslant 6$. Столкнувшись с принципиальными трудностями в случае $n=7$, он высказал гипотезу, что неравенство для $n=7$ неверно. Любопытно, что если бы ему удалось доказать свою гипотезу, т. е. найти семь чисел $x_1, x_2, \ldots, x_7$, для которых такая сумма была бы меньше $7/2$, то отсюда сразу следовало бы, что неравенство неверно для всех $n\geqslant 7$. Докажем это. Сначала введем обозначение

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2},$$

которое сэкономит нам много места. Затем заметим, что

$$f_n(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

т. е. левая часть неравенства не изменяется, если числа, входящие в его левую часть, переставить по циклу. Поэтому это неравенство и другие, обладающие таким свойством, называются *циклическими*.

Проверьте, что

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)+1.$$

Отсюда следует, что если

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}n,$$

то

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1, x_2)<\frac{1}{2}(n+2).$$

Теперь проверьте, что

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n)-f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)-\frac{1}{2}=\frac{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}{2x_i(x_i+x_{i+1})},$$

при этом следует считать, что $x_{n+1}=x_1$, а $x_{n+2}=x_2$. Отсюда вытекает, что если

$$(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\leqslant 0,$$

то

$$f_{n+1}(x_1, \ldots, x_i, x_i, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}(n+1)$$

при $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)<\frac{1}{2}n$.

Но в случае нечетного n обязательно найдется такое i, для которого $(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\leqslant 0$, т. к. если бы для всех i выполнялось неравенство $(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})>0$, то, перемножив эти неравенства, мы получили бы $(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2\ldots(x_n-x_1)^2<0$. Поскольку 7 — число нечетное, то неравенство было бы неверным для $n=8$ и всех четных n, а предыдущее рассуждение обеспечивало бы этот результат для нечетных n.

Однако в 1961 году Дьекович, математик из Белграда, опроверг предположение Морделла, доказав неравенство для $n=8$. А в 1967 году бразильский математик Новосад опубликовал доказательство для $n=10$. В 1974 году советские математики В. И. Левин и Е. К. Годунова доказали неравенство для $n=12$.

---

*) Все переменные в этой статье неотрицательны, а знаменатели положительны.

**) О премии Филдса и ее лауреатах «Квант» рассказывал в № 6 за 1990 год.

В те годы никто из математиков не пытался доказать неравенство в общем виде. Уже в 1956 году английский математик Лайтхилл установил, что, вообще говоря, неравенство неверно. Ему удалось построить набор из двадцати чисел $x_1, \ldots, x_{20}$ такой, что $f_{20}(x_1, \ldots, x_{20}) < 10$. А через некоторое время ему и независимо от него шотландскому математику Цулауфу удалось найти соответствующие примеры для $n=14$. Вот один из них: 50, 5, 48, 3, 48, 1, 50, 0, 52, 1, 54, 4, 53, 6.

В случае нечетного n все обстоит значительно сложнее. В 1958 году Ранкин, математик из Глазго, доказал, что неравенство неверно для достаточно больших нечетных n.

В 1959 году уже упоминавшийся нами Цулауф доказал, что неравенство неверно для нечетных $n \geqslant 53$. В 1961 году Дигнанда, ученый из Сингапура, привел контрпример для $n=27$. Опровергающий пример для $n=25$ был построен английским математиком Дейкиным в 1971 году. Двум школьникам математической школы-интерната при Ленинградском университете (ученикам одного из авторов) Р. Алексееву и Е. Фошкину, используя ЭВМ, удалось самостоятельно построить контрпример для $n=25$:
32, 0, 37, 0, 43, 0, 50, 0, 59, 8, 62, 21, 55, 29, 44, 32, 33, 31, 24, 30, 16, 29, 10, 29, 4.

Совсем недавно, в октябре 1989 года американский математик Трош опубликовал доказательство справедливости неравенства для всех оставшихся n, а именно для 13, 15, 17, 19, 21 и 23. Правда, для этого было достаточно доказать неравенство для $n=23$, что он и сделал.

С 1956 года, когда было установлено, что неравенство $f_n \geqslant \frac{n}{2}$ неверно, исследования велись в двух направлениях. Первое — это выяснение, для каких же n неравенство верно. О состоянии этого вопроса мы уже рассказали. К рассказу о другом направлении исследований мы сейчас перейдем.

В 1957 году Ранкин доказал, что справедливо неравенство $f_n \geqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{6}n = \frac{n}{2} \cdot 0{,}609\ldots$. Он же в 1961 году несколько улучшил свой результат: $f_n \geqslant \frac{n}{2} \cdot 0{,}661$. В том же году Диананда сумел доказать, что $f_n \geqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \cdot 0{,}914\ldots$. В 1962 году он доказал, что $f_n \geqslant \frac{n}{2} \times 0{,}922\ldots$, т. е. встал вопрос о том, каково же наибольшее число γ, для которого неравенство $f_n \geqslant \gamma \cdot \frac{n}{2}$ верно при любых натуральных n. Именно эту задачу решил Володя Дринфельд.

А началось все с того, что в 1969 году на Третьей Всесоюзной математической олимпиаде было предложено доказать неравенство $\frac{x_1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{n}{4}$. Из всех участников ее сумел решить один школьник — ученик математической школы-интерната при Ленинградском университете А. Берзиньш, трехкратный победитель Всесоюзных олимпиад.

Решение здесь таково. Пусть x_{i_1} — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; x_{i_2} — наибольшее из двух следующих за x_{i_1} чисел; x_{i_3} — наибольшее из двух следующих за x_{i_2} чисел и так далее. Пусть k таково, что максимальное из двух следующих за x_{i_k} чисел — это x_{i_1}. Ясно, что $k \geqslant \frac{n}{2}$, и поэтому

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1+x_2} > \frac{x_{i_1}}{2x_{i_2}} + \frac{x_{i_2}}{2x_{i_3}} + \ldots + \frac{x_{i_k}}{2x_{i_1}} \geqslant \frac{k}{2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

То, что последняя сумма не меньше чем $\frac{k}{2}$, следует из неравенства Коши $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geqslant k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$.

Одним из победителей этой олимпиады был харьковский школьник Володя Дринфельд. В составе команды Советского Союза он принял участие в Международной математической олимпиаде. Научным руководителем команды был один из крупнейших советских специалистов по неравенствам профессор В. И. Левин. Он рассказал ребятам о циклическом неравенстве, и в этом же 1969 году Володе удалось найти искомое значение γ. Оказалось, что $\gamma=0{,}989\ldots$

Прежде чем рассказать идею работы В. Дринфельда, покажем, как получить более слабые результаты, сформулированные в задаче М1250. Напомним условие этой задачи.

М1250. *Докажите, что если* x_1, $x_2, \ldots, x_n$ *— положительные числа, то* $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$ *больше чем а)* $(\sqrt{2}-1)n$; *б)* $\frac{5}{12}n$; *в) если числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *образуют монотонную последовательность, то эта сумма не меньше* $\frac{n}{2}$.

Решение

а) Каждую из дробей

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

представим в виде

$$\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{\frac{1}{2}x_{i+1}+x_{i+2}}{x_{i+1}+x_{i+2}}-1.$$

Мы получим $2n$ дробей и сгруппируем их по парам — первую дробь с $2n$-й; вторую с третьей; четвертую с пятой и так далее. Оценим сразу сумму чисел, образующих какую-то пару:

$$\frac{\frac{1}{2}x_i+x_{i+1}}{x_i+x_{i+1}}+\frac{x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$

$$\geqslant2\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}x_i+x_{i+1}\right)\left(x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}\right)}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{x_ix_{i+1}}{4(x_i+x_{i+1})^2}\right)\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}>$$

$$>\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}.$$

Так как произведение n чисел

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}},\ \sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}},\ldots,\ \sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}$$

равно 1, то из неравенства Коши следует, что их сумма не меньше n. Поэтому исходная сумма больше чем $\sqrt{2}n-n=(\sqrt{2}-1)n$.

б) При доказательстве пункта а) мы к каждой дроби добавили по единице. Но почему нужно прибавлять именно единицу? Давайте прибавим произвольное число α и подберем β так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\alpha=\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+$$

$$+\frac{\alpha(\beta x_{i+1}+x_{i+2})}{x_{i+1}+x_{i+2}}.$$

Ясно, что $\beta+\alpha\beta=\alpha$, т. е. $\beta=\frac{\alpha}{\alpha+1}$. Следовательно,

$$\frac{x_i+\beta x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}+\frac{\alpha(\beta x_i+x_{i+1})}{x_i+x_{i+1}}\geqslant$$

$$\geqslant2\sqrt{\alpha\frac{(x_i+\beta x_{i+1})(\beta x_i+x_{i+1})}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}=$$

$$=2\sqrt{\alpha\frac{\beta(x_i+x_{i+1})^2+(\beta-1)^2x_ix_{i+1}}{(x_i+x_{i+1})(x_{i+1}+x_{i+2})}}>$$

$$>2\sqrt{\alpha\beta\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}=\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\sqrt{\frac{x_i+x_{i+1}}{x_{i+1}+x_{i+2}}}.$$

Значит,

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}>$$

$$>\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}\left(\sqrt{\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}}+\sqrt{\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sqrt{\frac{x_n+x_1}{x_1+x_2}}\right)-\alpha n>$$

$$>\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}n-\alpha n=\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha\right)\cdot n.$$

Если положить $\alpha=\frac{5}{4}$, то $\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}}-\alpha=\frac{5}{12}=0{,}416\ldots$ и утверждение пункта б) доказано. Напомним, что пункт а) получается, если положить $\alpha=1$.

в) Рассмотрим случай $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Покажем, что здесь имеет место соотношение

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant$$
$$\geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2}.$$

Действительно, имеет место тождество:

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) =$$
$$= \frac{(x_{n-2} - x_{n-1})(x_1 - x_n)}{(x_{n-1} + x_n)(x_1 + x_{n-1})} +$$
$$+ \frac{(x_1 - x_n)(x_{n-1} - x_n)(x_1 - x_{n-1})}{2(x_{n-1} + x_n)(x_1 + x_n)(x_1 + x_{n-1})} +$$
$$+ \frac{(x_{n-1} - x_n)(x_2 - x_n)}{(x_1 + x_2)(x_1 + x_n)} + \frac{1}{2}.$$

Но все слагаемые неотрицательны (из монотонности последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Итак,

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) +$$
$$+ \frac{1}{2} \geqslant f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + 1 \geqslant \ldots$$
$$\geqslant f_2(x_1, x_2) + \frac{n-2}{2} =$$
$$= \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_1} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Заметим, что

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_n + x_1}{x_1 + x_2} -$$
$$- n + \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_1}{x_n + x_1}.$$

Но первая сумма не меньше n, так как произведение всех слагаемых равно 1. Поэтому достаточно показать, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} +$$
$$+ \frac{x_3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_1}{x_n + x_1} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Для этого покажем, что

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) -$$
$$- g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Действительно,

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) -$$
$$- \frac{1}{2} = \frac{x_n}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_1}{x_n + x_1} - \frac{x_1}{x_{n-1} + x_1} -$$
$$- \frac{1}{2} = \frac{(x_{n-1} - x_1)(x_n - x_{n-1})(x_n - x_1)}{2(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1)(x_1 + x_{n-1})} \geqslant 0.$$

Итак,

$$g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant$$
$$\geqslant g_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + \frac{1}{2} \geqslant$$
$$\geqslant g_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) + 1 \geqslant \ldots$$
$$\ldots \geqslant g_2(x_1, x_2) + \frac{n-2}{2} =$$
$$= \frac{x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_1}{x_2 + x_1} + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2}.$$

Теперь изложим доказательство В. Дринфельдом его результата. Оно опирается на два замечательных неравенства.

В первом участвуют два набора из n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Рассмотрим выражение $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$. Утверждение состоит в том, что это выражение принимает максимальное значение, если числа занумерованы так, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$, а минимальное, если

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n, \text{ а } b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n.$$

Второе неравенство, называемое неравенством Иенсена, связано с выпуклыми функциями. Функция $\varphi(x)$ называется *выпуклой* на отрезке $[a; b]$, если ее значения на любом отрезке $[x_1; x_2]$ из $[a; b]$ лежат на графике ниже, чем отрезок, соединяющий точки $(x_1; \varphi(x_1))$ и $(x_2; \varphi(x_2))$ (рис. 1). Это определение можно записать в виде неравенства

$$\varphi(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leqslant \alpha \varphi(x_1) + (1-\alpha) \varphi(x_2).$$

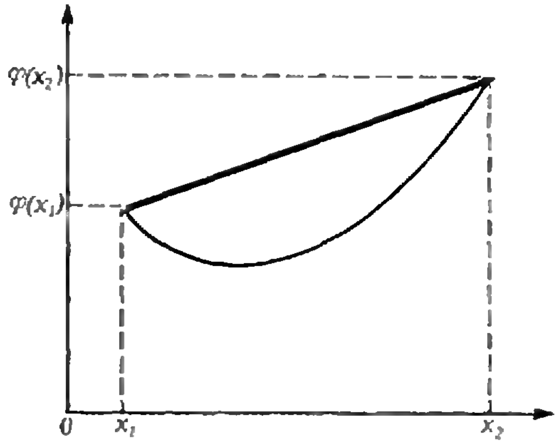


Рис. 1.

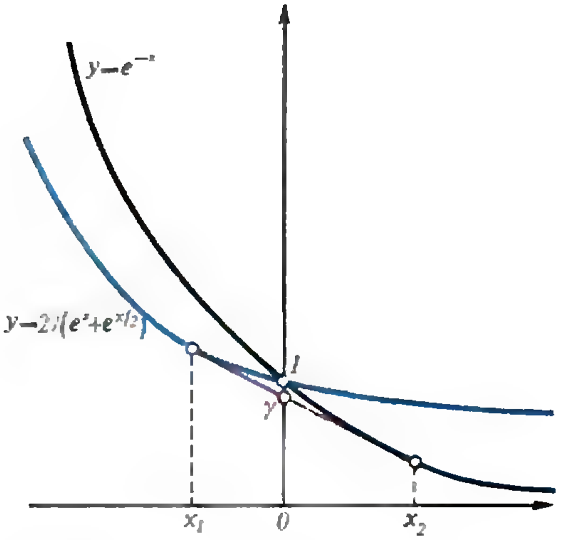


Рис. 2.

Неравенство Иенсена утверждает, что для любой выпуклой на отрезке $[a;\ b]$ функции $\varphi(x)$, произвольного набора точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из этого отрезка, а также произвольного набора положительных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$, в сумме равных 1 $(p_1+p_2+\ldots+p_n=1)$, имеет место соотношение

$$\varphi(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)\leqslant \leqslant p_1\varphi(x_1)+\ldots+p_n\varphi(x_n).$$

Приступим к изложению доказательства. Обозначим $\frac{x_{i+1}}{x_i}=k_i$, причем $\frac{x_1}{x_n}=k_n$. Расположим полученные числа k_i в порядке возрастания, а члены возникшей последовательности обозначим через m_i. Теперь рассмотрим две последовательности:

$$\frac{1}{m_1},\ \frac{1}{m_2},\ \ldots,\ \frac{1}{m_n}\ \text{и}$$

$$\frac{1}{1+m_n},\ \frac{1}{1+m_{n-1}},\ \ldots,\ \frac{1}{1+m_2},\ \frac{1}{1+m_1}.$$

Одна монотонно убывает, а вторая монотонно возрастает. Используя первое наше неравенство, получаем, что

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}=$$
$$=\frac{1}{k_1(k_2+1)}+\frac{1}{k_2(k_3+1)}+\ldots+\frac{1}{k_n(k_1+1)}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{m_1(m_n+1)}+\frac{1}{m_2(m_{n-1}+1)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{m_n(m_1+1)}.\qquad(*)$$

Обозначим $m_i\cdot m_{n-i+1}=c_i$ и

$$r_i=\frac{1}{m_i(m_{n-i+1}+1)}+\frac{1}{m_{n-i+1}(m_i+1)},$$

тогда

$$r_i=\frac{1}{c_i}\left(1+\frac{c_i-1}{(1+m_i)(1+m_{n-i+1})}\right).$$

Так как $(1+m_i)(1+m_{n-i+1})\geqslant(1+ +\sqrt{c_i})^2$, то

$$r_i\geqslant\begin{cases}\frac{1}{c_i}, & c_i\geqslant1,\\ \frac{2}{c_i+\sqrt{c_i}}, & c_i<1.\end{cases}\qquad(**)$$

Положим $c_i=e^{y_i}$. Из неравенств $(*)$ и $(**)$ имеем

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{c_i\geqslant1}e^{-y_i}+\sum_{c_i<1}2\left(e^{\frac{y_i}{2}}+e^{y_i}\right)^{-1}\right).\qquad(***)$$

Пусть g — наибольшая выпуклая функция, не превосходящая функций $y=e^{-x}$ и $y=2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^x\right)^{-1}$. Тогда из неравенства $(***)$, в силу неравенства Иенсена, имеем

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(y_i)\geqslant g\left(\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}\right)=g(0).$$

Тем самым доказано, что $\gamma\geqslant g(0)$.

Далее довольно изящными рассуждениями доказывается, что $g(0)=\gamma$.

Пусть общая касательная соединяет точки $(x_1;\ e^{-x_1})$ и $(x_2;\ 2(e^{\frac{x_2}{2}}+e^{x_2})^{-1})$ (рис. 2). График функции g состоит из трех частей: $y=e^{-x}$ при $x\geqslant x_1$, $y=2(e^x+e^{\frac{x}{2}})^{-1}$ при $x\leqslant x_2$ и их общей касательной при $x_2\leqslant x\leqslant x_1$. Ордината точки пересечения касательной с осью ординат и есть γ.

Быстрое чтение
для всех

Если вы хотите идти в ногу со временем
и не утонуть в потоке информации,
вам необходимо научиться быстро читать.
В этом вам поможет

ВСЕСОЮЗНЫЙ ЦЕНТР ОБУЧЕНИЯ ТЕХНИКЕ БЫСТРОГО ЧТЕНИЯ,

который объявляет очередной
набор слушателей на заочные курсы.

Развить свое внимание, память, интуицию вам поможет уникальная, не имеющая аналогов в мире система «ТЕХНИКА БЫСТРОГО ЧТЕНИЯ»

Методика гарантирует повышение скорости чтения в 5 раз, значительное повышение качества усвоения прочитанного. Каждый слушатель получает единственный в стране учебник «Техника быстрого чтения» и методические пособия. Дополнительно высылаются звукозаписи учебных сеансов аутогенной тренировки.

Принимаются все желающие в возрасте от 15 лет. По окончании курсов выдаются дипломы. Ведет занятия один из авторов учебника «Техника быстрого чтения» кандидат технических наук О. А. Андреев.

Плата за обучение переводится только после получения от нас специального бланка-заявления. Подробные условия обучения и бланки-заявления высылаются по запросу.

Не забудьте вложить в письмо конверт с вашим домашним адресом.

Адрес курсов: 125047, Москва, 1-я Брестская ул., дом 50.
Телефон: 251-99-47.
Телефоны отделений Всесоюзного центра обучения технике быстрого чтения:
г. Киев — 440-60-81,
г. Ленинград — 210-49-52,
г. Ростов-на-Дону — 32-35-05,
г. Свердловск — 51-62-98.

МОЯ ПЕРВАЯ НАУЧНАЯ НЕУДАЧА

Академик АПН СССР
В. ФАБРИКАНТ

Моя первая, но, к сожалению, не последняя крупная научная неудача связана с участием в первых работах по исследованию комбинационного рассеяния света.

Явление комбинационного рассеяния света было открыто в 1928 году советскими физиками Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом в кристаллах и, независимо, индийским физиком Ч. Раманом в жидкостях. Эффект комбинационного рассеяния получил название эффекта Рамана, и Раман был удостоен Нобелевской премии. Советские физики премию не получили, что явно несправедливо.

История этого открытия довольно своеобразна.

В 1923 году австрийский физик Смекал опубликовал теоретическую работу, в которой дал совершенно четкое предсказание явления комбинационного рассеяния света. В 1926 году голландец Крамерс и немец Гейзенберг повторили предсказание Смекала в более развернутом виде. Французские физики Рокар и Кабанн пытались экспериментально подтвердить предсказания теоретиков, однако потерпели неудачу ввиду слабости эффекта.

Комбинационное рассеяние представляет одну из разновидностей молекулярного рассеяния света. Здесь хочется вспомнить одну поучительную историю, связанную с рождением теории молекулярного рассеяния.

О голубом цвете неба

Максвелл, экзаменуя Рэлея, будущего знаменитого физика, предложил ему, в качестве задачи, дать объяснение голубого цвета неба. Рассказывают, что Максвелл намекнул Рэлею, что явление должно быть связано с молекулярной структурой воздуха. Еще Леонардо да Винчи было ясно, что голубой цвет неба объясняется «телесностью воздуха», рассеянием солнечного света атмосферой. Рэлей рассмотрел этот вопрос с позиции волновой теории света. Световая волна, распространяющаяся в атмосфере, вызывает колебания в молекулах воздуха (теперь мы скажем «колебания электронов», Рэлей и Максвелл еще не знали об их существовании). Молекулярные колебания сопровождаются испусканием световых волн. Молекулы работают подобно ретрансляционным радиостанциям. Каждая молекула испускает вторичные волны, которые, согласно Рэлею, и составляют рассеянный свет. При этом Рэлей показал, что интенсивность света, рассеянного каждой молекулой, обратно пропорциональна четвертой степени длины волны рассеиваемого света (этот закон был им установлен в 1871 г.). Тем самым, голубой цвет неба был объяснен — синие и голубые лучи обладают более короткими длинами волн, чем красные и желтые, поэтому голубые и синие лучи рассеиваются сильнее. Количественное сравнение результатов экспериментального исследования с расчетами Рэлея дало прекрасное совпадение. Максвелл, очевидно, был доволен своим учеником, и работа Рэлея была опубликована. Как будто все обстояло хорошо.

Однако в 1907 году Мандельштам обратил внимание на то, что в рассуждении Рэлея есть слабое место. Существует поговорка: «Победителей не судят». Эта поговорка не совсем соответствует действительности. Победителей всегда судят за средства, которыми достигнута победа, за ее цену. В науке победителя судят всегда. Совпадение результатов теории и эксперимента есть необходимое, но отнюдь не достаточное свидетельство правильности теории.

В данном случае Мандельштам обратил внимание на то, что вторичные волны, рассеянные отдельными молекулами, когерентны между собой. Это значит, что должно вроде бы происходить интерференционное гашение волн, рассеянных двумя молекулами, расстояние между которыми равно половине длины волны света. Выяснилось, однако (Смолуховский, 1908 г. Эйнштейн, 1910 г.), что этого не происходит благодаря тому, что в пространственном распределении молекул существуют неоднородности (их называют флуктуациями). Те участки, где молекул больше, рассеивают свет сильнее, чем разреженные участки. Впрочем, это уже другая история. Мы же вернемся к явлению комбинационного рассеяния.

Что такое комбинационное рассеяние?

Рассеяние света на молекулах, которое изучал Рэлей при объяснении голубого цвета неба, происходит без изменения частоты (частота рассеянного света равна частоте падающего). Такое рассеяние можно назвать упругим, так как состояние молекулы (или атома) после рассеяния такое же, как до него. При комбинационном рассеянии одновременно с актом рассеяния изменяется состояние молекулы, и рассеянный свет имеет частоту, отличную от частоты падающего. Экспериментально в рассеянном свете были обнаружены две новые линии (сателлиты): одна с частотой, большей падающей, другая — с меньшей. Каково же физическое объяснение этого явления?

Изменение частоты при комбинационном рассеянии света можно объяснить как на квантовом, так и на волновом языке. Как мы увидим, в данном случае квантовый язык проще и правильнее отражает особенности явления.

Квантовое сложение и вычитание

А. Смекал рассматривал комбинационное рассеяние как неупругие столкновения фотонов с атомами и молекулами.

Как известно, согласно квантовой теории, атомы и молекулы могут обладать только определенными запасами внутренней энергии — находиться на определенных энергетических уровнях. Если происходит неупругое столкновение фотона (энергия $h\nu_0$) с невозбужденной молекулой (или атомом), находящейся на нижнем энергетическом уровне E_1, то фотон отдает часть своей энергии и возбуждает молекулу до более высокого энергетического уровня E_2. После такого столкновения от молекулы отлетает фотон с уменьшенной энергией $h\nu_к$ (индекс «к» — от слова «красный»):

$$h\nu_к = h\nu_0 - (E_2 - E_1).$$

Если неупругое столкновение фотона происходит с уже возбужденной молекулой, то она переходит с уровня E_2 на уровень E_1 и возникает фотон с увеличенной энергией $h\nu_ф$ (индекс «ф» — от слова «фиолетовый»):

$$h\nu_ф = h\nu_0 + (E_2 - E_1).$$

В первом случае из кванта лучистой энергии вычитается квант внутримолекулярной энергии, а во втором — происходит сложение этих квантов. В первом случае частота рассеянного фотона меньше частоты фотона, падающего на молекулу:

$$\nu_к = \nu_0 - (E_2 - E_1)/h,$$

во втором — больше:

$$\nu_ф = \nu_0 + (E_2 - E_1)/h.$$

Таким образом, в рассеянном свете наряду с частотой ν_0 (упругие столкновения фотонов с атомами и молекулами) должны появиться частóты $\nu_к$ и $\nu_ф$. В спектре рассеянного света этому соответствуют две спектральные линии (сателлиты), симметрично сдвинутые относительно центральной линии с частотой ν_0. Однако интенсивность саттелитов резко различна. Здесь имеет место сильная асимметрия: интенсивность красного сателлита ($\nu_к$) значительно выше интенсивности фиолетового сателлита ($\nu_ф$). Объясняется эта асимметрия весьма просто. Ведь красный сателлит возникает в результате столкновений фотонов с нормальными атомами или молекулами, а фиолетовый — с возбужденными. Но в обычных условиях возбужденных атомов и молекул всегда значительно меньше, чем нормальных, поэтому и столкновения с ними фотонов происходят гораздо реже, чем с нормальными атомами и молекулами.

Классическое умножение

На классическом языке комбинационное рассеяние аналогично процессу передачи информации по радио. На эту аналогию обратил внимание Л. И. Мандельштам сразу же после экспериментального открытия явления. Передача информации по радио связана с использованием модулирования радиоволн. Мы ограничимся одним типом модулирования, имеющим наиболее широкое применение,— амплитудной модуляцией.

Дело в том, что идеальная волна синусоидальной формы, с унылым постоянством повторяющая свою форму во времени, не способна перенести информацию из одного места в другое. Необходимо нарушить правильность формы волны, сделать на ней «зарубку» и наблюдать переход «зарубки» из одной точки пространства в другую. Такой «зарубкой» служит изменение амплитуды волны. Певец с помощью микрофона модулирует амплитуду радиоволны, и эта волна несет информацию об исполняемой им песне. Звуковые волны с циклической частотой $\omega_{зв}=2\pi\nu_{зв}$ вызывают колебания мембраны микрофона, которые преобразуются в электрические колебания такой же частоты. С их помощью осуществляется амплитудная модуляция радиоволны.

Воспользуемся услугами тригонометрии для более подробной характеристики волны. Пусть амплитуда волны A не постоянна, а равна $1+a\cos(\omega_{зв}t)$; тогда для модулированной волны мы получим следующее выражение:

$$E=(1+a\cos(\omega_{зв}t))\cos\omega_0 t,$$

где ω_0 — циклическая частота несущей волны (радиочастота). Используя известное тригонометрическое соотношение

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

эту формулу можно переписать в виде

$$E=\cos(\omega_0 t)+\frac{a}{2}(\cos(\omega_0+\omega_{зв})t+\\+\cos(\omega_0-\omega_{зв})t).$$

Таким образом, модулированную волну можно рассматривать как состоящую из трех волн, каждая из которых имеет постоянную амплитуду. Частоты этих волн ω_0, $\omega_0+\omega_{зв}$ и $\omega_0-\omega_{зв}$.

Аналогичные явления происходят и при молекулярном рассеянии. При взаимодействии с колеблющейся молекулой (или атомом) происходит как бы «модуляция» падающей волны с частотой, соответствующей частоте колебаний самой молекулы. Значит, аналогично квантовой картине, в спектре расеянного света появляются два сателлита, симметрично сдвинутые относительно центральной линии на частоту колебаний молекулы.

Как видно из полученной формулы, амплитуды этих сателлитов должны быть равны между собой, что противоречит опыту и квантовой картине.

Как я измерял постоянную Планка *h*

Мне, студенту III курса, Г. С. Ландсберг и Л. И. Мандельштам поручили экспериментальную проверку справедливости квантовой теории комбинационного рассеяния света. Одновременно следовало использовать эти измерения как новый метод определения значения h (его нужно было извлечь из измерения интенсивности сателлитов). И тут я потерпел неудачу, так как в 1928 году еще не было ясности в том, что интенсивности сателлитов должны относиться просто как концентрации возбужденных и невозбужденных молекул. Применялась сложная формула, подставив в которую экспериментальные данные, я получил значение h раза в полтора меньше общепринятого. Результат меня обескуражил. Через некоторое время появилась работа французского физика Дора, проделавшего те же эксперименты, но воспользовавшегося правильной формулой для интенсивности сателлитов и получившего значение h, хорошо согласующееся с общепринятым. После обработки по правильной формуле мои данные тоже дали прекрасное согласие, но я посчитал, что публиковать их нет смысла, несмотря на предложение моих учителей. Дело ограничилось ссылкой в одной из статей Ландсберга и Мандельштама, опубликованной в 1930 году.

Любопытно, что неправильность формулы, которой пользовался я, связана с предположением о значительной роли в комбинационном рассеянии актов вынужденного испускания фотонов, введенных в физику Эйнштейном*). Через десять лет, в 1940 году, я указал на возможность экспериментального обнаружения вынужденного испускания фотонов. В 1951 году я совместно с Бутаевой и Вудынским описал в авторской заявке способ усиления света, основанный на использовании этих актов. Мы получили соответствующее авторское свидетельство. Как известно, указанный способ усиления света применяется в лазерах. К сожалению, я не указал в явной форме на очень важное свойство — на когерентность испущенного и падающего излучений. Именно это свойство акта вынужденного излучения и позволяет создавать оптические лазерные генераторы.

В. А. Фабрикант (1907—1991)

3 марта 1991 года на 84-м году жизни скончался замечательный ученый и педагог, лауреат Государственной премии СССР, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Академии педагогических наук СССР Валентин Александрович Фабрикант.

За свою долгую творческую жизнь Валентин Александрович сумел многое — сделать замечательные открытия (он — основоположник работ по параметрическому усилению света, заложивших основу создания лазеров), воспитать плеяду учеников, написать прекрасные книги.

В. А. Фабрикант стоял и у истоков создания нашего журнала. Являясь бессменным членом редакционной коллегии, он был большим другом читателей и редакции. Когда Валентин Александрович приходил в редакцию, его деликатность, обаяние и интеллигентность привлекали к нему окружающих, создавали вокруг него ту атмосферу аристократии духа, которая ассоциируется у нас сегодня с университетской жизнью начала века.

До последних дней Валентин Александрович не прекращал свою научную, педагогическую и просветительскую деятельность. Вот и сейчас скорбная весть о его кончине застала редакцию за подготовкой к публикации его статьи — той, что лежит перед вами. В этой статье В. А. Фабрикант обращается к дням своей молодости. Его работа — яркий пример критического отношения ученого к результатам своего труда, отношения, которое присуще таланту и является движущей силой прогресса.

Редакционная коллегия
Редакционный совет
Редакция журнала «Квант»

---

*) При вынужденном излучении падающий фотон не изменяет свою энергию, а лишь дает «сигнал» к излучению молекулой (атомом) дополнительного фотона.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1276 — М1280, Ф1283 — Ф1287

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1276» или «Ф1283». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1276. Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC, основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN, а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN. Докажите что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.

Е. Куланин

М1277. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\geqslant n\sqrt{2}.$$

Л. Курляндчик

М1278. Имеется n вещественных чисел x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющих условиям $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что $x_ix_j\leqslant -1/n$ для некоторых i и j.

Е. Столов

М1279. На плоскости Oxy расположено n непересекающихся квадратов со стороной 1, стороны которых параллельны осям. Известно, что любые два из них можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что можно одной прямой, параллельной оси, пересечь некоторые $n-2$ квадрата.

А. Анджанс

М1280*. Докажите, что в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$ встретится

а) не менее 20 одинаковых цифр подряд;

б) последовательность цифр 123456789.

А. Коробов

Ф1283. Перед закрытым шлагбаумом стоит человек с тяжелой тележкой. Ему нужно как можно быстрее попасть в магазин, находящийся на расстоянии 300 м от шлагбаума. Максимальная сила, с которой человек может действовать на тележку, 500 Н, наибольшая скорость тележки 5 м/с, масса нагруженной тележки 2000 кг. Известно, что шлагбаум откроется ровно через 30 с. За какое минимальное время человек сможет доставить груз в магазин?

А. Коршков, Н. Коршкова

Ф1284. Большой сосуд массой m заполняют водой через небольшое отверстие в дне сосуда (рис. 1). Для того чтобы закачать в сосуд воду массой M, пришлось совершить работу A. Отверстие открывают, и вода начинает вытекать. Одновременно поднимают сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли. Какую работу придется совершить до того момента, когда сосуд опустеет?

Н. Кузьма

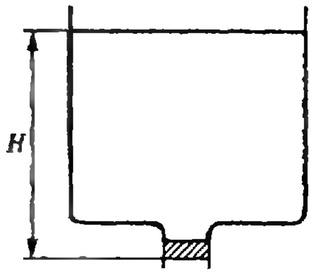


Рис. 1.

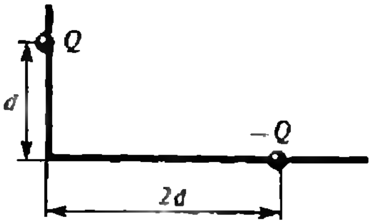


Рис. 2.

Задачник «Кванта»

Ф1285. На квадратном деревянном плоту размером $2\times2\times0{,}3$ м, сделанном из дерева плотностью 800 кг/м^3, стоит физик массой 80 кг. На какое расстояние от центра плота он должен отойти, чтобы край плота окунулся в воду?

Ф1286. На непроводящий стержень, изогнутый под прямым углом, насажены две бусинки равной массы M, несущие заряды противоположных знаков Q и $-Q$ (рис. 2). В начальный момент бусинки неподвижны и находятся на расстояниях d и $2d$ от вершины угла. Отпустим их. Где окажется «дальняя» бусинка в тот момент, когда «ближняя» доедет до вершины угла? Найдите скорости бусинок в тот момент, когда расстояние между ними составит d.

Ф1287. Неподалеку от включенного в сеть трансформатора поместили замкнутый виток из медной проволоки. Ток в нем оказался сдвинутым по фазе на $\pi/4$ относительно тока в обмотке трансформатора. Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая в витке, если сделать его не из меди, а из нихрома, сохранив все размеры неизменными? Удельное сопротивление у нихрома в 65 раз выше, чем у меди. Амплитуду тока в обмотке трансформатора считать одинаковой в обоих случаях.

А. Зильберман

Решения задач

M1251 — M1255, Ф1263 — Ф1267

***M1251.** На плоскости дан угол (меньший развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s, отрезающие от угла четырехугольник наибольшей площади (P и Q — точки на сторонах угла, M — внутри угла).*

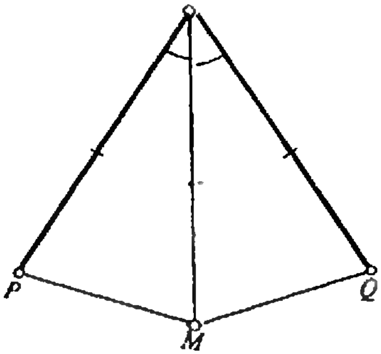


Рис. 1.

Ответ: искомая точка M лежит на биссектрисе угла, причем $AM=AP=AQ$ (A — вершина угла; рис. 1) — эти условия позволяют построить M очевидным образом.

Мы начнем с произвольных точек M, P и Q, для которых задана сумма $PM+MQ$, и в несколько шагов передвинем их так, чтобы получилось расположение, указанное в ответе, причем площадь $APMQ$ на каждом шаге будет увеличиваться (точнее, не уменьшаться).

1^0. Заменим четырехугольник $APMQ$ выпуклым (если первоначально он невыпуклый).

Для этого заменим M на точку M', симметричную M относительно середины отрезка PQ. Ясно, что M' лежит внутри угла (и даже внутри параллелограмма $APA'Q$; рис. 2), $PM+MQ=PM'+M'Q$, а площадь четырехугольника возрастает.

2^0. Фиксируем $\triangle PQM$ и переместим его внутри угла так, чтобы $AP=AQ$.

Удобнее двигать не треугольник, а вершину угла A, сохраняя его величину, т. е. по дуге окружности PAQ (рис. 3). Площадь $\triangle APQ$ станет наибольшей, когда A попадет в середину дуги.

3^0. Переместим M параллельно PQ на биссектрису угла A и подвергнем всю фигуру гомотетии с цент-

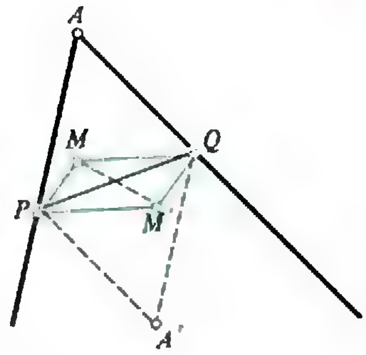


Рис. 2.

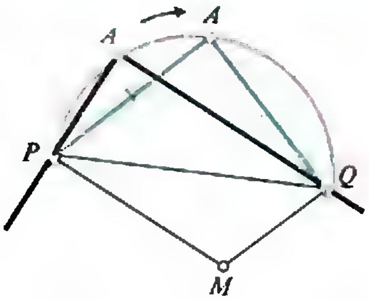


Рис. 3.

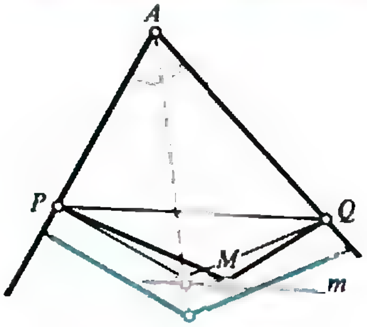


Рис. 4.

ром A так, чтобы восстановилась заданная величина суммы $PM+MQ$ (рис. 4).

При сдвиге M площадь $APMQ$ не меняется, но сумма расстояний PM и MQ, вообще говоря, уменьшится. (Вспомним, что наименьшее значение $PM+MQ$ для точек M на данной прямой m достигается, когда PM и MQ составляют равные углы с m, поскольку $PM+MQ=P'M+MQ$, где точка P' симметрична P относительно m.) Следовательно, при последующей гомотетии площадь $APMQ$ может только возрасти.

Остается заметить, что полученный после шага 3^0 *«дельтоид» $APMQ$ состоит из двух равных треугольников* APM и AQM, в которых известны основание: $PM=QM=(PM+QM)/2$ и угол при вершине: $\angle PAM=\angle QAM=\angle A/2$. А мы уже видели (шаг 2^0), что при этих условиях площадь треугольника максимальна, когда он равнобедренный, т. е. когда $AP=AM=AQ$.

Н. Васильев, В. Сендеров

M1252. *Пусть a и n — натуральные числа. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем a^n-1 делится на n.*

Пусть $x=\overline{x_n x_{n-1}\ldots x_1}$ — запись числа $x<a^n-1$ в системе счисления по основанию a, т. е. $x=x_n\cdot a^{n-1}+x_{n-1}\cdot a^{n-2}+\ldots+x_1\cdot a^0$, где $0\leqslant x_i\leqslant a-1$, $i=1, \ldots, n$ (запись может начинаться с нулей). Покажем, что если x взаимно просто с числом $A=a^n-1$, то все числа, получаемые циклическими перестановками цифр в a-ичной записи x 1) взаимно просты с A и 2) различны. (Отсюда следует, что все такие числа разбиваются на непересекающиеся группы по n штук в каждой, а значит, их количество делится на n.)

1) Проверим, что при перестановке первой a-ичной цифры x_n числа x в конец снова получается взаимно простое с A число:

$$\overline{x_{n-1}\ldots x_1 x_n}=\overline{x_n x_{n-1}\ldots x_1 0}-\overline{x_1 0\ldots 00}+x_1=$$
$$=ax-x_1(a^n-1)=ax-Ax_1 —$$

это число взаимно просто с A, т. к. a и x взаимно просты с A.

2) Допустим, что при какой-то циклической перестановке цифр получилось исходное число x, т. е.

$$x=\overline{x_n\ldots x_1}=\overline{x_k x_{k-1}\ldots x_1 x_n\ldots x_{k+1}}\,.$$

Тогда

$$x(a^k-1)=\overline{x_k\ldots x_1 x_n\ldots x_{k+1}}\cdot a^k-\overline{x_n\ldots x_1}=$$
$$=\overline{x_k\ldots x_1}\cdot a^n-\overline{x_k\ldots x_1}=\overline{x_k\ldots x_1}\cdot A.$$

Но x и A взаимно просты, следовательно, a^k-1 делится на $A=a^n-1$, т. е. $k=n$, и наша перестановка — тождественная. (Можно и непосредственно показать, что если запись x переходит в себя при нетождественной циклической перестановке, то она состоит из повторенной несколько раз группы цифр, а тогда x, очевидно, не взаимно просто с $a^n-1=(a-1)\cdot 11\ldots1$.)

К. Кохась

M1253*. *На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников — «карта» нескольких «стран». Будем говорить, что такая карта реализуема в пространстве, если она является проекцией «выпуклой шапочки», т. е. если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — M, а проекция остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (и, быть может, стороны M).*

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

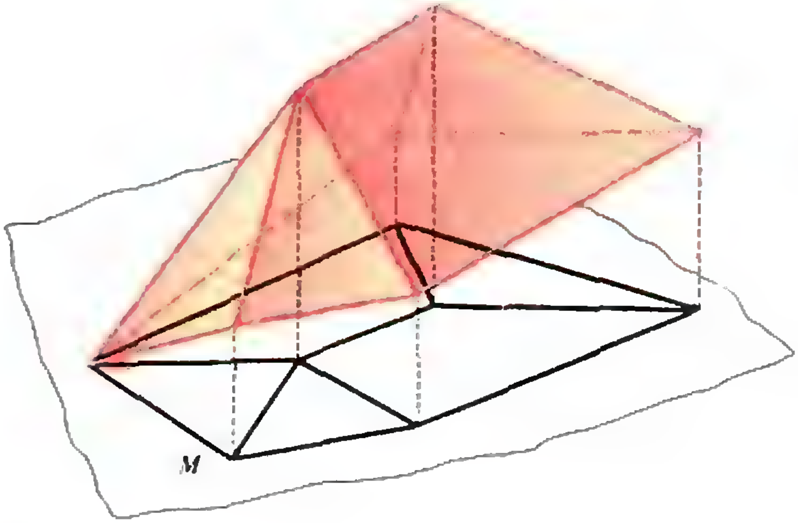
Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники,

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

Формулировка задачи М1253 вызвала у некоторых читателей недоуменные вопросы. Приводим уточненную формулировку; срок отправки решений продлевается до 15 июня 1991 года.

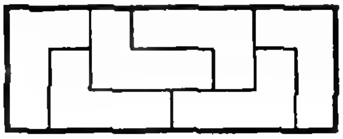
(Старую формулировку можно понять так, что края «шапочки» примыкают к сторонам многоугольника, т. е. у многогранника нет «вертикальных» боковых граней; в этом случае утверждения б) и в) очевидно неверны. Впрочем, было бы интересно получить необходимые или достаточные условия «реализуемости» и в таком, более узком, смысле.)



M1254. *На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник m×n клеток,*

Необходимость условия «mn делится на 8», как часто в подобных задачах, можно доказать с помощью подходящей раскраски. Пусть прямоугольник $m\times n$ раз-

$m \geqslant n > 1$. Докажите, что его можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы Г в том и только в том случае, если mn делится на 8.



резан на Г-образные фигуры из 4 клеток. Тогда число этих фигур $N = mn/4$. Одно из чисел — скажем, число строк m — четно. Раскрасим строки попеременно в белый и черный цвет. Каждая фигура Г из 4 клеток содержит либо одну, либо три черные клетки. Поскольку общее число черных клеток $mn/2 = 2N$ четно, то число N фигур должно быть четным (иначе сумма N слагаемых, равных 1 или 3, была бы нечетной). Поскольку $mn/4$ четно, mn делится на 8.

Для доказательства достаточности по существу нужно лишь убедиться, что можно разрезать прямоугольник 3×8 (см. рисунок). Дело в том, что любой прямоугольник вида $8k \times n$, где n нечетно, можно составить из прямоугольников 3×8 и 2×4, а прямоугольник $m \times n$, где m и n четны — разбить на прямоугольники 2×4. Последние же, очевидно, разрезаются на две «буквы Г».

Н. Васильев, Б. Гинзбург

М1255. *Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее из расстояний между двумя его скрещивающимися ребрами. Докажите неравенства $1/2 < d/h < 3/2$.*

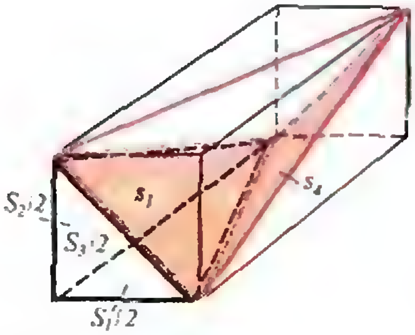


Рис. 1.

Рассмотрим параллелепипед, описанный около данного тетраэдра T, как показано на рисунке 1. Высоты h_i $(i=1, 2, 3, 4)$ тетраэдра и расстояния d_k $(k=1, 2, 3)$ между его противоположными ребрами можно выразить через объем V параллелепипеда, площади его граней и площади граней тетраэдра. Действительно, величины d_k — это высоты параллелепипеда, поэтому $V = d_k \cdot S_k$, где S_k — площади его соответствующих граней. С другой стороны, тетраэдр T получается из параллелепипеда отрезанием четырех тетраэдров, объем каждого из которых, очевидно, равен $V/6$. Следовательно, объем тетраэдра равен $(1-4/6)V = V/3$, а значит, $V = h_i \cdot s_i$, где s_i — площадь грани тетраэдра, перпендикулярной высоте h_i, $i=1, 2, 3, 4$. Итак,

$$h_i = V/s_i, \quad d_k = V/S_k.$$

Пусть, для определенности $h_1 = h$ и $d_1 = d$ — наименьшие из величин h_i и d_k соответственно. Рассмотрим тот из четырех тетраэдров, дополняющих T до параллелепипеда, который примыкает к T по грани площади s_1. Площади трех других его граней равны $S_1/2$, $S_2/2$ и $S_3/2$ и их сумма больше s_1, поскольку их проекции на грань s_1 полностью ее покрывают:

$$s_1 < (S_1 + S_2 + S_3)/2 \leqslant 3S_1/2$$

(S_1 — наибольшая из площадей S_k). Отсюда

$$d < 3h_1/2.$$

Докажем теперь, что

$$2S_1 < (s_1 + s_2 + s_3 + s_4),$$

отсюда будет следовать, что $S_1 < 2s_1$ (s_1 — наибольшая из площадей s_i), т. е. что $h_1 < 2d_1$. Для этого рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью, параллель-

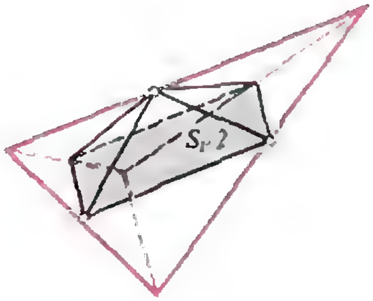


Рис. 2.

ной граням площади S_1 параллелепипеда и равноудаленной от них (рис. 1, 2). Легко видеть, что это параллелограмм $П$, стороны которого параллельны диагоналям этих граней и вдвое короче их. Поэтому его площадь равна $S_1/2$. Теперь рассмотрим четырехугольную пирамиду с вершиной в центре одной из этих граней и основанием $П$ (рис. 2). Площади ее боковых граней, очевидно, равны $s_i/4$, $i=1, 2, 3, 4$, и их сумма больше площади основания, т. е.

$$S_1/2<(s_1+s_2+s_3+s_4)/4,$$

что и требовалось доказать.

Доказанные неравенства для площадей можно вывести из равенств, связывающих векторы $\bar s_1$, $\bar s_2$, $\bar s_3$, $\bar s_4$, равные по длине площадям s_i граней тетраэдра, перпендикулярных соответствующим граням и направленных вне тетраэдра, и аналогичные векторы $\bar S_1$, $\bar S_2$, $\bar S_3$, $\bar S_1=-\bar S_1$, $\bar S_5=-\bar S_2$, $\bar S_6=-\bar S_3$ для параллелепипеда. А именно, если грани тетраэдра и параллелепипеда занумерованы так, что общее ребро i-й и 4-й граней тетраэдра является диагональю i-й грани параллелепипеда ($i=1, 2, 3$), то $\bar s_i+\bar s_4=\bar S_i$. (Докажите это, рассматривая ортогональную проекцию вдоль этого ребра.) Отсюда, в частности, следует, что $S_1<s_1+s_4$ и, аналогично, $S_4=S_1<s_2+s_3$, т. е. $S_1<(s_1+s_2+s_3+s_4)/2$. С другой стороны, складывая три равенства $\bar s_i+\bar s_4=\bar S_i$ и учитывая, что $\bar s_1+\bar s_4+\bar s_2+\bar s_3=\bar S_1+\bar S_4=\bar 0$, получим: $2\bar s_1=\bar S_1+\bar S_2+\bar S_3$. Это равенство дает оценку $s_1<(S_1+S_2+S_3)/2$.

В. Дубровский, А. Скопенков

Поправка

В условии задачи М1267 («Квант», 1991, № 2) допущена опечатка. В предпоследней строке условия задачи должно быть $a_1+a_2+\ldots+a_k$.

Ф1263. При разгоне ракеты масса ее уменьшается. При какой скорости ракеты будет максимальной ее кинетическая энергия, если расход топлива постоянен? Скорость газов относительно ракеты v_0, начальная скорость ракеты равна нулю. Разгон производят далеко от Земли, так что влиянием силы тяжести можно пренебречь.

В тот момент, когда кинетическая энергия ракеты $E_k=Mv/2$, где M — масса, v — скорость ракеты, максимальна, ее производная по времени равна нулю:

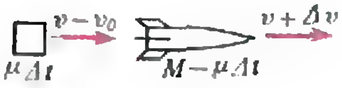
$$E_k'=\frac{1}{2}(M\cdot v^2)'=\frac{1}{2}M'\cdot v^2+\frac{1}{2}M\cdot 2vv'=0,$$

или

$$v=-2\frac{M}{M'}v'=2\frac{M}{\mu}v'.$$

Поскольку $-M'=\mu$ — это расход топлива, который по условию постоянен, получаем, что скорость ракеты v, соответствующая ее максимальной кинетической энергии, зависит от ускорения ракеты $a=v'$ в этот момент времени. Найдем его.

Выберем очень малый промежуток времени Δt и запишем закон сохранения импульса (см. рисунок):



$$\mu\Delta t(v-v_0)+(M-\mu\Delta t)(v+\Delta v)=Mv.$$

После несложных преобразований, учтя, что $\mu\Delta t\ll M$, получаем

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\mu}{M}v_0.$$

Таким образом, искомая скорость оказывается равной

$$=2\frac{M}{\mu}v'=2v_0.$$

Д. Александров

Ф1264. *Вычислите диаметр, массу и длину вольфрамовой нити накала лампочки 220 В, 100 Вт. Рабочая температура нити 2700 °С. При этой температуре удельное сопротивление вольфрама $\rho=90\cdot10^{-6}$ Ом · см, а мощность излучения с единицы поверхности нити $W=153$ Вт/см^2. Плотность вольфрама в 19 раз больше плотности воды. Считайте, что нить свита из проволоки круглого сечения.*

Пусть нить имеет радиус R и длину l. Тогда ее сопротивление

$$r=\rho\frac{l}{S}=\rho\frac{l}{\pi R^2}.$$

С другой стороны, мощность лампочки $P=U^2/r$, откуда

$$r=\frac{U^2}{P}.$$

Таким образом, получаем соотношение

$$\frac{U^2}{P}=\rho\frac{l}{\pi R^2}. \qquad (1)$$

Вся мощность излучается с поверхности нити, поэтому

$$P=W2\pi Rl. \qquad (2)$$

Деля соотношение (1) на соотношение (2), находим

$$\frac{U^2}{P^2}=\frac{\rho}{2\pi^2R^3W}\Rightarrow R^3=\frac{\rho P^2}{2\pi^2WU^2}.$$

Следовательно, радиус нити

$$R=\sqrt[3]{\frac{\rho P^2}{2\pi^2WU^2}}=0{,}018\text{ мм},$$

ее диаметр

$$d=2R=0{,}036\text{ мм},$$

длина нити

$$l=\frac{P}{2\pi RW}=57\text{ см},$$

ее масса

$$m=D\pi R^2l=19D_в\pi R^2l=0{,}011\text{ г}.$$

М. Цыпин

Ф1265*. *В однородном магнитном поле вращается по круговой орбите электрон. Индукцию поля медленно (за время, во много*

На электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, которая сообщает ему центростремительное ускорение. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R}=evB,$$

раз превышающее период обращения) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится радиус орбиты электрона?

откуда получаем

$$\frac{mv}{R}=eB. \qquad (*)$$

Медленное изменение магнитного поля приводит к тому, что величины B, R и v начинают зависеть от времени, хотя соотношение (*) по-прежнему выполняется.

Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, напряженность которого равна

$$E_{\text{инд}}=\frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{2\pi R}=\frac{\pi R^2\frac{\Delta B}{\Delta t}}{2\pi R}.$$

Это поле создает силу

$$F_{\text{инд}}=eE_{\text{инд}}.$$

Работа этой силы за малое время Δt равна изменению кинетической энергии электрона:

$$\frac{1}{2}Rev\cdot\Delta B=\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)\approx mv\cdot\Delta v,$$

откуда изменение скорости будет равно

$$\Delta v\approx\frac{Re}{2m}\cdot\Delta B.$$

С другой стороны, из соотношения (*)

$$v=\frac{eBR}{m}=\Delta v\approx\frac{e}{m}(\Delta B\cdot R+B\cdot\Delta R).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{2}R\cdot\Delta B\approx\Delta B\cdot R+B\cdot\Delta R\Rightarrow B\cdot\Delta R+\frac{1}{2}\Delta B\cdot R=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Delta B\cdot R+2B\cdot\Delta R=0\Rightarrow\Delta B\cdot R^2+2B\cdot R\Delta R=0\Rightarrow\Delta(BR^2)=0.$$

Это означает, что при изменении магнитного поля величина BR^2 сохраняется. Поэтому увеличение индукции магнитного поля в три раза приводит к уменьшению радиуса орбиты электрона в $\sqrt{3}$ раз.

М. Цыпин

***Ф1266.** Две металлические сферы радиусом R каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены друг с другом очень тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L. На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза?*

При помещении на одну из сфер электрического заряда Q она приобретет потенциал

$$\varphi_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Так как на второй сфере заряда вначале нет (мгновенного перетекания заряда не произойдет, иначе ток через катушку был бы бесконечно большим, что невозможно), ее потенциал равен нулю. Из-за наличия разности потенциалов между сферами в катушке индуктивности появится ток, изменяющийся в соответствии с формулой

Через какое время заряд снова станет таким же, как в первый момент?

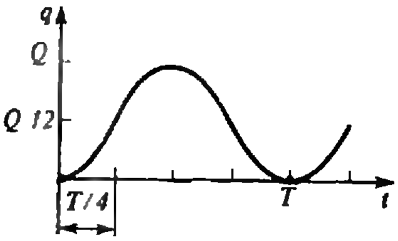


Рис. 1.

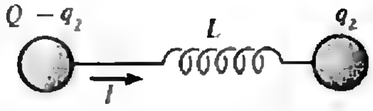


Рис. 2.

$$LI' = U.$$

Понятно, что данная система эквивалентна колебательному контуру — сферы играют роль обкладок конденсатора. Но отличие такого контура от обычного состоит в том, что суммарный заряд конденсатора здесь не равен нулю, что приводит к изменению его эффективной емкости. Найдем ее.

Представим заряд Q на первой сфере в начальный момент в виде суммы $+Q/2$ и $+Q/2$, а нулевой заряд на второй сфере — в виде $+Q/2$ и $-Q/2$. При этом разность потенциалов от зарядов $+Q/2$ на обеих сферах равна нулю, а от оставшихся зарядов $+Q/2$ и $-Q/2$ (их сумма равна нулю) она равна $U_{\max} = \varphi_0$. Таким образом, эффективный заряд конденсатора, перетекающий между сферами, есть $Q_{эф} = Q/2$ и

$$C_{эф} = \frac{Q_{эф}}{U_{\max}} = 2\pi\varepsilon_0 R.$$

Поскольку индуктивность катушки равна L, в контуре возникают колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC_{эф}} = 2\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL.}$$

Очевидно, что это и есть то время, через которое заряд на первой сфере снова станет таким же, как в первый момент (рис. 1).

Теперь легко найти и время, через которое заряд первой сферы уменьшится в два раза. Действительно, в этот момент заряды на обеих сферах должны быть равны $+Q/2$, а напряжение между сферами — нулю. Это означает, что искомый момент времени соответствует четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL}\,.$$

Заметим, что эту задачу можно решать и более формальным способом. Пусть q_2 — это заряд, перешедший на вторую сферу к моменту времени t (рис. 2). Тогда заряд первой сферы будет $q_1 = Q - q_2$. При этом напряжение на катушке равно разности потенциалов, создаваемой зарядами на сферах:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q/2 - q_2}{2\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Запишем закон изменения тока через катушку: $LI' = U$, или, поскольку $I = q_2'$,

$$Lq_2'' = \frac{Q/2 - q_2}{2\pi\varepsilon_0 R}\,.$$

Перейдем к переменной $q_3 = Q/2 - q_2$ и получили

$$q_3'' = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 RL}\,q_3.$$

Это — уравнение гармонических колебаний с периодом $T = 2\pi\sqrt{2\pi\varepsilon_0 RL}$. Заряд на первой сфере отличается от заряда q_3 только на постоянную величину, значит, он колеблется с таким же периодом.

А. Быцко

Ф1267. Точечный источник альфа-частиц испускает их во все стороны равномерно. На расстоянии 10 см от источника расположили фотопластинку размером 20×20 см и за 10 секунд экспозиции на ней оказалось 200 следов от попавших частиц. Сколько всего частиц испускает источник за час?

Точка, в которой находится источник, расположена очень удачно: она находится в центре куба, одной из граней которого является фотопластинка. Это означает, что за 10 секунд источник испустил $6 \cdot 200 = 1200$ частиц. Тогда за один час он испустит

$$N = 1200 \cdot 3600/10 = 432\,000 \text{ частиц.}$$

Однако этот ответ не вполне точен. Дело в том, что при радиоактивном распаде частицы испускаются хаотически, так что наш ответ носит оценочный характер. Подумайте сами, насколько хорошим было бы это решение, если бы в условии фигурировало число, существенно меньшее 200, например 10.

В. Волков

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1231 — М1245, Ф1238 — Ф1252, справились с задачами М1231, М1236, М1241 — М1245. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Андриенко (Киев) 32, 33, 37, 38; *Д. Антипов* (Киев) 37; *К. Ахмадалиев* (Янгиабад) 33; *А. Ахмедов* (Баку) 33, 38; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 32, 33; *В. Беляев* (Тихвин) 37; *Е. Беркович* (Киев) 33, 37; *А. Бородин* (Донецк) 32, 33, 37; *В. Бринюк* (Донецк) 33, 34, 37, 39, 40; *С. Васькевич* (Киев) 33, 37; *К. Волченко* (Донецк) 32, 33, 37, 38; *С. Гетун* (Киев) 33, 34, 37, 38, 39; *С. Голубчик* (Харьков) 32; *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) 33, 37; *Д. Жалковский* (Донецк) 32, 33, 37, 38; *А. Жеглов* (Москва) 33, 37, 38, 39; *А. Зингер* (Москва) 33, 37; *М. Иванов* (Тула) 33, 34, 37, 38; *М. Иванов* (Харьков) 33, 34; *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40; *Т. Калита* (Киев) 37; *Г. Каминский* (Киев) 33; *Р. Касымов* (Ангрен) 32, 33; *И. Кацман* (Киев) 33, 37; *С. Коваценко* (Винница) 32, 33, 34, 38; *П. Кожевников* (Калуга) 33, 37; *А. Козачко* (Винница) 32, 33, 34, 37, 38; *С. Корсак* (п. Суворово, БССР) 34; *А. Кудрявцева* (Киев) 33, 34, 37; *М. Лейчкис* (Киев) 37; *А. Лопушанский* (Львов) 33; *А. Львов* (Москва) 32, 33, 34, 38, 39; *К. Мильштейн* (Киев) 33, 34, 37, 38; *К. Мишачев* (Липецк) 32, 33, 34, 37, 38; *А. Насыров* (Обнинск) 37, 38; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 32, 37, 39; *Н. Немировская* (Киев) 33, 37; *А. Ноаров* (Москва) 37; *Д. Номировский* (Черкассы) 37, 38; *Т. Панов* (Киев) 33, 34, 37, 38, 39; *Е. Перельман* (Ленинград) 34, 38; *А. Петросян* (Ереван) 37; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 37; *А. Разин* (Одесса) 33, 34, 37, 38; *Д. Рекалов* (Киев) 38, 39; *В. Рычков* (Куйбышев) 38; *А. Сафронов* (Томск) 37, 38; *Г. Сироткин* (Харьков) 33; *М. Славкин* (Минск) 37, 38; *В. Сластиков* (Киев) 33, 37; *А. Солодов* (Воронеж) 32, 33, 37; *А. Солодушкин* (Томск) 37, 38; *М. Темкин* (Москва) 37, 38, 40; *А. Титаренко* (Видное) 32, 33, 34, 37, 38, 39; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 33, 37, 38, 39; *Д. Филевич* (с. Яструбичи Львовской обл.) 33, 38; *М. Хасин* (Донецк) 32, 33, 37, 38; *Д. Хорошун* (Макеевка) 37; *А. Шиндлер* (Феодосия) 32, 33, 34, 37, 38; *О. Шпырко* (Киев) 37.

Физика

А. Абдримов (Шават) 45, 50; *М. Абдуллаев* (Баку) 38, 44—46; *Е. Алабердин* (Ташкент) 48, 51; *С. Атанасян* (Ленинград) 38, 43, 48, 50; *С. Ахметзянова* (Белорецк) 48; *Я. Бабкин* (Киев) 38, 40, 41, 44, 45, 47, 48, 50—52; *С. Базылько* (Северодвиниск) 47—49; *Е. Балдин* (Новосибирск) 44; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 39—45, 47, 48, 50—52; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 39—41, 44, 45, 47, 48, 50, 51; *М. Бачинский* (Киев) 38, 39; *Д. Белобрагин* (Тула) 48—51; *М. Беломытцев* (Москва) 48, 52; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 43, 47; *С. Борисов* (Ухта) 48, 50; *Л. Васильев* (Салават) 41, 44, 48—51; *Г. Вейтас* (Вильнюс)

39—45, 47, 48, 50—52; *В. Волков* (Москва) 40; *П. Волынец* (Брест) 43—45, 48, 50; *А. Воронин* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 50, 52; *И. Воскобойник* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *А. Габараев* (Цхинвали) 43; *А. Гадисов* (Баку) 39; *А. Гвозденко* (Нежин) 41; *В. Глазков* (Коломна) 44, 45, 48, 52; *А. Гледзер* (Одинцово) 50; *А. Гордниященко* (п. Малая Рогань Харьковской обл.) 39; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 39—45, 47—50, 52; *В. Гребенников* (Оренбург) 49, 51; *Т. Григорян* (Ереван) 48, 50; *Ю. Гройман* (Ташкент) 48, 50; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 38, 40—52; *О. Гусар* (Канев) 44, 45, 50; *А. Гушанов* (Елабуга) 48, 52; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 38, 39, 41—46; *Ю. Дацюк* (Дубляны) 39, 41, 49—51; *А. Деев* (Тула) 43, 45—52; *А. Дементьев* (Чебоксары) 39—42, 44—46, 48—52; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 39—41, 44, 45, 47; *С. Джосюк* (Винница) 38—52; *С. Дибров* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 39—45, 48—52; *А. Дубовик* (Брест) 38, 40, 41, 44—51; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 45; *А. Душамов* (Шават) 44, 45, 50; *О. Дымар* (Каменец) 48; *М. Дьяк* (Владимир) 38, 41, 43, 45, 49, 50, 52; *М. Егоров* (Старый Оскол) 43; *П. Енин* (Воронеж) 38, 41; *А. Ермошко* (Орша) 50; *Н. Ефремов* (Свердловск) 41, 45, 48, 50; *А. Ечкало* (Запорожье) 48, 50, 51; *А. Жуков* (Воронеж) 38; *В. Жукова* (Кузнецовск) 44; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 38, 41, 43, 45, 48, 50; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 38; *А. Зайцев* (Железногорск) 38—41, 45, 46, 48, 49, 51, 52; *И. Зозуля* (Одесса) 44, 50, 52; *М. А. Иванов* (Тула) 38—41, 43—45, 47—52; *М. Г. Иванов* (Тула) 38—49, 51, 52; *Н. Ивченко* (Киев) 38—41, 43—52; *Т. Калита* (Киев) 44, 48, 50—52; *К. Калюжный* (Одесса) 38—42, 44, 45, 50—52; *В. Каменский* (Ташкент) 50; *И. Кацман* (Киев) 38, 41, 44—46, 48, 50—52; *А. Каширин* (Старый Оскол) 41; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 39—50, 52; *М. Коваленко* (Симферополь) 50; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 38—41, 43—46, 48, 50—52; *В. Козлов* (Старый Оскол) 39, 41, 43, 45, 46, 48, 50; *Т. Колесникова* (Вишневое) 48, 50; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 39—42, 44—46, 48, 50—52; *В. Кордюк* (Киев) 38; *П. Корешков* (Черкассы) 48, 50; *Д. Коротков* (Астрахань) 52; *А. Кравец* (Кузнецовск) 44; *А. Крампульс* (Тула) 48—51; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 39, 40, 48, 50—52; *Д. Кример* (Брест) 43, 48, 50; *А. Кузнецов* (Жуковский) 43; *Ю. Кузьма* (Протва) 43, 47, 48, 50, 51; *С. Кузьменко* (Киев) 38, 40, 41, 44—46, 48, 50—52; *П. Куприн* (Северодвинск) 45, 47, 50, 52; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 38, 41, 43, 47; *В. Легостаев* (Кустанай) 39, 41, 43, 52; *Д. Логинов* (Тула) 38—42, 44, 45, 47—52; *Д. Лунев* (п. Черноголовка Московской обл.) 48—52; *А. Макаренко* (Мариуполь) 39, 41, 43, 46—48, 50; *В. Макаров* (Кировское) 40, 41, 43—45, 48, 50; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 44; *Ю. Маравин* (Евпатория) 38, 40, 41, 43, 45, 46, 48, 52; *М. Махмудов* (Исфара) 40, 41, 44, 45, 47, 48, 50; *Р. Машковский* (Киев) 38; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 48, 50, 52; *А. Мимеев* (п. Владимир-30 Владимирской обл.) 45; *В. Мирошниченко* (Пенза) 38—41; *Д. Моисеев* (Мытищи) 50; *С. Мохов* (Одесса) 38, 40, 41; *И. Мошкин* (Караганда) 50; *С. Мурин* (Брест) 38, 40—47, 50, 51; *Ю. Мусатенко* (Киев) 43, 45, 47, 50—52; *М. Мыктыбаев* (Алма-Ата) 39, 41; *А. Нежуренко* (Киев) 38—41, 43—45, 48—52; *М. Немировский* (Одесса) 44, 45, 48; *О. Никипорец* (Алма-Ата) 39—41, 49, 52; *И. Николаенко* (Армавир) 39—41, 44, 45, 48, 50—52; *Д. Номировский* (Черкассы) 45, 50; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 39—52; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 39, 41, 43, 45, 46, 48, 49, 51, 52; *А. Ольховец* (Киев) 38; *Д. Островский* (Ленинград) 41, 48, 50; *Ю. Пайвин* (Харьков) 41, 50; *Д. Пастухов* (Витебск) 38—42, 44—48, 50—52; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 43—46; *И. Петров* (София, Болгария) 48, 52; *К. Петухов* (Старый Оскол) 38, 41, 43, 45, 46; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 43, 45, 46, 50; *И. Полищук* (Москва) 38—42; *А. Полунин* (Москва) 41; *С. Польшин* (Харьков) 38—46, 51; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 40, 41, 44—46, 48—50, 52; *В. Попов* (Жуковский) 40, 41, 43; *Д. Потишко* (Харьков) 41, 42, 48, 50; *Р. Протасов* (Владивосток) 48, 50; *М. Пузиков* (Мариуполь) 48, 52; *Ю. Радченко* (Волжский) 43, 52; *У. Рахимов* (Шават) 44—46, 50; *В. Репин* (Невинномысск) 41, 45, 50; *Ш. Рзаев* (Баку) 50; *А. Ручьев* (Северодвинск) 38—41, 43, 45, 46, 48—51; *В. Рыбачук* (Винница) 38, 39, 41, 43—45, 48—51; *У. Сапаев* (к-з Чапаев Хорезмской обл.) 50; *В. Сергиенко* (Брест) 38; *Д. Скотников* (Владимир) 43—46, 48, 49, 52; *А. Смирнов* (Москва) 48; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 44; *А. Снежко* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *А. Соклаков* (Брест) 48, 50; *Д. Сорокин* (Тула) 39—41, 50, 51; *А. Столповская* (Днепрорудный) 38, 43, 48; *Д. Супрун* (Минск) 40, 41, 45, 48, 50, 51; *С. Суслов* (Северодвинск) 49—51; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 38—41, 43—48, 50, 51; *А. Таратин* (Северодвинск) 45; *С. Телков* (Старый Оскол) 45, 50; *Д. Тимофеев* (Константиновка) 39, 45, 48; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 41, 48; *В. Толкачев* (Выборг) 38, 41; *М. Томилко* (Брест) 38, 40—47, 50, 51; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 38—41, 43—46, 48—51; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 38—52; *В. Тыртычко* (Кустанай) 39, 41, 43, 52; *А. Федоренко* (Омск) 39, 44; *К. Фотев* (София, Болгария) 43—46, 48, 50—52; *Д. Хаимов* (Баку) 45; *О. Харыбин* (с. Стрелецкое Белгородской обл.) 41; *А. Хмелев* (Свердловск) 38, 43, 48; *Р. Храбров* (Северодвинск) 38—52; *Ц. Чешков* (София, Болгария) 49, 50, 52; *А. Чистый* (Брест) 38, 40—48, 50, 51; *Е. Шагаров* (Грозный) 38, 40, 41, 43—47; *Г. Шаповалов* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *Д. Шаповалов* (Волгоград) 43, 45, 48, 50—52; *С. Шаракин* (Москва) 38—46, 48—51; *А. Шпагин* (Мариуполь) 39, 41, 43, 47, 49, 50, 52; *О. Шпырко* (Киев) 38, 40, 41, 43—45, 48—52; *Н. Шраер* (Винница) 48, 52; *И. Шуляк* (Киев) 43—46; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 39—48, 50—52; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 39—45, 47—50; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 39—45, 47, 49, 50.

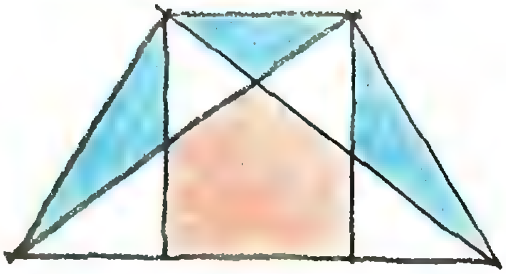
Задачи

1. Четыре кота — Васька, Пушок, Базилио и Леопольд — охотились на мышей. Пушок с Леопольдом поймали вместе столько же мышей, сколько Базилио с Васькой. Васька поймал мышей больше, чем Базилио, но Васька с Леопольдом поймали мышей меньше, чем Пушок с Базилио. Сколько мышей поймал каждый кот, если Пушок поймал 3 мыши?

2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

$$\begin{array}{r} \text{КВАНТ} \\ +\,\text{КВАНТ} \\ \hline \text{НАУКА} \end{array}$$

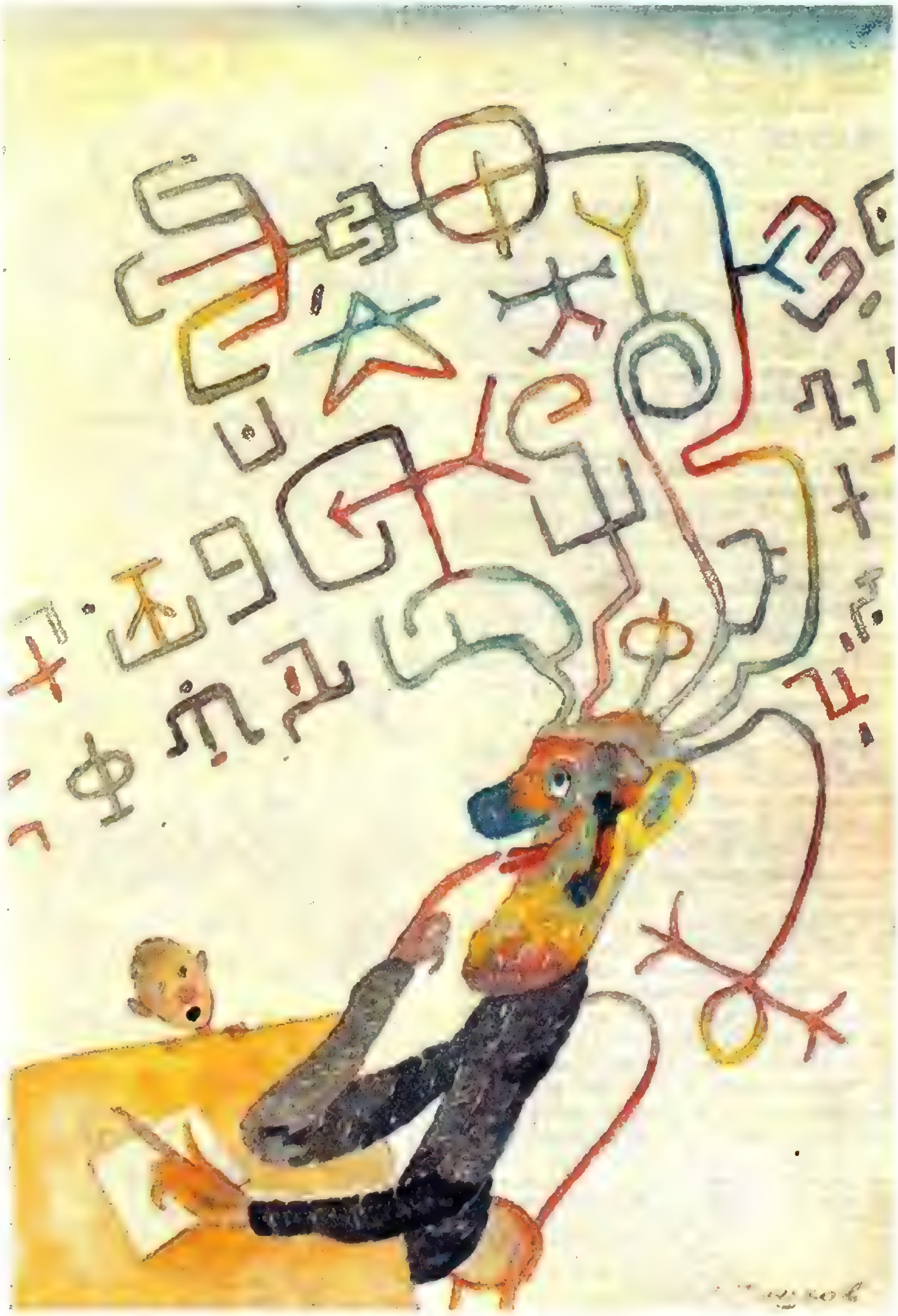
3. В равнобочной трапеции провели диагонали и высоты из вершин верхнего основания (см. рисунок). Докажите, что сумма площадей синих треугольников равна площади красного пятиугольника.



4. Мимо моего дома проходят три автобусных маршрута. Их номера — трехзначные числа, причем все они — квадраты. Более того, они записываются одними и теми же тремя цифрами. Какие номера у автобусов?

5. На шахматной доске расставлено 15 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что оставшиеся фигуры будут вновь удовлетворять тому же требованию: в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура.

Эти задачи нам предложили С. Ляшенко, А. Алексеев, И. Нагель, А. Джафаров и В. Произволов.



Одной из первых популярных книг на русском языке был трехтомник Е. И. Игнатьева «В мире смекалки, или Арифметика для всех», впервые изданный в 1908 году и затем неоднократно переиздававшийся. Многие задачи из этой книги получили широкую известность, войдя в другие более поздние популярные книги. Недавно издательство «Наука» переиздало эту книгу в сокращенном варианте, собрав в ней, в основном, задачи (Игнатьев Е. И. В мире смекалки. М.: Наука, 1987 г.).

Здесь мы публикуем рассказ, не вошедший в это переиздание, который, как мы надеемся, будет интересен современному читателю.

О ШИФРАХ

Е. ИГНАТЬЕВ

Потребность в таком способе записи, который скрывал бы смысл написанного от постороннего глаза и делал бы его доступным лишь для немногих посвященных, существует у людей с древних пор. Отсюда и возникло искусство секретного письма, разросшееся в наши дни чуть ли не до размеров целой науки — *криптографии*. О тайнописи упоминает еще Геродот и даже приводит образцы таких писем, которые понятны лишь адресату. По свидетельству Плутарха, у спартанцев были в употреблении специальные механические приборы для записывания и прочтения тайных посланий. Для записывания религиозных тайн жрецы пользовались особыми письменами, непонятными для непосвященных.

У Юлия Цезаря была своя система тайнописи, при помощи которой он записывал свои тайны; она была основана на замене одних букв другими — прием употребительный и в наше время.

В средние века над изобретением и усовершенствованием криптографических систем работали многие выдающиеся умы — как, например, философ Бэкон Веруламский, математик Виет, историк Гуго Гроций и другие.

Но высшего своего развития криптография достигла лишь в новое время, с развитием дипломатических сношений и сложных торговых оборотов, требующих соблюдения строжайшей тайны. В наши дни ежедневно по всему миру циркулируют сотни и тысячи так называемых шифрованных, т. е. тайнописных, телеграмм. Важнейшие административные меры во всех почти странах передаются шифрованными телеграммами. Точно так же шифруется и бо́льшая часть военных депеш. В Германии каждый офицер должен знать криптографию. Мы не говорим уже о дипломатах, которым «язык дан для того, чтобы скрывать свои мысли»: они не останавливаются ни перед какими затратами денег и времени, чтобы, полно и точно передавая депешу по назначению, сохранить в то же время и строжайшую тайну. Тайнопись находит себе обширное применение и в торговом мире, при разного рода биржевых и т. п. спекуляциях. Корреспонденты больших заграничных газет, желая, чтобы ни одна газета не упредила их орган в опубликовании какого-нибудь сенсационного известия, также шифруют свои телеграммы.

В дальнейшем мы познакомим с некоторыми приемами тайнописи. Читатель сам сможет рассудить, насколько много в криптографии «математики». Но если математике, собственно говоря, принадлежит здесь довольно скромная роль, то во всяком случае легко убедиться, что свободное пользование тайнописью требует все же запаса сообразительности и остроумия — словом, в обширном царстве смекалки и этому отделу должно быть уделено известное внимание.

Казалось бы, самой простой системой тайнописи была бы простая замена общепринятых букв какими-нибудь условными знаками или числами. Но это, как оказывается, далеко не надежная тайнопись, и при известном навыке очень легко доискаться до истинного смысла подобной криптограммы.

Пусть, например, в наши руки попала следующая криптограмма, написанная по способу простой замены букв какими-нибудь числами (так что одинаковые буквы заменялись одинаковыми же числами). Отдельные слова разделены тире, а буквы — запятыми.

1,2,3 — 2,3 — 5,6,7,8,5,9 — 2,3,8 —
11,12,2,9.
13,5,14,15,16 — 1,17,18,19 — 7 —
5,11,2 — 15,11,19,16,20,2,21,22.
23,11,15 — 20,18,5,11,13 — 24,7,25,26
—11,15,2,11,27,13,16,20,2,21,22.
17,18,27,15,18,3,8,5,9 — 28,24,7,27 —
1,3,2,9.

С самого начала видно, что перед нами стихи,— тождество концов строк обличает рифмы.

Вот один из многих возможных путей дешифровки заданной криптограммы.

Обращаем внимание на второе слово первой строки 2,3. Слово, состоящее из двух букв, может быть *бы, ли, не, на,...*

Сопоставляя первые два слова криптограммы

1,2,3 — 2,3

и принимая во внимание, что в последнем слове четвертой строки (1,3,2,9) цифры и 1 и 3 стоят рядом (следовательно если 3 — гласная, то 1 скорее всего согласная), убеждаемся рядом проб, что слова

1,2,3 — 2,3

суть: — *мне не.*

Подставив во всех словах вместо 1, 2 и 3, буквы *м, н, е,* обращаем внимание на четвертое слово первой строки 2,3,8=*не* 8. Очевидно, перед нами слово *нет.*

Точно так же выясняется, что последнее слово четвертой строки 1,3,2,9=*мен* 9=*меня.*

Сделав подстановку, обращаем внимание на первое слово четвертой строки:

17,18,27,15,18, *е, т,* 5, *я.*

Подозреваем глагольную рифму *тся.* Испытывая 5=*с,* убеждаемся, что третье слово первой строки: *с,* 6, 7, *тся* и четвертое второй строки: *с,* 11, *н,*— суть: *спится* и *сон.*

(Слово *сын* отвергаем, ибо число 11, как стоящее в начале последнего слова первой строки, не может быть *ы.*)

Подставив найденные буквы в остальные слова криптограммы, поступают далее по тому же методу, т. е. обращают прежде всего внимание на те слова, в которых либо больше всего известных букв, либо получается характерное их размещение. При этом, уловив размер стиха, можно пользоваться правилами стихосложения, угадывая число слогов в слове (а следовательно, и гласных букв). Не следует пренебрегать и указаниями, которые дает рифма.

В результате всех поисков, проб, подстановок и т. п. получаем следующее четверостишие (А. С. Пушкина):

Мне не спится, нет огня,
Всюду мрак и сон докучный;
Ход часов лишь однозвучный
Раздается близ меня.

В общем весь ход дешифровки сходен до известной степени с методом решения неопределенного уравнения рядом испытаний.

Между прочим, как известно, древне-египетские иероглифы были «дешифрованы» именно таким путем.

Самая остроумная система этой категории тайнописи — употребление так называемого *квадратного* шифра. Суть его в следующем. Буквы алфавита располагают в вертикальные и горизонтальные ряды, как показано в прилагаемой схеме:

а б в г д е ж з . . . . э ю я ф
а б в г д е ж з и . . . . ю я ф а
б в г д е ж з и к . . . . я ф а б
в г д е ж з и к . . . . . ф а б в
. . . .
. . . .
. . . .

и т. д. до конца алфавита.

Условный ключ — слово «пушка». Чтобы зашифровать по этому способу фразу «Главнокомандующий прибудет в семь вечера», производим следующие манипуляции. Пишем буквы нашего ключа над буквами депеши:

пушка пушка пушка пушка
главн окома ндующ ийпри
пушка пушка пушка п.
будет всемь вечер а.

Каждая буква нашей депеши вместе с соответствующей буквой ключа послужат нам теперь координатами для избрания букв вышеприведенной таблицы. В вертикальной колонке *г* и горизонтальном ряду *п* найдем букву *у*. Это и будет первая буква шифрованного текста. Далее на пересечении колонки *л* и ряда *у* находим *я* — это вторая буква и т. д. Слово «главнокомандующий» изобразится при этом так:

у я щ н о ю ю ж ш б э ш к и ъ щ э.

Легко усмотреть на этом примере одно серьезное преимущество квадратного шифра: в нем одна и та же буква может обозначать разные буквы. Это создает неимоверные трудности для всякого, кто пожелал бы разгадать смысл депеши, не зная ключа. А между тем адресат, имеющий ключ («пушка»), без больших хлопот прочтет эту тарабарщину. Стоит ему лишь написать ключ над текстом:

пушкапушкапушкапу
уящноююжшбэшкиъщэ

и затем при разыскании истинных букв задаваться каждый раз вопросом: какая буква помещена в первом ряду таблицы над такой-то буквой такого-то ряда? Например, для разыскания первой буквы спрашиваем: что стоит над *у* в горизонтальном ряду *п*? Оказывается *г*, и т. д., пока не получим в результате все слово «главнокомандующий».

Словари для шифрования

Как ни остроумна система квадратного шифра, как ни затрудняет она чтение криптограммы непосвященным, все же дипломаты не считают ее достаточно надежной. В самом деле, допустим, что любопытствующий член дипломатического корпуса соседней державы раздобылся текстом шифровального послания и каким-либо путем раскрыл смысл одного лишь слова,— например, в вышеприведенной телеграмме ему посчастливилось заподозрить в первой длинной группе букв слово «главнокомандующий»,— уже этого ему достаточно, чтобы рядом проб и испытаний добраться до ключа — и, следовательно, дешифровать все послание.

Вот почему в дипломатических сферах употребляются совершенно иные способы тайнописи — именно так называемая система *словарей*.

Словари для шифрования бывают двух родов: численные и буквенные. В первом случае каждая группа цифр, во втором — группа букв обозначает какое-нибудь слово. Пользуясь таким словарем, отправитель пишет послание на этом условном языке, а получатель при помощи словаря же переводит его снова на общеупотребительный язык.

Само собой разумеется, что в дипломатическом корпусе каждой страны есть свой словарь, который держится в строжайшей тайне и экземпляры которого выдаются немногим, вполне надежным и непосредственно заинтересованным лицам. Случайная утрата словаря в таких случаях может иногда повлечь за собой серьезные последствия, так как послание останется непрочитанным.

Калейдоскоп „Кванта"

...квант действия должен был играть в физике фундаментальную роль,... появление его возвещало нечто совершенно новое, дотоле неслыханное, что, казалось, требовало преобразования самых основ нашего физического мышления...

Макс Планк

Энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем объеме, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком.

Альберт Эйнштейн

А так ли хорошо знаком вам

квант ?

Непривычно спрашивать об этом со страниц одноименного журнала. Однако этот физический персонаж, ровесник XX века, произвел такую революцию в умах, заставил пересмотреть уже, казалось бы, такие незыблемые представления, что до сих пор многим, впервые сталкивающимся с квантовой природой света, трудно смириться с новыми диковинными понятиями. Эту непростую «эволюцию сознания» пришлось пройти в начале века выдающимся ученым, а гипотеза квантов-фотонов собрала под свои знамена блестящее созвездие имен. Объясняя различные эффекты, обрастая экспериментальными подтверждениями и новыми идеями, корпускулярная гипотеза превратилась в квантовую теорию света. Так физика вновь включила в себя концепцию, предложенную Ньютоном за 200 лет до этого. Окончательную же победу эта теория одержала в конце двадцатых годов после создания квантовой механики и объединения с волновой теорией света.

Приглашаем и вас поразмышлять о необыкновенных — и квантовых, и волновых — свойствах света, да и не только его.

Вопросы и задачи

1. Во что преобразуется при фотоэффекте энергия падающего на вещество света?

2. Освещают две электрически нейтральные пластинки, одну — металлическую, другую — из полупроводника. Останутся ли пластинки нейтральными при возникновении фотоэффекта?

3. Где — на фотобумаге или на фотопленке — химические процессы могут вызываться фотонами меньшей энергии?

4. Можно ли фотографировать в совершенной темноте?

5. Отличаются ли давления света, производимые на идеально белую и идеально черную поверхности?

6. Можно ли светом удерживать грузы?

7. Если комета видна на небе с вечера, то в какую сторону направлен ее хвост?

8. При аннигиляции позитрона и электроном образуются два γ-кванта. В каком случае энергии этих квантов будут равны и они станут двигаться в противоположных направлениях?

9. Может ли фотон, обладающий достаточной энергией, превратиться в электрон-позитронную пару?

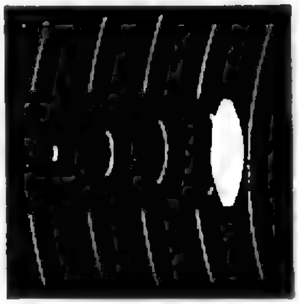
10. Способен ли свободный электрон поглотить квант света?

11. Исследуя монохроматический световой поток, можно узнать массу составляющих его фотонов. Какую характеристику света нужно для этого определить экспериментально?

12. Фотон и электрон обладают одинаковой кинетической энергией. Кто из них имеет бóльшую длину волны?

Микроопыт

Закрепите на стержне электрометра цинковую пластинку. Можно ли зарядить ее положительно, не прикасаясь к ней?



Любопытно, что...

...фотон, пожалуй, единственная элементарная частица, для которой нельзя указать автора ее экспериментального открытия.

...А. Г. Столетову удалось, руководствуясь одной лишь физической интуицией, установить практически все законы фотоэффекта, когда не только не существовало гипотезы квантов, но и даже не был открыт электрон.

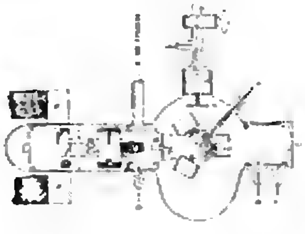
...основной закон фотоэффекта, сформулированный Эйнштейном, был окончательно подтвержден к 1916 году замечательными опытами Милликена, резко настроенного против теории Эйнштейна и не скрывавшего этого.

...за одну секунду на квадратный сантиметр земной поверхности падает огромное число «солнечных» фотонов — примерно $3\cdot 10^{17}$. В то же время в опытах с элементарными частицами детекторы регистрируют фотоны поодиночке, и даже человеческий глаз в принципе способен на это.

...световое давление играет огромную роль в природе: оно, например, препятствует гравитационному сжатию звезд, решающим образом влияет на образование кометных хвостов, сокращает время жизни искусственных спутников Земли. Сегодня обсуждаются проекты межпланетных кораблей-парусников, приводимых в движение «солнечным ветром».

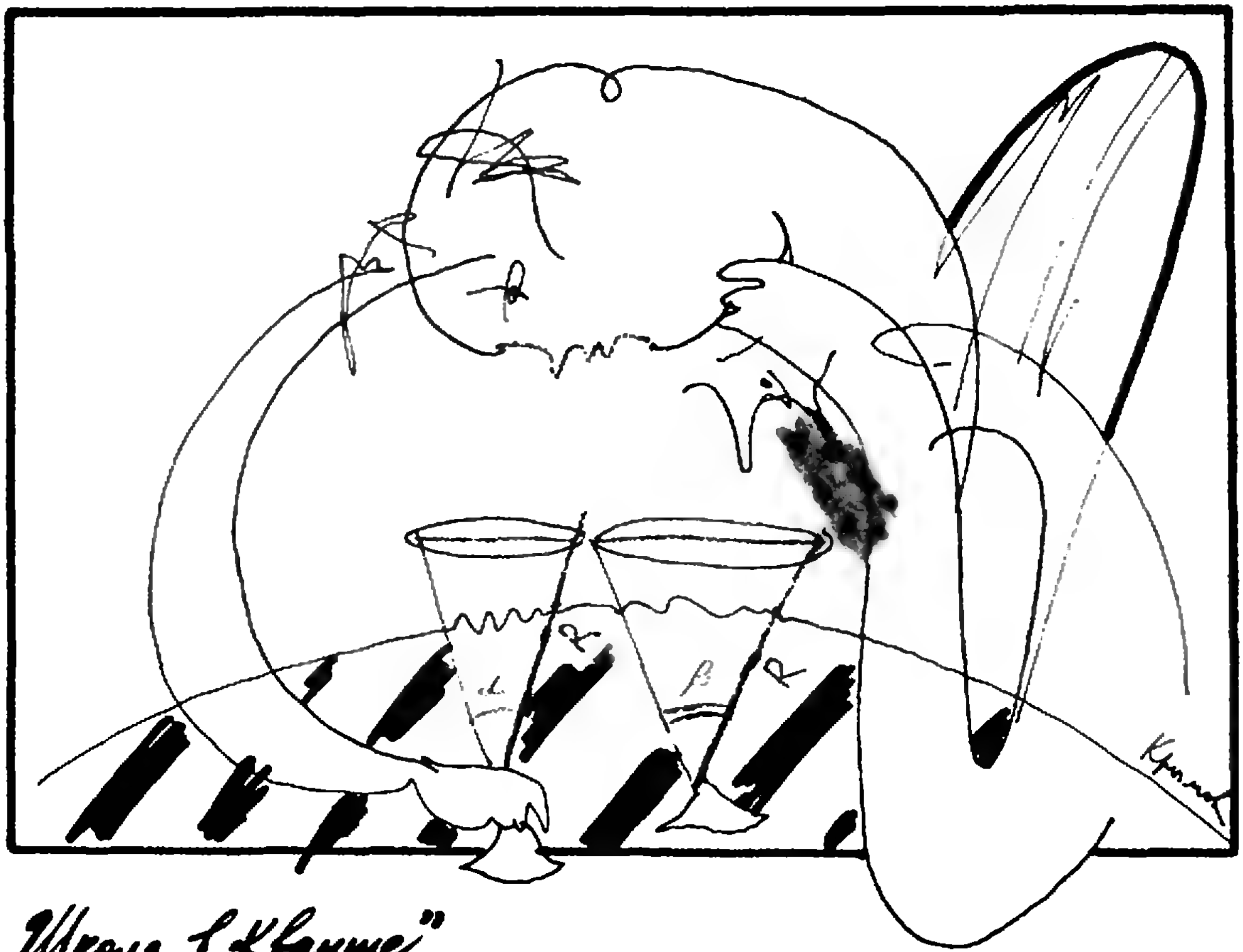
...Планк, будущий автор одной из наиболее революционных физических теорий, придерживался весьма консервативных научных воззрений. А Эйнштейн, автор гипотезы световых квантов, советуя (в 1925 году) ознакомиться с диссертацией де Бройля, выдвинувшего дикую по тем временам идею о том, что электроны обладают свойствами волн, сказал: «Прочтите ее! Хотя и кажется, что ее писал сумасшедший, написана она солидно».

...мировое пространство заполнено миллиметровыми радиоволнами, которые можно рассматривать как холодный фотонный газ с плотностью около 500 штук в 1 см^3. По современным представлениям, это излучение (его называют реликтовым) возникло на ранних стадиях развития Вселенной, когда вещество находилось при огромных температуре и давлении.



Что читать в «Кванте» о квантах
(публикации последних лет)

1. «Фотоэлектрический эффект и кванты» — 1984, № 2, с. 29;
2. «Аннигиляция и рождение пар» — 1984, № 5, с. 35;
3. «Три знаменитые работы Альберта Эйнштейна» — 1985, № 11, с. 26;
4. «Атомная физика в задачах» — 1986, № 12, с. 43;
5. «О столкновении шаров и «серьезной» физике» — 1987, № 1, с. 3;
6. «Давление света» — 1988, № 6, с. 19;
7. «Несколько замечаний по поводу фотоэффекта» — 1989, № 1, с. 49;
8. «Многоквантовые процессы» — 1989, № 5, с. 23;
9. «Космическая парусная регата» — 1989, № 11, с. 43;
10. «Охлаждение светом» — 1990, № 5, с. 11;
11. «Распределение Планка и реликтовое излучение» — 1990, № 8, с. 25.



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Публикуемая заметка адресована девятиклассникам.

Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения

Примерно 2000 лет тому назад при проведении астрономических наблюдений древние греки заметили, что длина хорды зависит от величины соответствующей ей дуги. Производя измерение длин хорд для разных центральных углов и вычисляя отношение их длины к радиусу, древнегреческий ученый Птолемей составил таблицу этих отношений. Это была одна из первых тригонометрических таблиц удвоенных синусов углов от 0° до 90°.

Птолемей вычислял хорду дополнительной (до 180°) дуги по хорде данной дуги (рис. 1), применяя теорему Пифагора. С современной точки зрения, это то же самое, как если бы он пользовался формулой $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, так как $AC = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2R\cos\alpha$, а $AB = 2R$. Так он составил таблицы удвоенных косинусов углов от 0° до 90°.

Птолемей умел также по хорде дополнительной дуги (т. е. по $2\cos\alpha$) находить хорду половинной дуги $\left(\text{т. е. } 2\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Его рассуждения строились на том, что $OD = \frac{1}{2}BC$ (OD — средняя линия $\triangle ABC$), тогда $OD = R\cos\alpha$, следовательно, $MD = R - R\cos\alpha$. В свою очередь, $AM =$

$=2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Используя метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, получаем $AM^2=MD\cdot MK$. С учетом того, что $MK=2R$, получаем $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}=(R-R\cos\alpha)\cdot 2R$, или

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Сейчас мы эту формулу называем формулой понижения степени.

Еще одно большое достижение Птолемея заключается в том, что он доказал геометрическую теорему, которую теперь называют *теоремой Птолемея.*

Теорема. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон* (рис. 2).

Доказательство. Возьмем на диагонали AC точку M такую, что $\angle ABM=\angle CBD$. Поскольку $\angle CDB=\angle MAB$ как вписанные, треугольники BCD и ABM подобны. Поэтому $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AM}$, т. е.

$$AB\cdot CD=AM\cdot BD. \qquad (*)$$

Из того, что $\angle ABD=\angle MBC$ по построению, а $\angle BCM=\angle ADB$ как вписанные, следует, что $\triangle ABD\backsim\triangle MBC$. Значит, $\frac{AD}{CM}=\frac{BD}{BC}$ или

$$AD\cdot BC=BD\cdot CM. \qquad (**)$$

Сложив почленно равенства (*) и (**), получим

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=BD(AM+CM)=BD\cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

Используя теорему Птолемея, мы можем вывести некоторые тригонометрические формулы.

Впишем четырехугольник $ABCD$ в окружность таким образом, чтобы одна из его сторон являлась диаметром этой окружности (рис. 3).

Пусть $\angle AOC=2\alpha$, $\angle AOD=2\beta$, тогда $AC=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\beta$, $BC=2R\cos\alpha$, $BD=2R\cos\beta$, $CD=2R\sin(\alpha-\beta)$.

Используя теорему Птолемея и учитывая, что $AB=2R$, получаем

$$2R\cdot 2R\sin(\alpha-\beta)+2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\beta=2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\beta,$$

или

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Формулу для вычисления $\sin(\alpha+\beta)$ выведите самостоятельно. (Указание. Впишите в окружность четырехугольник таким образом, чтобы его диагональ являлась диаметром.)

Итак, мы получили две важные тригонометрические формулы:

$$\text{Sin}(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Сложим их почленно. Получим

$$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

или

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)). \qquad (1)$$

Почленно складывая и вычитая формулы для косинуса суммы (или разности) двух углов, можно получить еще две формулы:

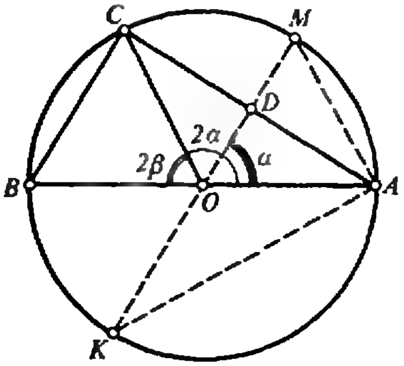


Рис. 1.

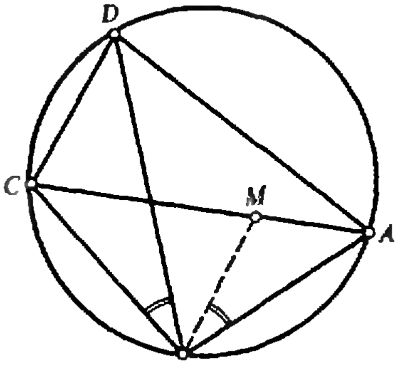


Рис. 2.

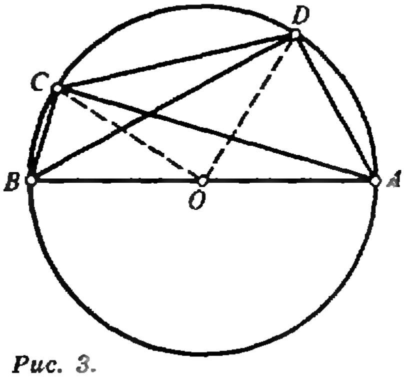


Рис. 3.

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),\qquad(2)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).\qquad(3)$$

В современной тригонометрии эти формулы называются формулами преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Уже по названию этих формул чувствуется их связь с формулами преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Действительно, производя замену $\frac{x+y}{2}=\alpha$, $\frac{x-y}{2}=\beta$, например, в формуле $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, и выражая x и y через α и β, получим формулу (1). Аналогичным образом получаются формулы (2) и (3).

Формулы (1), (2), (3) являются весьма полезными при решении ряда тригонометрических примеров.

Пример 1. *Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значение выражения* $\frac{1}{2\sin 10^\circ}-2\sin 70^\circ$.

Решение. $$\frac{1-4\sin 70^\circ\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{1-2(\cos 60^\circ-\cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ}=1.$$

Пример 2. *Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значение выражения* $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\times\sin 80^\circ$.

Решение. $$16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin 80^\circ=4\sqrt{3}(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\times\sin 80^\circ=4\sqrt{3}(\cos 20^\circ\sin 80^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ)-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=2\sqrt{3}\left(\cos 10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 10^\circ\right)=3.$$

Пример 3. *Решите уравнение* $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x=\sin 4x$.

Решение. $4\sin 2x\sin 5x\sin 7x-2\sin 2x\cos 2x=0$, $2\sin 2x\times(2\sin 5x\sin 7x-\cos 2x)=0$, откуда

1) $\sin 2x=0\to x=\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$, или

2) $\cos 12x=0\to x=\frac{\pi}{24}(2n+1)$, $n\in Z$.

Предлагаем вам несколько примеров для самостоятельного решения.

1. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора значения выражений

а) $\frac{1}{2\cos 20^\circ}-2\sin 50^\circ$;

б) $\cos 10^\circ\sin 20^\circ\cos 50^\circ$;

в) $\mathrm{tg}\,20^\circ\,\mathrm{tg}\,40^\circ\,\mathrm{tg}\,60^\circ\,\mathrm{tg}\,80^\circ$.

2. Решите уравнения

а) $2\cos 2x\sin x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$;

б) $\sin 2x\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\sin 4x+\cos^2 4x$;

в) $4\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 4x$.

В. Затакавай

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае этого года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 июня 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

22. В треугольнике ABC угол A равен 60°, прилегающие к нему стороны AB и AC равны 2 и 3. Разрежьте его на три куска так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.

А. Швецов

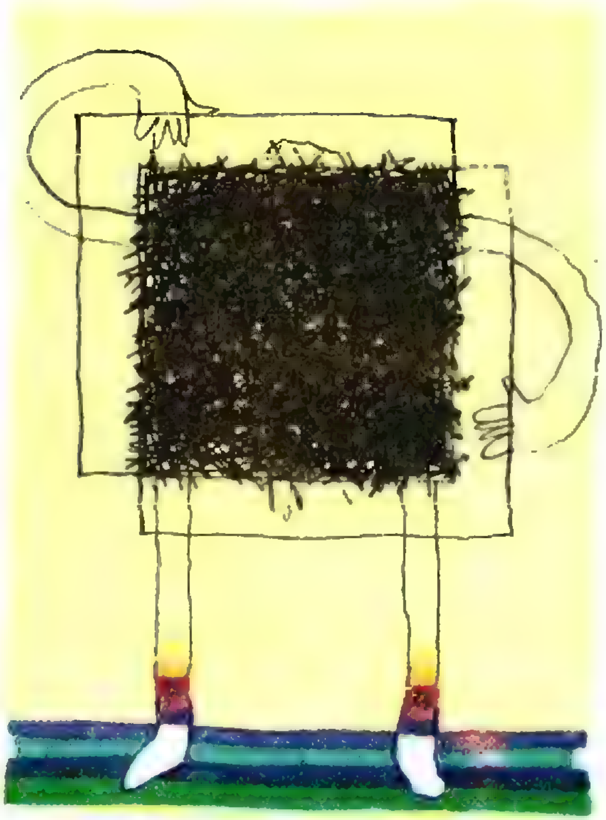
23. Факториалом числа n (обозначается $n!$) называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n. (Например, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$, $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$).

Найдите два семизначных числа такие, что их сумма, их разность и сумма цифр одного из них являются факториалами.

И. Акулич

24. У двух четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ стороны соответственно равны $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CD=C_1D_1$, $DA=D_1A_1$. Известно также, что в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, а в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ параллельны стороны B_1C_1 и D_1A_1. Докажите, что оба четырехугольника — параллелограммы.

В. Произволов



Лаборатория „Кванта"

Интерференция света... на письменном столе

Кандидат педагогических наук
Я. АМСТИСЛАВСКИЙ

> *Вот бесспорно самая странная из гипотез! Неожиданностью было видеть ночь среди ясного дня,... но кто бы мог подумать, что свет, слагаясь со светом, может вызвать мрак!*
>
> Д. Араго

Приведенные в эпиграфе слова написаны полтора с лишним столетия назад и относятся к изумившему ученый мир опыту Юнга и выдвинутой им идее интерференции света. Однако, несмотря на выдающиеся достижения интерференционной оптики последних десятилетий и широкое проникновение ее в современную практику, получение протяженной интерференционной картины от теплового (нелазерного) источника, тем более в виде красочной картины интерференционных полос в белом свете, в наши дни оказывается делом столь же непростым, как и на заре интерференционной эры. И если, тем не менее, опыт оказывается удачным, он, наряду с познавательным эффектом, приносит радость и удовлетворение.

К числу таких опытов можно по праву отнести опыт по интерференции в воздушной прослойке между двумя призмами, осуществленный впервые У. Гершелем еще в 1809 году. Рассмотрим вариант этого опыта, который позволяет в условиях домашней лаборатории наблюдать интересные и поучительные интерференционные явления. Схема опыта изображена на рисунке 1.

Пучок белого света от небольшой лампочки накаливания *Л* падает на прижатую к краю стола стеклянную призму, сечение которой представляет собой прямоугольный треугольник с углом 45°. Пусть для центрального луча угол падения на грань *AD* равен предельному углу полного внутреннего отражения $i_0=\arcsin(1/n)$, где n — показатель преломления стекла. Часть *1* падающего пучка, для которой $i>i_0$, полностью отражается от *AD*, как от зеркала, и образует на экране *Э* ярко освещенную область *O'D'*. Часть же 2, для которой $i<i_0$, испытывает на грани *AD* частичное отражение и частичное преломление,

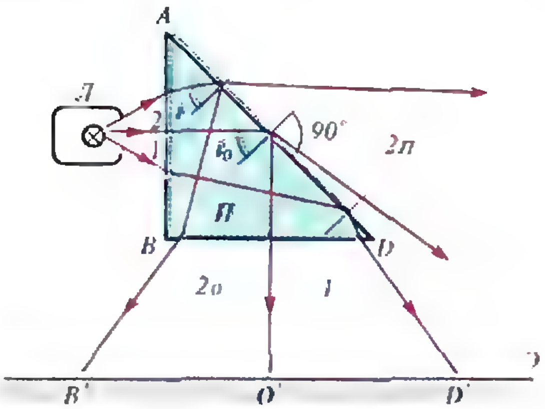


Рис. 1.

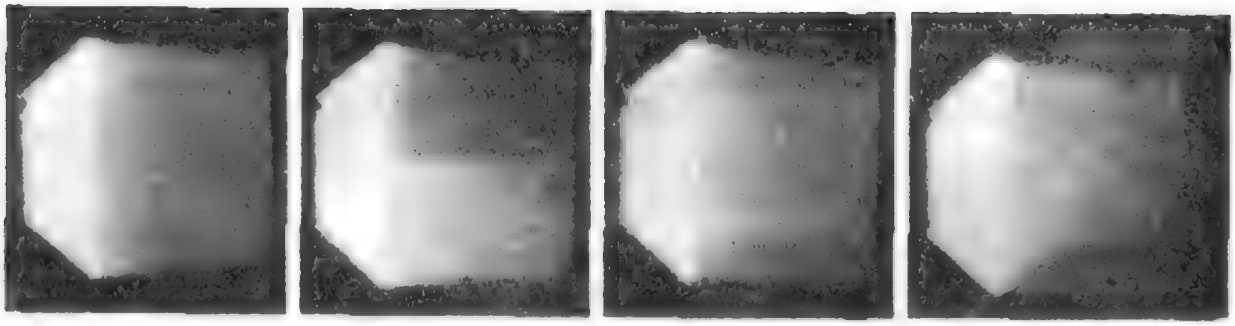


Рис. 2.

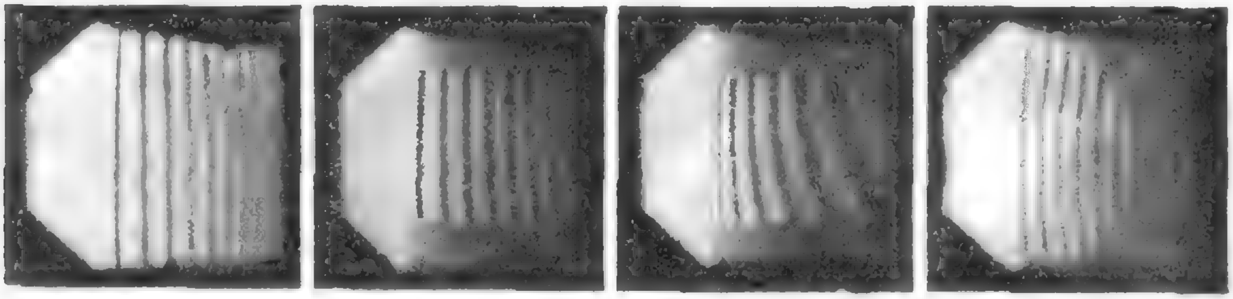


Рис. 3.

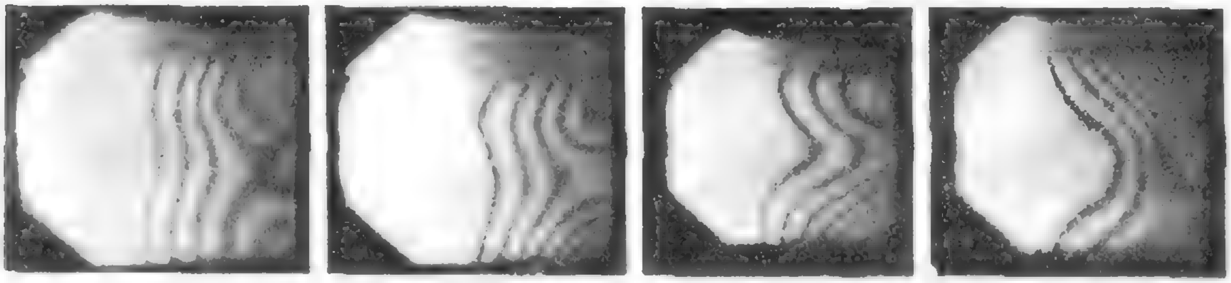


Рис. 4.

так что тоже делится, в свою очередь, на две части. Отраженная часть $2_{о}$ образует на экране слабо освещенную (полутемную) область $B'O'$, смежную с областью $O'D'$, а преломленная часть образует пучок $2_{п}$, проходящий через грань AD.

Отразим пучок $2_{п}$ в направлении пучка $2_{о}$, используя в качестве отражателя стеклянную пластинку. Это может быть отмытая от эмульсии фотопластинка, или кусок оконного стекла, или черное стекло, или пластинка оптического стекла, или вторая призма, или еще что-нибудь. Поднесем отражатель к призме. Тогда в полутемной области $B'O'$ экрана произойдет наложение пучка $2_{п}$ на пучок $2_{о}$, и освещенность экрана заметно возрастет. В этом можно убедиться непосредственно, сместив отражатель вверх или вниз вдоль призмы, или используя отражатель меньшего, чем призма, размера, или наклонив отражатель, образовав прослойку в виде воздушного клина (рис. 2).

Убедившись в наличии перекрывающихся пучков, *снова прижмем отражатель к призме*. Однако никакой интерференционной картины пока не возникает. Может быть, слишком велика толщина воздушной прослойки? Попробуем *уменьшить ее*. С этой целью очистим соприкасающиеся грани от загрязнения и пыли, например, подышав на грани и затем тщательно протерев затуманенные поверхности *сухой чистой тряпочкой*. Снова приложим отражатель к призме и легкими круговыми движениями со слабым давлением будем притирать его к грани AD. Если соприкасающиеся поверхности *достаточно гладкие и* не имеют заметных дефектов, вы почувствуете легкое скольжение отражателя. Ощущение такое, будто между призмой и отражателем появился слой маловязкой жидкости. Обычно таким способом удается сократить толщину воздушной прослойки до нескольких микрон. Вот тут-то на экране в области перекрывания пучков и «разгораются» интерференционные спектры с узкой темной пограничной полосой. Изменяя местоположение сжимающего усилия, можно изменять конфигурацию и ширину полос, насыщенность их красками и т. п. На рисунках 3 и 4 представлены черно-белые фотографии картин такого рода, сделанные с экрана.

Как же все-таки получить такую картину в условиях домашней лаборатории? Оказывается, это можно сделать двумя способами. В первом, который по существу мы уже обсудили, призму накрывают треугольной накладкой из фанеры и прижимают к краю письменного стола струбцинкой так, чтобы гипотенузная грань призмы на несколько миллиметров выступала за край стола. Источником света может служить кинопроекционная лампа (например, лампа К-12-30 от детского фильмоскопа), а экраном наблюдения — наволочка, наброшенная на спинку стула. Картину наблюдают в отраженных лучах по схеме, изображенной на рисунке 5.

Во втором способе незакрепленный прибор просто кладут на письменный стол, и прослойку прибора рассматривают непосредственно глазом в рассеянном дневном свете в отраженных или проходящих лучах (соответственно схемам на рисунках 6,*б* и 6,*а*). Этот способ более прост и доступен, а также он дает возможность одновременного наблюдения и сопоставления картин в проходящем и отраженном свете. Его мы и обсудим более подробно.

На стол кладут листок белой писчей или ватманской бумаги *ББ*, на него накладывают два граненых карандаша, располагая их параллельно друг другу на расстоянии 4—5 см, покрывают эти «рельсы» отмытой от эмульсии фотопластинкой *Пл* размером 9×12 см, на пластинку ставят призму *П*, предварительно тщательно протерев соприкасающиеся поверхности, а обращенную к окну грань призмы покрывают накладкой *ЧН* из черной бумаги, вырезанной по размерам этой грани, с бортиком-отгибом шириной 2—3 см.

Для наблюдения картины в отраженных лучах надо белый фон заменить черным и наоборот: на стол кладут листок черной бумаги и непосредственно на него — стеклянную пластинку с поставленной на нее призмой. На обращенную к окну грань можно наложить полупрозрачную накладку *ПН*, например из папиросной бумаги.

Особый интерес представляет одновременное наблюдение и сопоставление обеих картин — и в проходящих, и в отраженных лучах. С этой целью используют расположение приборов по рисунку 6, *а*, но под стеклянную пластинку с одной ее стороны (поверх одного из карандашей) вводят лист черной бумаги примерно на полширины пластинки, а призму располагают так, чтобы половина ее гипотенузной грани находилась над черной подкладкой. При этом черная накладка на входную грань призмы должна прикрывать противоположную половину входной грани. Смещая подкладку или накладку, добиваются того, чтобы оба поля зрения — темное на

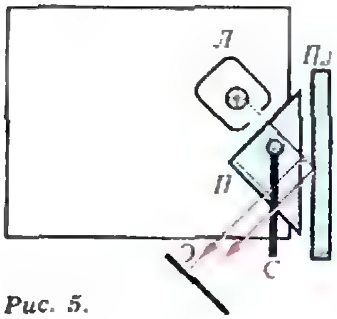
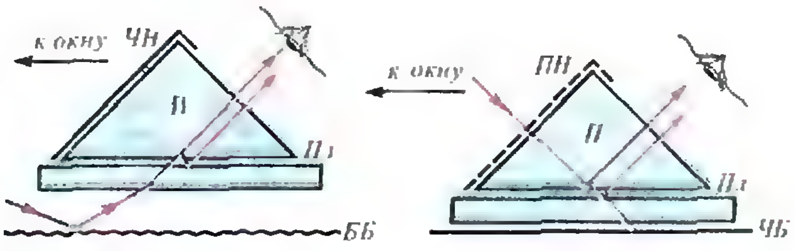


Рис. 5.



а) б)

Рис. 6.

светлом фоне и светлое на темном фоне — располагались впритык.

Что же можно увидеть в прослойке под призмой? Оказывается, очень многое. Мы же вынуждены ограничиться описанием лишь одного наблюдения.

При сочетании призмы с простой стеклянной пластинкой (например, с отмытой от эмульсии фотопластинкой) прослойка имеет изменяющийся от места к месту рельеф, обусловленный не идеально плоской поверхностью пластинки. Этот рельеф и определяет ход интерференционных полос и их деформацию. Наблюдение можно проводить следующим образом: а) держа приграничную область неподвижной призмы в поле зрения и перемещая взор по высоте, переходить к новым и новым участкам прослойки; б) сдвигать призму по поверхности пластинки в том или ином направлении; в) надавливать на противоположные края или вершины пластинки; г) осторожно приподнимать призму со стороны наблюдателя и увеличивать толщину прослойки, образовывая воздушный клин; д) взять прибор для наблюдения интерференционной картины в отраженных лучах в руки и надавливать пальцем на стеклянную пластинку под призмой.

Опыт убеждает в том, что в случае достаточно плоской поверхности оптического стекла или хорошего светофильтра полосы имеют правильную форму (см. фотографии на рисунке 3). В случае менее качественной фотопластинки полосы искривлены, причем степень искривления можно менять, деформируя прослойку тем или иным способом (см. фотографии на рисунке 4).

Вслед за Бойлем и Ломоносовым...

И. КОЧУБЕЙ

Человек повернул кран, и воздух с резким полушипением-полусвистом устремился под колокол воздушного насоса. Вынув из-под колокола небольшую склянку, человек поставил ее на подоконник рядом с точно такой же и бросил что-то в обе. Через некоторое время в лабораторном журнале появилось описание этого опыта, которое начиналось словами: «Стеклянный сосудик, наполовину наполненный водою, я поместил под колокол воздушного насоса и несколько раз повторенными ходами поршня выкачивал воздух: из воды поднимались частые воздушные пузырьки...»

Эти слова мы теперь можем прочесть в известной диссертации М. В. Ломоносова «О действии химических растворителей вообще», написанной им в 1743 году. (Появление газовых пузырьков в жидкости при разрежении первым заметил, по-видимому, Р. Бойль (1627—1691).)

Давайте отложим на время это чтение и попробуем сами поэкспериментировать с жидкостью в условиях пониженного давления.

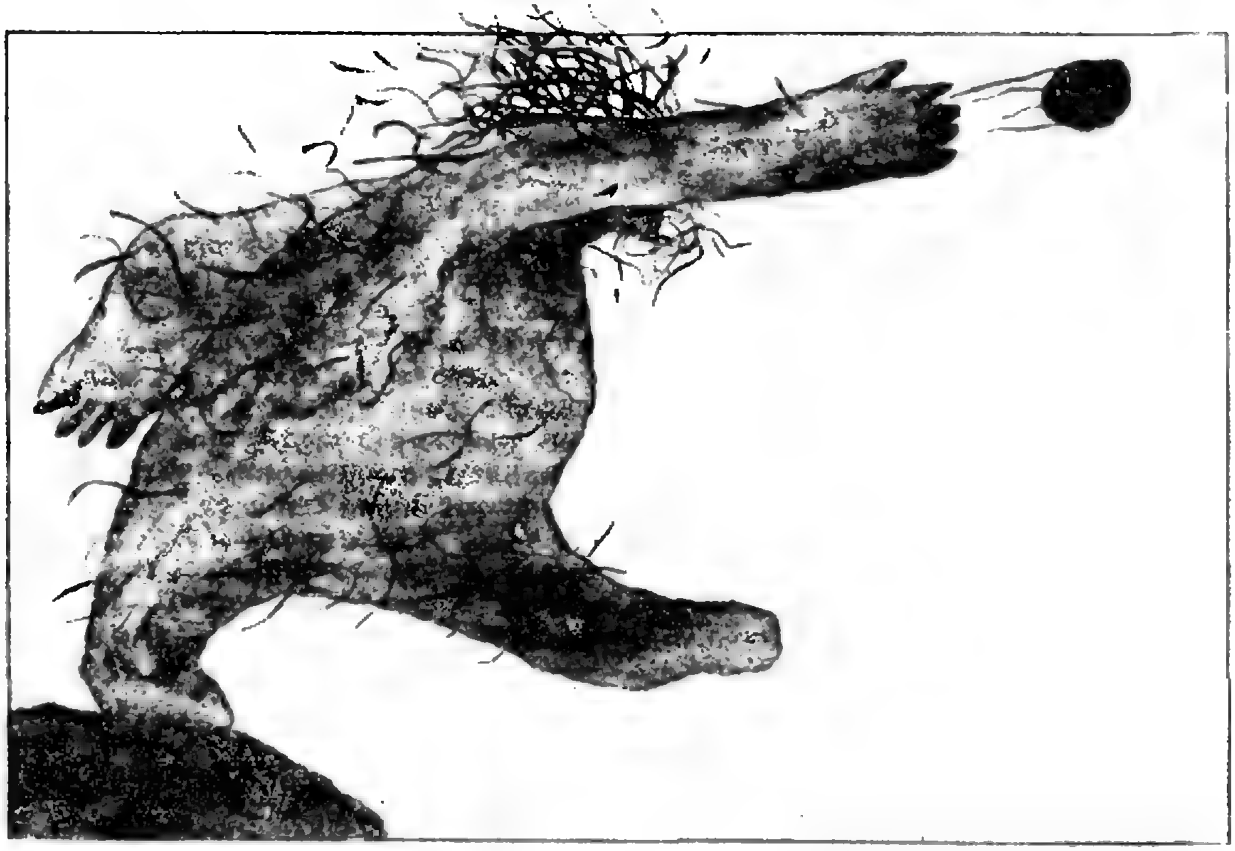
Возьмите маленькую пробирку (например, объемом 7 мл) с боковым отводом и налейте в нее гексан (C_6H_{14}). Отвод соедините трубкой с носиком шприца (объемом 100 мл) или какого-нибудь другого устройства, с помощью которого в пробирке можно будет получить разрежение. Опустите в гексан термометр (например, ртутный), вставленный в резиновую пробку, и, не закрывая отверстия пробирки, погрузите ее в только что кипевшую воду (нагреватель нужно выключить).

Разумеется, конструкция прибора может быть иной, важна идея.

Когда пробирка достаточно прогреется, гексан закипит и столбик термометра перестанет ползти вверх — а это должно случиться при температуре 68,7 °С,— быстро выньте пробирку из воды и плотно закройте ее пробкой. Кипение прекратится (температура довольно быстро понизится). Теперь с силой вытяните поршень шприца — гексан снова бурно вскипит. Возможно, вам удастся заметить, как образуются и растут пузырьки в объеме жидкости.

Почему в нашем опыте возникает кипение — понятно. Жидкость начинает кипеть тогда, когда давление ее насыщенного пара в пузырьках становится чуть-чуть больше давления в жидкости, которое складывается из внешнего (атмосферного) давления, гидростатического давления и давления под изогнутой поверхностью жидкости, обусловленного поверхностным натяжением. Поскольку два последних обычно существенно меньше первого, можно считать, что

(Окончание см. на с. 54)



Практикум абитуриента

Изменение механической энергии

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Механическая энергия системы тел может изменяться по двум причинам. Во-первых, к изменению энергии может привести наличие внешних сил (в том случае, разумеется, если работа этих сил не равна нулю). А, во-вторых, даже если внешние силы отсутствуют, т. е. система тел является замкнутой, ее механическая энергия может не сохраняться. Например, при действии внутри системы — между входящими в нее телами — сил трения, сопротивления и других так называемых диссипативных сил происходит переход части механической энергии во внутреннюю, тепловую энергию тел. Но сумма механической и внутренней энергии в случае замкнутой системы остается постоянной — это есть общий принцип сохранения энергии, выходящий далеко за рамки механики.

Примером процесса, в котором происходит уменьшение механической энергии под действием сил диссипативной природы, является неупругий удар. Пример противоположного рода — разрыв снаряда, при котором механическая энергия также не сохраняется, но не убывает, а возрастает. Дело здесь в том, что в результате химической реакции горения взрывчатого вещества большое количество внутренней химической энергии очень быстро переходит в механическую. Подобное происходит и при работе двигателя внутреннего сгорания. Такую же роль может сыграть и человек, когда он совершает работу за счет своих внутренних энергетических ресурсов (пример: вы поднимаете с земли камень и затем бросаете его).

Для полноты картины давайте вспомним, какие же силы «не угрожают» закону сохранения механической энергии, т. е. не приводят ни к потере, ни к производству этой энергии. Это хорошо известные вам силы: тяжести, упругости, кулоновского взаимодействия и другие так называемые консервативные силы, т. е. силы, работа которых по замкнутой траектории равна нулю. Соответственно, диссипативные силы, о которых шла речь выше, называют неконсервативными.

Полезно иметь в виду, что для любого консервативного взаимодействия можно определить соответствующую ему потенциальную энергию, а для неконсервативного это сделать невозможно. Значит, если для какого-то взаимодействия известна потенциальная энергия, то оно наверняка консервативное.

Все сказанное, конечно же, известно любому школьнику из учебника физики. Поэтому, увидев, что в условии задачи упоминается, к примеру, сила трения (или коэффициент трения), абитуриент зачастую отказывается от мысли использовать при решении задачи энергетические соображения. И он прав в том смысле, что неправильно было бы пытаться записать закон сохранения механической энергии. Но можно и нужно в таких случаях применять формулу для изменения механической энергии, которая связывает изменение механической энергии с работой сил, приводящих к этому:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внешн}} + A^*_{\text{внутр}}. \qquad (*)$$

Здесь $A_{\text{внешн}}$ — работа внешних сил, а $A^*_{\text{внутр}}$ — работа внутренних неконсервативных сил (чаще всего — работа сил трения или сопротивления).

Замечание. Чтобы правильно использовать эту формулу, полезно опираться на следующее простое правило: в правой части надо учитывать работу всех сил, которые не учтены в выражении для потенциальной энергии системы. Например, если вам почему-то удобнее учесть силу тяжести в работе, стоящей в правой части уравнения (*), то выражение для энергии уже не должно содержать члена mgh.

А теперь — несколько конкретных задач.

Задача 1. *На горизонтальной плоскости лежит тело массой m, соединенное с вертикальной стеной легкой пружиной жесткостью k (рис. 1). В начальный момент пружина не деформирована. На тело начинает действовать постоянная сила F. Считая, что коэффициент трения между телом и плоскостью μ и что $F > \mu mg$, найдите максимальное смещение тела от начального положения и максимальную скорость тела в процессе движения.*

В этом случае изменение механической энергии системы — кинетической энергии тела $mv^2/2$ и потенциальной энергии упруго деформированной пружины $kx^2/2$ — происходит под действием внешней силы F и силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$:

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) - 0 = Fx - F_{\text{тр}}x$$

(начальная механическая энергия равна нулю). Максимальное смещение тела соответствует моменту, когда скорость тела обратится в ноль, поэтому получаем

$$x_{\max} = \frac{2}{k}(F - \mu mg).$$

Чтобы определить максимальную скорость тела, надо найти соответствующее этому моменту значение x. Заметим, что скорость тела будет макси-

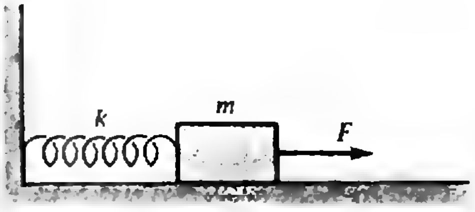


Рис. 1.

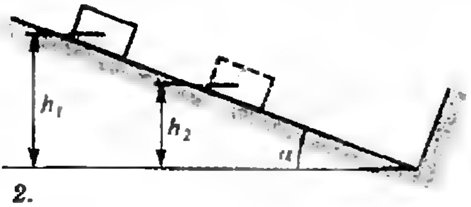


Рис. 2.

мальной в тот момент, когда ускорение станет равным нулю. Из второго закона Ньютона

$$F-\mu mg-kx=0$$

выражаем x и, подставляя в закон изменения механической энергии, находим

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{F-\mu mg}{k}.$$

Примечание. Если бы мы захотели определить также, какое количество энергии переходит из механической во внутреннюю, нам достаточно было бы вычислить работу силы трения и взять ее с противоположным знаком. Например, к моменту остановки тела выделится количество теплоты

$$Q=-A_{\text{тр}}=\mu mgx_{\max}.$$

Задача 2. *Маленькое тело кладут на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, и отпускают (рис. 2). В нижней точке плоскости тело ударяется об упор, отскакивает без потери скорости и поднимается обратно по наклонной плоскости на некоторую высоту. Найдите эту высоту h_2, если начальная высота тела h_1, а коэффициент трения тела о плоскость μ ($\mu<\operatorname{tg}\alpha$).*

В отличие от предыдущего случая, здесь внешних сил нет (по отношению к системе «тело — Земля»), и изменение механической энергии происходит только под действием силы трения.

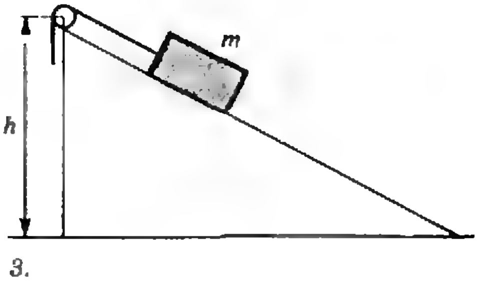


Рис. 3.

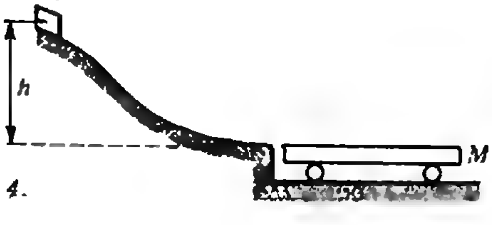


Рис. 4.

Работа силы трения вычисляется весьма просто, так как величина силы трения не зависит от того, в какую сторону движется тело: $F_{\text{тр}}=\mu N=\mu mg\cos\alpha$. Учитывая, что как в начальном, так и в конечном состоянии кинетическая энергия тела равна нулю, запишем уравнение (*) в виде

$$mgh_2-mgh_1=-\mu mg\cos\alpha\left(\frac{h_1}{\sin\alpha}+\frac{h_2}{\sin\alpha}\right),$$

где $h_1/\sin\alpha$ и $h_2/\sin\alpha$ — пути, пройденные телом вниз и вверх по наклонной плоскости, а знак «—» в правой части учитывает то, что работа силы трения отрицательна. Таким образом, получаем

$$h_2=h_1\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}.$$

Задача 3. *Груз массой m медленно поднимают на высоту h по наклонной плоскости с помощью блока и троса (рис. 3). При этом совершается работа A. Затем трос отпускают, и груз скользит вниз. Найдите величину A, если известно, что скорость тела в конце спуска равна v.*

Если в условии задачи речь сразу же идет о работе или энергии, то энергетический подход к решению может оказаться тем более выигрышным, что избавляет нас от необходимости выражать в явном виде те силы, о работе которых идет речь.

Запишем формулу (*) для изменения механической энергии сначала при подъеме груза:

$$mgh-0=A+A_{\text{тр}},$$

а потом при спуске:

$$\frac{mv^2}{2}-mgh=A_{\text{тр}}$$

(работа силы трения $A_{\text{тр}}$ одинакова при подъеме и при спуске). Из этих уравнений находим

$$A=2mgh-\frac{mv^2}{2}.$$

Задача 4. *Тело массой m съезжает с высоты h гладкой наклонной плоскости и начинает скользить по тележке массой M, находящейся на гладкой* *горизонтальной плоскости (рис. 4). Коэффициент трения тела о поверхность тележки μ. На какое расстояние переместится тело относительно тележки?*

В этой задаче закон изменения механической энергии системы мы применим совместно с законом сохранения импульса.

Скорость тела v_1 у основания наклонной плоскости найдем из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2}=mgh \Rightarrow v_1=\sqrt{2gh},$$

а конечную скорость совместного движения тела и тележки v_2 вычислим с помощью закона сохранения импульса:

$$mv_1=(m+M)v_2 \Rightarrow v_2=v_1\frac{m}{m+M}.$$

Изменение энергии системы «тело — тележка» — это работа действующей между ними силы трения:

$$\frac{(m+M)v_2^2}{2}-\frac{mv_1^2}{2}=-F_{\text{тр}}L,$$

где L — расстояние, пройденное телом по тележке. Учитывая, что $F_{\text{тр}}=\mu N=\mu mg$, получаем

$$L=h\frac{M}{\mu(m+M)}.$$

Возникает вопрос: почему мы рассчитываем работу силы трения так, как будто тележка покоится, а тело перемещается по ней на расстояние L? Разве работа не зависит от системы отсчета? Ответ заключается в следующем. Конечно, работа любой силы, приложенной к данному телу, зависит от системы отсчета. Например, если какая-то сила $\vec{F}$ разогнала тело массой m из состояния покоя до скорости $\vec{v}$, то работа этой силы положительна и равна изменению кинетической энергии тела: $A=mv^2/2-0$. Если же рассмотреть этот же процесс в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$ (рис. 5), то начальная скорость тела будет равна $-\vec{v}/2$, а конечная $+\vec{v}/2$, и работа окажется равной нулю: $A=m(v/2)^2/2-m(v/2)^2/2=0$. Однако в нашей задаче, проводя все рассуждения с точки зрения неподвижного наблюдателя, мы должны рассчитать работу сил трения как над телом, так и над тележкой — именно полная работа сил трения в уравнении (*) равна изменению кинетической энергии системы:

$$A_{\text{тр}}=F_{\text{тр}}s-F_{\text{тр}}(s+L)=-F_{\text{тр}}L.$$

Здесь s — перемещение тележки, $s+L$ — перемещение тела, работа силы трения над тележкой положительна, а над телом — отрицательна. Таким образом, общий итог получается точно таким же, как если бы тележка покоилась, а тело переместилось на расстояние L.

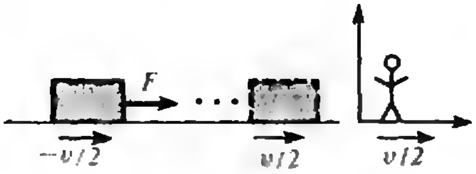


Рис. 5.

Тот факт, что полная работа сил трения не зависит от системы отсчета, имеет совершенно прозрачный физический смысл с энергетической точки зрения. В самом деле, полная работа сил трения равна, с противоположным знаком, изменению внутренней (тепловой) энергии тела и тележки, которое, очевидно, не должно зависеть от системы отсчета (ведь изменение температуры тел не зависит от того, какой наблюдатель его измеряет).

Задача 5. *Человек бросает камень массой m со скоростью $\vec{v}$ в горизонтальном направлении. В неподвижной системе отсчета работа человека над камнем равна $mv^2/2$, а в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, эта работа равна нулю. Не противоречит ли этот факт утверждению, что работа совершается человеком за счет ресурсов собственной внутренней энергии и потому не должна зависеть от системы отсчета?*

С точки зрения баланса энергий работа человека не должна зависеть от системы отсчета. Однако работа человека над камнем явно различна в разных системах отсчета. Как же так?

Все дело в том, что человек совершает работу не только над камнем, но и над... Землей, и для восстановления правильного баланса энергий надо учесть изменение энергии Земли при броске камня. Эти рассуждения кажутся весьма непривычными, так как обычно молчаливо предполагается, что изменением скорости Земли можно пренебречь (масса Земли очень велика), и учитывается только кинетическая энергия тел, движущихся в поле тяжести Земли. И все-таки доведем наши рассуждения до конца.

Приращение скорости Земли $\Delta\vec{V}$ можно найти из закона сохранения импульса системы «камень — Земля» (обозначим массу Земли через M):

$$m\vec{v}+M\Delta\vec{V}=0 \Rightarrow \Delta\vec{V}=-\frac{m}{M}\vec{v}.$$

В системе отсчета, где начальная скорость Земли равна нулю, приращение кинетической энергии Земли ничтожно мало, и мы его обычно не учитываем:

$$\Delta E_З=\frac{M(\Delta V)^2}{2}=\frac{m}{M}\frac{mv^2}{2}\ll\frac{mv^2}{2}.$$

Однако в системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{v}/2$, изменение кинетической энергии Земли отнюдь не является пренебрежимо малым:

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}+\Delta V\right)^2-\frac{1}{2}M\left(\frac{v}{2}\right)^2\approx$$

$$\approx\frac{1}{2}Mv\Delta V=\frac{mv^2}{2}.$$

Видно, что и здесь полная работа человека равна $mv^2/2$, только она совершается не над камнем, а над Землей.

Таким образом, необходимо иметь в виду, что изменение кинетической энергии очень тяжелого тела (Земли, стенки и т. п.) можно считать ничтожно малым только в той системе отсчета, где это тело в начальный момент покоится.

Задача 6. *Шарик, подвешенный на пружине жесткостью k, погружен в жидкость. Плотность материала шарика ρ больше, чем плотность жидкости $\rho_ж$. Вначале шарик удерживают в таком положении, что пружина не деформирована, а затем отпускают. Какое количество теплоты выделится в системе к тому моменту, когда колебания шарика прекратятся и он остановится? Объем шарика V.*

Прежде всего отметим, что выражение «выделяется такое-то количество теплоты» нельзя назвать удачным с сегодняшней точки зрения. Оно сохранилось и продолжает использоваться по чисто историческим причинам. На современном языке оно означает: «на столько-то увеличивается внутренняя, тепловая энергия тел системы».

Теперь — по существу. В нашей задаче изменение внутренней энергии системы «тело — жидкость — Земля» (обозначим его через Q), взятое с противоположным знаком, равно работе силы сопротивления и может быть вычислено как уменьшение механической энергии системы:

$$Q=-A_{сопр}=-\Delta E_{мех}.$$

Кинетическая энергия равняется нулю как в начальном, так и в конечном состоянии, так что нам надо найти изменение только потенциальной энергии. Здесь часто встречается ошибка, которая состоит в том, что, учитывая изменение потенциальной энергии пружины ($kx^2/2$) и потенциальной энергии шарика ($-mgx$), забывают учесть изменение потенциальной энергии жидкости. Смысл этого вклада в изменение энергии иллюстрирует рисунок 6: одновременно с перемещением шарика вниз происходит перемещение объема жидкости вверх из того места, где находится шарик в конечный момент, в то место, где он находился вначале.

Итак,

$$Q=-\frac{kx^2}{2}+mgx-m_ж gx.$$

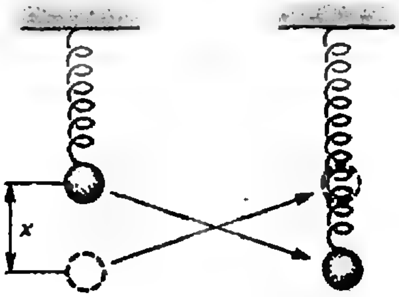


Рис. 6.

Смещение x можно найти из условия равновесия шарика

$$-mg+m_{ж}g+kx=0,$$

($m_{ж}g$ — сила Архимеда). Учитывая, что $m=\rho V$ и $m_{ж}=\rho_{ж}V$, получаем окончательно

$$Q=\frac{((\rho-\rho_{ж})gV)^2}{2k}.$$

Замечание. Можно было не думать об изменении энергии жидкости, но тогда, записывая закон изменения механической энергии, необходимо было учесть работу силы Архимеда как внешней силы по отношению к системе «тело — Земля»:

$$\Delta E_{мех}=A_{сопр}+A_{Арх}=-Q-m_{ж}gx$$

(работа силы Архимеда при движении шарика вниз отрицательна). Такой более формальный подход иногда оказывается проще и надежнее.

Упражнения

1. Тело съезжает с наклонной плоскости, высота которой h, а основание b. Какой путь пройдет тело по горизонтали, если коэффициент трения на всем пути равен μ? Участок перехода с наклонной плоскости на горизонтальную считать плавным и гладким.

2. Два тела, массы которых m_1 и m_2, соединены недеформированной пружиной и лежат на горизонтальной поверхности (рис. 7). На первое тело начинает действовать постоянная сила F. При каком минимальном значении этой силы второе тело сдвинется с места? Коэффициент трения тел о поверхность μ.

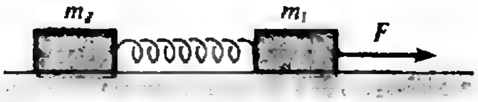


Рис. 7.

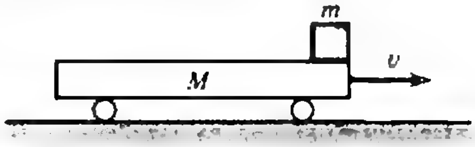


Рис. 8.

3. Маленькое тело массой m лежит на краю длинной тележки (рис. 8). Тележке ударом сообщают скорость v. На сколько переместится тело относительно тележки, если масса тележки M, а коэффициент трения между телом и тележкой μ? Трением между тележкой и плоскостью пренебречь.

4. После выстрела вслед грузовику, движущемуся со скоростью $v=10$ м/с, пуля застревает в задней стенке кузова. Считая, что начальная скорость пули $v_0=100$ м/с, а ее масса $m=20$ г, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Маленький шарик объемом V поднимают на высоту h_1 над поверхностью жидкости и отпускают. Упав в жидкость, шарик погружается на глубину h_2, после чего начинает всплывать. Найдите количество теплоты, которое выделится в системе к моменту максимального погружения шарика. Плотность материала шарика ρ меньше плотности жидкости $\rho_{ж}$.

Вслед за Бойлем и Ломоносовым...

(Начало см. на с. 48)

в момент начала кипения давление насыщенного пара жидкости равно внешнему давлению. А это означает, что кипение можно вызвать либо увеличив давление насыщенного пара, либо понизив внешнее давление — что и было сделано в нашем опыте.

Как вы знаете, давление насыщенного пара растет с увеличением температуры, причем растет довольно круто. В случае гексана эту зависимость, найденную экспериментально, аналитически можно описать так:

$$\lg p_{н}\approx 6{,}88-\frac{1171}{t+224},$$

где давление $p_{н}$ выражено в мм рт. ст., а температура t — в градусах Цельсия.

По этой формуле вы можете оценить, насколько вам удалось понизить давление в пробирке. Подставив в формулу значение наинизшей температуры, при которой вам в ваших опытах еще удавалось «заставить» гексан кипеть, вы найдете нужное давление насыщенного пара, а значит, и давление внутри пробирки.

Заметим, что поправки на изменение атмосферного давления в данном месте по сравнению с атмосферным давлением на уровне моря нередко приходится учитывать при работе в исследовательских лабораториях. (Например, в Колорадо — штате на западе США — обычная вода кипит при 90 °С.)

Наконец, последнее. Как и школьный опыт с воздушным шариком, раздувающимся при откачивании воздуха из-под колокола воздушного насоса, наш опыт с кипением гексана при различных температурах неплохо иллюстрирует работу хорошо известного в физике принципа Ле Шателье — Брауна. Он заключается в том, что если на систему, находящуюся в устойчивом состоянии, воздействует внешний фактор, который стремится вывести систему из этого состояния, то в ней начинают возникать процессы, компенсирующие эффект внешнего воздействия. В нашем случае таким процессом было, очевидно, кипение жидкости.

ЭВМ «УКСУС»

В настоящее время как в нашей стране, так и за рубежом получили широкое распространение электрические водоснабжающие машины (ЭВМ) типа «УКСУС» — Универсальная Конструкция, Стимулирующая Устойчивость Студента.

На основании многочисленных экспериментальных данных нами была получена эмпирическая формула, описывающая работу этих систем: $F(3)=В+Г+С$, где В — вода, Г — газ, С — сироп, 3 — трехкопеечная монета.

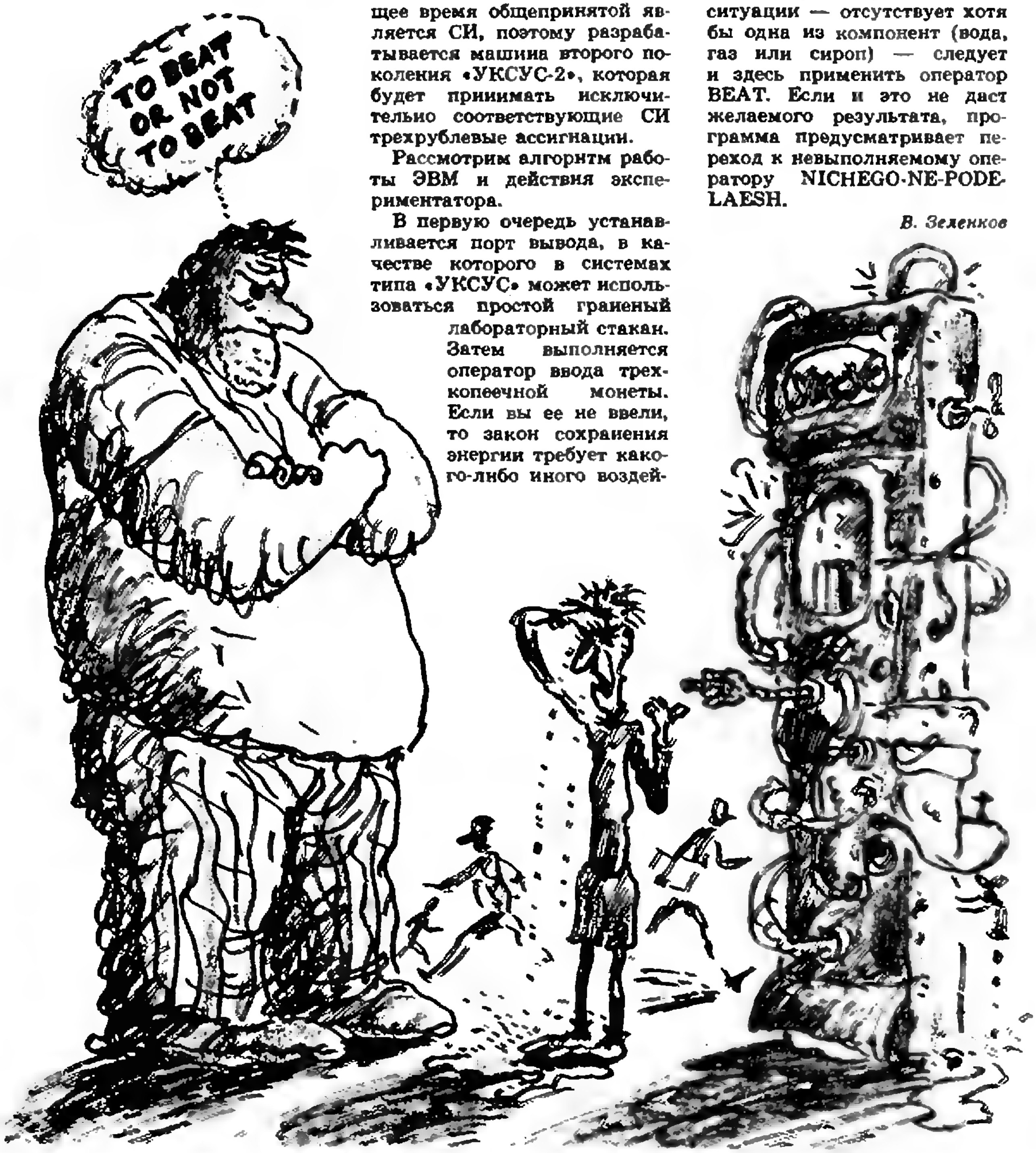
Теоретическое обоснование эксперимента было выполнено в эпоху массового использования системы СГС. В настоящее время общепринятой является СИ, поэтому разрабатывается машина второго поколения «УКСУС-2», которая будет принимать исключительно соответствующие СИ трехрублевые ассигнации.

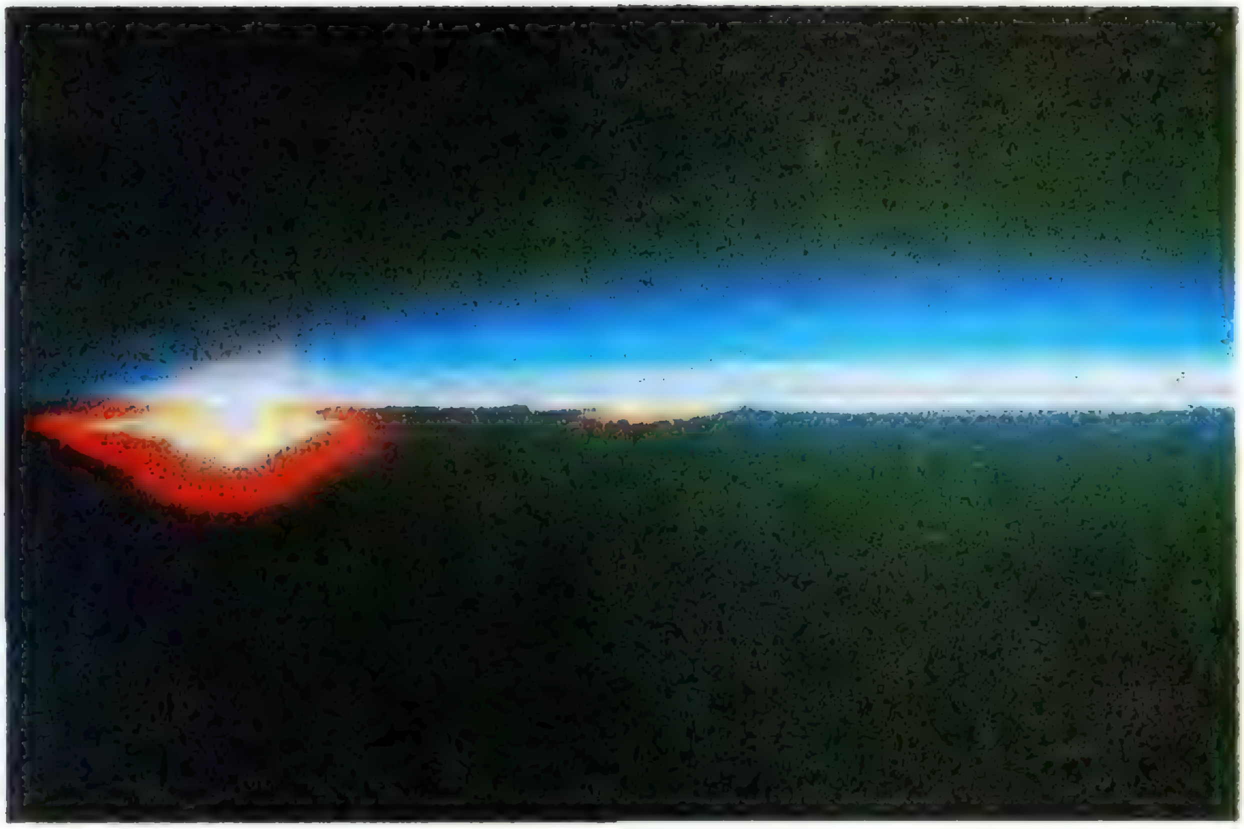
Рассмотрим алгоритм работы ЭВМ и действия экспериментатора.

В первую очередь устанавливается порт вывода, в качестве которого в системах типа «УКСУС» может использоваться простой граненый лабораторный стакан. Затем выполняется оператор ввода трехкопеечной монеты. Если вы ее не ввели, то закон сохранения энергии требует какого-либо иного воздействия на систему, например, применения оператора BEAT («БИТЬ»), который может быть расположен в любом месте программы. Так, на аналогичной установке Колумбийского университета обычно получают кока-колу ударом левой по монетоприемнику.

После введения трехкопеечной монеты «УКСУС» начинает работать и накапливать результаты (вода+газ+сироп) в порте вывода, за чем следует процедура DRINK («ПИТЬ»). В случай сбойной ситуации — отсутствует хотя бы одна из компонент (вода, газ или сироп) — следует и здесь применить оператор BEAT. Если и это не даст желаемого результата, программа предусматривает переход к невыполняемому оператору NICHEGO-NE-PODELAESH.

В. Зеленков


TO BEAT OR NOT TO BEAT



Р-значит ракета

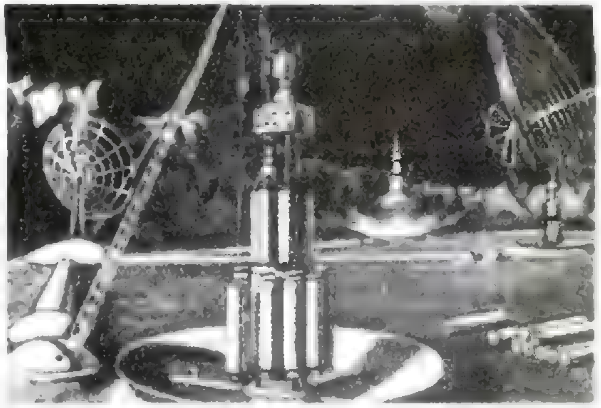
25 из 30

В. НИКОЛАЕВ

Юным читателям нашего журнала дата первого полета человека в космос наверняка кажется далекой стариной — ведь это было не только до того, как они родились, но и их родители тогда были моложе, чем сами читатели сегодня. Для большинства же сотрудников «Кванта» наоборот — трудно поверить, что после этого великого события прошло уже 30 лет — время, вполне достаточное для прихода в науку нового поколения ученых и инженеров. И хотя с 1961 года в освоении космического пространства достигнуто очень много, нам представляется любопытным и полезным сравнить то, что ожидалось, с тем, что получилось.

Эйфория от первых успехов была столь искренна, а темпы начальных шагов в развитии космической техники столь стремительны, что освоение и колонизация планет Солнечной системы, а затем и выход в межзвездное пространство представлялись делами ближайших десятилетий. Жизнь однако внесла в прогнозы существенные коррективы.

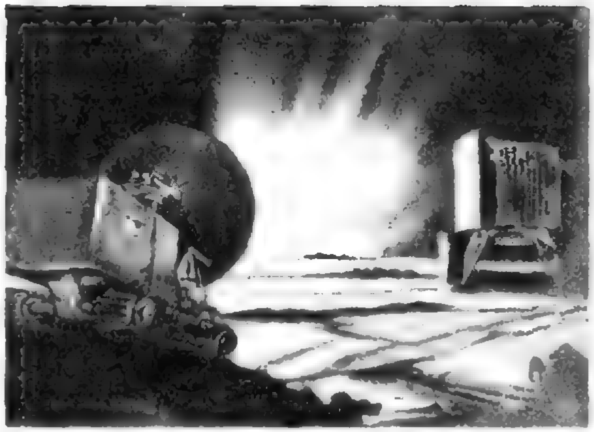
Вообще принято считать, что человеку свойственно в отношении прог-



Лунный порт для обслуживания межпланетных полетов. 1988 г. (К. Эрике).

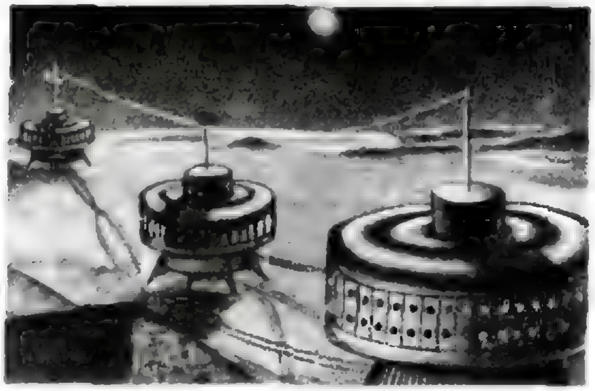
нозов событий на ближайшие годы проявлять повышенный оптимизм, а на более далекое будущее — чрезмерную осторожность.

В середине шестидесятых годов, а точнее, в 1966 году (вспомним, к тому времени состоялись уже полеты на кораблях «Восток» и «Меркурий», «Восход» и «Джемини», человек побывал в открытом космосе, а крупнейшие космические державы — одна открыто, а другая под большим секретом — работали над проектом экспедиции на Луну) в Вашингтоне состоялся IV симпозиум Американского астронавтического общества. С докладами выступили крупнейшие ученые и специалисты в области космонавтики. В своих докладах они попытались загля-



Станция для исследования Солнца на полюсе Меркурия. 1988 г. (К. Эрике).

Год	Транспорт	Связь, информация	Технология	Биология, химия	Физика
1970	Космическая лаборатория, посадка на Луну Ядерная ракета	Машинный перевод	Электрические аккумуляторы	Китовый язык	
1980	Посадка на планеты	Персональное радио	Термоядерный синтез	Экзобиология, искусственный организм	Гравитационные волны
1990		Искусственный разум	Передача энергии по радио	Увеличение восприятия	Внутриядерная структура
2000	Колонизация планет	Всемирная библиотека	Освоение дна моря		
2010	Путешествие к центру Земли	Телепатические устройства Логический язык	Контроль погоды	Контроль наследственности	Ядерный катализ
2020	Межзвездный зонд	Робот	Космическая геология		
2030		Контакт с внеземными цивилизациями		Биоинженерия Разумные животные	
2040			Превращения	Обесчувствление	
2050	Контроль над гравитацией	Запасная память	Планетная инженерия		
2060				Искусственная жизнь	Разрушение пространства времени
2070	Околосветовые скорости		Контроль над климатом		
2080	Межзвездный полет				
2090	Передача материалов	Мировой мозг	Астроинженерия	Бессмертие	
2100	Встреча с инопланетными разумными существами				



Астробиологическая исследовательская база на Марсе. 1992 г. (К. Эрике).

нуть вперед на 35 лет, т. е. до 2001 года. К этому же времени относится и *общий прогноз развития науки* известного ученого и писателя-фантаста *А. Кларка*. И хотя сегодняшняя заметка посвящена освоению космического пространства, полагаем, что для полноты картины будет правильнее познакомить читателя сначала с *общим прогнозом* А. Кларка (см. таблицу на с. 57).

А вот как представляли рубеж двух тысячелетий участники симпозиума.

К. Эрике: «Сегодня, в конце 2000 г., межпланетные полеты по трассам от Меркурия до Сатурна осуществляются комфортабельными *пилотируемыми* летательными аппаратами... Тяжелые и самые совершенные автоматические зонды достигли планеты Плутон и прокладывают трассу к обширным и неисследованным районам, расположенным за этой планетой и в межзвездном пространстве...

...наши гелионавты... побывали в самых разных областях Солнечной системы, от выжженных Солнцем побережий планеты Меркурий до ледяных скал Титана, спутника Сатурна...

...Прошло уже три года с тех пор, как была организована добыча и обработка металлической руды на Меркурии. На Марсе только что начаты работы по осуществлению долгосрочной программы внедрения в приполярных районах северного и южного полушарий планеты специально созданных для марсианских условий культур...

...Не только значительные технические достижения практически во всех областях космической техники, но главным образом прогресс в области разработки импульсных ядерных и термоядерных двигателей наконец-то обеспечили огромные энергетические возможности, необходимые для осуществления межпланетных полетов.

...благодаря им (силовым установкам — *В. Н.*) стали экономически возможными длительные полеты в пределах Солнечной системы...»

Первая постояннодействующая космическая станция «Мир» (запущена в 1986 г.) с модулями «Квант-1», «Квант-2» и «Кристалл» и космическим кораблем «Союз ТМ-10» (снимок сделан в 1990 г.).

Основными национальными космическими целями на период от 1970 до 1985 г. К. Эрике считал (в 1966 г.):

1. Исследование Солнечной системы автоматическими зондами и создание научно-технической базы будущих пилотируемых полетов к Венере и Марсу.

2. Организация постоянной научной лаборатории на Луне.

3. Создание функциональных (прикладного назначения) космических станций на околоземных, в т. ч. стационарных орбитах.

В. Пэрди: «...перечислю основные события в области освоения космоса...

1. Обитаемые космические станции на околоземной орбите, 1975—1980 гг.

2. Пилотируемый полет с пролетом мимо Венеры, 1980—1985 гг.

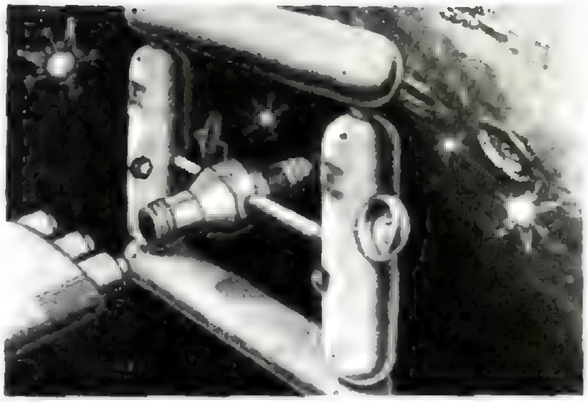
3. Обитаемая обсерватория на Луне, 1985—1990 гг.

4. Пилотируемый полет с пролетом мимо Марса, 1985—1990 гг.

5. Обсерватории в различных участках Солнечной системы (автоматические), 1980—1990 гг.

6. Полет человека на Марс, 1990—2000 гг.

...Транспортные грузовые средства многократного использования будут разрабатываться, но не будут применяться вплоть до 2000 г. или более позднего времени, поскольку объем перевозок будет еще недостаточен, чтобы оправдать эксплуатацию таких средств.»

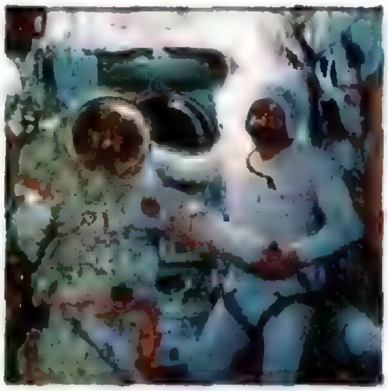


Космическая станция в либрационной точке системы «Земля — Луна», 2001 г. (Х. Пэйдж).

Х. Пэйдж: «Вряд ли в 2001 г. туристские путешествия на Луну станут популярными ввиду недостатка комфорта, риска и слишком высокой стоимости таких путешествий...

...Путешественник начнет свою лунную экспедицию в сооружении, похожем на современные аэродромы для сверхзвукового транспорта. Пассажирское кресло в аэрокосмическом самолете будет находиться внутри герметичной капсулы, предназначенной для спасения пассажира в случае аварии... Взлет будет горизонтальным, как у современных самолетов».

Полет А. Сереброва в автономном средстве космонавта (1990 г.).



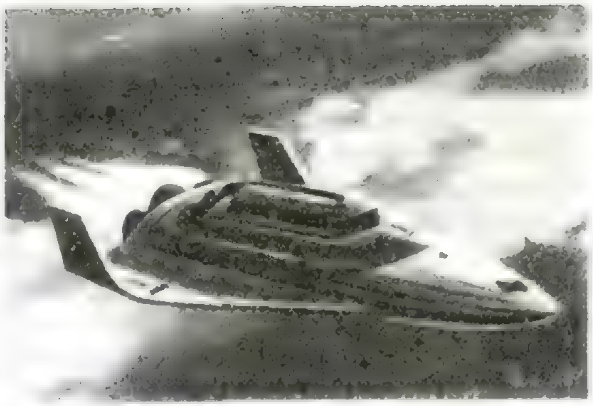
Рекордсмен по длительности пребывания на орбите М. Манаров (1988 г.).

Монтажные работы на орбите уже не сенсация (А. Волков, 1988 г.).

Почему же не сбылись прогнозы (почти все) крупных специалистов в области космонавтики? Не претендуя на исчерпывающий ответ, отмечу несколько, на мой взгляд, основных причин.

Самая главная — указанные цели не были востребованы обществом. Читатели «Кванта» могли ознакомиться («Квант» № 2 за 1991 г.) с основными целями и задачами в освоении космического пространства, предлагаемыми одним из разработчиков космической техники в СССР — профессором К. Феоктистовым. Его взгляды отличаются большей прагматичностью, чем у его американских коллег. Было ли так же в 1966 г.? Или головокружение от успехов оказывало такое же воздействие и на советских специалистов? Во всяком случае в конце 60-х годов проработками марсианского пилотируемого корабля занимались и у нас в стране.

Другая причина — высокая и все возрастающая стоимость космических программ. К тому же, слишком большое внимание к использованию космоса в военных целях отодвигало гражданские и научные программы. Кроме того, соперничество СССР и США зачастую вело к решению сиюминутных задач, отнимающих много средств, но далеких от нужд государств. Такой программой стала программа пилотируемых полетов на Луну. Далеко не оптимальными получились транспортные системы многоразового использования.



Аэрокосмический самолет с пассажирским отсеком. 2001 г. (Х. Пэйдж).

Не удалось пока построить и экономичную, надежную и высокоэффективную двигательную установку, о которой говорил К. Эрике. Такой двигатель особенно эффективен при межпланетных перелетах.

По существу, из всего перечня предполагавшихся программ сбылась лишь та, что связана с использованием орбитальных станций. Ведь их эксплуатация продолжается уже два десятка лет, причем комплекс «Мир» стал первой постоянно действующей, модульной базой.

Любопытна оценка использования многоразовых транспортных систем,

(Окончание см. на с. 63)

Хотя яблони на Марсе еще не цветут... (А. Александров. 1987 г.).

«Буран» и «Мрия» (1989 г.). Почти по Х. Пэйджу?

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и, в первую очередь, на физический факультет МГУ (*при поступлении на физический факультет удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией*).

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем физическим специальностям, фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, а также успешно работать в таких областях науки и техники, где стыкуются два или несколько научных направлений. Это — биофизика и геофизика, радиогамма-инфракрасная астрономия и создание искусственного интеллекта, химическая физика и астрофизика и т. п.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.

В письмо вложите два экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу.

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и отсылается обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*11*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. Ленина, д. 88, кв. 99*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—5, а поступающим в 11 класс — задачи 4—8.

1. «**Меловая линия**». По поверхности стола движется с постоянной скоростью черная доска. По доске движется кусочек мела, пущенный по ней так, что в начальный момент скорость мела относительно стола перпендикулярна скорости доски. Какой формы след оставит мел при своем движении?

2. «**Перегрузка**». С какой силой давит космонавт массой 60 кг на опору при вертикальном взлете ракеты с ускорением 9 g?

3. «**Подъемник**». Ленточный подъемник образует угол α с горизонтом. С каким максимальным ускорением может подниматься ящик на таком подъемнике, если коэффициент трения μ? Лента не прогибается.

4. «**Гололед**». На обледеневшем участке шоссе коэффициент трения между колесами и дорогой в десять раз меньше, чем на необледеневшем. Во сколько раз нужно уменьшить скорость автомобиля, чтобы тормозной путь на обледеневшем участке шоссе остался прежним?

5. «**Пружина**». К концу висящей вертикально пружины, массой которой можно пренебречь, подвешивают груз массой m. Затем к середине уже растянутой пружины подвешивают еще один груз такой же массы. Определите длину растянутой пружины. Жесткость пружины k, а ее длина в нерастянутом состоянии L.

6. «**Снаряд**». Снаряд разрывается в наивысшей точке траектории на расстоянии L (по горизонтали) от пушки на два одинаковых осколка. Один из них возвращается к пушке по первоначальной траектории снаряда. Где упадет второй осколок?

7. «**Шланг**». Из отверстия шланга, прикрытого пальцем, бьют две струи под углами α и β к горизонту с одинаковой начальной скоростью v. На каком расстоянии от отверстия (по горизонтали) струи пересекаются?

8. «**Опыт Милликена**». Заряженная положительным зарядом пылинка массой m находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Между пластинами создана разность потенциалов U. На сколько необходимо изменить разность потенциалов, чтобы пылинка осталась в равновесии, если ее заряд уменьшился на q? Расстояние между пластинами d.

Юные математики встречаются на Кубани

В течение почти 20 лет каждый год в начале ноября школьники, увлеченные математикой, их преподаватели, а с ними и многие члены редколлегии «Кванта», как перелетные птицы, тянулись в теплые края: в дни осенних каникул в Батуми проходили математические праздники. (О них наш журнал не раз писал.) К сожалению, в последние годы традиция батумских праздников прервалась. И вот, в прошлом году вновь поезда и самолеты повезли юных математиков на юг, на сей раз — в Краснодар, где с 3 по 10 ноября впервые проводился Фестиваль юных математиков. Организаторы сумели без раскачки придать ему широкий размах: в Фестивале участвовали гости из Москвы, Ленинграда, Киева, Одессы, Челябинска, Кирова, Ижевска, Белорецка, болгарского города Бургаса и 13 команд из Краснодарского края, а всего — 25 команд. И это при том, что не все приглашенные — а приглашения рассылались по результатам Всесоюзного турнира городов — смогли приехать в этот раз.

Как и на праздниках в Батуми, программа краснодарского Фестиваля включала научную конференцию, КВН, лекции по математике для школьников и учителей. Были в ней и нововведения, например отборочный тест в ФМШ при МГУ. Однако главные события развернулись, пожалуй, на командном математическом турнире. Как же он был построен при таком большом числе команд-участниц? Первый этап проводился по образцу известного соревнования телевизионных знатоков «брейн-ринг»: команды получали задачи (типа задач «Кванта» для младших школьников») одновременно и решали их на время. В результате определились 8 четвертьфиналистов, продолживших бои по олимпийской системе с выбыванием. В финал вышли кировчане и ленинградцы. Несколько неожиданно победила команда Кирова, основной вклад в успех которой внес капитан — Иван Изместьев. Победители получили один из двух большущих самоваров — главных призов Фестиваля. А второй самовар увезли киевляне, выигравшие встречу КВН (капитан — Ира Шевченко).

Если математический турнир занял в общей сложности 4 дня, то конференция уложилась в один. Однако интересных докладов было сделано немало. Назовем среди них очень содержательный, хотя, честно говоря, не слишком понятный для большинства слушателей, доклад Миши Темкина (57 шк., Москва) «Алгоритмы нахождения группы классов дивизоров квадратичного поля», доклад Алексея Долгорукова (ФМШ при МГУ), исследовавшего недавно придуманные дискретные модели солитонов, выступления отличившегося четкостью и высокой культурой изложения капитана ленинградской команды Всеволода Жуховицкого о формуле Пика в плоском и многомерном случае и Лены Филипповой из Одессы на модную сейчас тему «Узлы, зацепления и их полиномы», доклад Виктора Пасховера из Киева «Элементы эргодической теории». Пусть не обижаются те, кого мы не назвали,— организаторы Фестиваля намерены опубликовать материалы конференции.

Спортивный элемент, привнесенный матбоями, придал Фестивалю своеобразие, которое стоит сохранить и в дальнейшем. Правда, некоторые команды, выбывшие на первых этапах, почувствовали себя отчасти «не у дел», по крайней мере, по сравнению с теми, кто продолжал борьбу. Выход они нашли, устроив по собственной инициативе бои между собой. Вероятно, система розыгрыша нуждается в усовершенствовании.

Одновременно с Фестивалем в Краснодаре прошел семинар учителей математики школ края. На одном из заседаний учителя встретились с руководителями команд, рассказавшими об организации и методах своей работы; на этой встрече выступил и представитель редколлегии «Кванта». Вообще, все гости Фестиваля получили прекрасную возможность пообщаться и почерпнули для себя немало полезного.

Участники Фестиваля остались довольны и культурной программой. Они побывали на экскурсиях по Краснодару и в город-герой Новороссийск, посетили спортшколу акробатики, подготовившую немало чемпионов, где имели возможность попрыгать на батуте, концерт замечательного Кубанского казачьего хора. Краткое торжественное за-

крытие Фестиваля с вручением призов (в том числе подписка на «Квант» и «Юность») завершилось представлением Краснодарского эстрадного «Театра премьер».

Самых добрых слов заслуживают устроители краснодарского Фестиваля и в первую очередь доценты математического факультета Кубанского государственного университета И. В. Федоренко и С. Л. Крупецкий (оба они — народные депутаты) и декан факультета повышения квалификации В. А. Лазарев. Начав работу по организации буквально за месяц до открытия Фестиваля, они сумели провести его на, пожалуй, максимально возможном уровне, продумав все, от такой мелочи, как сувенирная чашка с символикой Фестиваля для каждого из более чем 200 гостей, до размещения участников в лучших гостиницах города. Участников Фестиваля приветствовали председатель краевого Совета Н. И. Кондратенко, ректор Кубанского университета член-корреспондент АН СССР В. А. Бабешко, руководители других краевых и городских организаций. Особую роль в финансировании и проведении Фестиваля сыграл Краснодарский горсовет и его председатель В. А. Самойленко, на закрытии пригласивший всех участников на второй Фестиваль в 1991 году.

Руководители команд, обсудившие итоги Фестиваля, были единодушны: это хорошее начало, за которым должно последовать продолжение. И оно уже следует — ниже мы печатаем объявление об очередном краснодарском Фестивале.

В. Дубровский

II Фестиваль юных математиков в Краснодаре

Ассоциация «Математическое просвещение Кубани» и журнал «Квант» планируют в конце октября 1991 года в Краснодарском крае провести II Фестиваль юных математиков. В программе Фестиваля:

— научная конференция школьников,

— турнир математических боев,

— лекции для школьников по нестандартным разделам элементарной математики,

— КВН,

— лекции и диспуты по актуальным проблемам современной науки,

— компьютерные соревнования,

— обширная культурная программа.

К участию в Фестивале приглашаются команды (10 человек, включая руководителя) математических школ, классов, кружков, секций, домов пионеров и т. п. Состав участников будет сформирован по предварительным заявкам, которые необходимо выслать до 1 мая 1991 г. по адресу:

350640, Краснодар, ГСП,
ул. К. Либкнехта, 149, Кубанский государственный университет, ФППК ОНО, оргкомитет Фестиваля.

Справки по телефону в Краснодаре: 33-85-38, секретарь Оргкомитета — Корнеева Юлия Петровна.

Время проведения Фестиваля на Кубани — время золотой осени, хорошей погоды, богатого урожая, фруктов, ярмарок. В работе Фестиваля ожидается участие зарубежных команд. Участников Фестиваля ждут памятные сувениры и призы.

Оргкомитет

25 из 30

сделанная В. Пэрди. Даже при слишком оптимистичных оценках грузопотока он предвидел их невысокую эффективность. В этом уже убедились на примере «Спейс Шаттла» американцы (что не помешало нам повторить их ошибки).

Анализ прогнозов А. Кларка показывает, что чересчур оптимистичными оказались оценки не только в области космонавтики.

Отсюда можно сделать вывод, что 25 лет — все же тот срок, прогнозы на который, как правило, завышены. Когда же можно ожидать исполнения программы, предложенной американскими учеными? Думается, на ее выполнение уйдет еще 40—50 лет. А может, во мне говорит скептик? Если так, то читатели «Кванта» имеют возможность опровергнуть мои сомнения. Во всяком случае сегодня не видно принципиальных технических трудностей, которые бы не позволили реализовать программы освоения Солнечной системы (межзвездные перелеты — вопрос особый).

Будем же верить, что независимо от того, какие цели будут выбраны на ближайшие десятилетия, они окажутся достаточно благородными, чтобы их стоило претворять в жизнь!

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x+8}>\sqrt{7-x}+\sqrt{3x+6}.$$

2. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\frac{3}{x}=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-1}x-2\log_x(x-1)<1.$$

4. Через некоторую точку внутри треугольника площадью S проведены прямые, параллельные двум из его сторон. Площади треугольников, отсекаемых этими сторонами, равны S_1 и S_2. Найдите площадь треугольника, ограниченного этими прямыми и третьей стороной треугольника.

5. Шар касается основания правильной четырехугольной пирамиды объема V и ее боковых ребер. Найдите объем шара, если известно, что плоский угол при вершине пирамиды равен α.

Вариант 2

1. Три числа являются первым, вторым и третьим членами арифметической прогрессии и, соответственно, первым, третьим и вторым членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа, если известно, что сумма квадрата первого из них, удвоенного второго и утроенного третьего равна 3/4.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{|x+1|+|x+5|}>\left|x+\frac{5}{2}\right|.$$

3. Решите уравнение

$$\cos 2x+\sin 2x=\cos 4x+\sin 4x.$$

4. Решите неравенство

$$e^{3(x-1)}-3e^{x-1}>\sqrt{3}.$$

5. Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в a раз больше площади ее основания. Найдите плоский угол при вершине этой пирамиды.

Публикацию подготовил О. Иванов

Ленинградский государственный технический университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Найдите $\cos(2\alpha-\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Покажите, что результат есть рациональное число.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=\cos^2 x-2.$$

Выпишите те решения, которые находятся в интервале (0; 4).

3. Решите неравенство

$$\log_4(7^{x^2-x}+49^{x^2-x+1}+14)>3.$$

4. Найдите все значения a, при которых многочлен

$$x^4+ax^3+15x^2-18x+9$$

является квадратом многочлена второй степени относительно x.

5. Дан отрезок длиной 2. Три окружности радиусом 2 имеют центры в концах отрезка и в его середине. Найдите радиус четвертой окружности, касающейся трех данных.

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Зная, что $\log_3 2=a$, $\log_5 3=b$, найдите $\log_{30}18$.

2. Найдите решения уравнения

$$\cos^4 x-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0{,}25,$$

удовлетворяющие условию $16^x+7\cdot 4^{1-x}>29$.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-5x+12}+2x^2\geqslant 5x.$$

4. Найдите сумму первых 50 совпадающих членов двух арифметических прогрессий 2, 7, 12, ... и 3, 10, 17, ...

5. Точка M удалена от сторон угла в 60° на расстояния 3 и 9 (основания перпендикуляров, опущенных из M на

стороны угла, лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях). Прямая, проходящая через M, пересекает стороны угла и отсекает треугольник периметром $12\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

Вариант 3

(радиофизический факультет)

1. При каких значениях a справедливо равенство

$$\frac{a+9}{a^2-9}\left(\frac{a-3}{9a+81}+9-a^2\right)+\frac{161+54a}{9a+27}=|a+3|?$$

2. Решите уравнение

$$2\log_4^2(8x)+3\log_2\sqrt{\frac{x}{2}}=3^{9/4}\log_{3\sqrt{3}}4.$$

3. Напишите уравнение касательной к графику функции

$$y=-5x+\cos x-\sqrt{3}\sin x$$

в точках наибольшего наклона касательной к оси Ox, считая, что абсциссы точек касания принадлежат промежутку $(-3\pi; -\pi)$.

4. При каких действительных значениях a неравенство

$$(a-1)\cdot 4^x+(3-a)\cdot 2^{2x+1}+a>1$$

справедливо при всех действительных значениях x?

5. Точка M удалена от сторон правильного треугольника (от прямых, на которых расположены его стороны) на расстояния 2, 3, 6. Найдите сторону правильного треугольника, если его площадь меньше 30 и больше 15.

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Найдите корень уравнения $\operatorname{ctg} x-\sin 2x=16\sin 4x$, ближайший к числу $-\sqrt{13}$.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-1}{5}}(x^2-10x+25)>0.$$

3. При каких значениях a уравнение $4^x-(a+3)\cdot 2^x+4a-4=0$ имеет один корень? Найдите этот корень.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2y^2-x+8y=6,\\1{,}5x^2+3y^2-x+5y=12.\end{cases}$$

5. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются. Известно, что $AD=2$, $CD=4$, $BD=5$. Найдите радиусы окружностей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В момент, когда опоздавший пассажир вбежал на платформу, мимо него за время t_1 прошел предпоследний вагон. Последний вагон прошел мимо пассажира за время t_2. На сколько опоздал пассажир к отходу поезда? Поезд движется равноускоренно, длина вагонов одинакова.

2. Мальчик массой $m=45$ кг вращается на «гигантских шагах» с частотой $n=15$ об/мин. Длина каната $l=5$ м. Какова сила натяжения каната?

3. Тяжелый стержень согнут посередине под прямым углом и подвешен свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует верхняя половина стержня?

4. В цилиндрический сосуд с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в сосуде поднялся на высоту $l=2$ см. На сколько опустится уровень воды, если коробочка утонет? Плотность железа $\rho=7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3.

5. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Найдите период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда $S=0{,}3$ см^2, а масса ртути $m=484$ г. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3.

6. Один моль идеального газа, внутренняя энергия которого $U=3/2\ RT$, сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл *1—2—3—1* на p, V-диаграмме состоит из отрезков прямых *1—2* и *3—1*, параллельных осям p и V соответственно, и изотермы *2—3*. Найдите количество теплоты, отданное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии *1* равны p_1 и V_1, давление газа в состоянии 2 равно p_2.

7. Конец капиллярной трубки радиусом r опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии жидкости по капилляру? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ.

8. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q. В центре кольца расположен одноименный с q заряд Q, причем $Q\gg q$. Определите силу, с которой растянуто кольцо.

9. Амперметр с сопротивлением $R_1=2$ Ом, подключенный к источнику тока, показывает ток $I=5$ А. Вольтметр с сопротивлением $R_2=150$ Ом, подключенный к такому же источнику тока, показывает напряжение $U=12$ В. Найдите ток короткого замыкания источника.

10. Осветитель, предназначенный для получения направленных световых пучков, состоит из точечного источника света

и линзы диаметром $D=6$ см с фокусным расстоянием $F=15$ см. На каком расстоянии от линзы должен быть расположен источник, чтобы лучи, прошедшие через линзу, образовали на экране световое пятно диаметром $d=4$ см? Расстояние от линзы до экрана $L=100$ см.

Публикацию подготовили
С. Преображенский, В. Романов,
И. Русанов, Ю. Хвостов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен
(математический факультет)

Вариант 1

1. Между какими соседними целыми числами лежит число $\sqrt{(\sqrt{3}-8)^2}$?

2. Не решая уравнения $2x^2+x+1=0$, вычислите сумму кубов его корней.

3. Что больше: $\cos(-1)$ или $\operatorname{tg}(-4,1)$?

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}.$$

5. Решите неравенство

$$1+\frac{1}{\log_{\frac{1}{7}} x+1}<0.$$

6. Найдите все решения уравнения $8\sin x+5=2\cos 2x$, удовлетворяющие условию $\cos x\geqslant 0$.

7. Автобус и такси находятся на расстоянии 12 км. Через сколько времени такси догонит автобус, если известно, что скорость автобуса 60 км/ч и она составляет 2/3 скорости такси?

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 4 больше одного и на 2 больше другого катета. Определите площадь круга, описанного около этого треугольника.

9. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите угол наклона боковой грани к основанию пирамиды.

10. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проведенной через середины двух ребер основания параллельно высоте пирамиды. Вычислите площадь сечения, если радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен 6, а боковое ребро пирамиды 10.

Вариант 2

1. Между какими соседними целыми числами лежит число $\sqrt{(3-\sqrt{26})^2}$?

2. Пусть $f(x)=x^2(x+1)^2-6x(x+1)$. Решите уравнение $f(x)+8=0$.

3. Определите знак числа $\operatorname{tg} 2\cdot\operatorname{tg} 3\times\operatorname{tg} 4$.

4. Постройте график функции $y=3^{\log_3(\sin x)}$.

5. Решите неравенство

$$20\cdot 2^x+19+\frac{77}{2^x-3}>0.$$

6. Решите уравнение

$$\log_3 x+3-\frac{11}{4\log_{\frac{1}{3}} x+3}=0.$$

7. Сахарный тростник при переработке в сахар теряет 91 % своей первоначальной массы. Сколько надо взять сахарного тростника, чтобы получить 450 кг сахара?

8. В равнобедренной трапеции длины оснований 21 и 9, а длина высоты 8. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

9. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60°. Найдите центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

10. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8, сторона основания равна 12. Вычислите площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно боковой грани пирамиды.

Публикацию подготовила
Т. Торубарова

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=(x-a)^3+(x+a)^3.$$

а) При каких a значение $f(1)$ равно 26?

б) Решите неравенство $f(x) < 8x^2$ при $a=1$.

в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x$ в зависимости от a?

2. Дан ромб $ABCD$. Сторона ромба равна 1, угол B равен 2α. Из вершины A опустили перпендикуляр AF на прямую CD. Пусть $S(\alpha)$ — площадь треугольника ACF.

а) Докажите, что $S(\alpha)=2\sin^3\alpha\cos\alpha$.

б) При каких α площадь $S(\alpha)$ в 4 раза меньше площади ромба?

в) При каком α величина $S^2(\alpha)$ максимальна?

3. Дана функция
$f(x)=8^x-3\cdot 4^x$.

а) Найдите корни функции f.

б) Вычислите значение $f(\log_{\sqrt{2}}3)$.

в) Решите неравенство $\log_2 f(x) \geqslant 2+x$.

г) Найдите множество значений функции f.

Вариант 2

1. Дана функция

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2}{x^2-2}.$$

а) Какова область определения данной функции?

б) Решите уравнение $f(x)=8/3$.

в) Решите неравенство $f(x) \leqslant -2/3$.

г) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=x^2$?

2. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 на диагонали AC взята точка M; длина отрезка AM равна a.

а) Найдите длину $L(a)$ отрезка MD.

б) Решите уравнение $L(a)=\sqrt{5}/(2\sqrt{2})$.

в) При каком a величина $L(a)$ минимальна?

3. Дана функция

$$f(x)=27+3^{x+4}+9^{x+2}+27^{x+1}.$$

а) Вычислите значение $f(-1)$.

б) Решите уравнение $f(x)=3^6$.

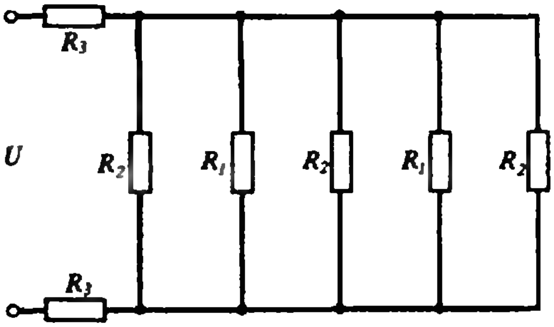
в) Сколько корней имеет уравнение $f(x)=3^{-x}$?

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автомобиль движется по мосту, имеющему форму дуги радиусом $R=40$ м, обращенную выпуклостью вверх. Коэффициент трения скольжения колес о мост $\mu=0{,}57$. а) Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развить автомобиль в высшей точке моста, если он в этот момент будет иметь скорость $v=50{,}4$ км/ч? б) Как будет направлен вектор полного ускорения в этой точке?



2. В сосуд малой теплоемкости, где находится $m_1=500$ г льда при температуре $t_1=0$ °С, вливают $m_2=200$ г воды, нагретой до $t_2=80$ °С. Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К). а) Какая температура установится в сосуде и каким будет его содержимое? б) Будет ли одинаковым время установления термодинамического равновесия, если лед будет монолитным куском или наколот мелкими кусочками?

3. Напряжение, приложенное к цепи (см. рисунок), $U=11$ В. Резисторы, включенные в цепь, имеют следующие сопротивления: $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=3$ Ом. а) Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в резисторах R_1, R_2 и R_3. б) Как изменится напряжение на резисторе R_3 при уменьшении сопротивления резистора R_1?

4. Проводник длиной $l=30$ см с током $I=20$ А расположен под углом $\alpha=30°$ к линиям однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}4$ Тл. а) Найдите работу по перемещению проводника перпендикулярно магнитному полю на расстояние $a=25$ см. б) Как изменится эта работа, если проводник сложить вдвое?

5. Светящаяся точка находится на главной оптической оси собирающей линзы на двойном фокусном расстоянии от нее. а) Постройте изображение этой точки. б) Куда будет двигаться изображение при приближении точки к линзе?

Вариант 2

1. Тело массой $m_1=5$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2=2{,}5$ кг. После центрального и абсолютно неупругого удара кинетическая энергия системы стала равной $E_k=5$ Дж. а) Найдите кинетическую энергию системы до удара. б) На что расходуется кинетическая энергия тел при неупругих ударах?

2. Кусок льда массой $m=2$ кг при температуре $t=-20$ °С нагрели, сообщив ему количество теплоты $Q=1$ МДж. Удельная теплоемкость льда $c_л=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3$ МДж/кг. а) Определите установившуюся температуру. б) Могут ли одновременно при одной и той же температуре сосуществовать лед, вода и водяной пар?

3. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_A=2$ Ом, подключенный к источнику тока, показал ток $I=5$ А; вольтметр с внутренним сопротивлением $R_V=15$ Ом, подключенный к тому же источнику, показал $U=12$ В. а) Определите ток короткого замыкания источника. б) Примерно какое сопротивление нужно подключить к данному источнику, чтобы создать режим короткого замыкания?

4. Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля $E=0{,}5$ кВ/м, индукция магнитного поля $B=1$ мТл. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, масса $m=9\cdot10^{-31}$ кг. а) С какой скоростью и в каком направлении должен лететь электрон, чтобы двигаться прямолинейно? б) Может ли электрон двигаться прямолинейно только в одном электрическом или в одном магнитном поле?

5. Пучок параллельных лучей падает из воздуха на поверхность воды под углом $\alpha=60°$. Ширина пучка в воздухе $d=10$ см. Показатель преломления воды $n=4/3$. а) Определите ширину пучка в воде. б) Будет ли при этом происходить и отражение света?

Публикацию подготовили
И. Деянов, Д. Козлов, М. Марамзина,
А. Степанов, С. Фомин

Если
ты искренне любишь физику
и математику (а как же
иначе — ведь ты читаешь
«Квант»), хочешь
заниматься научной работой,
но!
тебя привлекает и
инженерное, практическое
воплощение научных идей,
путь «от идеи к жизни»,
короче:
если ты не уверен, кем ты
хочешь стать — ученым,
инженером или и тем и
другим,
ты — наш человек!!!
Тебе надо поступать в
**Московский институт нефти
и газа** им. И. М. Губкина,
на специальность 0906
**«Физические процессы
горного
и нефтегазового
производства».**
Войди в нашу дверь —
и через 5,5 лет ты выйдешь
высококлассным
инженером-исследователем,
будешь вести интересную
научную работу, закладывать
идеи в принципиально новые,
экологически чистые и
эффективные технологии
(и видеть, как они
воплощаются в жизнь!).
Ты будешь прекрасно знать
математику, физику,
гидромеханику, владеть
персональной ЭВМ любого
класса лучше, чем
электробритвой. Тебя будут
ждать во всех НИИ — как
отраслевых, так и АН СССР.
С тобой будут советоваться
министры и депутаты,
иностранцы и кооператоры,
ведь ты — Новый человек!
А в годы обучения ты будешь
вести интересную
студенческую жизнь,
общаться с талантливыми
студентами, остроумными
преподавателями,
обаятельными деканами —
о чем еще можно мечтать?
Мы ждем тебя!
*Адрес института: 117296,
г. Москва, Ленинский пр., 65.*
*Справки по телефону
приемной комиссии 135-83-06.*

Вузы мира

Финальный экзамен по физике в США

Ниже приводятся тексты задач по физике, предлагавшихся выпускникам школ США весной 1990 года. В таком пробном экзамене могут участвовать все желающие. Результаты экзамена (в баллах) учитываются при решении вопроса о приеме в вуз.

I ТУР

Часть 1

(по 2 балла за каждый правильно выбранный ответ, всего — 80 баллов)

1. Если $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, модуль вектора $\vec{A}$ равен: a) 1; b) 9; c) 11; d) 29; e) никакой из перечисленных ответов не верен. Скалярное произведение $\vec{A} \cdot \vec{B}$ равно: a) $\sqrt{8}$; b) 17; c) $6\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k}$; d) $5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$; e) никакой ответ не верен.

2. Какая из следующих ситуаций не возможна: a) тело имеет скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на юг; b) тело имеет скорость, направленную на север, и ускорение, направленное на север; c) тело имеет нулевую скорость и нулевое ускорение; d) тело имеет постоянную скорость и переменное ускорение; e) тело имеет переменную скорость и постоянное ускорение?

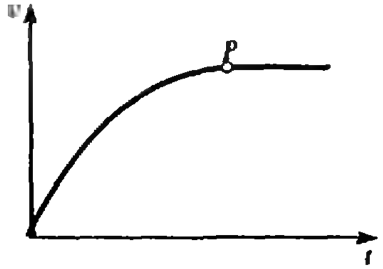


Рис. 1.

3. На рисунке 1 приведен график зависимости скорости машины от времени. В точке P машина должна: a) двигаться с положительным ускорением; b) двигаться с отрицательным ускорением; c) двигаться с нулевым ускорением; d) двигаться по кривой; e) быть неподвижной.

4. Какой из графиков (см. рис. 2) представляет движение тела, скорость которого уменьшается?

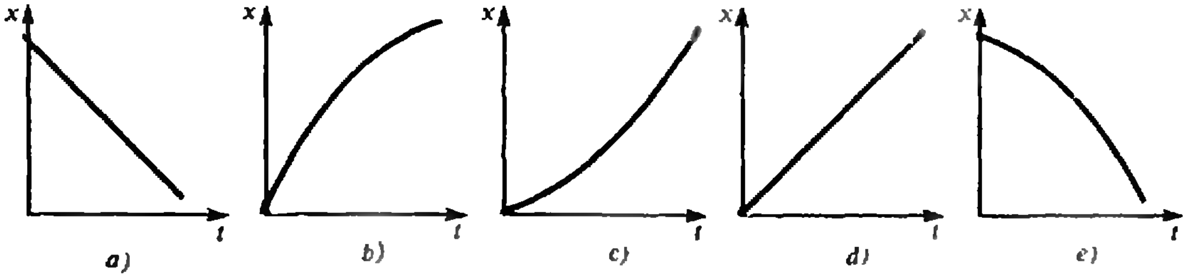
5. Какой из графиков (см. рис. 3) представляет движение с постоянной скоростью?

6. Предмет сброшен с заднего края тележки, движущейся прямолинейно по гладкой дороге с постоянной скоростью. Трением о воздух пренебречь. Предмет упадет: a) впереди тележки; b) на тележку; c) позади тележки; d) зависит от начальной скорости предмета; e) зависит от скорости тележки.

7. Бомбардировщик, летящий горизонтально, должен сбросить бомбу перед тем, как он будет пролетать над целью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какое из высказываний следует считать неверным: a) бомбардировщик будет находиться непосредственно над бомбой, когда она взорвется; b) ускорение бомбы во время падения не меняется; c) скорость самолета равна скорости бомбы, когда она попадает в цель; d) бомба движется по криволинейной траектории; e) время полета бомбы не зависит от скорости самолета.

8. Пуля, вылетевшая из ружья горизонтально: a) останавливается только из-за сопротивления воздуха; b) находится в воздухе дольше, чем пуля, брошенная вниз с такой же высоты; c) движется по прямой линии; d) достигает земли одновременно с пулей, брошенной вниз с такой же высоты; e) достигает земли раньше, чем пуля, брошенная вниз с такой же высоты.

9. Частица движется по окружности с постоянной скоростью. Векторы мгно-



a) b) c) d) e)

Рис. 2.

венной скорости и ускорения: a) противоположны друг другу; b) перпендикулярны; c) параллельны; d) постоянны в течение всего времени движения; e) никакой из перечисленных выше ответов не верен.

10. Человек стоит на весах в кабине лифта. Весы дают наибольшее показание, когда лифт: a) движется вниз с уменьшающейся скоростью; b) движется вверх с уменьшающейся скоростью; c) движется вниз с увеличивающейся скоростью; d) движется вверх с постоянной скоростью; e) движется вниз с постоянной скоростью.

11. В игре «перетягивание каната» участвуют две команды. Каждая тянет канат на себя с силой 5000 Н. Натяжение каната равно: a) 2500 Н; b) 5000 Н; c) $5000\sqrt{2}$ Н; d) 10 000 Н; e) 0.

12. Машина движется на восток с постоянной скоростью. Результирующая сила, действующая на машину, направлена на: a) восток; b) запад; c) север; d) юг; e) равна нулю.

13. Брусок соскальзывает вниз по наклонной плоскости с углом наклона 30°. Определите, при каком значении коэффициента трения скольжения он будет двигаться с постоянной скоростью: a) 2; b) $\sqrt{3}$; c) $1/\sqrt{3}$; d) 1/2; e) нельзя установить.

14. На столе лежат три книги. Сила тяжести каждой указана на рисунке 4. Сила, действующая на книгу *z*, равна: a) 9 Н, вниз; b) 9 Н, вверх; c) 19 Н, вниз; d) 19 Н, вверх; e) никакой из приведенных выше ответов не верен.

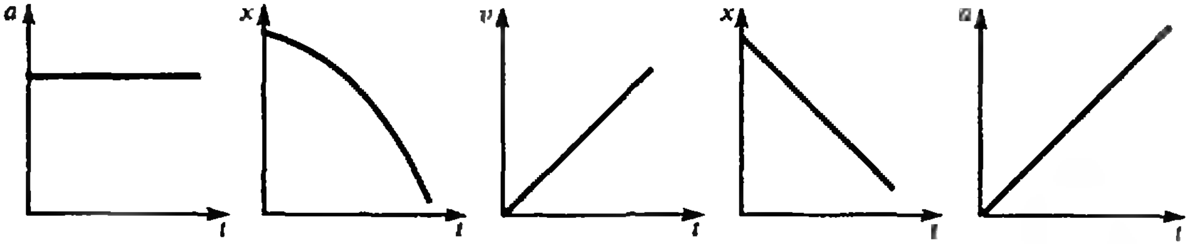
15. 1 ньютон — это сила: a) тяжести тела массой 1 кг; b) тяжести тела массой 1 г; c) которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2; d) которая телу массой 1 г сообщает ускорение 1 см/с^2; e) которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 9,8 м/с^2.

16. Несмотря на то, что силы действия и противодействия равны по величине и противоположны по направлению, они не уравновешивают друг друга, потому что: a) в действительности сила действия всегда немного больше; b) сила противодействия появляется только после приложения силы действия; c) не всякая сила действия имеет силу противодействия; d) эти силы действуют на разные тела; e) эти силы действуют в разное время.

17. Мальчик тянет деревянную коробку по шероховатому горизонтальному полу с постоянной скоростью. На рисунке 5 показаны сила натяжения веревки T, сила тяжести коробки F, сила нормальной реакции N и сила трения f. Скажите, какое из утверждений верно: a) $T=f$ и $N=F$; b) $T>f$ и $N=F$; c) $T=f$ и $N<F$; d) $T>f$ и $N<F$; e) никакое утверждение не верно.

18. Тяжелый деревянный брусок медленно тянут по шероховатой поверхности, как показано на рисунке 6. Сила трения, действующая на брусок, в случае *2* по сравнению со случаем *1*: a) больше; b) такая же; c) меньше; d) нельзя сказать — зависит от угла α.

19. Брусок, сила тяжести которого 3 Н, прижимают к стене с силой 4 Н, направ-



a) b) c) d) e)

Рис. 3.

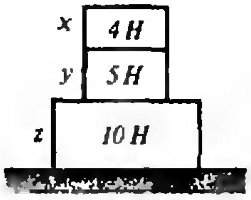


Рис. 4.

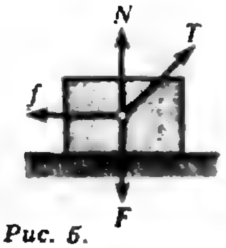


Рис. 5.

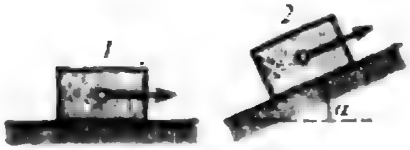


Рис. 6.

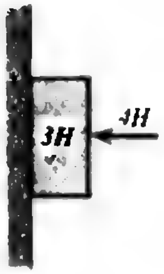


Рис. 7.

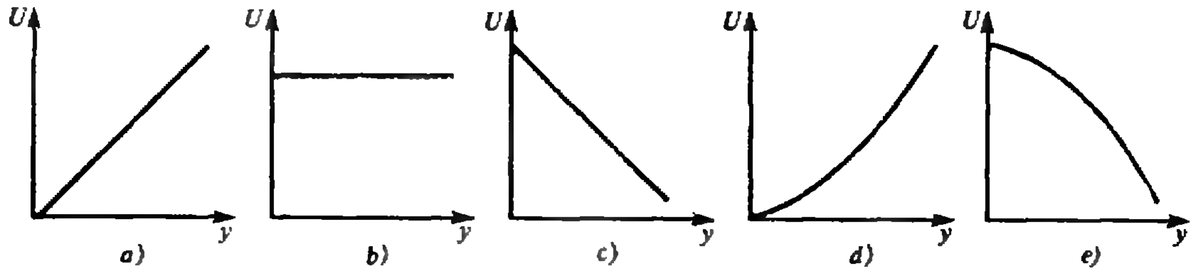


Рис. 8.

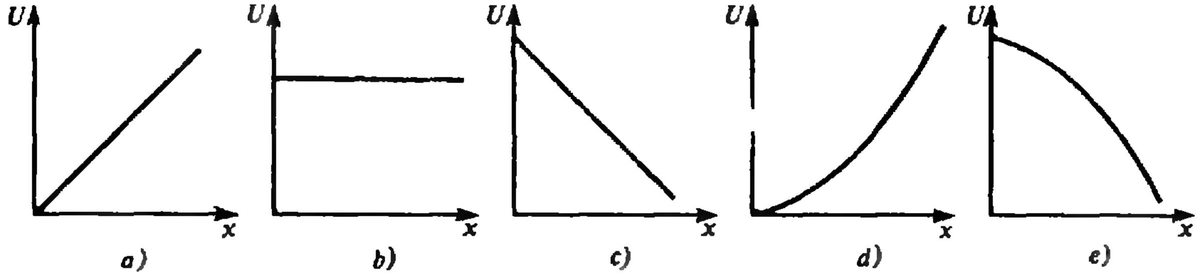


Рис. 9.

ленной горизонтально (рис. 7). Если коэффициент трения скольжения равен 0,8, то стена действует на брусок с силой: a) 3 Н; b) 3,3 Н; c) 4 Н; d) 5 Н; e) не равна ни одному из перечисленных значений.

20. Спутник находится на орбите над атмосферой Земли. Какое утверждение верно: a) результирующая сила, действующая на спутник, равна нулю; b) векторы скорости и ускорения параллельны друг другу; c) скорость спутника постоянна; d) спутник ускоряется по направлению к центру Земли; e) без источника энергии спутник упадет на Землю.

21. Работа, необходимая для того, чтобы остановить движущееся тело, пропорциональна: a) скорости тела; b) ускорению; c) квадрату скорости; d) квадрату ускорения; e) потенциальной энергии тела.

22. Штангист прикладывает силу 1500 Н, чтобы поднять штангу на высоту 2 м от пола за время 5 с. Во второй раз он поднимает ту же штангу за 10 с. Совершенная работа во втором случае, по сравнению с первым: a) в 4 раза меньше; b) в 2 раза меньше; c) такая же; d) в 2 раза больше; e) в 4 раза больше.

23. Покоящееся тело может совершить работу, если: a) его потенциальная энергия положительна; b) его потенциальная энергия отрицательна; c) оно может двигаться так, чтобы его кинетическая энергия уменьшалась; d) оно может двигаться так, чтобы его потенциальная энергия уменьшалась; e) ничего из перечисленного выше не верно.

24. Снаряд массой 2,5 кг вылетает с начальной скоростью 20 м/с под углом α к горизонту. Максимальная высота подъема равна: a) ≈ 10 м; b) ≈ 20 м; c) ≈ 40 м; d) ≈ 80 м; e) нельзя сказать — зависит от угла α.

25. Какой из графиков (см. рис. 8) правильно отражает зависимость потенциальной энергии U мяча от его координаты y?

26. Какой из графиков (см. рис. 9) правильно отражает зависимость потенциальной энергии U пружины от ее растяжения x?

27. Снаряд разрывается в воздухе на несколько осколков. Суммарный импульс непосредственно после взрыва: a) меньше импульса непосредственно перед взрывом, поскольку часть импульса перешла в кинетическую энергию осколков: b) больше, чем непосредственно перед взрывом, поскольку часть энергии взрыва превратилась в импульс осколков; c) неизвестен, если неизвестны масса и скорость каждого осколка; d) может быть как больше, так и меньше импульса перед взрывом — в зависимости от скорости осколков; e) ничего из перечисленного выше не верно.

28. Единица измерения квадрата импульса, деленная на единицу массы, есть: a) ньютон; b) джоуль; c) ватт; d) метр; e) метр в секунду.

29. Прямоугольный брусок движется по гладкой горизонтальной поверхности, переходящей в «мертвую петлю» (рис. 10). Брусок проходит положения *1*, *2*, *3*, *4*, затем снова *1* и возвращается на горизонтальную плоскость. В положении *3*: a) его суммарная механическая энергия минимальна; b) результирующая сила равна нулю; c) брусок мгновенно останавливается; d) результирующая сила направлена вверх; e) никакой ответ не верен.

30. Два шарика разных масс, сделанные из упругих материалов, подвешены в одной точке на легких нитях одинаковой длины. Более легкий шарик отводят в сторону, отпускают, и он сталкивается со вторым шариком. Определите, какие из величин сохраняются на всем протяжении движения шариков: a) кинетическая энергия; b) импульс; c) момент импульса; d) все из перечисленных выше; e) никакая из перечисленных.

31. Скажите, какая линейная величина имеет такую же единицу измерения, как и угловая: a) перемещение; b) скорость; c) ускорение; d) кинетическая энергия; e) никакая из перечисленных выше.

32. Однородные твердые тела, одно сферической формы, а другое — цилиндрической, имеющие одинаковые массы и радиусы, скатываются с наклонной плоскости. Оба тела катятся без проскальзывания, и мы видим, что: a) шар достигает основания наклонной плоскости первым, поскольку он имеет меньшую площадь соприкосновения с поверхностью; b) шар достигает основания первым, поскольку «захватывает» меньшую вращательную энергию; c) цилиндр достигает основания первым, поскольку «захватывает» большую вращательную энергию; d) они достигают основания в одно и то же время; e) никакой ответ не верен.

33. Человек, руки которого прижаты к бокам, вращается на легком диске (трение в оси мало́). Когда он вытягивает руки перпендикулярно туловищу: a) его момент инерции уменьшается, и поэтому угловая скорость вращения уменьшается; b) его момент инерции увеличивается, и поэтому угловая скорость уменьшается; c) его момент инерции уменьшается, и поэтому угловая скорость увеличивается; d) его момент инерции увеличивается, и поэтому угловая скорость увеличивается; e) никакой ответ не верен.

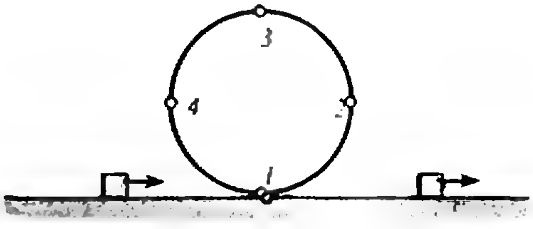


Рис. 10.

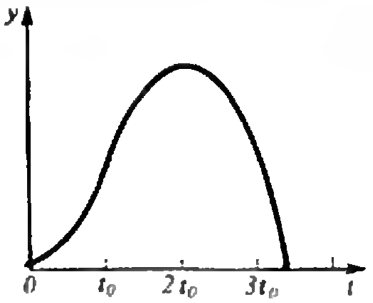


Рис. 11.

34. *Вектор момента импульса (углового момента)* Земли, обусловленный ее суточным вращением, направлен: a) по касательной к экватору на восток; b) по касательной к экватору на запад; c) точно на юг; d) точно на север; e) всегда к Солнцу.

35. Определите, где вес тела будет наименьшим: a) на экваторе; b) на Северном полюсе; c) в центре Земли; d) в 2000 милях над поверхностью Земли; e) вес тела везде одинаков.

36. Тело поднимают над поверхностью Земли на высоту, равную двум земным радиусам. Тогда: a) его масса уменьшится, а вес останется неизменным; b) масса уменьшится и вес уменьшится; c) масса останется прежней, а вес увеличится; d) масса и вес останутся прежними; e) никакой ответ не верен.

37. С искусственного спутника Земли сбрасывают бомбу. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, в какой точке бомба падает на Землю: a) под спутником в момент сбрасывания; b) под спутником в момент падения; c) впереди спутника, поскольку она набирает скорость при падении; d) позади спутника, поскольку она движется по криволинейной траектории; e) она никогда не упадет на Землю.

38. Астронавт в космическом корабле, вращающемся по орбите, находится в состоянии невесомости, потому что: a) находится вне пределов действия силы тяготения; b) его оттягивает наружу центробежная сила инерции; c) он не ускоряется; d) он пребывает в свободном падении по направлению к Земле;

е) ничего из перечисленного выше не верно.

39. Период обращения спутника вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен r, пропорционален: a) r^2; b) $r^{3/2}$; c) r; d) $r^{1/2}$; e) $r^{-1/2}$.

40. Кинетическая энергия вышеупомянутого спутника, деленная на его потенциальную энергию, равна: a) 1; b) 1/2; c) —1/2; d) —1; e) никакой ответ не верен.

Часть 2

(по 5 баллов за каждую задачу, всего — 20 баллов)

1. На рисунке 11 приведен график зависимости высоты ракеты y от времени. Ракетные двигатели включаются в момент $t=0$ и выключаются в момент $t=t_0$. Начертите графики зависимости скорости и ускорения ракеты от времени.

2. Два тела, массы которых M_1 и M_2, соединены легкой нитью, перекинутой через блок, вращающийся без трения (рис. 12). a) Нарисуйте силы, действующие на первое тело. b) Нарисуйте силы, действующие на второе тело. c) Напишите уравнения, которые связывают действующие на тела силы с их ускорениями. d) Решив эти уравнения, найдите общее ускорение тел.

3. На тело массой 5 кг, движущееся в положительном направлении оси X, начинает действовать сила, которая направлена в ту же сторону, а ее величина изменяется так, как показано на рисунке 13. a) Какую работу совершит эта сила, чтобы продвинуть тело из точки с координатой $x=0$ до точки с координатой $x=8$ м? b) Если в точке с координатой $x=0$ скорость тела была равна 4 м/с, то какой будет скорость в точке с координатой $x=8$ м?

4. Тело массой M, привязанное к концу невесомой нити, движется по окружности радиусом R по гладкому горизонтальному столу. Оно имеет момент импульса L_0 и кинетическую энергию K_0. Предположим, что мы будем медленно вытягивать нить через маленькое отверстие в центре стола до тех пор, пока радиус окружности не уменьшится до $R/2$. a) Если при $r=R/2$ момент импульса тела равен L, то чему равно отношение L/L_0? Объясните свой ответ. b) Если при $r=R/2$ кинетическая энергия тела равна K, то чему равно отношение K/K_0? Объясните свой ответ.

II ТУР

Часть 1

(всего — 50 баллов)

1. Два точечных заряда $+q$ и $+2q$ находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 14). Аккуратно отметьте на рисунке: a) несколько силовых линий электрического поля, необходимых для описания этого поля (10 б.); b) распределение зарядов на нейтральном алюминиевом стержне, удаленном от зарядов на расстояние $r \gg d$ (10 б.).

2. Конденсатор состоит из трех концентрических тонких сферических оболочек, радиусы которых равны $r_1=a$, $r_2=b$ и $r_3=c$ (рис. 15). Внутренняя оболочка несет положительный заряд $+Q$, а внешняя — равный по величине, но противоположный по знаку заряд $-Q$. Средняя оболочка не заряжена. a) Найдите напряженность электрического поля на расстоянии r от центра сфер для следующих случаев: $0<r<a$ (3 б.), $a<r<b$ (3 б.), $b<r<c$ (3 б.), $r>c$ (3 б.). b) Определите разность потенциалов между оболочками с радиусами a и c (8 б.). c) Получите выражение для емкости системы вложенных сфер (5 б.). d) Какой будет эта емкость, если пространство внутренней сферы заполнить жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε (5 б.)?

Часть 2

(всего — 50 баллов)

1. a) Покажите направление магнитного поля проводника с током I, выходящим по направлению к вам (рис. 16, *a*) (5 б.). b) Определите направление силы, действующей на проводник с током (рис. 16, *b*) (5 б.). c) Обведите кружком точку A или D (рис. 16, *c*), которая имеет более высокий потенциал электрического поля (5 б.). d) Укажите направление вращения

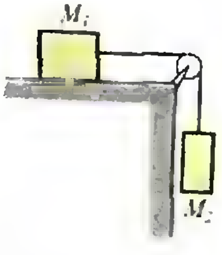


Рис. 12.

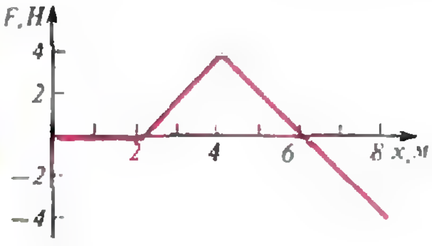


Рис. 13.

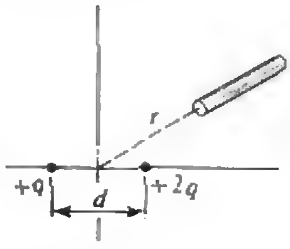


Рис. 14.

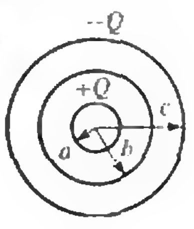


Рис. 15.

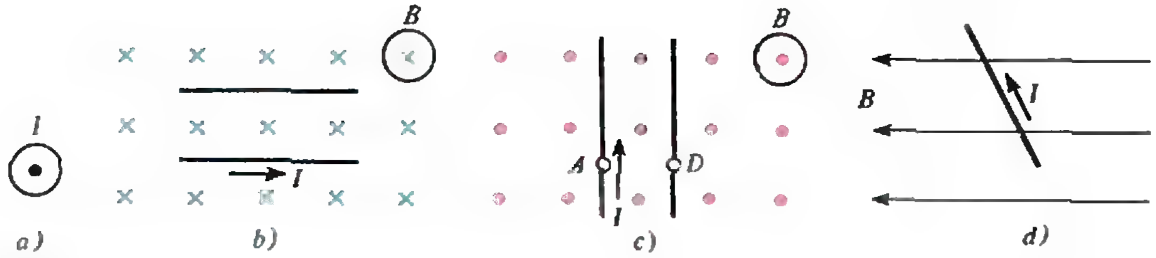


Рис. 16.

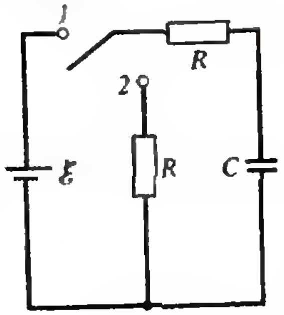


Рис. 17.

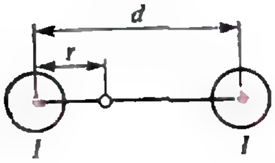


Рис. 18.

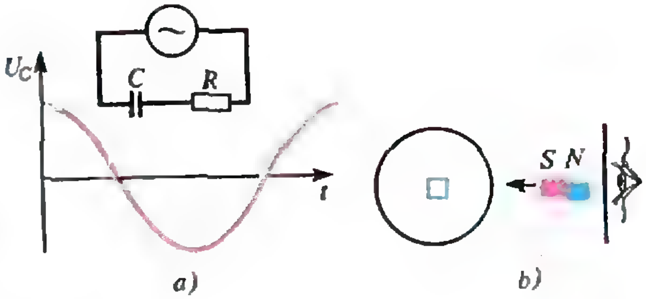


Рис. 19.

витка (на рис. 16. d изображен вид сверху) в магнитном поле, если по нему течет ток I (5 б.).

2. Резисторы сопротивлением $R=1000$ Ом, конденсатор емкостью $C=1$ мкФ и батарея с ЭДС $\mathscr{E}=1000$ В соединены так, как показано на рисунке 17. Сначала ключ долгое время находился в положении *1*, затем — долгое время в положении *2*. Найдите: a) заряд на конденсаторе (5 б.); b) ток в цепи (5 б.); c) общую энергию, выделившуюся в обоих резисторах за то время, пока переключатель находился в положении *2* (5 б.).

3. На рисунке 18 изображены два параллельных бесконечно длинных проводника, по которым течет одинаковый ток I (направленный на вас). Определите величину индукции магнитного поля в точке, находящейся на расстоянии r от левого проводника (15 б.).

Часть 3
(всего — 50 баллов)

1. a) На рисунке 19, *a* приведен график зависимости напряжения на конденсаторе C от времени. Начертите график зависимости напряжения на *резисторе R* (10 б.). b) Определите направление тока, индуцированного в витке движущимся магнитом (рис. 19, *b*) (10 б.).

2. a) В цепи, изображенной на рисунке *20, a*, в *некоторый* момент ключ замыкают. Найдите скорость нарастания тока в цепи в этот момент времени (10 б.). b) В некоторый момент ток в цепи (рис. 20, *b*) равен 1А, а заряд на конденсаторе равен 10^{-3} Кл. Найдите максимальную энергию, накопленную в катушке (10 б.) c) Конденсатор ($C=1$ мкФ), катушка и резистор ($R=400$ Ом) соединены с генератором переменного тока ($\mathscr{E}=250$ В, $\omega=2000$ с$^{-1}$) *так, как показано на рисунке* 20, *c*. При каком значении индуктивности катушки действующее значение тока в цепи будет максимальным (10 б.)?

Часть 4
(всего — 50 баллов)

1. Определите направление движения диамагнитного образца в момент включения тока в электромагните (рис. 21, *a*) (10 б.). b) Определите направление *индуцированного* магнитного поля при увеличении напряженности E электрического поля (рис. 21, *b*) (10 б.).

2. Конденсатор (рис. 22) состоит из двух *параллельных пластин* площадью S каждая, находящихся на расстоянии d друг от друга. При протекании по проводам тока i на пластинах возникает заряд q и напряжение между пластинами становится равным U. a) Используя теорему Остроградского — Гаусса, получите выражение для величины напряженности электрического поля в конденсаторе (15 б.). b) Исходя из выражения $i_{см}=\varepsilon_0\, d\Phi/dt$ для тока смещения, выведите зависимость между током смещения $i_{см}$ и током проводимости i (15 б.).

III ТУР

Часть 1

(по 10 баллов за решение каждой из выбранных вами четырех задач, всего — 40 баллов)

1. Параллельный пучок света, входящий в глаз человека, аккомодированного на бесконечность, создает на сетчатке действительное перевернутое изображение предмета. Фокусное расстояние глаза при этом равно 2,5 см. Для того чтобы можно было читать книгу, держа ее на расстоянии 30 см от глаза, фокусное расстояние глаза должно измениться так, чтобы изображение книги на сетчатке было четким. a) Найдите это фокусное расстояние. b) Увеличится или уменьшится при этом радиус кривизны глазной линзы? c) Человеку нужны очки только для чтения. Близорукий он или дальнозоркий? d) Какие линзы нужны для коррекции зрения человеку в случае c)? Нарисуйте соответствующий ход лучей.

2. Солнце движется по круговой орбите вокруг центра нашей галактики. Орбитальная скорость Солнца 220 км/с и радиус орбиты $R=2{,}7\cdot10^{20}$ м. a) Полагая, что масса галактики распределена сферически симметрично, оцените массу, заключенную внутри солнечной орбиты. Ответ выразите в солнечных массах ($2\cdot10^{30}$ кг). b) Если бы Солнце находилось вдвое дальше от центра галактики и вращалось с прежней скоростью, то какая масса была бы заключена внутри его орбиты с радиусом $2R$?

3. В результате ядерной реакции, происходящей на Солнце, 4 протона превращаются в ядро атома гелия ^{4}He. При этом выделяется некоторая энергия. Энергии покоя протона и ядра атома гелия равны соответственно 938 МэВ и 3727 МэВ. a) Какая энергия выделяется в результате реакции? b) Солнечный световой поток составляет $4\cdot10^{26}$ Вт. Сколько протонов в секунду при этом превращаются в ядра атомов гелия?

4. Электрическое поле, связанное с плоской электромагнитной волной, задается уравнениями: $E_x=0$, $E_y=0$, $E_z=2\cos\left(\frac{\pi}{3}10^7(x-ct)\right)$ (все величины заданы в единицах СИ). a) Найдите частоту колебаний. b) Найдите длину волны. c) Запишите уравнения для индукции магнитного поля (B_x, B_y и B_z). d) Определите средний поток энергии, проходящей перпендикулярно площадке размером 1 м^2.

5. Электроны, обладающие импульсом P, проходят через отверстие диаметром d и попадают на экран, находящийся на расстоянии l от отверстия. a) Какова длина волны электронов? b) Нарисуйте картинку распределения плотности электронов на экране как функцию расстояния от центра в плоскости экрана. c) Получите соотношение неопределенностей для расположения электрона внутри отвер-

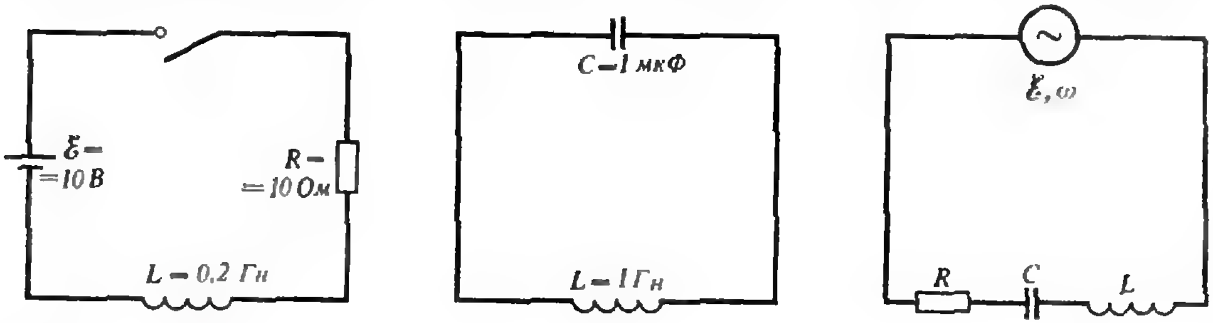


Рис. 20. a) b) c)

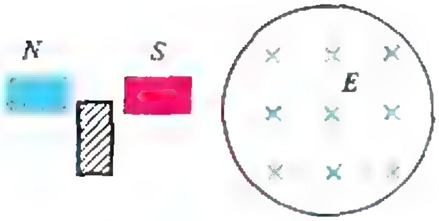


Рис. 21. a) b)

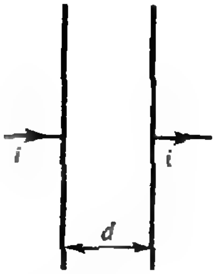


Рис. 22.

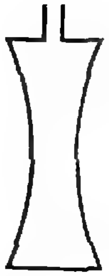


Рис. 23.

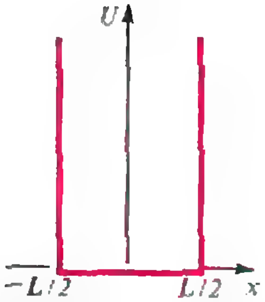


Рис. 24.

стия и его импульса в направлении, параллельном экрану.

Часть 2

(по 4 балла за каждый правильно выбранный ответ, всего — 60 баллов)

1. Струна длиной L, закрепленная на концах, не может колебаться с длиной волны: a) L; b) $2L$; c) $L/2$; d) $2/3\ L$; e) $4L$.

2. Волна в струне распространяется со скоростью 4,4 м/с; длина волны 2 м. Волна пересекает границу и распространяется в другой струне; частота и длина волны остаются прежними. При этом скорость волны во второй струне равна: a) 1,46 м/с; b) 2,2 м/с; c) 2,9 м/с; d) 4,4 м/с; e) 6,6 м/с.

3. Органная труба x, открытая с двух сторон, в 2 раза длиннее органной трубы y, которая с одного конца закрыта. Отношение основных частот колебаний воздуха в трубах x и y равно: a) 1:1; b) 1:2; c) 2:1; d) 1:4; e) 4:1.

4. Определите, какое сочетание l и m_l не разрешено для атома водорода в состоянии с $n=2$: a) 0, 0; b) 1, 0; c) 1, —1; d) 1, +1; e) 2, 2.

5. В кремниевой решетке надо заменить один атом кремния атомом другого элемента так, чтобы получить примесный полупроводник n-типа. Число валентных электронов примеси должно быть равно: a) 0; b) 1; c) 3; d) 4; e) 5.

6. Радиоактивный изотоп углерода ^{14}C имеет период полураспада 5730 лет. Углеродный анализ ископаемой птицы указывает, что 75 % исходного углерода в ее костях уже уничтожено. С момента смерти птицы прошло: a) 1433; b) 2865; c) 5730; d) 11,460; e) 22,920 лет.

7. Максимум теплового излучения при температуре 3К приходится на длину волны, равную: a) 1 м; b) 1 см; c) 1 мм; d) 1 мкм; e) 1 нм.

8. Если удвоить ширину одиночной щели, то интенсивность и размер центрального максимума изменятся так: a) интенсивность удвоится, ширина максимума не изменится; b) интенсивность удвоится, ширина максимума уменьшится вдвое; c) интенсивность увеличится в 4 раза, ширина уменьшится в 2 раза; d) интенсивность увеличится в 4 раза, ширина увеличится в 2 раза; e) интенсивность не изменится, ширина уменьшится в 2 раза.

9. Пустой прозрачный контейнер в форме тонкой линзы (рис. 23) может быть заполнен воздухом ($n=1$), водой ($n=1{,}3$) или дисульфидом углерода ($n=1{,}6$). Если пренебречь толщиной стенок контейнера, то он может отклонять параллельный пучок света при условии, что: a) он заполнен воздухом и погружен в воздух; b) он заполнен воздухом и погружен в воду; c) он заполнен водой и погружен в дисульфид углерода; d) он заполнен дисульфидом углерода и погружен в воду; e) он заполнен дисульфидом углерода и погружен в дисульфид углерода.

10. Космический мезон имеет период полураспада 2 мкс в состоянии покоя. Если он приближается к Земле со скоростью, равной 0,8 скорости света, его период полураспада, как было измерено наблюдателем с Земли, равен: a) 0,2 мкс; b) 0,87 мкс; c) 2 мкс; d) 4,6 мкс; e) 20 мкс.

11. При релятивистском движении полная энергия частицы равна удвоенной энергии покоя. Импульс такой частицы равен: a) mc; b) $1/2\ mc$; c) $\sqrt{2}\,mc$; d) $1/\sqrt{3}\,mc$; e) $\sqrt{3}\,mc$.

12. Величины импульсов в основном состоянии и в первом возбужденном состоянии частицы, движущейся в потенциальной яме (рис. 24), равны: a) h/L и $2h/L$; b) $h/2L$ и $2h/3L$; c) $h/2L$ и h/L; d) $2h/L$ и $4h/L$; e) $2h/L$ и $3h/L$.

13. Частица массой m движется в потенциальной яме длиной L, как в предыдущей задаче. Вероятность нахождения частицы в интервале от $x=0$ до $x=L/2$ в первом возбужденном состоянии, по сравнению с вероятностью ее нахождения в том же интервале в основном состоянии: a) меньше; b) такая же; c) больше.

14. Первичными кварками, образующими протон, являются: a) *udd*; b) *uds*; c) *uus*; d) *uud*; e) *usu*.

15. Электромагнитное поле можно рассматривать как результат симметрии уравнений физики при следующих преобразованиях волновой функции: a) перемещение; b) вращение; c) отражение; d) фаза; e) вертикаль.

Публикацию подготовили
М. Денисова, В. Тихомирова

Ответы, указания, решения

[redacted]ема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения

1. а) -1; б) $\sqrt{3}/8$; в) 3.

2. а) $\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$; б) $\frac{\pi}{3}k,\ \frac{\pi}{11}+\frac{2\pi}{11}k,\ k\in Z$; в) $\frac{\pi}{9}k,\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}k,\ k\in Z$.

[redacted]нение механической энергии

1. $l=h/\mu-b$.
2. $F_{\min}=\mu g(m_1+m_2/2)$.
3. $l=Mv^2/(2\mu(m+M)g)$.
4. $Q\approx 1/2m(v-v_0)^2=81$ Дж.
5. $Q=\rho gV(h_1+h_2)-\rho_ж gVh_2$.

[redacted]нградский государственный университет

[redacted]ематика

Вариант 1

1. $[-2;\ -1/2)\cup(1;\ 7]$.

2. $\frac{1}{2}(\pi(2k+1)\pm\sqrt{\pi^2(2k+1)^2-12},\quad k\in Z,\ k\neq 0,\ -1;\ \frac{1}{2}(\pi(2k+1)\pm\sqrt{\pi^2(2k+1)^2+12},\ k\in Z$.

3. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$.

4. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}-\sqrt{S})^2$.

Решение. Пусть $S_1=S_{PBL}$, $S_2=S_{QCK}$ (рис. 1). Тогда $\frac{\sqrt{S_{OKL}}}{\sqrt{S}}=\frac{KL}{BC}=\frac{BL+KC-BC}{BC}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}+\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}-1$, откуда и получаем ответ.

5. $2\sqrt{2}\pi\frac{\cos^2\alpha\sin(\alpha/2)}{(1+\sqrt{2}\sin(\alpha/2))^3}V$.

Вариант 2

1. $-\frac{5}{2}\pm\sqrt{7},\ -\frac{5}{2}\pm\sqrt{7},\ -\frac{5}{2}\pm\sqrt{7};\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{4};\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{8},\ -\frac{3}{4}$.

2. $\left(-\frac{9}{2};\ -\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$.

3. $\pi k,\ \pi/12+\pi k/3,\ k\in Z$.

4. $\left(\ln\left(2\cos\frac{\pi}{18}\right)+1;\ +\infty\right)$.

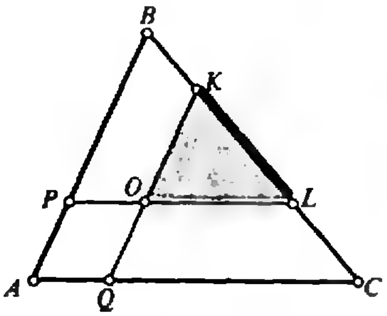


Рис. 1.

Решение. Положив $e^{x-1}=2y$, запишем неравенство в виде $f(y)>0$, где $f(y)=4y^3-3y-\sqrt{3}/2$. Решаем уравнение $f(y)=0$ заменой $y=\cos\varphi$, получим $\cos 3\varphi-\cos\frac{\pi}{6}=0$, откуда $3\varphi=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, что при $k=0,\ 1,\ 2$ дает нам три различных значения для $y=\cos\varphi$: $\cos\frac{\pi}{18},\ \cos\frac{13\pi}{18},\ \cos\frac{25\pi}{18}$, т. е. все корни кубического уравнения. Поскольку $y=\frac{1}{2}e^{x-1}$ всегда положительно, заключаем, что выражение $e^{3(x-1)}-3e^{x-1}-\sqrt{3}$ меняет знак лишь при $e^{x-1}=2\cos\frac{\pi}{18}$. Из неравенства $e^{x-1}>2\cos\frac{\pi}{18}$ получаем ответ.

5. $2\operatorname{arctg}\sqrt{3}/a$.

[redacted]нградский государственный технический [redacted]ерситет

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{123}{845}$. 2. $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,\quad \frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$.

3. $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. 4. -6. 5. 0,125 и 0,25. **Указание.** Чтобы не упустить второй случай, полезно нарисовать окружности разным цветом.

Вариант 2

1. $\frac{b(a+b)}{ab+b+1}$.

2. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\ k\neq 0$. **Указание.** Решите сначала неравенство.

3. $(-\infty;\ 1]\cup[1{,}5;\ +\infty)$. 4. 87450. 5. $12\sqrt{3}$.

Указание. Возможны 2 случая: M — внутри угла и M — вне угла. В каждом из этих случаев обозначьте через x и y длины отрезков, отсекаемых на сторонах угла прямой, проходящей через точку M, и составьте систему двух уравнений с неизвестными x и y.

Вариант 3

1. $a<-3,\ a\neq -9$. 2. 2; 2^{-10}. 3. $y=-7x-11\pi/3$. 4. $1\leqslant a\leqslant 5$. 5. $14/\sqrt{3}$. **Указание.** Возможны три случая расположения точки M: внутри треугольника; вне треугольника, но внутри какого-то угла треугольника; внутри одного из трех углов, вертикальных по отношению к внутренним углам треугольника. Из этих случаев выберите нужный.

Вариант 4

1. $-\frac{5\pi}{4}$. 2. $(4;\ 5)\cup(5;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$.

3. $a\leqslant 1,\ a=5;\ x=2$.

4. $(2;\ 1),\ (2/3;\ 4/3)$. **Указание.** Вычесть из второго уравнения первое, домноженное на $3/2$.

5. $\sqrt{2}/3,\ \sqrt{3}/2$. **Указание.** Введите в качестве неизвестной x расстояние от точки D до точки касания окружностей между собой.

Физика

1. $t=(t_2^2+2t_1t_2-t_1^2)/(2(t_1-t_2))$.
2. $F_н=4\pi^2n^2ml=555$ Н.
3. $\alpha=\operatorname{arctg}(1/3)$.
4. $h=l(1-\rho_0/\rho)=1{,}74$ см (здесь ρ_0 — плотность воды).
5. $T=2\pi\sqrt{m/(2\rho gS)}=1{,}54$ с.
6. $Q=5/2\,(p_2-p_1)V_1$.
7. $Q=2\pi\sigma^2/(\rho g)$ (где ρ — плотность воды).
8. $F_р=Qq/(8\pi^2\varepsilon_0R^2)$.
9. $I_{к.\,з.}=IU(R_2-R_1)/((U-IR_1)R_2)=29{,}6$ А.
10. $x=LF/(L-F(1-d/D))=15{,}8$ см или $x'=LF/(L-F(1+d/D))=20$ см.

инградский государственный гогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. Между числами 6 и 7.
2. Данное уравнение корней *не имеет*.
3. Первое число больше.
4. $(-\infty;\ -1)\cup(4;\ +\infty)$.
5. $(7;\ 49)$. 6. $(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.
7. 2/5 ч. 8. 25π. 9. $\arccos\operatorname{tg}(\alpha/2)$.
10. $9\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. Между числами 2 и 3.
2. 1, 2, $(-1\pm\sqrt{17})/2$.
3. $\operatorname{tg}2\cdot\operatorname{tg}3\cdot\operatorname{tg}4>0$.
4. $y=\sin x$ при $2\pi k<x<(2k+1)\pi$.
5. $(\log_2(4/5);\ \log_2(5/4))$.
6. $1/9;\ 1/\sqrt{3}$.
7. 5m. 8. 80/5. Указание. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, образованного основанием, боковой стороной и диагональю трапеции, по формуле $R=abc/4S$.
9. 180°. 10. 45.

инградский электротехнический институт В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $-2;\ 2$. б) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)$.
в) 3 корня, если $|a|<1/\sqrt{6}$; 1 корень, если $|a|\geqslant1/\sqrt{6}$.
2. б) $\pi/6$. в) $\pi/3$. Указание. Сделайте замену $t=\sin^2 u$ и исследуйте функцию $f(t)=4(t^3-t^4)$ на отрезке $[0;\ 1]$.
3. а) $\log_2 3$. б) 486. в) $[2;\ +\infty)$.
г) $[-4;\ +\infty)$. Указание. В пунктах а), в), г) сделайте замену $z=2^x$.

Вариант 2

1. а) $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};\ \sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$. б) $-2;\ 2$. в) $(-\sqrt{2};\ -1]\cup[1;\ \sqrt{2})$. г) 3 корня $(0$ и $\pm\sqrt{1+\sqrt{5}})$.
2. а) $\sqrt{a^2-\sqrt{2}a+1}$. б) $\sqrt{2}/4;\ 3\sqrt{2}/4$. в) $\sqrt{2}/2$. Указание. Найдите наименьшее значение величины $L^2(a)$.
3. а) 64. б) $\log_3 2$. Указание. Сделайте замену $z=3^x$. Тогда $f(x)=27(z+1)^3$. в) 1 корень. Указание. Докажите, что функция $h(z)=27(z+1)^3-\dfrac{1}{z}$ возрастает при $z>0$ и может принимать значения разных знаков. Следовательно, уравнение $27(z+1)^3=\dfrac{1}{z}$ имеет 1 корень.

Физика

Вариант 1

1. а) $a_{\text{г max}}=\mu(g-v^2/R)\approx2{,}8$ м/с². б) Полное ускорение составляет с горизонтом угол $\alpha=\operatorname{arcctg}\mu(gR/v^2-1)\approx60°$.
2. а) В сосуде будет смесь льда массой $m_л=0{,}3$ кг и воды массой $m_в=0{,}4$ кг при температуре $t=0$ °C. б) Во втором случае время установления термодинамического равновесия будет меньше.
3. а) $P_1=1{,}25$ Вт, $P_2=0{,}83$ Вт, $P_3=3$ Вт. б) Напряжение возрастет.
4. а) $A=BIla\sin\alpha=0{,}3$ Дж. б) Работа будет равна нулю.
5. а) См. рис. 2. б) *При* движении точки от двойного фокусного расстояния к фокусу ее действительное изображение удаляется от двойного фокусного расстояния (за линзой) к «плюс» бесконечности, а при движении точки от фокуса до линзы ее мнимое изображение приближается из «минус» бесконечности к линзе.

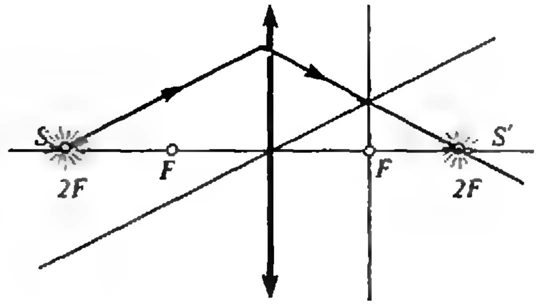


Рис. 2.

Вариант 2

1. а) $E_{k1}=E_k(m_1+m_2)/m_1=7{,}5$ Дж. б) На увеличение внутренней энергии системы.
2. а) $t_{уст}=(Q/m-(c_л(t_0-t)+\lambda))/c_в=30$ °C.
б) Могут при температуре $t_0=0$ °C.
3. а) $I_{к.\,з.}=IU(R_V-R_A)/((U-IR_A)R_V)=26$ А.
б) $R\ll r=30/63$ Ом.
4. а) Электрон должен лететь со скоростью $v=E/B=5\cdot10^5$ м/с перпендикулярно и электрическому и магнитному полям. б) Может, если $\vec{v}\parallel\vec{E}$ или $\vec{v}\parallel\vec{B}$.
5. а) $d_в=d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}/(n\cos\alpha)=15{,}2$ см. б) Будет.

ант» для младших школьников «Квант» № 3)

1. Заметим, что площади луночки и криволинейного треугольника (рис. 3) равны. Действительно, площадь маленького круга в 4 раза меньше площади большого, отсюда площадь четырех маленьких кругов равна площади

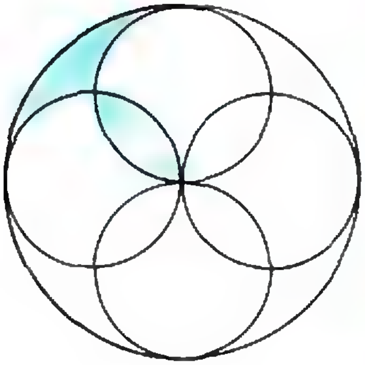


Рис. 3.

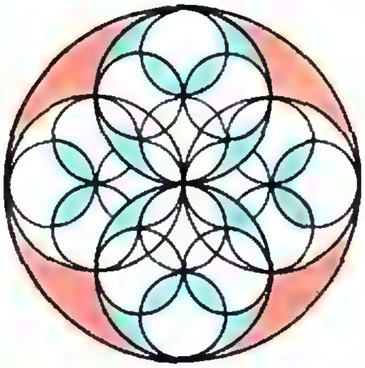


Рис. 4.

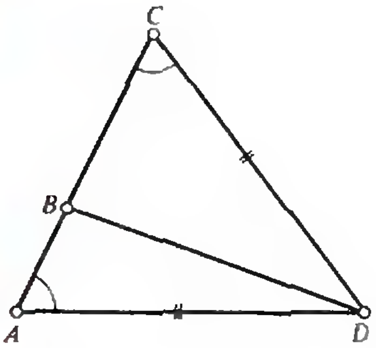


Рис. 5.

большого круга; при этом четыре луночки покрываются дважды, а четыре треугольника не покрываются ни разу. Отсюда вытекает равенство площадей луночки и треугольника. Красный треугольник подобен синему, площадь красного треугольника в 4 раза больше площади синего треугольника, но, так как синих фигур на рисунке 4 в 4 раза больше, чем красных, их площади равны.

2. Из первого условия следует, что Арамис занял 4 место, из второго — что Портос занял 2 место, а из последнего условия следует, что д'Артаньян был первым, а Атос — третьим.

3. Заметим, что, с одной стороны, Д$\leqslant$3, а с другой стороны, Д — четно, отсюда Д$=$2. Тогда Р равно 8 или 3, но Р не может равняться 8. При Р$=$3 получаем И$=$8, Б$=$6 и Ö$=$7.

4. Коля, Саша и Антон купили 5 тетрадей, 10 карандашей и 5 резинок, что в 5 раз больше того, что купил Саша. Следовательно, за все было заплачено $12\cdot5=60$ копеек. Саша с Колей заплатили 39 копеек, а Антон заплатил $60-39=21$ копейку.

5. Разрежем четырехугольник по диагонали BD и, перевернув треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD (рис. 5). Получился равнобедренный треугольник ACD ($AD=DC$), поэтому $\angle A=\angle C$.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Во втором случае меньше — даже при наличии трения.

2. 150 Дж. Работа силы не зависит от массы того тела, на которое действует данная сила.

3. Двигаясь, пассажир совершит некоторую работу по своему подъему и раньше достигнет верха эскалатора. Следовательно, двигатели эскалатора произведут меньшую работу при подъеме движущегося пассажира, чем при подъеме неподвижно стоящего.

4. Величины работы пропорциональны пройденным путям, поэтому работы за равные промежутки времени различны.

5. Потянув цепочку за среднее звено, ее можно привести в такое же положение, которое занимают стержни. При этом будет совершена работа, за счет которой центр тяжести цепочки поднимется. Значит, он лежит ниже, чем центр тяжести стержней.

6. Максимальной скорость планеты будет при наибольшем сближении с Солнцем (перигелий), минимальной — при наибольшем удалении (афелий).

7. Однородное.

8. Да. У первого маятника период колебаний зависит от напряженности электрического поля и массы, у второго период такой же, как и в отсутствие зарядов.

9. Да, несмотря на то, что на различных участках поверхности шара B будут находиться разноименные заряды.

10. Это утверждение было бы верным лишь для неограниченной в пространстве заряженной плоскости.

11. При удалении стекла приходится совершать работу против сил кулоновского притяжения разноименных зарядов. Эта работа идет на увеличение энергии конденсатора.

12. Направление силы Лоренца перпендикулярно скорости движения заряда.

13. В первом случае работа больше.

14. При питании электромагнита постоянным током энергия расходуется на нагрев проводника.

Микроопыт

Если магнитное поле достаточно велико, чтобы втащить шарик на наклонную плоскость, то оно будет и достаточно сильным, чтобы не дать шарику скатиться вниз по желобу.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 1)

13. Пусть в корзине было n яблок, тогда первый внук получил $1+\frac{n-1}{10}=\frac{n+9}{10}$ яблок. Остается $n-\frac{n+9}{10}=\frac{9n-9}{10}$ яблок. Второй внук в таком случае получит $2+\frac{1}{10}\left(\frac{9n-9}{10}-2\right)=\frac{171-9n}{200}$ яблок Так как все внуки получили одинаковое число яблок, то $\frac{n+9}{10}=\frac{171+9n}{100}$, откуда $n=$

$=81$. Первый внук получит $\dfrac{81+9}{10}=9$ яблок, по сколько же остальные, поэтому у бабушки было $81:9=9$ внуков.

14. Чтобы получить «счастливый» номер с возрастающими цифрами, достаточно выбрать любые пять цифр из девяти (от 1 до 9) и расположить их в порядке возрастания. Будем выбирать цифры по очереди. Тогда первую можно выбрать 9-ю способами, вторую — 8-ю оставшимися, третью, четвертую и пятую — 7-ю, 6-ю и 5-ю способами соответственно, а всего получается $9\cdot 8\cdot 7\cdot 5$ способов выбора пяти цифр. Однако после упорядочения по возрастанию разные наборы цифр дадут одинаковые «счастливые» номера. Число наборов, дающих один и тот же «счастливый» номер, равно числу всех перестановок 5-ти цифр и подсчитывается, как и выше: на первом месте в перестановке может оказаться любая из 5-ти цифр, на втором — любая из остальных 4-х и т. д.; всего получается $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ перестановок и, значит, $(9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5):(5\cdot 4\times$ $\times 3\cdot 2\cdot 1)=126$ «счастливых» номеров (с возрастающими цифрами). Аналогично подсчитываются «счастливые» номера с убывающими цифрами, только теперь нужно выбирать 5 цифр из 10-ти (от 0 до 9) и располагать их по убыванию. Получим $(10\cdot 9\times$ $\times 8\cdot 7\cdot 6)/(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)=2\cdot 126=252$ номера. Общий ответ: $126+252=378$.

15. Сначала проверим, что при $n=1$ условие выполняется: $x_1-1\cdot x_1=0$, если $x_1=0$. При $n=2$ $x_1+x_2=0$ и должно выполняться условие $x_1^2+x_2^2-2x_1x_2=0=(x_1-x_2)^2$, но для $x_1=1$, $x_2=-1$ первое условие выполняется, а второе — нет. При $n=3$ $x_1=-(x_2+x_3)$ и

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=$$
$$=-(x_2+x_3)^3+x_2^3+x_3^3+3(x_2+x_3)x_2x_3=0.$$

Итак, при $n=1$ и $n=3$ условие задачи выполняется, а при $n=2$ — нет. Покажем, что для остальных n условие не выполняется. Так как n больше 3, то положим $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, а остальные равными 0. Первое условие для них выполняется, а второе запишется так: для четных n $2^n+1^n+1^n=2^n+2>0$, а для нечетных n в виде $2^n-1^n-1^n=2^n-$ $-2>0$ при $n>3$. Таким образом, получаем ответ: $n=1$ и $n=3$.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили
А. Виленкин, Л. Винюкова, М. Денисова,
А. Егоров, Л. Кардасевич, Т. Петрова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов,
С. Лухин, Э. Назаров, Л. Тишков,
П Чернуский, В. Юдин

В статье «25 из 30» использованы фотографии
А. Валендина, А. Соловьева, В. Титова, А. Викторенко,
Ю. Романенко, Ж. Кретьена, О. Синицы

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией С. Давыдова
Корректор В. Сорокина

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.01.91. Подписано к печати 11.03.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09 Уч.-изд л. 8,22.
Тираж 94 084 экз. Заказ 137 Цена 70 коп

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

«МЕФИСТО» В УДАРЕ

В прошлый раз мы рассказывали о компьютерной олимпиаде, в которой участвовали многократные чемпионы мира среди микрокомпьютеров «Фиделити» и «Мефисто». Одна из интереснейших партий на олимпиаде была сыграна между этими машинами.

«Фиделити» — «Мефисто»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. Кd2 de 4. К:e4 Сf5 5. Кg3 Сg6 6. h4 h6 7. h5 Сh7 8. Кf3 Кd7 9. Сd3 С:d3 10. Ф:d3 Фc7 11. Сd2 e6 12. Фe2 Кgf6 13. 0—0—0 c5 14. c4 0—0—0 15. Кe5 Кb6. Продолжение 15...К:e5 16. de Кd7 17. f4 дает белым преимущество в пространстве, и черные предпочитают сохранить напряжение в центре. **16. Сf4 Сd6** (парируя угрозу Кg6) **17. Крb1 Кbd7.** Конь возвращается на это поле, чтобы оказать давление на аванпост белых e5. **18. К:d7 Л:d7 19. С:d6 Л:d6 20. dc Ф:c5 21. Л:d6 Ф:d6 22. Лd1 Фc6 23. f4 Лd8 24. Л:d8+ Кр:d8 25. b3 Фc5.**

Позиция выглядит ничейной, но, как это часто бывает в защите Каро-Канн, массовые упрощения пошли на пользу черным. Их король в большей безопасности, а пешки белых разрознены. В чем же тогда состояла ошибка белых? Возможно, ходы 14. c4 и 15. Кe5 не очень согласуются друг с другом.

26. Фf3 Крc8 27. Крb2 Крb8 28. Крb1 Фg1+ 29. Крc2? Точнее 29. Крb2, не пуская черного ферзя на a1. **29...Фa1 30. a4 Фa2+ 31. Крc3 Фb1 32. Фe3 b6 33. Фe5+ Крb7 34. Фe3 Крa6 35. Крb4 Фc2.**

На 36. Фf3, защищая пешку g2, следует 36...Кd5+!· ! 37. cd Фc5× или 37. Крa3 Фc1+ 38. Крa2 Кb4×. Чтобы не попасть в эту мефистофелевскую ловушку, белые вынуждены расстаться с пешкой.

36. Фe2. На сей раз 36... Кd5+ не проходит из-за вскрытого шаха 37. cd+. **36...Ф:e2 37. К:e2 К:h5 38. Крc3 Крa5?** Нелепый ход, непростительный даже для компьютера. Направляя короля в центр — Крb7, черные легко выигрывали это окончание. **39. Кd4!** Блестящий шанс белых: таким способом они используют оказавшееся вдруг опасным положение черного короля и активизируют коня.

39...К:f4 40. Кc6+ Крa6 41. Кd8 f5 42. b4 b5. Наступила катастрофа. Из-за немыслимого 38-го хода черных белые угрожали 43. b5+ Крa5 44. Крb3 с неизбежным матом. Сейчас ничью делало 42... Кe2+, но, чтобы играть на выигрыш, надо поступиться одной пешкой. **43. cb+ Крb6 44. Крc4 Крc7 45. Кc6 К:g2.** После 45...Крb6 46. a5+ или 45...Крb7 46. Кd8+ даже машинам трудно подсчитать результат гонки проходных пешек на противоположных флангах. **46. К:a7 f4 47. Кc6 Крd6** (не допуская Крc5 и b6+) **48. Крd3 Кe3.** Конь бежит назад, чтобы сдержать пешки белых на ферзевом фланге.

49. a5 Кd5 50. a6 g5. Заслуживало внимания 50... h5 — эта пешка дальше от короля белых. **51. a7 Кb6 52. Кa5 Крc7** (грозило 53. Кc4+) **53. Кc4 Кa8 54. b6+ Крb7 55. Крe4 h5.** Король и конь черных заняли самые неудобные поля, и белые могут беспрепятственно уничтожить казавшуюся ранее столь сильной армию черных пешек королевского фланга. **56. Кd6+ Кр:b6 57. Кf7 g4 58. Кр:f4 Кр:a7 59. Кg5 Кc7 60. Кe4 Кd5+ 61. Крg5 e5.** Если теперь 62. Кр:h5, то 62...Кf6+!! 63. К:f6 g3, и черная пешка проходит в ферзи.

62. Крh4 Кf4 63. Кd2 Крa6 64. Кc4 e4 65. b5+ Крa7 66. Кe3 Крb6 67. Крg5. Маневр белого коня вызвал перемещение черной пешки с e5 на e4 и подорвал защиту черного коня. Это спасает белых. **67... Кe2 68. Кр:h5 g3 69. Крg5 Кр:b5 70. Крf5 Кc3 71. Крf4 Крc5 72. Крe5 Крb4 73. Крf4 g2 74. К:g2 Крc4.** Ничья. Грандиозная баталия, хотя и полная ошибок.

Более десяти лет существует в «Кванте» «Шахматная страничка», информирующая читателей обо всех новостях компьютерных шахмат. И все эти годы ее ведущий мечтал сыграть в одном турнире с шахматным роботом. Наконец мечта сбылась на традиционном турнире «Берлинское лето» — 90. Игра шестикратного чемпиона мира среди микрокомпьютеров «Мефисто» вызывала у меня особый интерес. Увы, турнир проходил по швейцарской системе и жребий не свел нас вместе. Несмотря на блестящий старт — 3 очка из трех, машина в дальнейшем не выдержала взятого темпа (плохая физическая подготовка!) и даже отстала от ведущего страничку на пол-очка.

Сенсационно закончилась встреча в шестом туре, когда между собой сразились два земляка из Мюнхена: известный гроссмейстер С. Киндерманн и чемпион мира «Мефисто».

«Мефисто» — С. Киндерманн
Староиндийская защита

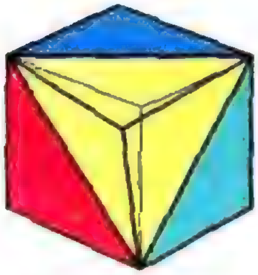
1. d4 Кf6 2. c4 g6 3. Кc3 Сg7 4. e4 d6 5. f3 0—0 6. Сe3 e5 7. Кge2 c6 8. d5 cd 9. cd a6 10. Кg3 Кe8 11. Сe2 f5 12. ef gf 13. f4 Кd7 14. Кh5 Сh8 15. fe К:e5 16. g3 b5 17. Сh6 Лf7 18. 0—0 Фb6+ 19. Крh1 Сb7 20. Фd2 Фd8 21. Лad1 Лc8 22. Крg1 Кc4 23. С:c4 Л:c4 24. Лf3 Сe5 25. Лdf1 Сc8 26. b3 Лd4 27. Фc2 b4 28. Кe2 Л:d5 29. Фc4 Лc5 30. Ф:b4 Лc2 31. Л3f2 Фc7 32. Кd4 Л:f2 33. Л:f2 Фc5 34. Ф:c5 dc 35. Кc2 Кd6 36. Лd2 Сb7 37. Сf4 С:f4 38. К:f4 Кe4 39. Лd8+ Лf8 40. Лd7 Лf7 41. Лd1 Сc8 42. Кe3 Лd7 43. Кfd5 Лf7 44. Лc1 Сb7 45. Кf4 Лd7 46. К:f5 Лd2 47. Кe6 Крf7 48. К:c5 К:c5 49. Л:c5 Крf6 50. Лa5 Лg2+ 51. Крf1 Л:h2 52. Кd6 Сf3 53. Лf5+ Крe6 54. Л:f3 Кр:d6 55. Лf6+ Крe5 56. Л:a6 Крe4 57. a4 Крf3 58. Крe1 Кр:g3 59. b4 h5 60. b5 h4 61. Лg6+ Крf3 62. Лh6 Крe3 63. Крf1 h3 64. Крg1 Лg2+ 65. Крh1 Крf2 66. b6 Лg4 67. a5 Лg2 68. b7. Черные сдались. Во всех трех стадиях игры машина проявила себя вполне достойно.

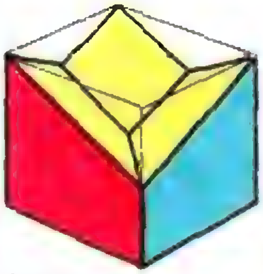
Е. Гик

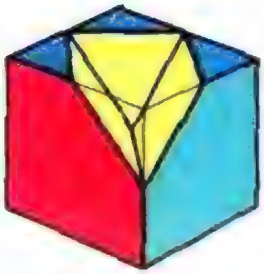
Цена 70 коп.
Индекс 70465

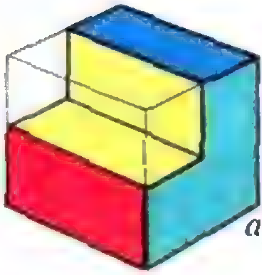
Каждая из изображенных здесь фигурок — это объединение двух или трех половинок куба (т. е. частей куба, получаемых при его разрезании плоскостью, проходящей через центр). Верхние три фигуры — это ответы к задачам из прошлого номера, в которых требовалось найти объединение данных половинок. Попробуйте решить задачи обратного типа: определите, объединением каких половинок куба являются фигурки а) — ж) (все использованные половинки показаны на обложке прошлого номера).

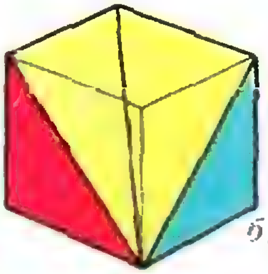
В. Канев

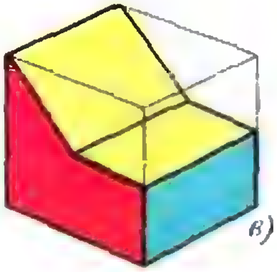

$4\cup5\cup6$

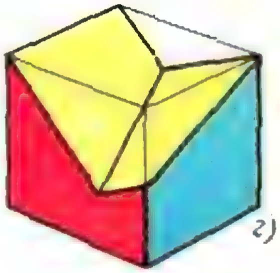

$7\cup8\cup9$

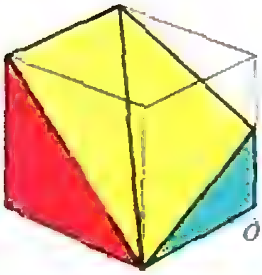

$10\cup11\cup12$

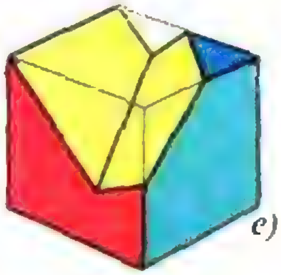

а)

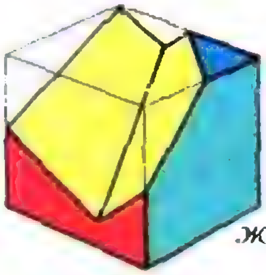

б)

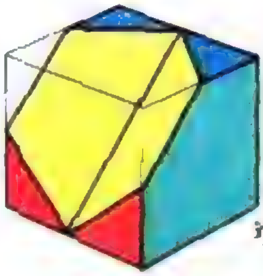

в)

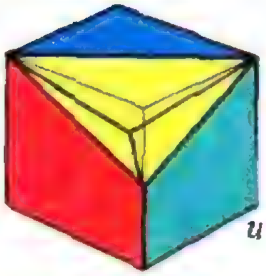

г)

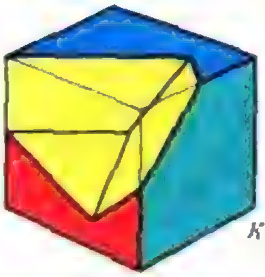

д)

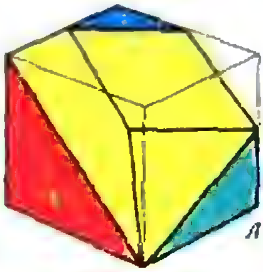

е)

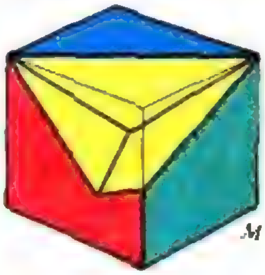

ж)


з)


и)


к)


л)


м)

НОМЕР
5

Квант
5 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Сахаров.* Существует ли элементарная длина?
11 Из «любительских задач» А. Д. Сахарова
13 *И. Депман.* Совершенные числа
18 *А. Духовнер, А. Решетов, Л. Решетов.* Об интерференции, дельфинах и летучих мышах

Задачник «Кванта»

23 Победители конкурса «Задачник «Кванта»
24 Задачи М1281—М1285, Ф1288—Ф1292
25 Решения задач М1256, М1257, М1259, М1260, Ф1268—Ф1272

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *Дж. Уокер.* Как кипит вода?

* * *

36 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»

Физика 9, 10, 11:

37 Работа сил трения
39 Сила Ампера в однородном магнитном поле
43 «Недостающие» элементы
46 Избранные школьные задачи по физике
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

47 *И. Шарыгин.* Чертеж в стереометрических задачах

Фантастика

52 *Г. Бир.* Музыка, звучащая в крови

Информация

58 Москва — Сеул
59 ЗИФМШ объявляет прием

Наша анкета

61 Мы спрашиваем — нам отвечают

Практикум абитуриента

62 А. Ярский. От уравнения — к системе
65 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**
74 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут (*60*)
Реклама (*73*)

Наша обложка

1, 2 *Фигура, внутри которой может поворачиваться правильный треугольник, оставаясь вписанным в нее, и литография известного голландского графика М. Эшера (1898—1971) иллюстрируют наш «Калейдоскоп».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Игра «танграм».*

© «Квант», 1991

К 70-летию со дня рождения
А. Д. Сахарова

Предлагаем вашему вниманию одну из научно-популярных статей академика А. Д. Сахарова. Она написана в 1968 году по просьбе редакции журнала «Физика в школе». Статья перепечатывается с небольшими сокращениями. Прокомментировать статью с сегодняшних позиций мы попросили члена-корреспондента АН СССР Д. А. Киржница. Публикацию подготовила Н. Морозова. Фото В. Егудина.

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДЛИНА?

А. САХАРОВ

От физики элементарных частиц ученые во всем мире ждут очень важных результатов практического и общефилософского значения, быть может, даже уточнения основных понятий о пространстве, времени и причинности. Таких изменений основных принципов нет оснований ожидать во всех остальных отраслях физики, в которых атомные частицы (электроны, фотоны, ядра) можно рассматривать как заданные. В биофизике, физике молекул и кристаллов, оптике и в большинстве других отраслей физики основные принципы квантовой механики, статистической физики и теории относительности дают твердую надежно проверенную базу для теоретического описания и объяснения наблюдаемых явлений, для новых предсказаний, открытий и практических применений (подобных транзистору, лазеру, электролюминесценции, парамагнитному резонансу, эффекту Мёссбауэра, голографии и т. д.). И мы уверены, что любое явление в этих отраслях может получить исчерпывающее описание на основе известных принципов, быть может, правда, с привлечением более мощных математических средств и новых экспериментальных данных (как это имеет место, например, в последние годы для явлений сверхтекучести и сверхпроводимости).

Но как только физики пытаются объяснить природу массы, заряда и другие свойства самих элементарных частиц, их взаимопревращения и взаимодействия, возникает впечатление, что в этой области физики известных сейчас основных принципов недостаточно. Экспериментальные исследования с помощью ускорителей элементарных частиц и с использованием «природных ускорителей» — космических лучей — непрерывно преподносят неожиданности. Только за последние 10 лет открыты десятки новых элементарных частиц с очень причудливыми свойствами, в том числе установлено существование двух «сортов» нейтрино («электронной породы» и «мюонной породы»), а также открыты нарушения симметрии законов природы при зеркальном отражении, при превращении частиц в античастицы и при обращении направлений течения физических процессов.

Последнее нарушение симметрии особенно удивительно; оно до сих пор не имеет даже феноменологического описания.

Автор только с некоторой натяжкой может считать себя специалистом по физике элементарных частиц. Тем не менее он отваживается здесь на обсуждение одной из основных проблем в этой области — так называемой проблемы элементарной длины. Речь идет о предполагаемом существовании принципиальной границы применимости основных идей современной науки о пространстве и причинности (т. е. теории относительности и квантовой теории), о необходимости описывать «мелкомасштабные» явления, лежащие за этой гранью, с помощью каких-то новых, еще более абстрактных и глубоких физических идей и математических методов.

В этой статье не будет рассказа о каких-либо новых удивительных открытиях. Основное утверждение, содержащееся в статье, носит в основном негативный характер. Тем не менее автору представляется, что в вопросе о принципиальных основах науки (причем таких незыблемых до сих пор, как понятие длины и интервала времени) любое продвижение вперед и любое уточнение нюансов должно представить интерес не только для специалистов. Поэтому, несмотря на неясность ситуации, автор решил в этой статье рассказать о мучительной драме идей в одном из уголков современной теоретической физики так, как она ему представляется.

Еще до создания квантовой теории, при попытке описания электрона как точечной частицы возникла трудность при вычислении электростатической энергии точечного электрона. Напомню, что электростатическая энергия заряженного с поверхности шарика равна $W=e^2/2r$, где e — заряд, а r — радиус. Вообще же при произвольном распределении плотности заряда по радиусу имеем W порядка e^2/r. Для точечного электрона $r \to 0$ и $W \to \infty$. По соотношению Эйнштейна, энергии W сопоставляется масса покоя $m = W/c^2$, т. е. масса точечного электрона должна быть бесконечна. Если положить $m=e^2/rc^2$ и подставить в качестве m наблюдаемую на опыте массу электрона, то найдем $r=2{,}8 \times 10^{-13}$ см. Так определенная величина r называется «классическим радиусом электрона».

С возникновением квантовой теории положение осложнилось еще больше. С одной стороны, формулы для электромагнитной энергии электрона при учете квантовой теории изменяются и приводят к гораздо меньшим численным значениям ее при тех же значениях r. По-прежнему остается трудность $W \to \infty$ при $r \to 0$, но W пропорционально не r^{-1}, а $\ln(r^{-1})$. С другой стороны, принципиальные трудности рассмотрения электрона как точечной частицы распространяются на другие основные вычисляемые в теории величины — на силу взаимодействия частиц, на вероятность процессов рассеяния и распадов и т. п. Вместе с тем понятие неточечной частицы очень трудно согласовать с принципами теории относительности — ведь по твердому телу протяженной частицы мы смогли бы передавать сигнал со скоростью, большей скорости света.

Возникло предположение, что квантовая теория элементарных частиц логически и математически не полна. Особенно ясно сформулировал (в 30-х годах) это предположение один из создателей квантовой механики выдающийся немецкий физик-теоретик Вернер Гейзенберг. Ход его мысли сводился к следующему. Трудности теории элементарных частиц, по его мнению, носят глубоко принципиальный характер, столь же затрагивающие основные принципы, как трудности теории электромагнитных явлений в движущихся телах до создания теории относительности и как трудности теории атомных явлений до создания квантовой теории.

Трудности электродинамики не могли быть преодолены без пересмотра и уточнения такого казавшегося самоочевидным понятия, как одновременность. Новые формулы теории относительности — это уже вторичный продукт такого гносеологического пересмотра понятий. Трудности «корпускулярно-волнового дуализма» потребовали еще более глубоких идей — принципа дополнительности, статистической интерпретации волновой функции. По Гейзенбергу, трудности рассмотрения элементарных частиц как точечных, а также отсутствие в современной теории каких-либо критериев, определяющих численную величину масс и зарядов элементарных частиц,— это все симптомы неполноты и неточности самих понятий о пространстве, времени и причинности для «мелкомасштабных» явлений.

Гейзенберг обращает внимание на то, что теория относительности Эйнштейна отличается от представлений Галилея — Ньютона о пространстве — времени тем, что в ней введена абсолютная единица скорости, являющаяся в теории Эйнштейна максимальной скоростью распространения взаимодействий и численно равная скорости света в вакууме ($c = 3 \times 10^{10}$ см/с). При скоростях, много меньших c, доэнштейновские представления правильно отображают действительность. Аналогично грань между квантовой и классической (в смысле «неквантовой») теориями определяется другой основной постоянной, имеющей размерность «энергия×время»,— постоянной Планка $\hbar$, определяющей коэффициент пропорциональности между разностью энергий двух «квантовых уровней» и частотой квантового перехода (частотой «биений»):

$$E_1 - E_2 = \hbar\omega.$$

(При измерении ω в угловых единицах рад/с численное значение $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ эрг·с; сам Планк измерял частоту $\nu = \omega/2\pi$ в с$^{-1}$ и соответственно определил постоянную $h = 2\pi\hbar = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ эрг·с; определение и обозначение $\hbar$ предложено Дираком.)*)

Классические представления являются соответствующими действительности при изучении макроскопических процессов, например при исследовании испускания радиоволн антенной, когда испускаемая энергия W гораздо больше энергии одного кванта $\hbar\omega$, и совсем неприменимы при исследовании излучения одного фотона возбужденным атомом.

Гейзенберг обращает далее внимание на то, что трудности квантовой теории элементарных частиц возникают при анализе тех проблем, где существенна передача от одной частицы другой большого импульса или большой энергии, т. е. при очень тесных столкновениях частиц с очень малой длиной волны де Бройля. Поэтому Гейзенберг выдвигает тезис, что при некоторой элементарной длине l_0, которую он в первоначальном варианте своей гипотезы отождествил с «классическим радиусом электрона» $r = e^2/mc^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см (m — масса электрона), известные нам законы квантовой теории и теории относительности перестают быть справедливыми, необходимо введение новых понятий, еще более абстрактных, чем в этих теориях.

По Гейзенбергу, именно величина l_0 задает также характерный масштаб масс элементарных частиц. Приняв за единицу массы $\frac{\hbar}{cl_0} = \frac{70\ \text{МэВ}}{c^2}$, мы получаем с хорошей степенью точности массы покоя частиц (таблица составлена по современному списку элементарных частиц):

μ-мезона $= 3/2$
π-мезона $= 2$
K-мезона $= 7$
η-мезона $= 8$

---

*) Физики, как правило, не пользуются известной вам системой — СИ, а предпочитают систему СГС (первые буквы основных единиц: сантиметр, грамм, секунда). В этой системе эрг — единица измерения энергии (1 эрг $= 10^{-7}$ Дж); если какая-то величина измеряется в единицах, не имеющих специального названия, пишут: единица СГС. *(Примеч. ред.)*

протона и нейтрона = 13,5
Λ-гиперона = 16
Σ-гиперона = 17
Ξ-гиперона = 19
электрона = 1/137
фотона, нейтрино и гравитона = 0 и т. д.

Отвлекаясь несколько в сторону, заметим, что наличие в современной теории двух «естественных» единнц (размерности которых $[c]$ = длина/время и $[\hbar]$=энергия$\times$время) приводит к тому, что из трех основных единиц, лежащих в основе любой системы единиц измерения (например, в случае СИ: м, с, кг), лишь одна (например, единица длины L) должна считаться произвольной. Единица времени может быть определена как $T=\frac{L}{c}$, и единица массы — как $M=\frac{\hbar}{Lc}$, единицей энергии будет служить величина $W=\frac{\hbar c}{L}$ и т. д. В работах по теоретической физике обычно принимают $\hbar=c=1$, измеряя все величины в степенях длины; это очень упрощает формулы, из которых исчезают коэффициенты $\hbar$ и c. Импульс p, масса m и энергия W выражаются в обратных единицах длины, скажем, в см$^{-1}$. При этом релятивистские формулы для энергии и импульса имеют вид:

$$W=\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}=\sqrt{m^2+p^2},$$

$$p=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Магнитный момент выражается в единицах длины или обратных единицах массы. Например, магнитный момент электрона (так называемый нормальный момент, или «магнетон Бора» — см. ниже) равен $e/2m$. Аналогично выражаются все остальные физические величины. Пользование этой «одноразмерной» системой единиц удобно, если в качестве единицы массы или длины выбирать величину, характерную для исследуемой проблемы. После этого отступления возвратимся к идеям Гейзенберга.

В то время, когда Гейзенберг выдвигал свои идеи, список элементарных частиц включал только электрон (и его античастицу — позитрон), протон, нейтрон и фотон. Сейчас список расширился до нескольких десятков частиц.

Добавились μ-мезон и нейтрино двух «сортов», которые вместе с электроном и соответствующими античастицами образуют семейство слабо взаимодействующих частиц, или лептонов. Открыт также ряд новых, сильно взаимодействующих частиц; те из них, которые обладают очень малым временем жизни, получили название частиц-резонансов (пример: η-мезон в приведенной выше таблице). Сильно взаимодействующие частицы, или адроны, распадаются на две большие группы — так называемые барионы, родственные по своим свойствам протону и нейтрону (долгоживущие барионы Λ, Σ, Ξ получили название гиперонов, см. в таблице), и так называемые мезоны, типичными представителями которых являются ответственные за ядерные силы π-мезоны и ρ-мезоны, а также приведенные в таблице K- и η-мезоны.

Сейчас уже нет оснований предполагать, что массы всех тех частиц, которые существуют в природе, обязательно порядка $1/l_0=70$ МэВ (положив $\hbar=c=1$, мы используем здесь 1 МэВ в качестве единицы не только энергии, но и массы, импульса и обратной длины). Например, есть все основания предполагать, что существуют частицы (вероятно, не стабильные) с гораздо большими массами. Таким образом, этот «эмпирический» аргумент в пользу принятого Гейзенбергом численного значения величины элементарной длины сейчас вряд ли убедителен. Не убедителен также аргумент, связанный с классической оценкой электромагнитной массы, в силу упомянутого нами выше уменьшения этой величины в квантовой теории. Это обстоятельство представляется нам особенно существенным.

Гейзенберг предполагал, что в законах взаимодействия элементарных частиц при энергиях, больших чем $1/l_0=70$ МэВ, должны наблюдаться разительные отклонения от современной теории. На первых порах, когда в космических лучах были открыты частицы с большой проникающей способностью, возникло предположение, что это электроны, которые обладают высокой энергией и поэтому «не подчиняются» квантовой электродинамике. Но вскоре оказалось, что это просто частицы с массой в 200 раз большей (их назвали μ-мезонами), и именно это «тривиальное» обстоятельство объясняет их проникающую способность. Сейчас не известно никаких явлений, которые можно было бы с уверенностью интерпретировать как явное нарушение современной теории. Остановимся на этом важном обстоятельстве подробней.

В современной физике известно 4 типа взаимодействий:

1. «Сильные» взаимодействия, типичным примером которых являются ядерные силы.
2. Электромагнитные взаимодействия.
3. «Слабые» взаимодействия, ответственные за процессы β-распада.
4. Гравитационные взаимодействия.

Наиболее полная количественная теория и наиболее полные экспериментальные данные существуют для электромагнитных взаимодействий, поэтому именно здесь имеется самое подходящее поле для попыток обнаружить отклонения от современной теории. До сих пор все такие попытки дали отрицательный результат. Мы опишем некоторые из них, так как в таком важном вопросе даже и негативный результат представляется очень важным; анализ точности экспериментов дает оценку для возможной грани справедливости современных представлений. Вместе с тем этот вопрос имеет многообразные связи с другими разделами современной физики и представляет самостоятельный интерес.

На сегодня самым изученным из электромагнитных свойств элементарных частиц является магнитный момент. По предположению, высказанному в 1925 году Уленбеком и Гаудсмитом, электрон подобен маленькому волчку — обладает механическим моментом вращения, численно равным 1/2 (в единицах $\hbar$), и, кроме того, обладает магнитным дипольным моментом, равным $e/2m$. Это предположение получило многочисленные подтверждения в спектроскопии и при изучении магнитных явлений. В дальнейшем выдающийся английский физик Дирак показал, что предположение Уленбека и Гаудсмита совместимо с описанием электрона как точечной заряженной частицы, подчиняющейся уравнениям теории относительности и квантовой теории.

Однако в 30-е годы оказалось, что магнитный момент протона в 2,9 раза больше, чем $e/2m_p$, где m_p — масса протона. Более того, советские теоретики Тамм и Альтшулер предсказали, а американский ученый Альварец обнаружил на опыте наличие магнитного момента у нейтрона, который электрически нейтрален и, согласно приведенной формуле, должен быть лишен магнитного момента. Сейчас принято величину $\mu_0 = e/2m$ называть нормальным магнитным моментом, а все, что сверх этого,— аномальным. Аномальный момент у протона и нейтрона обусловлен по современным представлениям их внутренней структурой, однако теория этого эффекта отсутствует, как, впрочем, вообще теория сильно взаимодействующих частиц.

До 1947 года считалось, что у электрона нет аномального момента. Однако изучение энергии взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным моментом протона*) привело к определенным неувязкам; поэтому американский теоретик Брейт предположил, а вскоре американские экспериментаторы Каш и Фолли обнаружили на опыте наличие у электрона очень малого аномального магнитного момента. Относительная величина аномального момента $\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = a$ составляет около $1{,}2 \cdot 10^{-3}$. Теория аномального магнитного момента была создана выдающимся американским ученым Швингером в 1948 году в результате достигнутых в те годы им (а также независимо Томонагой, Гансом Бете, которому в этом году присвоена Нобелевская премия за теорию энергии звезд, Крамерсом, Фейнманом, Дайсоном и другими) крупных успехов в усовершенствовании математического аппарата квантовой электродинамики.

---

*) Эта энергия ответственна за излучение линии с длиной волны $\lambda = 21$ см космическим атомарным водородом; как известно, в развитии радиоастрономии исследования излучения с этой длиной волны играют важную роль.

Согласно Швингеру, величина относительного аномального момента

$$a=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}=\frac{e^2}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\cdot 137{,}03}=$$
$$=1{,}16\cdot 10^{-3}$$

и обусловлена взаимодействием электрона или μ-мезона с электромагнитными квантовыми флуктуациями (нулевыми колебаниями) вакуума.

В квантовой теории поля вакуум — это не просто пустота. Как известно, квантовая теория вводит для каждой системы понятие об энергетических уровнях (гипотеза Бора). Распространение этой идеи на вакуум дает интерпретацию фотона как возбужденного состояния одной из электромагнитных колебательных степеней свободы вакуума. Основное состояние каждой степени свободы соответствует отсутствию фотона с данной длиной волны, при этом среднее квантово-механическое значение электрического поля в каждый момент времени равно нулю, однако поле есть, так как амплитуда поля, соответствующая данной степени свободы, не может тождественно обращаться в нуль и испытывает квантовые нулевые колебания (квантовые флуктуации), образуя «облако вероятности», около среднего (равновесного) значения. Полная энергия взаимодействия заряженной частицы с нулевыми колебаниями вакуума слагается из взаимодействия с нулевыми колебаниями различных длин волны, изменение этой энергии при наличии «внешнего» магнитного поля интерпретируется по Швингеру как обусловленное аномальным магнитным моментом.

Энергия взаимодействия электрона с нулевыми колебаниями вакуума может быть представлена интегралом по возможным значениям импульса p (обратной длины волны) этих колебаний (p_0 — предполагаемая граница существующих представлений) и пропорциональна

$$m_{\text{эм}}\sim e^2\int_0^{p_0} dp\,\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}}\approx$$
$$\approx\int_m^{p_0} e^2 m\,\frac{dp}{p}=me^2\ln\frac{p_0}{m}.$$

При наличии магнитного поля H*) подынтегральное выражение изменяется на величину, пропорциональную e^3H/p^2 (по соображениям размерности). Отсюда изменение энергии электрона в магнитном поле, которое мы в согласии с идеей Швингера приравниваем $\mu-\mu_0$, пропорционально $me^3H\int_m^{p_0}\frac{dp}{p^3}$. Таким образом,

$$\mu-\mu_0\sim me^3\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{p_0^2}\right)$$

(множитель пропорциональности, по Швингеру, равен $1/4\pi$).

В приведенной выше формуле Швингера

$$\mu-\mu_0=\frac{e^2}{2\pi}\mu_0=\frac{e^3}{4\pi m},$$

т. е. опущен множитель $1-\frac{m^2}{p_0^2}$, что соответствует $p_0\to\infty$.

При $p_0\neq\infty$ имеем поправки к аномальному моменту, пропорциональные m^2/p_0^2. Обозначая через $a_{\text{теор}}$ теоретическое значение, вычисленное Швингером и другими теоретиками, которые уточнили его оценку в рамках современной теории, имеем по порядку величины

$$\delta=\frac{a-a_{\text{теор}}}{a_{\text{теор}}}\approx\frac{m^2}{p_0^2},$$

или

$$p_0=\frac{m}{\sqrt{\delta}}.$$

Из этой формулы видно, что наиболее «перспективиным» объектом для изучения отклонений от квантовой электродинамики является самая тяжелая из известных сейчас частиц, аномальный момент которых носит флуктуационный характер, а именно μ-мезон (замечание советского физика Берестецкого).

---

*) H — напряженность магнитного поля. *(Примеч. ред.)*

Первоначальные эксперименты, приведшие к обнаружению аномального момента у электрона, были проведены методом молекулярных пучков. Создание этого метода, восходящего еще к классическому опыту Штерна — Герлаха,— в значительной мере заслуга американского физика Раби. Однако наиболее точные определения величины a (с относительной точностью $\delta = 2\cdot10^{-5}$ для электрона и $\delta = 4\cdot10^{-3}$ для μ-мезона) были выполнены много поздней в ряде американских лабораторий по другому методу.

В этих опытах было найдено, что $a = 1{,}162\cdot10^{-3} \pm 0{,}004\cdot10^{-3}$ (результаты приведены для μ^+-мезонов, аналогичные результаты найдены Фарли и Брауном для μ^--мезонов). Теоретическое значение $a_{\text{теор}}$ со всеми известными поправками равно $1{,}1654\cdot10^{-3}$, т. е. совпадает с экспериментальной величиной в пределах ошибок измерения.

Значит, величина $\delta = \frac{a - a_{\text{теор}}}{a_{\text{теор}}}$, определенная выше, безусловно меньше, чем $4\cdot10^{-3}$. Таким образом, квантовая электродинамика безусловно справедлива для энергий и импульсов, меньших чем $p_0 = \frac{m}{\sqrt{4\cdot10^{-3}}}$, т. е. для энергий и импульсов, меньших нескольких ГэВ.

Другой метод проверки квантовой электродинамики сводится к изучению столкновений электронов с электронами и электронов с позитронами в так называемых встречных пучках. Почему нужны именно встречные пучки? Теория относительности объединяет вектор импульса $\vec{p}$ и энергию частицы W в так называемый четырехмерный вектор. Трехмерные векторы обладают тем свойством, что их скалярное произведение $(\vec{a}\vec{b})$ сохраняется при вращениях трехмерных координатных осей. Однако при более общих «лоренцевских» преобразованиях системы отсчета, учитывающих возможность не только поворота осей, но и перехода к другой инерциальной системе, инвариантом является лишь более общая величина — четырехмерное скалярное произведение Эйнштейна — Минковского. Для двух сталкивающихся частиц четырехмерное скалярное произведение векторов энергии — импульса имеет вид

$$I = W_1 W_2 - p_{1x}p_{2x} - p_{1y}p_{2y} - p_{1z}p_{2z}.$$

Очевидно, что все качественные утверждения теории, в частности эффекты отклонения от современной теории, могут зависеть лишь от инвариантной величины. Находим, что при столкновении покоящегося электрона ($p_1 = 0$) с электроном, имеющим импульс $p_2 = \vec{p}$,

$$I_1 = m\sqrt{m^2 + p^2},$$

а в случае встречных пучков электронов с импульсами $\vec{p}_1 = \vec{p}$ и $\vec{p}_2 = -\vec{p}$

$$I_2 = m^2 + 2p^2,$$

Если $p = 10^3\ m$ (энергия 500 МэВ), то $I_2 = 2\cdot10^3\ I_1$. Из сравнения этих значений I_1 и I_2 ясно преимущество встречных пучков.

Опыты со встречными пучками в Советском Союзе проводятся в Новосибирске под руководством Г. И. Будкера и являются весьма перспективными. В этих опытах тоже (в пределах точности эксперимента) не обнаружено отклонения от современной теории.

Итак, совокупность теоретических и экспериментальных аргументов заставляет признать, что предположенная Гейзенбергом граница теории $l_0 = r$ должна быть отодвинута в сторону гораздо более высоких энергий. Этот результат, хотя и негативный, представляется очень важным для современной физики элементарных частиц.

Еще очень давно американский физик Вигнер обратил внимание на то, что само понятие измерения очень малых интервалов длины и времени

($\Delta x \lesssim L_0 = 10^{-33}$ см, $\Delta t \lesssim \frac{L_0}{c} = 10^{-44}$ с) встречает принципиальные трудности, если учитывать гравитационные явления и одновременно эффекты квантовой теории.

Расстояние и интервал времени между любыми двумя точками пространства Эйнштейна — Минковского (т. е. между двумя «событиями») должны испытывать квантовые флуктуации, нулевые квантовые колебания, как и все иные физические величины. В этом отношении гравитационное поле не может качественно отличаться от электромагнитного и любого другого. Заметим, что оценка величины L_0 может быть получена из соображений размерности. В свое время М. Планк указал, что с использованием численного значения гравитационной постоянной $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ ед. СГС, постоянных $\hbar$ и c можно построить систему «естественных» единиц для всех величин (т. е. от «одноразмерной» системы единиц, описанной выше, перейти к «нульразмерной» системе единиц). А именно, единицу длины L_0 можно определить, как

$$L_0 = G^{1/2}\hbar^{1/2}c^{-1/2} = 1{,}61 \cdot 10^{-33} \text{ см}.$$

Соответственно единица времени

$$T_0 = \frac{L_0}{c} = G^{1/2}\hbar^{1/2}c^{-3/2} = 5{,}35 \cdot 10^{-44} \text{ с},$$

единица энергии

$$W_0 = \frac{\hbar}{T_0} = G^{-1/2}\hbar^{1/2}c^{3/2} = 2 \cdot 10^{16} \text{ эрг} = 10^{28} \text{ эВ},$$

единица массы

$$M_0 = \frac{W_0}{c^2} = G^{-1/2}\hbar^{1/2}c^{-1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

Вигнеровские соображения, о которых мы упоминали, как раз и приводят к выделению величин L_0, T_0 как граней представлений о пространстве и времени. Ряд ученых, в том числе советский ученый А. С. Компанеец, указали, что принятие величины L_0 в качестве эффективного радиуса электрона в квантовой электродинамике не приводит к слишком большой величине электромагнитной массы (как это было бы в классической электродинамике), если использовать получающуюся в квантовой электродинамике пропорциональность электромагнитной массы величине $\ln(r^{-1})$.

Недавно другой советский ученый, М. А. Марков, высказал гипотезу, что величина L_0 (и связанная с ней величина $M_0 = \frac{1}{L_0}$) определяет также максимальную возможную массу элементарных частиц: соответствующие частицы он назвал «максимонами». Как известно, при образовании стабильных частиц из составных частей, которые могут быть сами нестабильными, происходит уменьшение суммарной массы («дефект» массы в виде малой поправки к закону Проута, проявляющейся в ядерной физике). Поэтому нас, по Маркову, не должно удивлять, что наблюдаемые стабильные частицы (электроны, протоны и др.) гораздо меньше по массе, чем «естественная» единица массы $M_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ г.

Сейчас все больше физиков склоняются к тому, что именно грань L_0 определит наиболее существенные перемены в наших представлениях.

Все же очень важно убедиться, что никакая промежуточная между $r = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см и $L_0 = 1{,}61 \cdot 10^{-33}$ см характерная длина не играет столь же фундаментальной роли. Здесь есть пока только весьма косвенные теоретические аргументы. Вот один из таких аргументов. Он относится к анализу основ общей теории относительности.

Как известно, движение материальных тел в поле тяготения описывается в теории Эйнштейна как движение по кратчайшей линии в «искривленном» пространстве — времени. «Искривление» пространства — времени приводит к тому, что кратчайшей длиной обладают не «прямые», а «кривые» линии пространства — времени вида

$$x = f_1(t), \; y = f_2(t), \; z = f_3(t),$$

где f_1, f_2, f_3 не есть линейные функции.

В теории Эйнштейна величина искривления пространства находится из условия, которое качественно можно описать так. В окрестностях тел, обладающих массой (или, что то же самое, энергией), на пространство действует искривляющая «сила» (конечно, слово «сила» здесь используется в некотором обобщенном смысле). В то же время пространство обладает свойством «упругости», оно как бы препятствует своему искривлению. Равновесие этих двух «сил» определяет истинную степень кривизны. Обычно отклонения свойств пространства от свойств, описываемых геометрией Эвклида, очень малы, т. е. «упругость» пространства очень велика.

Чем же определяется «упругость» вакуума? Можно предполагать, что изменением квантовых флуктуаций вакуума. Мы уже говорили о флуктуациях вакуума в связи со швингеровской теорией аномального магнитного момента. Так вот, при искривлении пространства — времени этим флуктуациям становится «более тесно», они как бы «выходят из берегов», что приводит к увеличению энергии вакуума. Формально этот эффект бесконечен, если учитывать самые «коротковолновые» флуктуации. Величина гравитационной постоянной, обратно пропорциональная «коэффициенту упругости пространства», имеет правильное численное значение, если ограничиться флуктуациями с длиной волны λ больше, чем $L_0 \sim 10^{-33}$ см. Будущее покажет, правильно ли это.

Ну, а что за гранью L_0? Какие изменения следует внести в теорию (и следует ли вносить вообще!) для описания процессов на расстояниях, меньших чем 10^{-33} см, и при энергиях частиц, больших чем 10^{28} эВ? Этого пока никто не знает. Вероятно, нужно согласиться с теми, кто предполагает, что следует ожидать глубоко принципиальных изменений. Энергия 10^{28} эВ настолько далека от реально изучаемого сейчас диапазона (энергия Серпуховского ускорителя $7\cdot 10^{10}$ эВ), что окончательное выяснение этого комплекса проблем может оказаться делом не очень близкого будущего.

Наш комментарий

После публикации этой статьи прошло без малого четверть века. Казалось бы, срок достаточный, чтобы успели устареть и обесцениться любые прогнозы, относящиеся к переднему краю науки, тем более, что именно прошедшие годы ознаменовались бурным прогрессом физики элементарных частиц. Тем примечательнее, что многое в статье Сахарова не потеряло значения и сегодня, а сама она продолжает вызывать интерес, выходящий за рамки чисто исторического.

В тот самый год, когда Андрей Дмитриевич готовил статью к печати, появились работы будущих нобелевских лауреатов по физике С. Вайнберга и А. Салама, которые вместе с третьим лауреатом Ш. Глэшоу заложили основы стратегии объединения четырех видов фундаментальных взаимодействий природы. Это привело не только к прорыву в понимании физики микромира, но и к исчезновению ряда возникающих трудностей в старой теории. Так, бесконечности, появляющейся при вычислении физических величин (с ними Сахаров связывает главный, по существу, аргумент в пользу необходимости ревизии наших представлений о микромире), теперь либо легко исключаются, либо, в некоторых вариантах теории, не возникают вовсе.

Очень важно добавить, что физика элементарных частиц обошлась без третьей (после создания теории относительности и квантовой теории) революции, которая, как ожидали многие, должна была привести к коренной ломке наших представлений о пространстве — времени, причинности и т. д. Выход из кризиса лежал скорее на реформистском пути — пути перехода от примитивных и ограниченных старых к более сложным и богатым содержанием новым моделям частиц и их взаимодействий. Поэтому предположение Гейзенберга, которое обсуждает Сахаров, не оправдалось. Прогресс теории элементарных частиц, хотя и привел к революционным последствиям, ее глубинных основ не потряс, тем самым еще раз подтвердился шутливый афоризм Эйнштейна «Господь изощрен, но не злонамерен».

На первый взгляд, из сказанного следует, что ответ на вынесенный в заголовок статьи вопрос должен быть отрицательным, что самой проблемы элементарной длины как границы применимости наших фундаментальных представлений уже не существует и что содержание статьи Сахарова безнадежно устарело. Однако в действительности подобное заключение было бы слишком поспешным.

Прежде всего, оказалось, что уже в рамках сегодняшней теории элементарных частиц пространственно — временна́я картина испытывает достаточно радикальные (хотя и не столь революционные, как думал Гейзенберг) изменения на масштабах порядка планковской длины волны $L_0 = 10^{-33}$ см: проявляются скрытые на бо́льших масштабах измерения пространства, входят в игру квантовые флуктуации координат и времени и т. п. Поэтому, определяя элементарную длину, как границу коренного изменения наших пространственно — временных представлений (и не вкладывая в это понятие прежнего экстремистского смысла), следует считать эту величину равной L_0. Развитие науки подтвердило, таким образом, слова Сахарова: «...именно грань L_0 определит наиболее существенные перемены в наших представлениях».

Более того, современная теория при всех ее успехах далеко еще не прошла опытной проверки; ее корни лежат на масштабах L_0, а в прямом эксперименте изучена лишь область длин, бо́льших $l=10^{-17}$ см. Не исключено (и об этом также говорит Сахаров), что на масштабах, меньших l_0, но бо́льших L_0, опыт выявит новые, неожиданные явления, чем и определится истинное значение элементарной длины. Поэтому обсуждаемые Сахаровым опыты по определению этой величины (или ее верхней границы) не потеряли своего значения и, несомненно, будут продолжаться.

Итак, прогресс теории элементарных частиц, хотя и существенно смягчил остроту проблемы элементарной длины, но вовсе не снял ее с повестки дня.

Из «любительских задач» А. Д. Сахарова

По словам людей, работавших с А. Д. Сахаровым, он любил задачи, которые возникают из простых жизненных наблюдений. Вот одна из них, которую вспомнил новосибирский физик И. Ф. Гинзбург.

1. А. Д. имел обыкновение пользоваться галошами. В пятидесятые годы он жил на два дома, регулярно летая из Москвы на объект, где он тогда работал*), и у него было три пары галош. Направляясь на самолет, А. Д. надевал галоши в двух случаях: если шел дождь или если в пункте назначения ни одной пары галош не было. Через некоторое время он обнаружил, что вероятность посадки в самолет в галошах составляет $q=20\%$. Какова вероятность дождя p? (Считается, что вероятность p в Москве и на объекте одинакова.)

Вот еще несколько «любительских задач», включенных Андреем Дмитриевичем в обзор своих работ (подготовленный в 1980 году и опубликованный в США).

2. При рубке капусты сечкой получаются многоугольники с разным числом вершин, разного размера и формы. Определить среднее число вершин $\bar{n}$ многоугольников и отношение квадрата их среднего периметра $\bar{L}$ к средней площади $\bar{S}$.

Ответ: $\bar{n}=4$; $\bar{L}^2/\bar{S}=4\pi$ (то есть как у круга, что на первый взгляд удивительно). Задача возникла как результат того, что я рубил капусту, помогая жене делать пироги.

3. Среди членов ряда Фибоначчи $f_1=f_2=1$, $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ есть члены, делящиеся на произвольное целое число m (кратные m). Рассмотреть обобщенный ряд Фибоначчи, в котором f_1 и f_2 — произвольные целые числа. Для каких m среди членов ряда есть кратные m?

4. На основании равенства $\lim \frac{a_n}{b_n}=\sqrt{\frac{a_n^2-1}{b_n}}$, где $a_n=2a_{n-1}^2-1$, $b_n=2a_{n-1}b_{n-1}$ построить быстро сходящийся алгоритм вычисления квадратных корней из целых и рациональных чисел и алгоритм вычисления членов f_{2n}, f_{2n+1} ряда Фибоначчи, если известны f_n, f_{n+1} (без вычисления всех промежуточных членов).

5. Дано N точек на плоскости. Каждая точка соединяется цветной линией с каждой из остальных $N-1$ точек, причем всего используется p цветов. Найти функцию $L(n;\ p)$ такую, что: (1) при $N>L\ (n, p)$ при любом выборе цветов (для всех $N(N-1)/2$ линий) найдется по крайней мере n точек таких, что все $n(n-1)/2$ соединяющих их линий одного цвета (здесь $n=3, 4, \ldots$); (2) при $N<L(n;\ p)$ можно так выбрать цвета линий, что никакие n точек не соединены линиями одного цвета.

Задача решена лишь частично. По-видимому $L(3;\ p)\approx e\cdot p!$ (здесь $e=2{,}718\ldots$, $p!=1\cdot 2\cdot\ldots\times p$). Для этого случая доказана теорема (1) и на примере $p=2$, $p=3$ подтверждена теорема (2). Для $n>3$ найдена $L'>L$ такая, что при $N>L'$ выполняется (1).

Следующая задача из этого списка, которую мы приведем в заключение, уже далеко не элементарна и на первый взгляд производит странное впечатление: любой знаток скажет, что строгие математические доказательства подобных утверждений не известны.

---

*) О том, как и почему А. Д. Сахаров перестал ездить на объект, можно прочесть в его воспоминаниях («Знамя», 1991, № 1).

6. Сформулированы два семейства теорем, относящихся к теории чисел. 1) Последовательности $a_n=n!+1$, $a_n=[n\ln n]!+1$ и т. д. (здесь [] означает целую часть числа) содержат бесконечное число простых чисел, так как ряд $\Sigma(1/\ln a_n)$ расходится.

2) Последовательности $b_n=(n^2)!+1$, $b_n=[n(\ln n)^a]!+1$ и т. д., для которых ряды $\Sigma(1/\ln b_n)$ сходятся, содержат конечное число простых чисел.

Как эта задача могла возникнуть у А. Д. Сахарова?

Приведем комментарий члена редсовета нашего журнала академика В. И. Арнольда.

— Насколько я знаю, «теоремы» А. Д. не доказаны. Но на «физическом уровне строгости» они вытекают из «хаотичности» распределения простых чисел в натуральном ряду, теорем об асимптотике количества простых чисел и следующего хорошо известного факта теории вероятностей.

Лемма 1. Пусть независимые события 1, 2, ... имеют вероятности $p_1, p_2, \ldots$ Тогда вероятность того, что произойдет бесконечное число из этих событий, равна 1, если ряд $p_1+p_2+\ldots$ расходится, и равна 0, если этот ряд сходится.

Доказательство. Вероятность того, что ни одно из этих событий не произойдет, равна $p=(1-p_1)(1-p_2)\ldots$; вероятность, что произойдет одно i-е событие, равна pr_i, где $r_i=p_i/(1-p_i)$. Вероятность того, что произойдут события с номерами $i, \ldots, j$ и только они, равна $pr_i \ldots r_j$. Если ряд расходится, то $p=0$, для каждой комбинации конечного числа событий ее вероятность тоже равна 0. Поэтому вероятность того, что произойдет лишь конечное число событий, равна 0. Если же ряд сходится, то вероятность того, что произойдет лишь конечное число событий, равна

$$p(1+\Sigma r+\Sigma r r_i+\ldots)=$$
$$=p(1+r_1)(1+r_2)\ldots=1,$$

поскольку $1+r_i=1(1-p_i)$. Лемма доказана.

Применим «ничтоже сумняшеся» лемму 1 к «событиям» (конечно, отнюдь не случайным) «$n!+1$ — простое число», $n=1, 2, \ldots$ «Вероятностью» p_n такого события будем считать долю простых чисел на отрезке натурального ряда от 1 до $N=n!+1$ (отношение количества простых чисел, меньших N, к N).

Лемма 2. Ряд из чисел p_n расходится.

Доказательство. Средняя плотность распределения простых чисел на отрезке от 1 до N убывает с ростом N обратно пропорционально $\ln N$ (теорема Адамара)*. $p_n \sim 1/(\ln N)$. Но $\ln(n!+1) \sim \ln n! \sim n \ln n$ по формуле Стирлинга, а ряд $\Sigma 1/(n\ln n)$ расходится. Поэтому расходится и ряд Σp_n. Лемма 2 доказана.

Считая простоту чисел $n!+1$ при разных n независимыми событиями (что бы это ни означало) и применяя (незаконно) лемму 1, заключаем, что «вероятность» того, что для бесконечного количества n число $n!+1$ простое, равна 1, поскольку по лемме 2 ряд Σp_n расходится.

Это «физическое», т. е. не имеющее точно определенного смысла, рассуждение убеждает всякого разумного человека (только не математика), что последовательность $n!+1$ действительно содержит бесконечно много простых чисел.

Для последовательности $n^2!+1$ ряд из $p_n \sim 1/\ln(n^2!) \sim 1/(n^2\ln^2 n)$ сходится. Поэтому вероятность бесконечности количества простых чисел вида $n^2!+1$ равна 0 (что бы эта «вероятность», бессмысленная с точки зрения математика, ни означала). Разумный человек заключит, что множество простых чисел вида $n^2!+1$ конечно.

Действительно, $4!+1$ делится на 5, а $9!+1$ делится на 19, поэтому я не знаю ни одного простого числа вида $n^2!+1$, кроме $1!+1=2$.

Числа же $n!+1$, простые при $n=1, 2, 3, 11$, при $n=4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ имеют нетривиальные делители (соответственно, 5, 11, 7, 71, 61, 19, 11).

* * *

В списке «любительских задач» А. Д. Сахарова наряду с математическими собраны и разнообразные задачи по физике, но для их понимания (не говоря уже о решении) элементарных знаний далеко не достаточно. Они будут включены в сборник (А. Д. Сахаров «Научные труды»), который подготовлен к изданию в ФИАНе коллегами Андрея Дмитриевича; в него войдут некоторые работы А. Д. Сахарова и воспоминания о нем.

---

* См. статью М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» в «Кванте» № 5 за 1970 год. *(Примеч. ред.)*

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

И. ДЕПМАН

В 1961 году в журнале «Математическое просвещение» была напечатана заметка профессора И. Я. Депмана о совершенных числах, т. е. числах, равных сумме всех своих делителей. Мы публикуем переработку этой статьи, осуществленную специально для читателей нашего журнала академиком И. В. Петряновым-Соколовым. Добавления о совершенных числах, открытых в последнее время, написал профессор А. А. Бухштаб.

Никомах Герасский, славный грек, знаменитый философ и математик, писал: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного».

Сколько же их? Никомах, живший в первом столетии нашей эры, этого не знал.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число «6». На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый знаменитый и самый почетный гость. Особыми, мистическими свойствами обладало число 6 в учении пифагорейцев, к которым принадлежал и Никомах.

Много внимания уделяет этому числу великий Платон в своих «Диалогах». Недаром в библейских преданиях утверждается, что мир создан был в шесть дней, ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем «6», нет, поскольку оно первое среди них.

Следующим совершенным числом, известным древним, было «28». В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах.

Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел: *каждое из них равно сумме всех своих собственных делителей:*

$$6=1+2+3,$$
$$28=1+2+4+7+14.$$

До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 — простое число, является совершенным числом. Если в формулу Евклида $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$ подставить $p=2$, то получим $2^{2-1}\times(2^2-1)=6$ — первое совершенное число, а если подставить в нее $p=3$, то получим второе совершенное число:

$$2^{3-1}\cdot(2^3-1)=28.$$

Благодаря своей формуле, Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при $p=5$ и четвертое при $p=7$. Вот эти числа:

$$2^{5-1}\cdot(2^5-1)=2^4\cdot(2^5-1)=16\cdot 31=496$$

и

$$2^{7-1}\cdot(2^7-1)=2^6\cdot(2^7-1)=64\cdot 127=8128.$$

Проверьте, что они действительно равны сумме своих собственных делителей.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно было бы представить в евклидовской форме, и никто не мог ска-

Пифагор (VI в. до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Личность Пифагора уже в древности стала полулегендарной. Он основал математическую и философскую школы, и многие замечательные ученые Греции называли себя последователями Пифагора.

зать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида.

Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной, их непостижимость привели к признанию божественности этих удивительных чисел. Один из наиболее выдающихся ученых средневековья, друг и учитель Карла Великого, аббат Алкуин, один из виднейших деятелей просвещения, организатор школ и автор учебников по арифметике, был твердо убежден, что человеческий род только потому несовершенен, и в нем только потому царят зло, горе и насилие, что он произошел от восьми людей, спасшихся в ноевом ковчеге от потопа, а «8» — число несовершенное. Род людской до потопа был более совершенен — он происходил от одного Адама, а единица может быть причислена к совершенным числам: она равна самой себе — своему единственному делителю. Алкуин жил в восьмом веке. Но даже в двенадцатом веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа, и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство.

Но и надежда на эту награду не смогла помочь математикам средневековья. Следующее, пятое совершенное число было обнаружено лишь в пятнадцатом веке. Оказалось, что и пятое совершенное число также подчиняется условию Евклида.

Не удивительно, что его так долго не могли найти. Гораздо более поражает то, что в пятнадцатом веке вообще смогли его обнаружить.

Пятое совершенное число равно

$$33\,550\,336,$$

ему соответствует значение $p=13$ в формуле Евклида.

Еще через двести лет француз Марин Мерсенн, математик и музыкант, один из основателей Парижской академии наук, друг Декарта и Ферма, без всяких доказательств заявил, что следующие шесть совершенных чисел должны иметь также евклидовскую форму со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Платон (ок. 429 — 348 до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Платон стоял в центре научной жизни своего времени. Он руководил научной работой многих выдающихся математиков.

Современникам Мерсенна было совершенно очевидно, что сам Мерсенн никак не мог проверить непосредственным вычислением свое утверждение, ведь для этого он должен был предварительно доказать, что числа 2^p-1 с указанными им значениями p являются действительно простыми.

Вычислить любое из них совсем нетрудно, но выяснить, простые все эти числа или нет,— это выходило далеко за пределы человеческих сил.

Так и осталось неизвестным, прав был Мерсенн или нет.

Но позднее было обнаружено, что веселый итальянец Катальди, бывший профессором математики во Флоренции и Болонье, который первый дал способ извлечения квадратных корней, тоже для спасения своей души занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел, найденные им почти за сотню лет до Мерсенна:

8 589 869 056 (шестое число),
137 438 691 328 (седьмое число).

Оказалось, что оба эти числа совпадают с теми, на которые указывал Мерсенн:

$$2^{16}\cdot(2^{17}-1) \text{ и } 2^{18}\cdot(2^{19}-1).$$

Но оставалось еще не доказанным, действительно ли эти числа являются совершенными; для этого необходимо, чтобы множители $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$ были простыми.

Петербургский академик, основатель современной математики, непревзойденный вычислитель, друг Ломоносова, великий Леонард Эйлер сумел найти новую теорему о таинственных и загадочных совершенных числах. Он доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечетные совершенные числа и могут ли они вообще существовать — осталось неизвестным и до нашего времени.

Эйлер доказал, что первые три числа из указанных Мерсенном: $2^{17}-1$, $2^{19}-1$ и $2^{31}-1$,— действительно являются простыми.

Рене Декарт (1596—1650). Выдающийся французский математик, физик, физиолог и философ. Считал математику образцом для всех других наук.

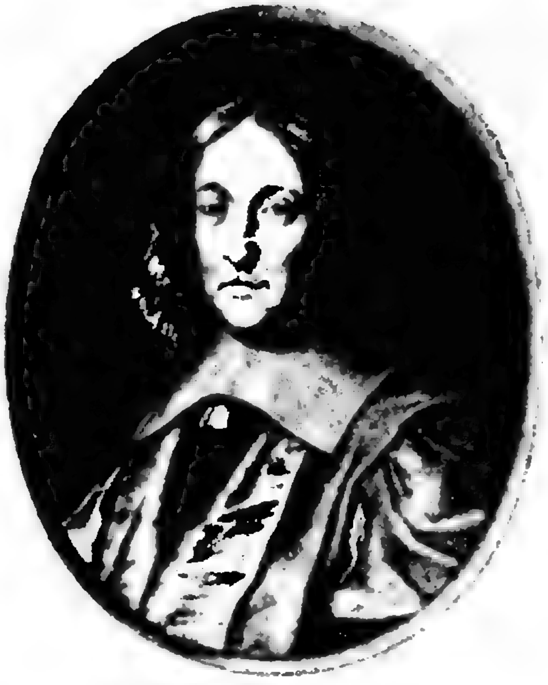
Шестое и седьмое совершенные числа, найденные Катальди, а позднее Мерсенном, оказались верными. И навсегда осталась в истории загадочная тайна, как они сумели найти их. До сих пор предложено только одно «объяснение» этой загадки — оно было дано еще их современниками: им помогало божественное провидение, оно подсказало своим избранникам верные значения двух совершенных чисел.

Таким образом, восьмое совершенное число, которому соответствует $p=31$ в формуле Евклида, равно

2 305 843 008 139 952 128.

Снова в течение целого столетия это число оставалось наибольшим из совершенных чисел, но за это время математикам удалось найти новый метод, с помощью которого можно установить, является ли число 2^p-1, где p — простое число, простым или нет, не производя прямых вычислений. Оказалось, что далеко не все предсказания Мерсенна были верны. Он правильно предсказал значение $p=127$, но числа со значениями $p=67$ и $p=257$, вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Зато должны быть совершенными числа со значениями $p=61$, $p=89$ и $p=107$.

Девятое совершенное число было вычислено только в 1883 году. В нем



Пьер Ферма (1601—1665). Французский математик, по профессии юрист, математикой занимался «в свободное время». Наряду с Декартом является основателем аналитической геометрии. Один из создателей теории чисел; много занимался простыми числами. Среди наиболее интересных его результатов — малая теорема Ферма.

оказалось тридцать семь значащих цифр. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Он сумел вычислить для того времени самое большое простое число вида 2^p-1 при $p=61$:

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

и соответствующее ему совершенное число

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951 \cdot 2^{60}.$$

И. М. Первушин, вычислив девятое совершенное число, поистине совершил настоящий подвиг. Мерсенн в свое время говорил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15—20 десятичных знаков. Первушин считал, по существу, так же — без всяких вычислительных приборов. В его же числе оказалось тридцать семь цифр.

В начале двадцатого столетия появились первые механические счетные машины. Их появление ускорило поиски новых совершенных чисел.

Десятое было найдено в 1911 году, в нем оказалось 54 цифры:

$$618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111 \times 2^{88}.$$

Одиннадцатое, имеющее 65 цифр, открыли в 1914 году:

$$162\,259\,276\,829\,213\,363\,391\,578\,010\,288\,127 \times 2^{106}.$$

Двенадцатое нашли также в 1914 году, оно состоит уже из 77 цифр:

$$2^{126} \cdot (2^{127}-1).$$

В 1932 году математик Лемер решил найти тринадцатое совершенное число. Для этого он решил определить, является ли простым последнее из чисел вида 2^p-1, которые Мерсенн считал простыми, а именно число $2^{257}-1$.

Ему пришлось работать целый год, пользуясь известными тогда счетными приборами, но в результате он убедился, что это число составное, и двенадцатое совершенное число оставалось наибольшим до 1952 года.

* * *

Тринадцатое совершенное число нашла электронная счетная машина. 30 января 1952 года американский математик Робинсон в Калифорнийском университете применил электронную счетную машину для изучения простоты чисел 2^p-1. Робинсон решил для начала определить число $2^{257}-1$. Он пригласил присутствовать при этой проверке Лемера, который двадцать лет тому назад потратил целый год на это вычисление. Лемер получил большое удовольствие, когда увидел, что машина получила тот же самый результат, выполнив его годовую работу за восемнадцать секунд. Для того чтобы найти новое совершенное число, нужно было, следовательно, найти новое простое число. Машина продолжала поиски новых простых чисел. Она проверила за два часа 42 числа, самое меньшее из которых имело более 80 цифр! Все эти числа оказались составными. Новое совершенное число машина обнаружила к вечеру 30 января:

$$2^{520}\cdot(2^{521}-1)\ (p=521).$$

Тринадцатое совершенное число оказалось состоящим из 314 цифр.

Четырнадцатое совершенное число машина нашла в тот же день к полуночи. Перебрав и проверив еще тринадцать евклидовских чисел, она нашла простое число $2^{607}-1$, которое в десятичной системе имеет всего сто восемьдесят три цифры, и соответствующее совершенное число

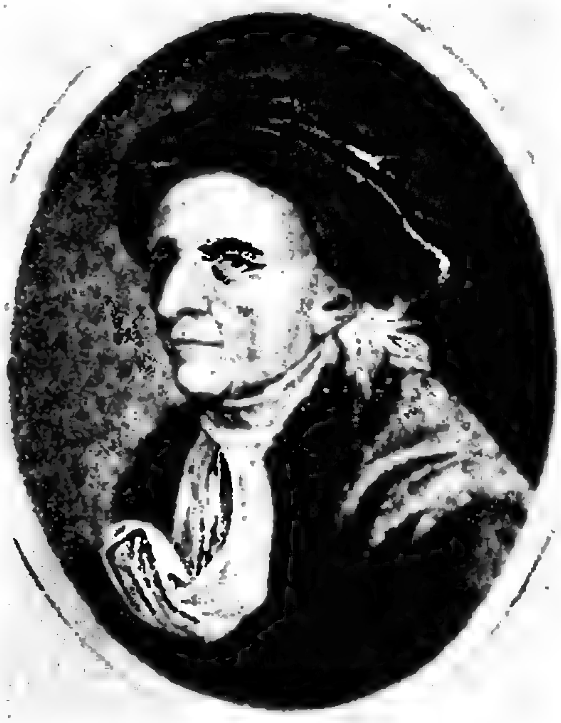
$$2^{606}\cdot(2^{607}-1)\ (p=607).$$

Четырнадцатое совершенное число имеет 366 значащих цифр.

Пятнадцатое совершенное число машина нашла только в июне 1952 года. Она была очень занята и могла уделять проблеме совершенных чисел только свое свободное от более важных дел время.

Продолжая поиски новых простых чисел, она доказала простоту числа $2^{1279}-1$ и нашла совершенное число из семисот семидесяти цифр:

$$2^{1278}\cdot(2^{1279}-1)\ (p=1279).$$



Леонард Эйлер (1707—1783). Математик с мировым именем, выдающийся механик, географ и физик. Родился в Базеле (Швейцария). С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни жил в России. Интенсивно работая в Петербургской академии наук, многое сделав для развития русской науки и справедливо считается русским ученым.

Шестнадцатое и семнадцатое совершенные числа были открыты в октябре 1952 года. Машина к этому времени нашла еще два евклидовских простых числа: $2^{2203}-1$ и $2^{2281}-1$ и вычислила два соответствующих совершенных числа:

$$2^{2202}\cdot(2^{2203}-1)(p=2203),$$

состоящее всего из тысячи трехсот двадцати семи цифр, и

$$2^{2280}\cdot(2^{2281}-1)\ (p=2281),$$

в котором 1373 цифры.

Восемнадцатое совершенное число было найдено в сентябре 1957 года шведским математиком Г. Ризелем. При помощи электронно-счетной машины он за пять с половиной часов установил простоту числа $2^{3217}-1$ и получил восемнадцатое совершенное число:

$$2^{3216}\cdot(2^{3217}-1)\ (p=3217).$$

В нем около 2000 цифр.

Поиски последующих совершенных чисел требовали все большего и большего объема вычислений. Но вычислительная техника непрерывно совершенствовалась, и в 1962 году было найдено два новых совершенных числа, а в 1965 году — еще три. Этим числам соответствуют в формуле Евклида значения p, равные соответственно 4 253, 4 423, 9 689, 9 941 и 11 213. Совершенное число $2^{11212}\times$ $\times(2^{11213}-1)$ имеет 3 376 цифр. Конечно, только благодаря такому помощнику, как вычислительная машина, человек сумел установить, что это огромное число является совершенным.

Вот и все, что почти за два тысячелетия узнали люди о совершенных числах*).

История поисков совершенных чисел наглядно показывает, как сильно увеличивает машина возможности человека. Однако, по словам

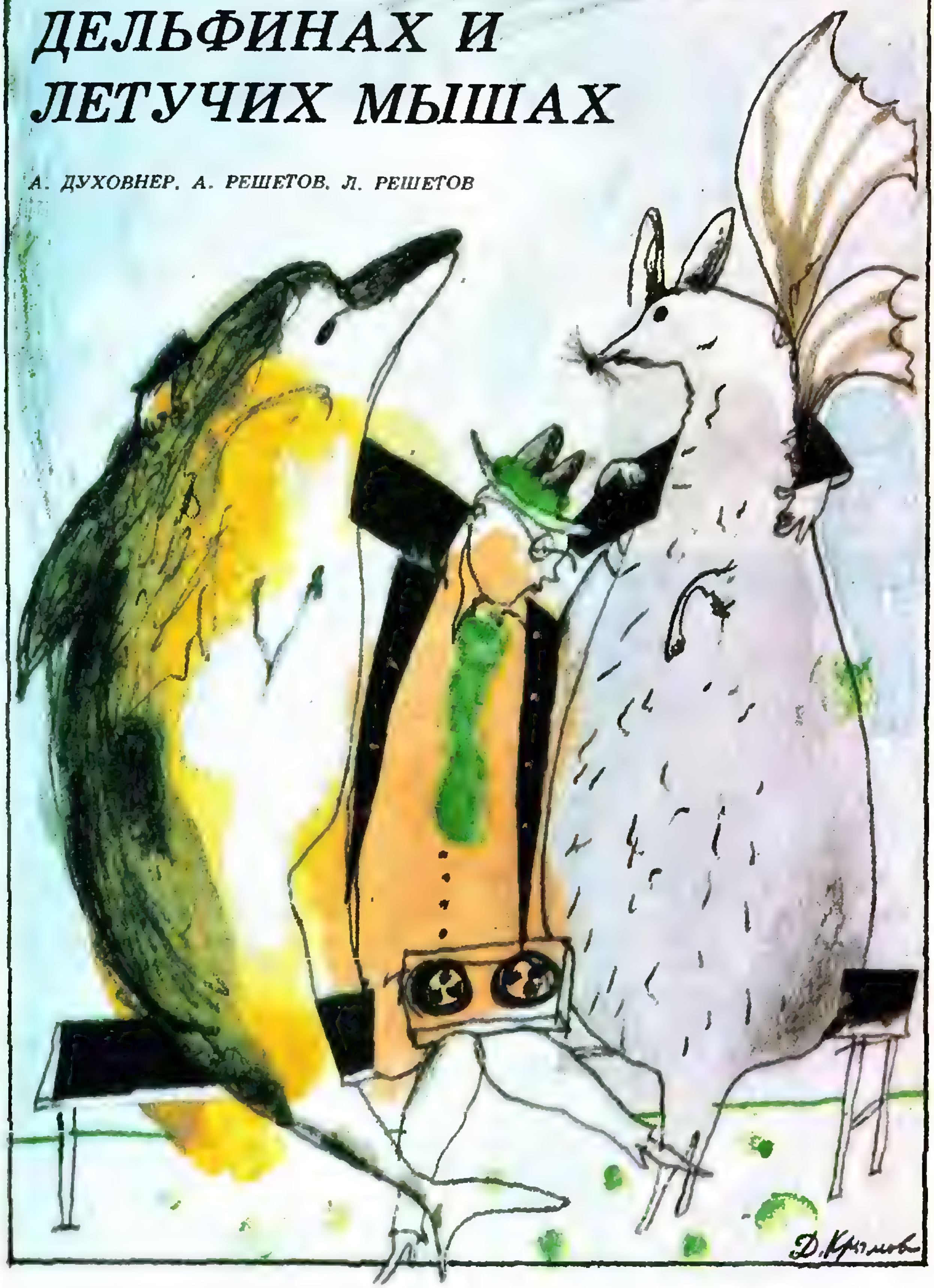
(Окончание см. на с. 22)

---

*) В настоящее время известно уже более 30 простых чисел Мерсенна, максимальное из которых соответствует простому числу $p=216\,091$.

ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ, ДЕЛЬФИНАХ И ЛЕТУЧИХ МЫШАХ

А. ДУХОВНЕР, А. РЕШЕТОВ, Л. РЕШЕТОВ



Вы, наверное, слышали о том, что дельфины и киты «переговариваются» с помощью звуковых сигналов. Не новость для вас и тот факт, что летучая мышь «видит» с помощью ультразвукового локатора. Мы хотим познакомить вас с тем, какую роль в их акустическом мире играет интерференция. Само собой, речь пойдет об интерференции акустических сигналов, или, как говорят, об акустической интерференции. Но сначала вспомним некоторые общие факты.

Наложение волн одинаковых периодов (интерференция), при котором происходит перераспределение энергии в пространстве, является одним из важнейших проявлений всех волновых процессов. Устойчивая во времени интерференция имеет место только для когерентных волн, источники которых колеблются с одинаковой частотой и сохраняют постоянную разность фаз в продолжение времени наблюдения. При этом происходит увеличение амплитуды колебаний в одних точках пространства и уменьшение в других — в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Если колебания источников волн происходят по гармоническому (синусоидальному) закону, то амплитуда результирующей волны в какой-либо точке пространства определяется формулой

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi}, \qquad (1)$$

где A_1, A_2 — амплитуды складывающихся волн, а $\varphi=|\varphi_2-\varphi_1|$ — разность их фаз в рассматриваемой точке.

Практическое значение имеет наложение волн от одного источника колебаний, пришедших в место приема различными путями. В этом случае величина φ зависит от разности расстояний, проходимых волнами от источника до точки интерференции (от разности хода Δr):

$$\varphi=k|r_2-r_1|=k\Delta r, \qquad (2)$$

где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны в данной среде.

Полезно вспомнить, почему невозможно получить интерференционную картинку от двух разных источников света. Дело в том, что световая волна состоит из огромного числа коротких световых импульсов, излученных отдельными атомами. Длительность импульсов ($10^{-8}-10^{-9}$ с) гораздо больше периода колебаний видимого света, равного по порядку величины 10^{-15} с; это значит, что каждый импульс представляет собой как бы кусочек волны, содержащий большое число отдельных колебаний. В нелазерных источниках испускание таких импульсов разными атомами происходит совершенно хаотически, вразнобой. Поэтому при встрече двух импульсов разность фаз φ в (1) может быть совершенно произвольной, и интерференцию наблюдать невозможно. Выход известен: свет проходит от источника к точке наблюдения разными путями, и происходит интерференция между двумя импульсами-близнецами, испущенными одним и тем же атомом. В этом случае φ зависит только от разности хода Δr и длины волны света λ (см. (2)). Четкая картинка получается только при небольших Δr. Именно сильная зависимость φ от Δr и λ позволяет использовать явление оптической интерференции в большом количестве прецизионных (сверхточных) приборов.

Теперь перейдем к описанию акустической сигнализации и эхолокации. В обоих случаях сигнал имеет импульсную структуру. Источник посылает один за другим короткие импульсы; прием этих импульсов позволяет наблюдателю получить заложенную в сигнале информацию или просто определить местонахождение источника. Передача информации в виде последовательности импульсов широко используется как в радиотехнике, так и в акустических приборах; ниже мы подробнее опишем, как ей пользуются киты и дельфины. В случае эхолокации (которую используют дельфины и летучие мыши) информацию несет сигнал, пришедший назад после отражения от исследуемого объекта.

Чтобы обеспечить четкий прием сигнала на фоне помех, выгодно использовать импульсы, содержащие волны постоянной частоты. Но здесь же кроется и опасность: если импульс пришел в точку наблюдения двумя или несколькими путями, то возможно полное или частичное ослабление этого импульса за счет интерференции (если разность фаз равна π, 3π и т. д.). Потеря даже нескольких импульсов может привести к существенному искажению информации, к потере объекта поиска и т. д.

В случае технического применения необходимая надежность приема сигналов достигается значительным увеличением мощности излучения и использованием автоматической регулировки усиления. Наш же рассказ о том, каким остроумным способом летучие мыши и дельфины устраняют влияние случайных изменений суммарной амплитуды при интерференции волн и даже находят этому явлению полезное применение. Оказывается, для этого им достаточно определенным образом менять частоту сигнала в пределах каждого импульса*).

Для описания конкретных примеров акустической локации (для летучих мышей и дельфинов) и сигнализации (для дельфинов и китов) важна не только информация о длительности сигналов и их частотной структуре, но и вид так называемой диаграммы направленности излучения и приема (во многих случаях эти диаграммы можно считать одинаковыми).

Диаграмма направленности излучения и приема является результатом наложения волн от каждого элементарного участка поверхности антенны, которые, согласно принципу Гюйгенса, являются источниками сферических волн. В направлении перпендикуляра к поверхности антенны волны от каждого элементарного участка суммируются всегда в фазе, и сигнал максимальный. В других направлениях колебания от различных участков суммируются с некоторой разностью фаз φ и, согласно формуле (1), суммарная амплитуда меньше максимальной. Во многих направлениях колебания различных участков суммируются в противофазе, и интенсивность равна нулю. Ширина угла γ главного лепестка (рис. 1) обратно пропорциональна частоте колебаний и линейному размеру излучающей поверхности.

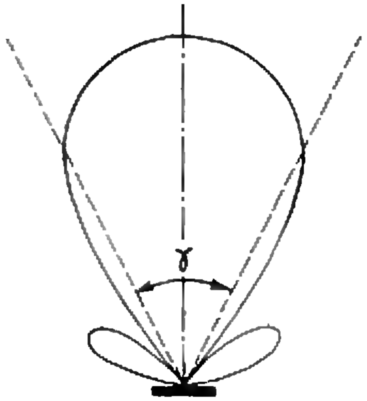


Рис. 1. Диаграмма направленности излучения.

Летучие мыши охотятся в темное время суток, а днем спят. Поиск и преследование насекомых и бабочек на фоне скал, деревьев, листьев и других хорошо отражающих акустические волны поверхностей они осуществляют при помощи своих звуковых локаторов. Импульсы, излучаемые летучими мышами, отличаются большим разнообразием. Некоторые виды летучих мышей излучают импульсы длительностью от 0,2 до 5 мс, другие — импульсы длительностью до 100 мс. В пределах одного импульса частота излучаемых колебаний может меняться на октаву (в два раза), например от 100 до 50 кГц. В длинных сигналах некоторые семейства мышей меняют частоту только в начале или в конце каждого импульса.

Для акустической антенны летучих мышей величина угла γ основного лепестка диаграммы направленности равна примерно 60°. Широкий угол главного лепестка диаграммы направленности ускоряет поиски насекомых и бабочек, но уменьшает точность определения направления, так как изменения интенсивности сигнала около оси лепестка незначительны. Увеличить точность определения направления можно при использовании диаграммы из двух лепестков, имеющих узкую область пересечения (темный участок на рисунке 2). Эту область называют равносигнальной, так как только в этом направлении сигналы двух лепестков имеют сравнимую интенсивность. Такую диаграмму можно получить с помощью двух идентичных излучающих поверхностей, расположенных под некоторым углом с разных сторон от центральной оси системы, или поочередным перемещением одной такой поверхности в два разных положения.

---

*) Подробнее с этими вопросами вы можете познакомиться в книге, написанной авторами этой статьи: «Летучая мышь, гидролокатор и безопасность плавания» (Л.: Судостроение, 1989).

Орган слуха дельфинов реагирует на широкий спектр частот — от 1 до 200 кГц. Гидролокацию они осуществляют на высоких частотах. Вследствие дифракции волны хорошо отражаются только от объектов, линейные размеры которых больше длины волны λ. Так как $\lambda = v/f$, где v — скорость распространения акустической волны, для обнаружения относительно мелкой рыбы дельфины должны излучать более высокие частоты. Высокие частоты и относительно большие размеры излучателя уменьшают ширину диаграммы направленности излучения, и она равна 10—15°. При гидролокации дельфины излучают короткие импульсы («щелчки») от 0,01 до 0,1 мс. Вероятность наложения волн при узком угле основного лепестка диаграммы направленности и коротких импульсах незначительна. Частоту колебаний в импульсах гидролокации они не меняют.

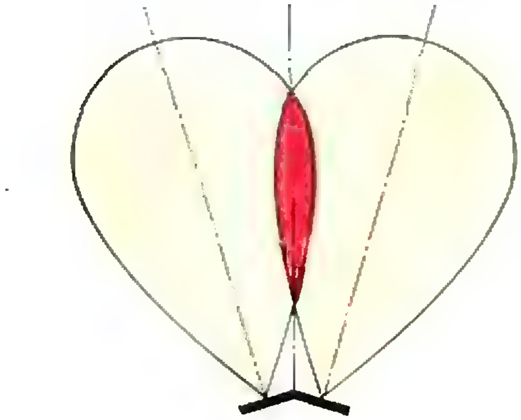


Рис. 2. Диаграмма направленности излучения двух идентичных антенн.

Совершенно другая ситуация имеет место при акустической сигнализации. Дельфины и другие китообразные ведут стадный образ жизни. Поэтому им необходимы сигналы связи и оповещения ненаправленного излучения большой дальности приема. Достигли они этого применением наиболее низких частот. При частотах колебаний 8—10 кГц происходит практически ненаправленное излучение (диаграмма направленности имеет вид круга). Дальность приема акустических сигналов у китообразных примерно в 100 раз больше предела зрительной видимости. Согласно наблюдениям, кашалоты слышат друг друга на расстояниях до трех миль (одна морская миля равна 1852,3 м). Их детеныш может отплывать довольно далеко от родителей, и они все время знают, где он находится (прием звука имеет направленный характер). Детеныш также знает, где находятся его родители. Отметим, что роль зрения при контактах очень невелика. Киты, конечно, видят, но на малых расстояниях. Луч лазера проникает в толщу океана на глубину до 100 м, а дальность зрительной видимости даже в прозрачной воде не превышает 30—60 м. Акустическую связь и оповещение дельфины осуществляют сигналами относительно больших длительностей — от 5 до 1000 мс (коммуникационные сигналы — «свисты»). Большие дальности распространения акустических волн относительно низких частот, большие длительности импульсов, ненаправленное излучение приводят к тому, что волны от одного источника таких колебаний приходят к месту приема, как правило, двумя или несколькими путями. Характерной особенностью акустического канала связи в морях и океанах является «многолучевость», и при неизменной частоте сигнала часто происходило бы случайное его ослабление из-за интерференции.

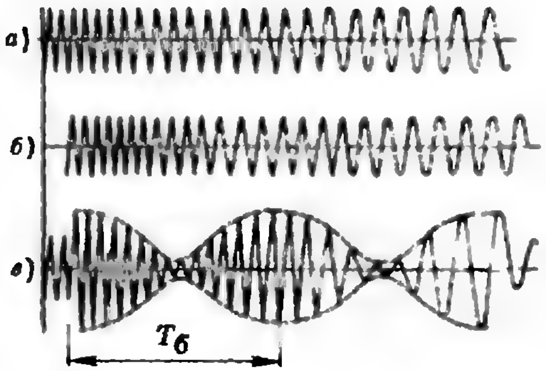


Рис. 3. Суммирование колебаний плавно изменяющихся частот: а) первый импульс; б) второй импульс; в) результат сложения.

Вместо простых сигналов постоянной частоты животные излучают сложные. Они плавно изменяют период (частоту) колебаний, заполняющих каждый импульс. Наложение таких акустических волн приводит к тому, что в месте приема они суммируются с разными частотами. К чему же приводит сложение таких волн? Выясним это на простейшем примере — сложении колебаний, имеющих одинаковую амплитуду A. Согласно тригонометрической формуле $A\sin\alpha+A\sin\beta=2A\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, при суммировании колебаний двух разных круговых частот ω_1, ω_2 результирующая амплитуда меняется по закону $2A\left|\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right|$, а частота заполнения равна $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Когда ω_1 и ω_2 отличаются незначительно, суммарное колебание называют биением; частота изменения амплитуды равна разности частот $f_б=1/T_б=|f_1-f_2|$ (рис. 3). Период биений, возникающих при сложении волн, пришедших в место приема различными путями от источника переменной частоты, зависит от разности хода волн Δr, так как от Δr зависит сдвиг частот складывающихся колебаний.

При излучении колебаний частоту можно менять таким образом, что при приеме волн, пришедших двумя или несколькими путями, период биений будет не больше длительности импульса. Тогда при приеме таких сигналов за время длительности импульса будет не менее одного максимума (A_1+A_2) и одного минимума (A_1-A_2) амплитуды. Средняя мощность каждого такого импульса связи и оповещения дельфина при распространении волн двумя или несколькими путями остается неизменной. Это же относится и к каждому импульсу летучей мыши при отражении волн от двух рядом расположенных объектов. Частота биений $f_б=|f_2(t)-f_1(t)|$ характеризует запаздывание второй волны относительно первой, пришедшей более коротким путем. По частоте биений летучая мышь может определить удаление жертвы охоты от хорошо отражающего фона (скалы, ствола дерева, листьев).

Совершенные числа

(Начало см. на с. 13)

Эдмунда Ландау, одного из крупнейших специалистов в области теории чисел:

«...Две проблемы остаются нерешенными до сих пор:

— Имеется ли бесконечное множество четных совершенных чисел? — Не знаю.

— Имеется ли бесконечное множество нечетных совершенных чисел? — Я даже не знаю, существует ли одно такое число».

Вряд ли к этому нужно что-либо добавлять.

Упражнения

1. Докажите, что число вида $2^{k-1}\cdot(2^k-1)$, где 2^k-1 — простое число, является совершенным.

2. Обозначим через $\sigma(n)$, где n — натуральное число, сумму всех делителей числа n. Докажите, что если числа n_1 и n_2 — взаимно просты, то $\sigma(n_1\cdot n_2)=\sigma(n_1)\cdot\sigma(n_2)$.

3. Пусть n — четное совершенное число. Тогда $\sigma(n)=2n$. Представьте n в виде $2^{k-1}b$, где $k\geqslant 2$, а b — нечетно, и докажите, что $b=(2^k-1)c$. Докажите далее, что $c=1$ и 2^k-1 — простое число.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1990 года.

Награждены свидетельством и значком журнала «Квант» и получили право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады школьников 1991 года:

По математике

Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 2, 11 кл.
Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 58, 9 кл.
Белоус Ю.— Нижний Тагил, с. ш. № 9, 10 кл.
Гетун С.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Зарьков К.— Минск, МССШ при БГУ, 10 кл.
Кириллов И.— Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 11 кл.
Коваценко С.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Корниенко А.— Днепропетровск, с. ш. № 36, 10 кл.
Корсак С.— п. Штефан-Водэ МССР, с. ш. № 2, 10 кл.
Кудрявцева А.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Панов Т.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Петросян А.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Пикялите Е.— Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Разин А.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Рычков В.— Самара, с. ш. № 135, 11 кл.
Саввиди К.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Сарсембаев А.— Алма-Ата, РФМОШИ, 10 кл.
Сафронов А.— Томск, с. ш. № 7, 9 кл.
Сироткин Г.— Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
Славкин М.— Минск, с. ш. № 19, 11 кл.
Солодов А.— Воронеж, колледж № 1, 11 кл.
Солодушкин А.— Томск, с. ш. № 7, 9 кл.
Хасин М.— Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.

По физике

Абдримов А.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Валюнас Н.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Барашков М.— Осиповка Могилевской обл., Осиповская с. ш., 11 кл.
Вейтас Г.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Гребенев П.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 9 кл.
Гуляев Н.— Н. Новгород, с. ш. № 82, 10 кл.
Гуц Ю.— Ровно, с. ш. № 13, 11 кл.
Давлетов А.— Алма-Ата, с. ш. № 23, 11 кл.
Дементьев А.— Чебоксары, с. ш. № 45, 11 кл.
Диброва С.— Киев, с. ш. №206, 10 кл.
Дубовик А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Душамов Д.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Журавлев И.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Калюжный К.— Одесса, с. ш. № 17, 11 кл.
Климчук Е.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 11 кл.
Козлов В.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Колпаков М.— п. Почет Красноярского края, Почетская с. ш., 11 кл.
Логинов Д.— Тула, с. ш. № 73, 11 кл.
Перадзе Г.— Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 11 кл.
Польшин С.— Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.
Рахимов У.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Сапаев У.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Снежко А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Супрун Д.— Минск, с. ш. № 50, 11 кл.
Томилко М.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Третьяков В.— Алма-Ата, РФМОШИ, 10 кл.
Третьяков Ю.— Алма-Ата, РФМОШИ, 11 кл.
Тыртычко В.— Кустанай, с. ш. № 17, 11 кл.
Храбров Р.— Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Шаповалов Г.— Киев, с. ш. № 209, 11 кл.

Награждены свидетельством и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе (в этот список вошли победители конкурса, имеющие право участвовать в республиканских олимпиадах как победители прошлогодних олимпиад, учащиеся школ городов и интернатов, выставляющих свою команду сразу на Всесоюзную олимпиаду, а также те, кто не вошел в первый список из-за ограниченности числа предоставленных нам мест):

По математике

Андриенко Д.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Бородин А.— Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Бринюк В.— Донецк, с. ш. № 35, 9 кл.
Волченко К.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Гельбанд М.— Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
Егорова И.— Ленинград, с. ш. № 76, 10 кл.
Жеглов А.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Зингер А.— Москва, с. ш. № 43, 10 кл.
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл., Сунская с. ш., 10 кл.

(Окончание см. на с. 32)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1281» или «Ф1288». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1281, M1282, M1284 и M1285 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

Задачи Ф1289, Ф1291 и Ф1292 предлагались на заключительном этапе XVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Задачи

M1281 — M1285, Ф1288 — Ф1292

M1281. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4.

Н. Васильев

M1282. Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограмма) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

В. Произволов

M1283. Квадрат 99×99 разбит на фигурки трех типов (рис. 1).

а) Докажите, что фигурок первого типа не меньше чем 199.

б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа ровно 199.

Д. Фомин

M1284. На основании AB равнобедренного треугольника ACB выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневписанная в треугольник ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

И. Шарыгин

M1285. Имеется колода из n карт, сложенных по порядку: 1, 2, 3, ..., n. Разрешается взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или в конец). Пусть $M(n)$ — наименьшее число таких операций, необходимое, чтобы сложить карты в обратном порядке. Докажите, что

а) $M(9)\leqslant 5$, б) $M(52)\leqslant 26$, в)* $M(52)\geqslant 17$, г)* $M(52)\geqslant 26$.

Найдите $M(n)$ для любого $n>2$.

Г. Воронин

Ф1288. Посредине большой круглой комнаты диаметром 20 м с высотой потолка 3,2 м стоит большой сейф в виде куба с ребром 3 м. При помощи игрушечной катапульты, расположенной на полу, мы хотим забросить камешек на середину «крыши» сейфа так, чтобы камешек не коснулся потолка. Какая минимальная скорость для этого необходима? При какой высоте потолка в комнате это вообще возможно?

З. Рафаилов

Ф1289. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда с температурой 0 °С и прочно прикрепили его ко дну, а затем залили его таким же по массе количеством воды. Вода достигла уровня $h=20$ см, полностью покрыв лед. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия ее уровень опустился на $b=0{,}4$ см. Данные возьмите из таблиц.

М. Гаврилов

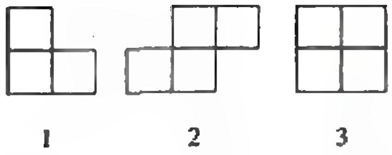


Рис. 1.

Задачник «Кванта»

Ф1290. Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 2). Проводящая перемычка длиной L с конденсатором C_3 касается шин. Перпендикулярно плоскости шин направлено однородное магнитное поле индукцией B. Перемычка движется с постоянной скоростью v. Найдите заряд на конденсаторе C_3.

Г. Федотович

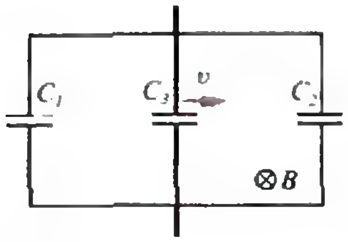


Рис. 2.

Ф1291. Схема из двух одинаковых резисторов и конденсатора подключена к сети переменного напряжения 36 В, 50 Гц (рис. 3). Показания первого амперметра 0,3 А, второго — 0,2 А. Считая приборы идеальными, найдите сопротивление резисторов и емкость конденсатора.

А. Зильберман

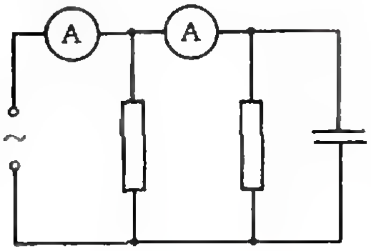


Рис. 3.

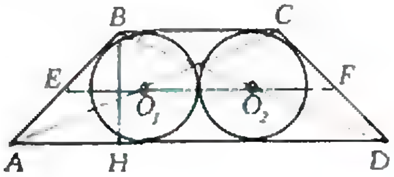
Ф1292. На расстоянии 20 см от точечного источника света помещена собирающая линза диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см, а на расстоянии 50 см от источника — собирающая линза диаметром 10 см с фокусным расстоянием 20 см. Главные оптические оси линз совпадают, источник находится на оси. На каком расстоянии за большой линзой нужно поместить экран, чтобы световое пятно на нем имело минимальный внешний диаметр? Найдите диаметр этого пятна. Изменится ли освещенность пятна, если убрать маленькую линзу?

А. Сашин

Решения задач

М1256, М1257, М1259, М1260, Ф1268 — Ф1272

***М1256.** Две равные окружности касаются друг друга. Постройте трапецию такую, что каждая из окружностей касается трех ее сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.*



Пусть построение выполнено (см. рис.). EF — средняя линия трапеции $ABCD$, O_1 и O_2 — центры окружностей, BH — высота трапеции; $AD=a$, $BC=b$, $a>b$. Тогда

$$EO_1=\frac{b}{2},\ EO_2=\frac{b}{2}+2R=\frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$AH=\frac{a-b}{2}=2R \text{ и } \angle BAD=\frac{\pi}{4},$$

после чего способ построения очевиден.

В. Сендеров

***М1257*.** Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел a_1,*

Предположим, напротив, что для каждого из a_i ($i=1, 2, ..., m$) найдется целая точка x_i, в которой $F(x_i)$ не делится на a_i. Разложив каждое a_i на простые множители, выделим тот множитель вида $p_i^{k_i}$ (p_i — простое), на который не делится $F(x_i)$. Из степеней $q_i=p_i^{k_i}$ с одинаковыми p_i оставим одну — с наибольшим

$a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n.

показателем; можно считать, что останутся числа q_1, q_2, ..., q_r ($r \leqslant m$). Важно, что все они взаимно просты, причем если число b не делится на $q_1q_2\ldots q_r$, то оно не делится ни на одно из чисел a_1, a_2, ..., a_m. Поскольку $F(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $F(x_i)$ не делится на q_i, то и $F(x_i+kq_i)$ при любом целом k не делится на q_i: в самом деле, разность

$$F(x_i+kq_i)-F(x_i)$$

делится на kq_i, поскольку разность y^j-x^j делится на $y-x$ при любых целых x, y и натуральном j.

Но бесконечные арифметические прогрессии x_i+kq_i ($i=1, 2, \ldots, r$) со взаимно простыми разностями q_i обязательно имеют непустое пересечение (это — *китайская теорема об остатках*, приведенная на полях). Таким образом, существует целое x, для которого $F(x)$ не делится ни на одно из q_i и тем самым — ни на одно из a_i, что противоречит условию.

Задачу можно решать также индукцией (по $a_1+a_2+\ldots+a_m$ или по числу простых множителей $a_1a_2\ldots a_m$).

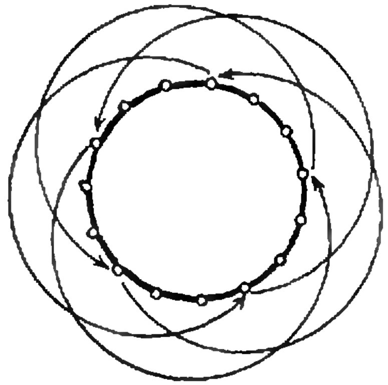
Д. Фомин

Китайская теорема об остатках

Пусть натуральные числа q_1, q_2, ..., q_r попарно взаимно просты. Тогда для любых целых x_1, x_2, ..., x_r найдется целое x такое, что $x-x_i$ делится на q_i для каждого $i=1, 2, \ldots, r$.

Срок решения задачи М1258 продлен (см. поправку в № 3 на с. 30).

М1259. *На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек ($n \geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется хорошей, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.*



Ответ: наименьшее k равно $n-1$, если $n-2$ делится на 3, и n в противном случае.

Удобно считать, что соседние точки множества E расположены на расстоянии 1 друг от друга (расстояния меряются по окружности).

Разобьем все $2n-1$ точек множества E на циклы по следующему правилу: две точки принадлежат одному циклу, если от одной из них можно прийти в другую шагами длины $n+1$, т. е. перешагивая через n промежуточных точек. Очевидно, шаг длиной $n+1$ на окружности длины $2n-1$,— это то же, что шаг длиной $n-2$ в противоположном направлении. Поэтому точки, отстоящие на 3, принадлежат одному циклу.

Если $n=3m+2$, то $2n-1=6m+3$ и $n-2=3m$ делятся на 3, поэтому циклов 3, в каждом по $2m+1$ точек (см. рисунок; здесь $n=8$, $2n-1=15$, красными стрелками показан один из циклов). Если в каждом цикле расположить m черных точек так, чтобы отстоящие от них на один шаг (в ту и в другую сторону) точки были белыми, ни одной пары черных точек на расстоянии $n+1$ не будет. С другой стороны, при $k \geqslant 3m+1=n-1$ в некоторый цикл попадут не менее $m+1$ черных точек, а среди них заведомо есть две, отстоящие на один шаг.

Если $n=3m$ или $n=3m+1$, то $2n-1$ не делится на 3, так что все точки принадлежат одному циклу, и черных точек должно быть не менее n (иначе их можно расположить в цикле через одну с белыми).

Е. Малинникова

М1260*. Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $(2^n+1)/n^2$ — целое число.

Малая теорема Ферма
Если p — простое число, a — любое целое взаимно простое с p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Эта теорема, а также китайская теорема об остатках, которая использована выше, наряду с другими основными теоремами арифметики будут обсуждаться в одном из ближайших номеров «Кванта» в статье «Арифметика остатков».

Ответ: $n=3$ — единственное нужное число.

Будем обозначать наибольший общий делитель целых чисел a, b через (a, b).

В решении постоянно будут использоваться такие леммы:

(1) Если p — простое, то $2^{p-1}-1$ делится на p. Это — частный случай малой теоремы Ферма.

(2) Если a, b, p — натуральные числа такие, что 2^a-1 и 2^b-1 делятся на p, то и $2^{(a,\,b)}-1$ делится на p.

Последнее утверждение мы докажем в конце решения.

Вернемся к исходной задаче. Пусть 2^n+1 делится на n, p — наименьший простой делитель n (n и p — нечетные числа, больше 1.) Поскольку $2^{2n}-1=(2^n+1)(2^n-1)$ делится на p и согласно (1) $2^{p-1}-1$ делится на p, а $(2n, p-1)=2$ (ведь любой простой делитель $2n$, кроме 2, больше p), в соответствии с (2) 2^2-1 делится на p, т. е. $p=3$.

Положим $n=3m$. Если $m=1$, то $n=3$ и $2^n+1=9$ делится на $n^2=9$. Докажем, что случай $m>1$ невозможен.

Допустим сначала, что m делится на 3, так что $n=3^kl$, $k>1$ и $(l, 3)=1$. Если 2^n+1 делится на n^2, то оно делится на 3^{2k}. Разложим $2^n+1=(-1+3)^n+1$ по формуле бинома Ньютона и учтем, что n нечетно:

$$1+(-1+3)^n=1+(-1)^n+3n-$$

$$-3^2\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+(-1)^{n-s}3^s\frac{n!}{s!}+\ldots+3^n.$$

Отсюда видно, что $3n=3^{k+1}l$ делится на 3^{k+2}. (Остальные члены $3^sn!/s!$ ($s\geqslant 2$) делятся на 3^{k+2} поскольку степень 3, на которую делится $s!$, меньше $\frac{s}{3}+\frac{s}{9}+\frac{s}{27}+\ldots=\frac{s}{2}$, n делится на 3^k, и потому 3 входит с показателем большим $s-s/2+k=s/2+k\geqslant k+1$.) Но это противоречит тому, что $(l, 3)=1$.

Пусть теперь q — наименьший простой делитель m, $q\geqslant 5$. Как и выше, используем (1) и (2). Поскольку $2^{2n}-1$ и $2^{q-1}-1$ делятся на q, $d=(2n, q-1)$ может равняться лишь 2 или 6 (ведь простые делители $n=3m$, кроме 3, больше q), причем 2^d-1 делится на $q\geqslant 5$. Остается рассмотреть случай $d=6$. Тогда $2^6-1=63$, $q=7$. Поскольку 2^3-1 делится на 7, то $2^n-1=2^{3m}-1$ делится на 7, но тогда 2^n+1 не делится на 7 и тем самым на n.

Осталось доказать лемму (2). Мы докажем эквивалентное утверждение:

$$(2^a-1,\ 2^b-1)=2^{(a,\,b)}-1.$$

Вспомним, что наибольший общий делитель (a, b) можно искать с помощью алгоритма Евклида: если $a>b$, то

$$(a, b)=(a-b, b), \qquad (*)$$

переходя с помощью шагов (*) к меньшим числам — меняя при надобности их местами, $(x, y)=(y, x)$ — мы приходим к паре $(d, 0)$, где $d=(a, b)$

Заметим теперь, что (при $a>b>1$)

$$(2^a-1,\ 2^b-1)=(2^a-2^b,\ 2^b-1)=(2^b(2^{a-b}-1),\ 2^b-1)=$$
$$=(2^{a-b}-1,\ 2^b-1)\quad (**)$$

в последнем равенстве используется, что число 2^k-1 при $k>1$ нечетны. Таким образом, каждому шагу (*) соответствует шаг (**) и одновременно с парой $(d, 0)$ в первой цепочке алгоритма Евклида мы получим пару $(2^d-1,\ 2^0-1)=(2^d-1,\ 0)$ во второй цепочке. Отсюда следует, что

$$(2^a-1,\ 2^b-1)=2^d-1.$$

Е. Малинникова

Ф1268. *Сферический стеклянный аквариум заполнен водой и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. После того как оболочку мгновенно затормозили и отпустили, угловая скорость вращения установилась в 1,5 раз меньшей, чем была вначале. Какую часть массы аквариума составляет вода? Считать, что стекло имеет плотность в три раза большую, чем вода.*

Эта задача — упрощенный вариант третьей задачи теоретического тура Международной физической олимпиады школьников 1990 года.

Для решения задачи нужно выйти за пределы школьной программы по физике (для наших учащихся) — воспользоваться законом сохранения момента импульса и формулой для момента инерции шара в случае, когда ось вращения проходит через его центр. Так, момент инерции водяного «шара» радиусом R и плотностью ρ равен

$$I_1=\frac{2}{5}mR^2=\frac{2}{5}\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3R^2=\frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Чтобы записать момент инерции стеклянной оболочки (обозначим внешний радиус R_1), нужно из выражения для момента инерции сплошного шара радиусом R_1 вычесть момент инерции «внутреннего» шара радиусом R:

$$I_2=\frac{8}{15}\pi 3\rho R_1^5-\frac{8}{15}\pi 3\rho R^5=\frac{8}{5}\pi\rho(R_1^5-R^5).$$

Общий момент инерции стеклянного аквариума и находящейся в нем воды равен сумме моментов инерции I_1 и I_2:

$$I_{\text{общ}}=I_1+I_2.$$

Теперь запишем закон сохранения момент импульса для замкнутой системы «аквариум — вода»:

$$\omega_0 I_1=\frac{2}{3}\omega_0(I_1+I_2),$$

или

$$I_2=1/2I_1.$$

Отсюда находим соотношение между радиусами R_1 и R:

$$\frac{8}{5}\pi\rho(R_1^5-R^5)=\frac{1}{2}\frac{8}{15}\pi\rho R^5,$$

или

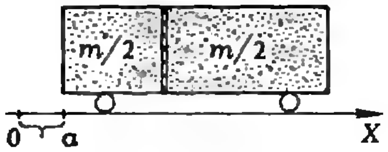
$$R_1^5/R^5=7/6$$

и отношение масс воды и аквариума с водой:

$$\frac{m_\text{в}}{m_\text{общ}}=\frac{4/3\pi\rho R^3}{4/3\pi\rho R^3+4/3\pi 3\rho(R_1^3-R^3)}=\frac{1}{1+3(R_1^3/R^3-1)}\approx 0{,}8.$$

О. Нидерландский

Ф1269. *Вагон массой M и длиной L может без трения двигаться по рельсам. Он заполнен газом и разделен посередине подвижной невесомой вертикальной перегородкой. Вначале температура газа равна T. В правой половине вагона включают нагреватель и доводят температуру газа до 2T, в левой части температура остается прежней. Найдите перемещение вагона, если масса всего газа m.*



Так как до включения нагревателя давление, объем и температура в левой и правой половинах вагона одинаковы, одинаковы и массы газа слева и справа от перегородки. При установившихся температурах после включения нагревателя давление в обеих частях вагона снова одинаково, тогда как объемы различны. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для каждой из частей:

$$pV_1=\nu RT,\ pV_2=2\nu RT.$$

Отсюда получаем, что

$$V_1/V_2=1/2,$$

поэтому перегородка теперь находится на расстоянии $l=1/3L$ от левого края вагона.

Направим горизонтальную ось X вдоль рельсов и выберем начало отсчета так, чтобы вначале левый край вагона имел координату $x=0$. При этом координата центра масс вагона будет равна

$$x_1=\frac{ML/2+mL/2}{M+m}=\frac{L}{2}.$$

При изменении температуры газа справа от перегородки вагон переместился вправо на некоторое расстояние a (см. рисунок). Теперь центр масс газа в левой части вагона находится на расстоянии $L/6$ от левого края, а в правой части — на расстоянии $1/3L+1/2\cdot\ 2/3L=$ $=2/3L$. Новая координата центра масс системы равна

$$x_2=\frac{M(L/2+a)+m/2(L/6+a)+m/2(2/3L+a)}{M+m}=$$

$$=a+\frac{ML/2+m5/12L}{M+m}.$$

Но, так как по горизонтальной оси на систему не действуют внешние силы, положение центра масс системы не изменилось:

$$x_1=x_2.$$

Отсюда находим, что вагон переместился на расстояние

$$a=\frac{L}{2}-\frac{ML/2+m5/12L}{M+m}=\frac{L}{12}\frac{m}{M+m}.$$

А. Выцко

Ф1270. *Неоновая лампа НЛ (рис. 1) «вспыхивает» при увеличении напряже-*

После подключения конденсатора C_1 через резистор R начнет заряжаться конденсатор C_2. Когда напряжение на нем достигнет U_1, «вспыхнет» неоновая лампа.

ния до $U_1=80$ В и гаснет при уменьшении напряжения до $U_2=25$ В. Конденсатор C_1 емкостью 10 мкФ заряжают до напряжения $U_0=300$ В и подключают к схеме (генератору пилообразного напряжения). Сколько раз вспыхнет неоновая лампа? Какое количество теплоты выделится в системе? $C_2=0{,}1$ мкФ, $R=1$ МОм.

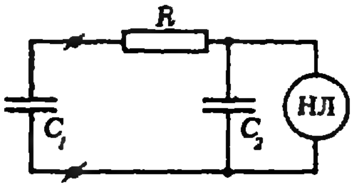


Рис. 1.

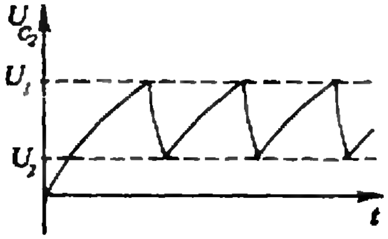


Рис. 2.

Через нее конденсатор C_2 будет разряжаться до напряжения U_2, при котором лампа погаснет (рис. 2). Поскольку сопротивление резистора много больше сопротивления горящей лампы, за время «вспышки» конденсатор C_1 не успеет существенно разрядиться. Следовательно, через лампу пройдет заряд

$$q=C_2(U_1-U_2).$$

«Вспышки» будут продолжаться до тех пор, пока конденсатор сможет заряжаться до U_1. Так как $C_1 \gg C_2$, после прекращения «вспышек» в системе останется заряд

$$q_к=C_1U_1.$$

Начальный заряд был

$$q_н=C_1U_0.$$

Таким образом, число вспышек лампы будет равно

$$N=\frac{q_н-q_к}{q}=\frac{C_1(U_0-U_1)}{C_2(U_1-U_2)}=400,$$

а количество теплоты, выделившееся в системе,—

$$Q=W_н-W_к=\frac{C_1U_0^2}{}-\frac{C_1U_1^2}{}\approx 0{,}42 \text{ Дж}.$$

Н. Павлов

Ф1271. Два одинаковых проволочных кольца радиусом R и массой m каждое находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна B_0 и направлена перпендикулярно плоскости колец (рис. 1). В точках соприкосновения A и C кольца имеют хороший электрический контакт. Угол $\alpha=\pi/3$. Какую скорость приобретает каждое из колец, если выключить магнитное поле? Электрическое сопротивление куска проволоки, из которого сделано кольцо, равно r. Индуктивность колец не учитывать. Смещением колец за время выключения поля пренебречь. Трения нет.

При выключении внешнего магнитного поля абсолютная величина магнитной индукции изменяется со временем от начального значения B_0 до нуля. Изменяющееся магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля, которое приводит в движение свободные заряды проволочных колец, т. е. возбуждает в кольцах электрический ток. Найдем эти токи для произвольного момента времени t после выключения магнитного поля.

Рассмотрим замкнутый контур $AfCbA$, совпадающий с контуром левого кольца (рис. 2). Согласно правилу Ленца, токи направлены по часовой стрелке, если магнитное поле направлено от нас за чертеж. Пусть на участке контура AfC ток равен $I_1(t)$, а на участке CbA — $I_2(t)$. ЭДС индукции, возникающая в нашем контуре, равна

$$\mathcal{E}_{инд}=-\pi R^2\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

По закону Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E}_{инд}=I_1(t)\frac{r}{2\pi R}l_{AfC}+I_2(t)\frac{r}{2\pi R}l_{CbA},$$

или, учитывая что длины дуг l_{AfC} и l_{CbA} равны соответственно $\pi R/3$ и $5\pi R/3$,

$$I_1(t)+5I_2(t)=-\frac{6\pi R^2}{r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

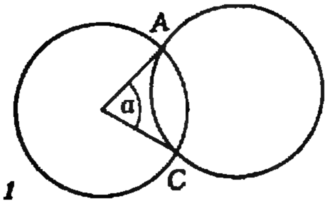


Рис. 1

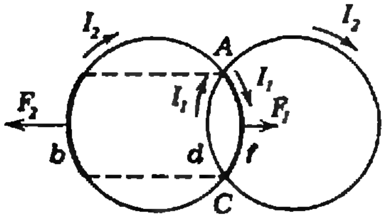


Рис. 2.

Совершенно аналогично запишем закон Ома для контура $AfCdA$:

$$I_1(t)=-\frac{(2\pi-3\sqrt{8})R^2}{2r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Подставив значение $I_1(t)$ в предыдущее уравнение, получим равенство

$$I_2(t)=-\frac{(10\pi+3\sqrt{3})R^2}{10r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент кольца Δl с током $I(t)$ будет действовать со стороны магнитного поля сила, равная по величине $\Delta F = I(t)\Delta l\cdot B(t)$ и направленная по радиусу кольца. В силу зеркальной симметрии этих сил относительно горизонтальной оси, проходящей через центры колец, результирующая сила, действующая на каждое кольцо в вертикальном направлении, равна нулю. Отсутствие симметрии сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр левого кольца ($I_1(t)\neq I_2(t)$), наоборот, приводит к появлению результирующей силы, действующей вдоль горизонтального направления. Очевидно, что она равна разности сил, действующих на дугу AfC и симметричную ей дугу на противоположной стороне кольца:

$$F=F_2-F_1=I_2(t)l_{AC}B(t)-I_1(t)l_{AC}B(t),$$

где l_{AC} — длина хорды, на которую опирается дуга AfC ($l_{AC}=2R\sin\alpha/2=R$). Окончательное выражение для силы F будет иметь вид

$$F=-\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B(t)\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Действие этой силы в течение малого промежутка времени Δt приводит к изменению импульса кольца:

$$m\Delta v=F\Delta t=-\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B(t)\Delta B(t)=-\frac{9\sqrt{3}R^3}{10r}\Delta(B^2(t)),$$

и, следовательно, кольцо приобретет скорость

$$v=\frac{9\sqrt{3}R^3}{10mr}B_0^2.$$

В. Можаев

Ф1272. *Электрическая лампочка включена в сеть 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили*

При подключении параллельно лампочке конденсатора ток лампочки может как увеличиться, так и уменьшиться — в зависимости от емкости конденсатора.

Обозначим U_0 напряжение в сети и U напряжение на лампочке (рис. 1). Нарисуем векторную диаграмму для этой цепи. Начнем с напряжения на лам-

конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определите его емкость.

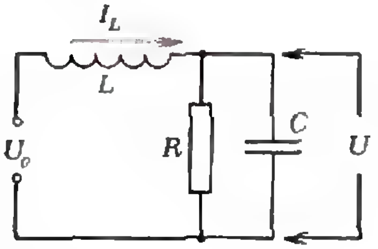


Рис. 1.

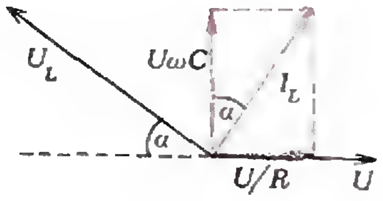


Рис. 2.

почке (и на конденсаторе) U (рис. 2). Ток через катушку I_L равен сумме токов лампочки и конденсатора:

$$I_L=\sqrt{(U/R)^2+(U\omega C)^2}\,,\ \cos\alpha=U\omega C/I_L.$$

Напряжение на катушке опережает ток в ней на $\pi/2$, а их величины связаны соотношением

$$U_L=\omega L I_L.$$

Найдем из рисунка 2 сумму напряжений U и U_L и приравняем ее к U_0:

$$(U_L\cos\alpha-U)^2+(U_L\sin\alpha)^2=U_0^2,$$

или

$$U_L^2+U^2-2UU_L\cos\alpha=U_0^2.$$

Подставляя соответствующие выражения для I_L, U_L и $\cos\alpha$ получим

$$U=\frac{U_0R}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2+\omega^4L^2C^2R^2-2\omega^2LCR^2}}=U_{\text{нач}}=\frac{U_0R}{\sqrt{\omega^2L^2+R^2}},$$

откуда

$$\omega^4L^2C^2R^2-2\omega^2LCR^2=0.$$

Значит, емкость конденсатора равна либо нулю (т. е. случай без конденсатора), либо

$$C=2/(\omega^2L)\approx 20\ \text{мкФ}.$$

А. Зильберман

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 23)

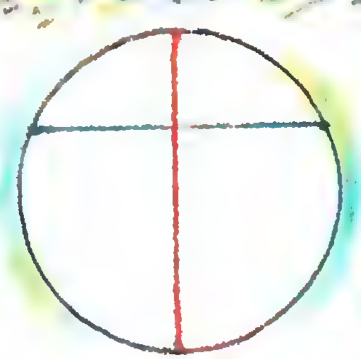
Исмаилов Р.— Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Кожевников П.— Калуга, с. ш. № 24, 10 кл.
Козачко А.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Лебедев А.— Москва, ФМШ при МГУ, 10 кл.
Львов А.— Москва, с. ш. № 43, 11 кл.
Майлыбаев А.— Москва, ФМШ при МГУ, 10 кл.
Медведев А.— Киев, с. ш. № 183, 6 кл.
Мильштейн К.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Мишачев К.— Липецк, с. ш. № 14, 11 кл.
Мучник Р.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Насыров А.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Некрашевич В.— с. Крутые Горы Киевской обл. Ковшеватская с. ш., 10 кл.
Номировский Д.— Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.
Перельман Е.— Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
Темкин М.— Москва, с. ш. № 57, 11 кл.
Титаренко А.— Москва, с. ш. № 198, 11 кл.
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Шиндлер А.— Феодосия, с. ш. № 17, 11 кл.

По физике
Воскобойник И.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Денисов И.— Осиповка Могилевской обл., Осиповская с. ш., 11 кл.
Джосюк С.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Добровольский С.— Днепропетровск, с. ш. № 111, 11 кл.
Ивченко Н.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Кацман И.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Легостаев В.— Кустанай, с. ш. № 17, 11 кл.
Махмудов М.— Исфара, школа-интернат, 10 кл.
Мацко Н.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Пежуренко А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Полищук И.— Долгопрудный, с. ш. № 5, 11 кл.
Тамошюнас В.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Чистый А.— Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
Чупахин С.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Шагаров Е.— Грозный, с. ш. № 10, 11 кл.
Шаракин С.— Москва, ФМШ, при МГУ, 11 кл.
Шуляк И.— Киев, ФМШ при КГУ, 11 кл.
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. № 41, 10 кл.

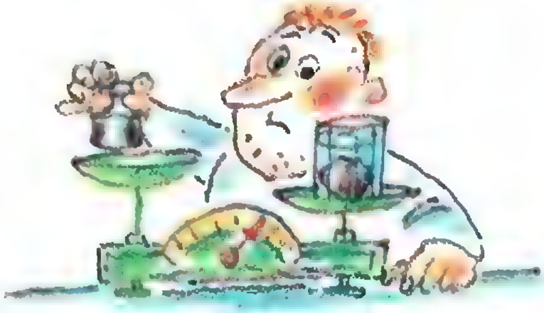
Задачи

1. Молочница на рынке торговала молоком из двух бочек, одна из которых вмещала молока втрое больше, чем другая. Когда в маленькой бочке оставался 21 литр молока, а в большой — 39 литров, молочница долила доверху маленькую бочку молоком из большой. В результате большая бочка оказалась наполненной ровно наполовину. Сколько молока она отлила и какого объема были бочки?

2. В круге проведены диаметр и перпендикулярная ему хорда. Докажите, что один из отрезков, на которые хорда разбивает диаметр, будет больше половины хорды, а другой — меньше.



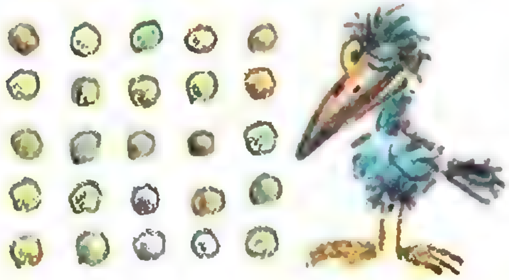
3. В стакан с водой положили камень, в результате этого часть воды вытекла. Легче или тяжелее стал стакан?



4. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

$$\begin{array}{r} +\,\text{АХИНЕЯ}\\ \text{АХИНЕЯ}\\ \hline \text{ЧЕПУХА}\end{array}$$

5. Горошины расположены в виде квадрата. Покажите, что в этом случае их можно расположить в виде двух равносторонних треугольников таких, что сторона одного из них была бы равна стороне квадрата, а другого — на единицу меньше.



Эти задачи нам предложили: Н. Антонович, А. Ханян, В. Вьюн, Г. Гальперин и Н. Авилов.

КАК КИПИТ ВОДА?

Дж. УОКЕР

Как ни обычно это явление, вы, скорее всего, не замечали всех его удивительных особенностей. С одними нельзя не считаться на практике, другие позволяют проводить весьма опасные трюки, которые когда-то показывали на карнавалах смельчаки.

Начнем с наблюдения. Нагреем кастрюлю водопроводной воды снизу пламенем или электрическим источником тепла. При нагревании воды растворенные в ней молекулы воздуха выделяются из раствора и собираются в крошечные пузырьки в трещинах на дне кастрюли. (Эти участки достаточно малы, чтобы поверхностное натяжение не дало воде залить их при наполнении кастрюли.) Со временем каждый пузырек раздувается, и его плавучесть увеличивается. В конце концов пузырек отрывается от трещины и всплывает на поверхность воды. Так как трещина еще заполнена воздухом, там начинает образовываться другой пузырек. Образование пузырьков воздуха — знак того, что вода нагревается, но это еще далеко не кипение.

Вода, соприкасающаяся с атмосферой, кипит при температуре, которую иногда называют нормальной температурой кипения $t_к$. Например, $t_к = 100\ ^\circ C$ при давлении воздуха 1 атм. Так как вода на дне кастрюли не соприкасается с атмосферой, она остается жидкостью, даже если нагревается выше $t_к$ на несколько градусов. При нагреве и перегреве она постоянно смешивается с остальной водой путем конвекции (горячая вода поднимается, и более холодная вода замещает ее).

При дальнейшем повышении температуры кастрюли нижний слой воды начнет испаряться, и молекулы воды будут собираться в маленькие пузырьки пара в сухих трещинах. Эта фаза кипения отмечена отрывистыми звуками, гудением и иногда жужжанием. Вода почти поет о том, как ей не нравится нагреваться. Каждый раз, как пузырек пара поднимается в более холодную воду, он внезапно исчезает, потому что пар внутри него конденсируется. При каждом таком исчезновении возникает звуковая волна — гудение, которое вы слышите. Когда температура всей массы воды повысится, пузырьки не смогут исчезнуть, пока они не оторвутся от трещин и не пройдут часть пути к поверхности воды (рис. 1).

Мы продолжаем публикацию статей из книги D. Halliday, R. Resnick. "Fundamentals of Physics", Third edition extended, 1988 (John Wiley & Sons, N. Y.).

Перевод этой статьи — О. Симоновой.

Если вы продолжаете нагревать кастрюлю, шум исчезающих пузырьков становится громче, а потом исчезает. Шум начинает смягчаться, когда вся вода достаточно горяча, чтобы пузырьки пара достигли поверхности; там они лопаются с легким всплеском. Теперь вода кипит.

Если ваш источник тепла — кухонная плита, история здесь кончается. Однако с помощью лабораторной горелки вы сможете продолжить повышать температуру кастрюли. Теперь пузырьки пара становятся столь многочисленными и отрываются от своих трещин так быстро, что они объединяются и образуют столбы пара, которые бурно и хаотически поднимаются вверх, иногда встречая ранее оторвавшиеся «куски» пара. Образование пузырьков и столбов пара называется пузырчатым (дословно «зародышевым») парообразованием — образование и рост пузырьков зависит от трещин, служащих зародышевыми участками.

Если вы продолжаете повышать температуру кастрюли после стадии столбов и «кусков», парообразование вступает в новую фазу, называемую переходным режимом. Теперь при каждом последующем повышении температуры кастрюли скорость передачи тепла воде уменьшается. Это уменьшение — не парадокс. В переходном режиме большая часть дна кастрюли покрыта слоем пара. Так как водяной пар передает тепло на порядок хуже, чем жидкость, передача тепла воде уменьшается. Чем горячее становится кастрюля, тем меньше ее прямой контакт с водой и тем хуже передача тепла. На практике эта ситуация может оказаться опасной. Например, для теплообменника, задача которого — снять тепло с источника. Если допустить, чтобы вода в теплообменнике вошла в переходный режим, источник может опасно перегреться из-за уменьшения отвода тепла.

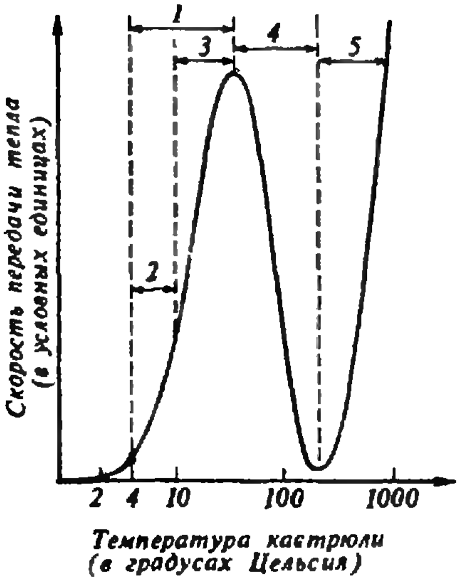


Рис. 1. Кривая кипения для воды. 1 — пузырчатое кипение, 2 — изолированные пузырьки, 3 — столбы и «куски» пара, 4 — переходный режим кипения, 5 — пленочное кипение.

Возможно, именно это явление стало причиной железнодорожной катастрофы — взрыва паровоза. Локомотив приводился в действие водяным паром. Бойлер с водой располагался над топкой, в которой горела нефть, и отделялся от нее надежным металлическим листом — так называемым потолочным листом. Горячие газы текли от топки по трубам, идущим в воде. Тепло передавалось воде по всей длине труб и по площади потолочного листа. Так как пар в бойлере находился в ограниченном объеме, он был под высоким давлением, что повысило температуру кипения воды.

Обычно это устройство безопасно. Однако, если потолочный лист слишком раскаляется, парообразование входит в переходный режим, что сильно уменьшает передачу тепла через лист. Если ситуация не контролируется, потолочный лист может размягчиться, прогнуться и треснуть под большим давлением и тяжестью воды в бойлере. Очевидно, так и произошло. Когда вода хлынула в топку, резкое падение давления снизило температуру кипения воды. Так как температура воды была выше новой точки кипения, часть ее мгновенно превратилась в пар, объем которого резко увеличился, что и привело к взрыву. Взрыв прорвал бойлер, оторвал его от двигателя, перевернул и отшвырнул в сторону. Погибло три человека.

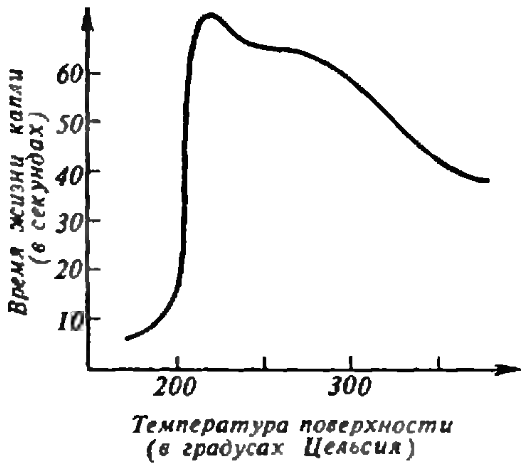


Рис. 2. Кривая времени жизни капли воды на горячей поверхности.

Вернемся к нашим наблюдениям. Допустим, вы все еще продолжаете повышать температуру кастрюли с помощью лабораторной горелки. В конце концов вся поверхность дна покроется паром, и тепло будет медленно передаваться жидкости над паром в основном путем излучения. Эта фаза называется пленочным кипением.

Хотя вы не можете получить пленочное кипение в кастрюле, грея воду на кухонной плите, в кухне оно иногда встречается. Моя бабушка однажды показала, как пленочное кипение помогает определить, достаточно ли разогрелась сковорода для блинов. После того как она немного нагрела пустую сковороду, она брызнула на нее несколько капель воды. Капли с шипением испарились за несколько секунд. Их быстрое исчезновение показало ей, что сковорода еще недостаточно горяча для теста. Нагрев сковороду сильнее, она повторила проверку, брызнув еще воды. В этот раз капли свернулись в шарики и крутились на металлической поверхности более минуты, перед тем как исчезнуть. Теперь сковорода была достаточно горяча для теста.

Для изучения бабушкиного опыта я нагрел плоскую металлическую пластину лабораторной горелкой. Контролируя температуру пластины термопарой, я аккуратно ронял каплю дистиллированной воды из шприца, расположенного точно над пластиной (шприц дал мне возможность получать капли одинакового размера). Капля падала в углубление, сделанное в пластине молотком с шаровым бойком. Уронив каплю, я измерял время ее жизни на пластине. Затем я нарисовал график зависимости времени жизни капель от температуры пластины (рис. 2). У графика есть интересный пик. При температуре пластины от 100 и приблизительно до 200 °С каждая капля растекалась по пластине тонким слоем и быстро испарялась. При температуре пластины около 200 °С капля сворачивалась и жила около минуты. При более высокой температуре пластины водяные шарики не держатся так долго. Подобные эксперименты с водопроводной водой дали график с более плоским пиком, возможно из-за того, что взвешенные частицы прорывают слой плохо проводящего тепло пара.

(Окончание следует)

Конкурс «Математика 6—8»

Этой публикацией мы заканчиваем конкурс «Математика 6—8». Фамилии победителей конкурса будут опубликованы в одном из осенних номеров журнала.

Победителей ждут награды! Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 июля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

25. Найдите четырехзначное число, сумма цифр которого равна разности между 2011 и самим числом.

А. Савин

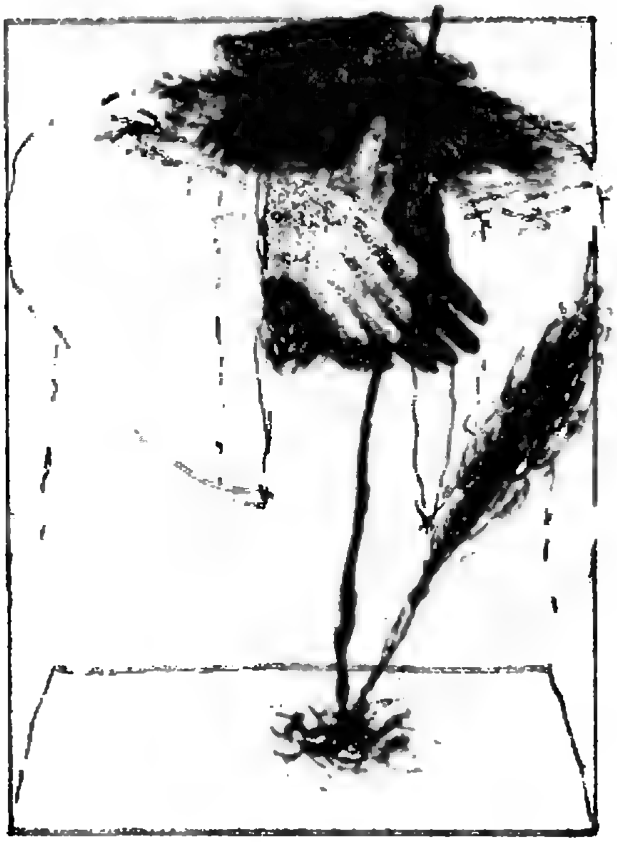
26. Имеется лист бумаги. Его можно разрезать на 6 или 12 частей. Каждый новый кусок можно разрезать также на 6 или 12 частей или оставить целым и так далее.

Можно ли таким образом разрезать лист на 40 частей? Докажите, что можно получить любое число частей, большее 40.

А. Савин

27. Найдите пять чисел, если известно, что их суммы по 3 соответственно равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17.

А. Савин



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Работа сил трения» предназначена девятиклассникам, заметка «Сила Ампера в однородном магнитном поле» — десятиклассникам, «Недостающие» элементы» — одиннадцатиклассникам.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Работа сил трения

Сила трения, как и любая другая сила, совершает работу и соответственно изменяет кинетическую энергию тела при условии, если точка приложения силы перемещается в выбранной системе отсчета. Однако сила трения существенно отличается от других, так называемых консервативных, сил (тяготения и упругости), так как ее работа зависит от формы траектории. Вот почему работу сил трения ни при каких обстоятельствах нельзя представить в виде изменения потенциальной энергии системы. Кроме того, дополнительные сложности при вычислении работы создает специфика силы трения покоя. Здесь существует ряд стереотипов физического мышления, которые хотя и лишены смысла, но очень устойчивы.

Мы рассмотрим несколько вопросов, связанных с не вполне правильным пониманием роли силы трения в изменении энергии системы тел.

1. О силе трения скольжения. Нередко говорят, что сила трения скольжения всегда совершает отрицательную работу и это приводит к увеличению внутренней (тепловой) энергии системы.

Такое утверждение нуждается в важном уточнении — оно справедливо только в том случае, если речь идет не о работе одной отдельно взятой силы трения скольжения, а о суммарной работе всех таких сил, действующих в системе. Дело в том, что работа любой силы зависит от выбора системы отсчета и может быть отрицательной в одной системе, но положительной в другой. Суммарная же работа всех сил трения, действующих в системе, не зависит от выбора системы отсчета и всегда отрицательна. Вот конкретный пример.

Положим кирпич на движущуюся тележку так, чтобы он начал по ней скользить (рис. 1). В системе отсчета, связанной с землей, сила трения F_1, действующая на кирпич до прекращения скольжения, совершает положительную работу A_1. Одновременно сила трения F_2, действующая на тележку (и равная по модулю первой силе), совершает отрицательную работу A_2, по модулю большую, чем работа A_1, так как путь тележки s больше пути кирпича $s-l$ (l — путь

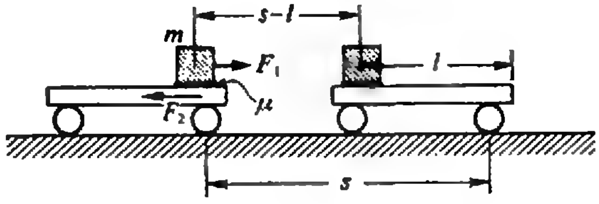


Рис. 1.

кирпича относительно тележки). Таким образом, получаем

$$A_1 = \mu mg(s-l), \quad A_2 = -\mu mgs,$$

и полная работа сил трения

$$A_{\text{тр}} = A_1 + A_2 = -\mu mgl < 0.$$

Поэтому кинетическая энергия системы убывает (переходит в тепло):

$$\Delta E_k = -\mu mgl.$$

Этот вывод имеет общее значение. Действительно, работа двух сил (не только сил трения), осуществляющих взаимодействие между телами, не зависит от выбора системы отсчета (докажите это самостоятельно). Всегда можно перейти к системе отсчета, относительно которой одно из тел покоится. В ней работа силы трения, действующей на движущееся тело, всегда отрицательна, так как сила трения направлена против относительной скорости. Но она отрицательна и в любой другой системе отсчета. Следовательно, всегда, при любом количестве тел в системе, $A_{\text{тр}} < 0$. Эта работа и уменьшает механическую энергию системы.

2. О силе трения покоя. При действии между соприкасающимися телами силы трения покоя ни механическая, ни внутренняя (тепловая) энергия этих тел не изменяется. Значит ли это, что работа силы трения покоя равна нулю? Как и в первом случае, такое утверждение правильно только по отношению к полной работе сил трения покоя над всеми взаимодействующими телами. Одна же отдельно взятая сила трения покоя может совершать работу, причем как отрицательную, так и положительную.

Рассмотрим, например, книгу, лежащую на столе в набирающем скорость поезде. Именно сила трения покоя сообщает книге такую же скорость, как у поезда, т. е. увеличивает ее кинетическую энергию, совершая определенную работу при этом. Другое дело, что такая же по модулю, но противоположная по направлению сила действует со стороны книги на стол, а значит, и на поезд в целом. Эта сила совершает точно такую же работу, но только отрицательную. В результате получается, что полная работа двух сил трения покоя равна нулю, и механическая энергия системы тел не меняется.

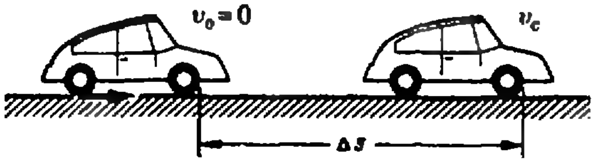


Рис. 2.

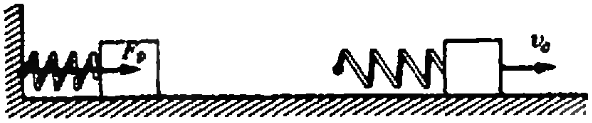


Рис. 3.

3. О движении автомобиля без проскальзывания колес. Самое устойчивое заблуждение связано именно с этим вопросом.

Пусть автомобиль вначале покоится, а затем начинает разгоняться (рис. 2). Единственной внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является сила трения покоя $F_{\text{тр}}$, действующая на ведущие колеса (мы пренебрегаем силой сопротивления воздуха и силой трения качения). Согласно теореме о движении центра масс, импульс силы трения равен изменению импульса автомобиля:

$$F_{\text{тр}}\Delta t = \Delta(Mv_c) = Mv_c,$$

если скорость центра масс в начале движения равнялась нулю, а в конце v_c. Приобретая импульс, т. е. увеличивая свою скорость, автомобиль одновременно получает и определенную порцию кинетической энергии. А поскольку импульс сообщается силой трения, естественно считать, что и увеличение кинетической энергии определяется работой этой же силы. Вот это-то утверждение оказывается совершенно неверным. Сила трения ускоряет автомобиль, но работы при этом не совершает. Как же так?

Вообще говоря, ничего парадоксального в этой ситуации нет. В качестве примера достаточно рассмотреть совсем простую модель — гладкий кубик с прикрепленной сбоку пружинкой (рис. 3). Кубик придвигают к стене, сжимая пружинку, а затем отпускают. «Отталкиваясь» от стены, наша система (кубик с пружинкой) приобретает определенные импульс и кинетическую энергию. Единственной внешней силой, действующей по горизонтали на систему, является, очевидно, сила реакции стены $F_р$. Именно она и сообщает системе ускорение. Однако никакой работы при этом, конечно, не совершается — ведь точка приложения этой силы неподвижна (в системе координат, связанной с землей), хотя сила действует некоторое конечное время Δt.

Аналогичная ситуация возникает и при разгоне автомобиля без проскальзывания. Точка приложения силы трения, действующей на ведущее колесо автомобиля, т. е. точка соприкосновения колеса с дорогой, в любой момент покоится относительно дороги (в системе отсчета, связанной с дорогой). При движении автомобиля она исчезает в одной точке и сразу же появляется в соседней.

Не противоречит ли сказанное закону сохранения механической энергии? Конечно же, нет. В нашем случае с автомобилем изменение кинетической энергии системы происходит за счет ее внутренней энергии, выделяющейся при сгорании топлива.

Для простоты рассмотрим чисто механическую систему: игрушечный автомобиль с пружинным заводом. Двигатель такого автомобиля использует не внутреннюю энергию топлива, а потенциальную энергию сжатой пружины. Вначале пружина заведена, и ее потенциальная энергия E_{p1} отлична от нуля. Если двигатель игрушки — просто растянутая пружина, то $E_{p1} = k(\Delta l)^2/2$. Кинетическая энергия равна нулю, и полная начальная энергия автомобиля $E_1 = E_{p1}$. В конечном состоянии, когда деформация пружины исчезнет, потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия $E_{k2} = Mv_c^2/2$. Полная энергия $E_2 = E_{k2}$. Согласно закону сохранения энергии (трением мы пренебрегаем),

$$\frac{Mv_c^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

В случае реального автомобиля

$$\frac{Mv_c^2}{2} = \Delta U,$$

где ΔU — энергия, полученная при сгорании топлива.

Если колеса автомобиля проскальзывают, то $A_{тр} < 0$, так как точка соприкосновения колес с дорогой движется против направления силы трения. Следовательно,

$$\frac{Mv_c^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + A_{тр}.$$

Видно, что кинетическая энергия автомобиля в конечном состоянии оказывается меньше, чем в отсутствие проскальзывания.

Л. Кондрашева, С. Крюков,
Г. Мякишев

Сила Ампера в однородном магнитном поле

Согласно закону Ампера, выражение для модуля силы $\vec{F}$, действующей на малый отрезок проводника Δl, по которому течет ток I, в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, имеет вид

$$F = BI\,\Delta l \sin\alpha.$$

Здесь α — угол между направлением магнитной индукции и направлением тока. Можно сказать также, что это угол между вектором $\vec{B}$ и вектором $\overline{\Delta l}$, направленным по току. Сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно векторам $\vec{B}$ и $\overline{\Delta l}$ — по известному правилу левой руки.

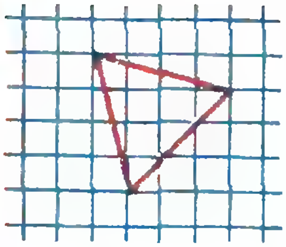
Чтобы найти силу, действующую на криволинейный участок проводника в произвольном магнитном поле, нужно:

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп «Кванта»

Равносторонний треугольник

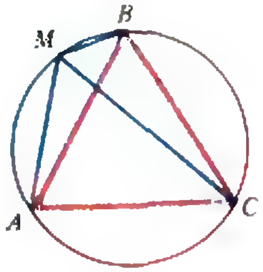
Нарисовать равносторонний треугольник ничего не стоит, если под руками есть циркуль или чертежный угольник с углом в 60°. А если нет? Можно ли нарисовать равносторонний треугольник, расположив его вершины в узлах клетчатой бумаги? К сожалению, нет. Правда,



изображенный на рисунке треугольник очень близок к равностороннему — длины его сторон различаются меньше, чем на 3 %.

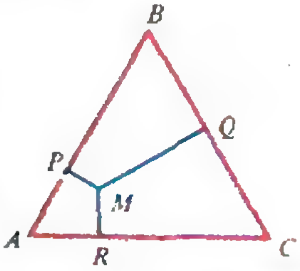
Среди треугольников равносторонний занимает особое место. Не только потому, что он — единственный, имеющий три оси симметрии. Во многих смыслах он является экстремальным среди остальных треугольников: при заданном периметре максимальная площадь будет у равностороннего треугольника, отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной максимально также у равностороннего треугольника. И этот перечень можно было бы далеко продолжить.

С равносторонним треугольником связано несколько удивительных соотношений, в справедливость которых сначала трудно поверить. Вот одно из них. Опишем вокруг равностороннего треугольника окружность и возьмем



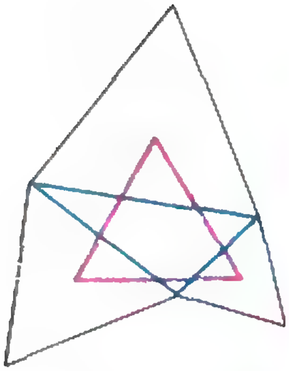
на ней произвольную точку M. Оказывается, что сумма расстояний от этой точки до ближайших вершин треугольника равна расстоянию до третьей вершины.

Теперь возьмем точку M внутри равностороннего треугольника и опустим из нее на стороны перпендикуляры MP, MQ и MR. Оказывается, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равняется высоте треугольника. Кроме того,

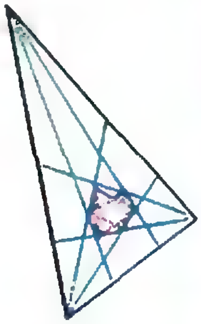


$AP+BQ+CR=BP+CQ+AR$, а их квадраты тоже равны: $AP^2+BQ^2+CR^2=BP^2+CQ^2+AR^2$.

Равносторонние треугольники неожиданным образом появляются и при рассмотрении свойств произвольных треугольников. Так Наполеон заметил, что если на сторонах произ-

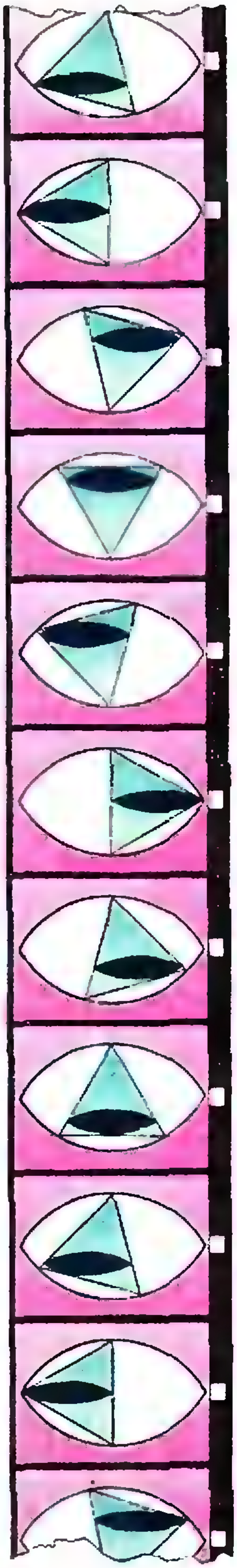


вольного треугольника во внешнюю сторону построить равносторонние треугольники, то их центры будут вершинами равностороннего треугольника. Этот факт верен и в том случае, если равносторонние треугольники строить внутрь данного.



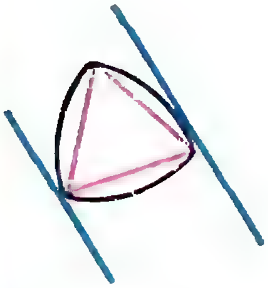
А Франк Морли в 1904 году обнаружил, что если в произвольном треугольнике провести из каждой вершины лучи, делящие эти углы на три равные части, то точки пересечения этих лучей являются вершинами двух равносторонних треугольников.

Удивительно, что равносторонний треугольник можно поворачивать внутри описанной вокруг него окружности. Более неожиданной оказывается возможность поворачивать его внутри луночки, составленной из двух дуг окружности, каждая из которых равняется 120°, а радиус равен стороне треугольника.



Если же взять луночку из дуг вдвое меньшего размера (60°), а радиус равным высоте треугольника, то такую луночку можно вращать внутри этого треугольника, так, что она все время будет касаться всех его сторон.

Немецкий механик Франц Рело заметил, что если провести дуги окружностей с центрами в вершинах равностороннего треугольника, соединяющие две другие его вершины, то полученная замкнутая кривая (она получила название *треугольник Рело*) будет обладать свойством постоянства ширины, т. е. расстояние между двумя параллельными касательными к этой кривой будет постоянной величиной, равной стороне треугольника.



В заключение вспомним о трех правильных многогранниках, составленных из равносторонних треугольников. Тетраэдре, составленном из 4 треугольников, по 3 в каждой вершине, октаэдре, составленном из 8 треугольников, по 4 в каждой вершине и икосаэдре, составленном из 20 треугольников, по 5 в каждой вершине.

Среди треугольников равносторонний обладает многими экстремальными свойствами. Так, при заданном периметре у равностороннего треугольника будут наибольшими площадь и радиус вписанного круга, а радиус описанного круга и сумма медиан будут наименьшими. Равносторонние треугольники мы видим и в переплетении стержней, образующих строительные конструкции — такие фермы являются наиболее прочными среди конструкций с заданным расходом металла.

Замощение плоскости равносторонними треугольниками навело известного нидерландского художника М. Эшера на идею картины «Свобода».

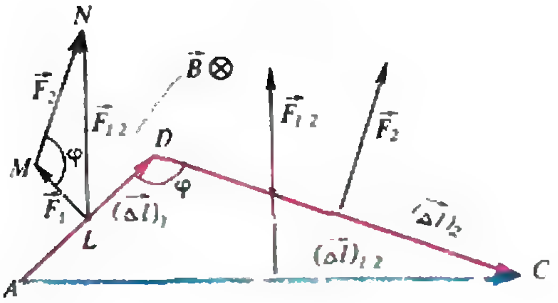


Рис. 1.

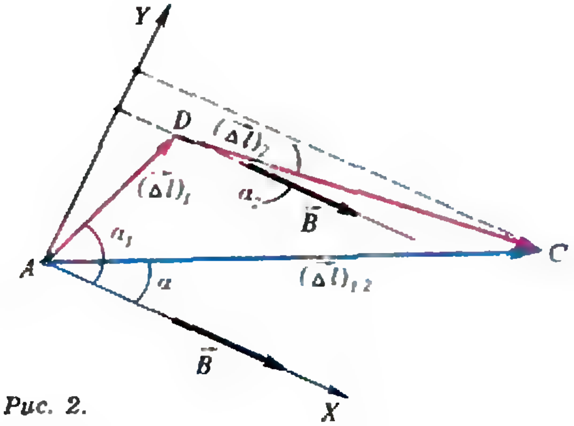


Рис. 2.

а) разбить его на отрезки, настолько малые, что их можно считать прямолинейными, а поле в этой области однородным;

б) определить силы Ампера, действующие на каждый такой отрезок;

в) вычислить векторную сумму полученных сил.

Разумеется этот «рецепт» известен каждому, кто изучал закон Ампера по школьному учебнику физики. Наша же задача — познакомить вас с весьма полезными свойствами силы Ампера, действующей на криволинейный участок проводника с током в простейшем магнитном поле — однородном.

Пусть проводник представляет собой пространственную (в частном случае плоскую) ломаную линию, состоящую из N прямолинейных отрезков $(\Delta l)_1$, $(\Delta l)_2$, ..., $(\Delta l)_N$. Просуммируем сначала силы $\vec F_1$ и $\vec F_2$, действующие на отрезки проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$.

Предположим, что вектор $\vec B$ перпендикулярен плоскости выбранных отрезков (рис. 1). Сила $\vec F_1$ перпендикулярна вектору $(\Delta \vec l)_1$, а ее направление определяется правилом левой руки. Точно так же сила $\vec F_2$ перпендикулярна вектору $(\Delta \vec l)_2$. Модули этих сил равны соответственно

$$F_1 = BI(\Delta l)_1 \text{ и } F_2 = BI(\Delta l)_2.$$

Сложим попарно силы $\vec F_1$ и $\vec F_2$ и отрезки $(\Delta \vec l)_1$ и $(\Delta \vec l)_2$. Поскольку $\angle LMN = \angle ADC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, треугольники LMN и ADC подобны, а вектор $\vec F_{12} = \vec F_1 + \vec F_2$ перпендикулярен вектору $(\Delta \vec l)_{12}$, причем $F_{12} = BI(\Delta l)_{12}$. Следовательно, сила Ампера, действующая на участок проводника ADC, представляющий собой две стороны треугольника, равна силе Ампера, действующей на прямой отрезок проводника $(\Delta l)_{12}$ (третью сторону AC того же треугольника), если и в том и в другом проводнике текут одинаковые токи.

Рассмотрим теперь другой, тоже простой случай, когда вектор $\vec B$ лежит в плоскости отрезков проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$ (рис. 2). Направим ось координат X вдоль вектора $\vec B$, а ось Y — перпендикулярно ему. Силы $\vec F_1$ и $\vec F_2$ направлены от нас перпендикулярно плоскости рисунка — в соответствии с правилом левой руки. Суммарная сила $\vec F_{12}$ направлена так же, а ее модуль равен

$$F_{12} = F_1 + F_2 = BI(\Delta l)_1 \sin\alpha_1 + \\ + BI(\Delta l)_2 \sin\alpha_2 = BI(\Delta l)_{12y} = \\ = BI(\Delta l)_{12} \sin\alpha.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма проекций на ось Y векторов $(\Delta \vec l)_1$ и $(\Delta \vec l)_2$ равна проекции суммарного вектора $(\Delta \vec l)_{12}$.

Таким образом, в обоих рассмотренных нами случаях при вычислении силы Ампера два соседних прямолинейных отрезка проводника можно заменить одним, начало которого находится в начале первого отрезка, а конец — в конце второго.

Когда вектор $\vec B$ направлен под произвольным углом к плоскости отрезков проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$, его можно разложить на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых перпендикулярен упомянутой плоскости, а другой лежит в ней. Отсюда, а также из принципа суперпозиции магнитных полей следует, что и при вычислении силы Ампера, действующей на проводник в произвольно ориентированном магнитном поле, два соседних прямолинейных отрезка проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$ можно заменить одним $(\Delta l)_{12}$, соединяющим начало первого и конец второго. Точно так же два прямолинейных отрезка $(\Delta l)_{12}$ и $(\Delta l)_3$ можно заменить отрезком $(\Delta l)_{123}$. Продолжая замены, легко увидеть, что сила Ампера, действующая на рассматриваемый нами «ломаный» проводник, равна силе Ампера, действующей на прямолинейный проводник, если в проводниках текут одинаковые токи, а их концы совпадают. Это же справедливо и для криволинейного проводника, так как, неограниченно уменьшая длины прямолинейных отрезков ($\Delta l \to 0$) и одновременно неограниченно увеличивая их число ($N \to \infty$), ломаную линию можно превратить в гладкую (без изломов) кривую.

А теперь — об обещанных свойствах силы Ампера. Из всего сказанного следует, что сила Ампера, действующая на криволинейный участок проводника с током в однородном магнитном поле, не зависит от формы проводника, а зависит только от координат начала и конца этого участка. Следует также и то, что сила Ампера, действующая на замкнутый проводник с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Эти два свойства силы Ампера взаимосвязаны — из первого следует второе и наоборот.

А. Лузин

«Недостающие» элементы

Когда в 1871 году Д. И. Менделеев предложил свою периодическую систему, химикам были известны 63 химических элемента. Менделеев предсказал существование еще 11 и даже отважился описать их свойства. В последующие шесть десятилетий, до 1925 года, было открыто и изучено 25 новых элементов, в их числе 8 из предугаданных Менделеевым. К этому времени стало известно, что между водородом и ураном должно разместиться 92 элемента и что место каждого из них определяется атомным номером. Остались незаполненными 4 места в таблице с номерами 43, 61, 85 и 87. Три из еще не обнаруженных элементов были описаны Менделеевым: элемент 43 (для краткости будем опускать слово «с номером») должен быть аналогом марганца («экамарганец» по Менделееву), элемент 85 — аналогом йода («экайод») и 87 — цезия («экацезий»).

В поисках этих «недостающих» элементов химики не жалели усилий, совершенствуя технику поисков и методов распознавания (идентификации). То и дело появлялись сообщения о новых открытиях. Так, в 1925 году было объявлено об открытии элемента 43, получившего и имя — мазурий. В 1931 году появились публикации об открытии элемента 85, которому один из открывателей дал название алабамий, другой — гельвеций. Сообщили и об открытии элемента 87 — виргиния. Не был забыт и элемент 61 — в разное время различные исследователи заявляли об открытии этого представителя группы редких земель, называли его и иллинием, и флоренцием, и циклонием. Оказалось, однако, что все это были открытия мнимые, ошибочные, не находившие подтверждения.

Казалось, природа, создавшая в ходе эволюции Вселенной 88 химических элементов, не «сумела» создать еще четыре, которые заполнили бы пустые места в таблице Менделеева. Почему?

Химики, безуспешно охотившиеся за неуловимыми элементами, не могли объяснить этот каприз природы. На помощь пришла физика, точнее, очень молодой тогда ее раздел — физика атомного ядра. Один из основных фактов ядерной физики таков: ядра атомов элементов в конце таблицы Менделеева, начиная с номера 84, радиоактивны, т. е. нестабильны. Объясняется это тем, что эти ядра содержат большое число протонов (атомный номер — это и есть число протонов в ядре), которые отталкиваются друг от друга. Правда, между всеми ядерными частицами существует так называемое сильное взаимодействие, имеющее характер притяжения, более сильного, чем электростатическое отталкивание. Но при большом числе протонов их взаимное отталкивание, противостоящее притяжению, делает ядро нестабильным.

Элементы 85 и 87 безусловно относятся к элементам нестабильным. Может быть, в этом именно и состоит причина отсутствия их в природе? А почему же тогда существуют семь других элементов из тех, что «за 84»? Ведь известно более 40 их радиоактивных изотопов.

Почему в природе нет элементов 85 и 87? Упомянутые 40 изотопов входят в состав трех так называемых радиоактивных семейств, начинающихся с трех радиоактивных элементов с очень большим периодом полураспада: ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ ($T=4{,}5\cdot10^{9}$ лет), ${}^{235}_{92}U$ ($T=8\cdot10^{8}$ лет) и ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ ($T=1{,}4\cdot10^{10}$ лет). Ни уран, ни торий не успели распасться и исчезнуть за время существования Земли (около $4\cdot10^{9}$ лет), поэтому сохранились и их «потомки».

Кроме этих трех радиоактивных рядов, могло бы существовать и четвертое семейство. Могло бы, если бы его «родоначальник» имел достаточно большой период полураспада. Однако, как выяснилось, четвертое семейство начинается с изотопа нептуния ${}^{237}_{93}\mathrm{Np}$, у которого T «всего» около 2 миллионов лет. Это значит, что он практически исчез с лица Земли. Исчезли и все его «потомки», среди которых значатся элементы 85 и 87.

А почему в природе нет элементов 43 и 61? Быть может, эти элементы тоже радиоактивны и потому не дожили до наших дней? Известны ведь радиоактивные элементы с номерами, меньшими 84, например — изотоп калия ${}^{40}_{19}\mathrm{K}$, рения ${}^{187}_{75}\mathrm{Re}$ и некоторые другие. Правда, у них очень большие периоды полураспада: у калия $T=1{,}4\cdot10^{9}$ лет, у рения $T=4\cdot10^{10}$ лет, что и обеспечивает «сохранность» их в земной коре. Но и у калия, и у рения есть и стабильные изотопы. Элементам же 43 и 61 «не повезло». Почему?

Чет и нечет в ядерной физике. Известно, что стабильность или нестабильность ядра зависит от соотношения между числом протонов и числом нейтронов в нем. Но не только от этого. Оказывается, ядро прочнее, стабильнее, если протоны или нейтроны, или и те и другие образуют в ядре пáры. Для этого число протонов или нейтронов, или тех и других вместе должно быть четным. Наиболее стабильными ядрами являются те, у которых четное число и протонов, и нейтронов, как говорят, четно-четные ядра (например, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$). Менее стабильны ядра с четным числом протонов и нечетным нейтронов (четно-нечетные ядра) или наоборот (нечетно-четные ядра). Самыми нестабильными являются ядра с нечетным числом и протонов, и нейтронов (нечетно-нечетные ядра), среди них всего четыре стабильных ядра: ${}^{2}_{1}\mathrm{H}$, ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$ и ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$.

Это же соотношение между числом протонов и числом нейтронов в ядре определяет количество стабильных изотопов. У элементов с нечетными атомными номерами не бывает более двух стабильных изотопов. У элементов же с четными номерами стабильных изотопов может быть много. Олово, например, имеет десять стабильных изотопов, рубидий — семь и т. п.

Игра в «чет и нечет» приводит еще к одному следствию — не могут существовать два соседних стабильных изотопа с одинаковыми массовыми числами. А соседи элементов

43 и 61 имеют четные номера, и стабильных изотопов у них много. На долю заключенных между ними нечетных элементов стабильных «мест» просто не остается. Эти элементы могут быть только радиоактивными. И если периоды полураспада у них малые, то они и не сохранились в природе. Вот почему поиски химиков были тщетными.

Значит ли это, что четырем клеткам в таблице Менделеева самой природой суждено оставаться пустыми? Оказалось, нет. Физики сумели вдохнуть в эти элементы-тени жизнь. Вот как это произошло.

Элемент 43. Впервые этот элемент был получен облучением молибдена дейтронами (ядрами тяжелого водорода $^{2}_{1}H$). Честь открытия принадлежит К. Перрье и Э. Сегре (Италия, 1937 г.). Они дали ему и имя — технеций (Tc). Молибден — четный элемент, и он имеет много изотопов, так что при облучении должно было получиться и несколько изотопов технеция. Например:

$$^{96}_{42}Mo+^{2}_{1}H\rightarrow ^{97}_{43}Tc+^{1}_{0}n.$$

Это был первый искусственно полученный элемент, отсюда и название: от греческого technētós — искусственный. Вскоре изотоп технеция $^{99}_{43}Tc$ обнаружили, и притом в изобилии, среди продуктов деления урана в ядерных реакторах. Период полураспада у него составляет $2{,}12\cdot 10^{5}$ лет, так что получать его можно килограммами. Технеций хорошо изучен и даже нашел практическое применение как замедлитель процессов коррозии. Известно большое число изотопов технеция. Самый долгоживущий — $^{97}_{43}Tc$ с периодом полураспада $2{,}6\cdot 10^{6}$ лет.

Элемент 61. Среди многих десятков осколков деления урана в ядерных реакторах нашелся и элемент 61. В 1946 году Д. Маринский, Л. Гленденин и Ч. Корриелл выделили два изотопа элемента 61, которому они присвоили название прометий (Pm) — от имени Прометей. Изотопы эти — $^{147}_{61}Pm$ с $T=2{,}6$ года и $^{149}_{61}Pm$ с $T=2{,}2$ дня. Сейчас известны и другие изотопы. Самое большое значение T у изотопа $^{145}_{61}Pm$ — около 18 лет.

Элемент 85. Этот элемент впервые был получен в 1940 году при облучении висмута альфа-частицами (ядрами $^{4}_{2}He$) и из-за нестабильности назван астатом (At) от греческого ástatos — неустойчивый:

$$^{209}_{83}Bi+^{4}_{2}He\rightarrow ^{211}_{85}At+2^{1}_{0}n.$$

Период полураспада у него 7,5 часов. Из более чем 20 известных теперь изотопов астата наибольшее значение T у изотопа $^{210}_{85}At$ — 8,3 часа.

Элемент 87. Один из изотопов этого элемента с некоторой натяжкой можно назвать природным. О его открытии было впервые сообщено в 1939 году в работе М. Пере, давшей ему имя своего отечества — франций (Fr). «Нашла» она его среди продуктов распада одного из членов радиоактивного семейства $^{235}_{92}U$ — изотопа актиния $^{227}_{89}Ac$. Обычно это бета-радиоактивный изотоп: испуская бета-частицу, он превращается в торий. Но 1 % его ядер испускает альфа-частицы и превращается во франций:

$$^{227}_{89}Ac\rightarrow ^{223}_{87}Fr+^{4}_{2}He.$$

Этот-то 1 % и сумела «поймать» Пере. Период полураспада $^{223}_{87}Fr$ $T=22$ минуты. Простой расчет показывает, что во всей земной коре содержится... около 500 грамм франция. (Для сравнения заметим, что урана в земной коре — тысячи миллиардов тонн.) В дальнейшем серией прямых опытов было показано, что франций и астат входят в состав радиоактивного семейства нептуния ($^{221}_{87}Fr$, испуская альфа-частицу, превращается в $^{217}_{85}At$). Позже было получено и много других изотопов франция, но у всех у них периоды полураспада меньше 22 минут.

А. Кикоин

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Две легкие тележки с массами m_1 и $m_2=3m_1$ соединены пружиной (рис. 1). Пружина сжата и связана нитью. Нить пережигают, пружина распрямляется, и тележки разъезжаются в противоположные стороны. Найдите отношение начальных скоростей тележек и отношение путей, пройденных тележками до остановки. Коэффициент трения для обеих тележек считать одинаковым.

2. Тело массой m_1 неупруго ударяется о покоящееся тело массой m_2. Найдите долю потерянной при этом кинетической энергии.

3. Шарик, имеющий массу $m_1=10$ г и скорость $v_1=10$ м/с, сталкивается с другим, летящим навстречу ему шариком массой $m_2=20$ г. После абсолютно упругого удара первый шарик движется в обратном направлении с той же по модулю скоростью. Определите скорость второго шарика после соударения.

4. Человек, стоящий на гладкой поверхности льда, бросает камень в горизонтальном направлении с высоты $H=1{,}8$ м. Камень падает на лед на расстоянии $l=9$ м от места бросания. Определите работу, которую совершил человек, бросив камень.

5. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты H по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом R (рис. 2). На какой высоте тело выпадет из «петли»? Трением пренебречь.

10 класс

6. Металлический круг радиусом R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите показание вольтметра, соединенного с контактами, один из которых касается круга в центре, а другой — у края. Отношение заряда электрона к его массе равно γ. Сопротивление вольтметра считать очень большим.

7. Два неподвижных проводящих параллельных стержня, находящихся в горизонтальной плоскости на расстоянии $l=1$ м друг от друга, помещены в однородное магнитное поле, индукция которого равна $B=0{,}1$ Тл и направлена вертикально. На стержнях перпендикулярно к ним лежит металлический стержень массой $m=0{,}5$ кг. Определите ускорение этого стержня, если по нему течет ток $I=50$ А, а коэффициент трения между стержнями $\mu=0{,}2$.

8. Прямой проводник массой $m=50$ г и длиной $l=20$ см подвешен горизонтально с помощью двух невесомых нитей, привязанных к его концам. Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого $B=0{,}75$ Тл. Какой ток надо пропустить через проводник, чтобы он отклонился от положения равновесия и нити составили с вертикалью угол $\alpha=30°$ каждая?

9. Однородное магнитное поле, индукция которого $B=10$ мТл, направлено перпендикулярно однородному электрическому полю с напряженностью $E=17$ кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=15$ кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно. Определите отношение заряда к массе для этого иона.

10. Электрон, разогнанный в электрическом поле напряжением $U=20$ кВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Вектор скорости электрона образует угол $\alpha=45°$ с направлением вектора магнитной индукции. Определите шаг винтовой линии, описываемой электроном.

11 класс (повторение)

11. На нити, могущей выдержать натяжение $T=40$ Н, равномерно вращают камень массой $m=1$ кг в вертикальной плоскости. С какой угловой скоростью необходимо вращать камень, чтобы нить оборвалась? Длина нити $l=1$ м.

12. На балкон, расположенный на высоте $H=6$ м, бросили с земли предмет массой $m=200$ г. Во время полета предмет достиг высоты $H'=8$ м от поверхности земли. Определите работу силы тяжести при полете предмета вверх, вниз и на всем пути.

13. Объем газа, находящегося под давлением $p=8$ МПа, при изобарном процессе увеличился на $\Delta V=0{,}5$ м^3. При этом газу было сообщено количество теплоты $Q=6$ МДж. На сколько изменилась внутренняя энергия газа? Нагрелся или охладился газ при этом?

14. Одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды $q=10$ нКл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=1$ м. Найдите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

15. Три резистора с сопротивлениями $R_1=R_2=10$ Ом и $R_3=3$ Ом подключены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В (рис. 3). Ток в цепи $I=1$ А. Найдите внутреннее сопротивление источника и ток короткого замыкания.

Публикацию подготовила В. Тихомирова

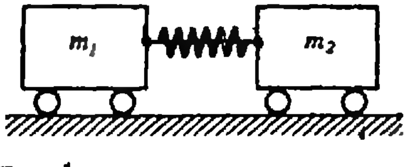


Рис. 1.

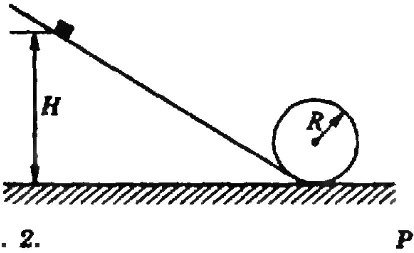


Рис. 2.

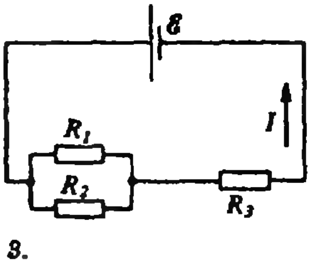


Рис. 3.

Математический кружок

Чертеж в стереометрических задачах

И. ШАРЫГИН

При решении стереометрических задач существенно возрастает роль чертежа. Чертеж не только выступает как полноправный элемент решения, но и весьма часто включается в метод решения, дает ключ к решению задачи. О некоторых видах таких задач будет рассказано в этой статье.

Прежде всего заметим, что пространственные тела можно разделить на две группы: «хорошие», удобные для изображения, и «плохие». К первой группе относятся треугольные призмы (в первую очередь правильные), параллелепипеды, треугольные и четырехугольные пирамиды. Ко второй — n-угольные ($n>4$) призмы и пирамиды, усеченные пирамиды и круглые тела, особенно сфера.

Один из весьма распространенных приемов состоит в том, что в заданной «неудобной» конструкции вычленяется в качестве ключевого элемента «хороший» многогранник. Такой пример дает

Задача 1. *Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α.*

Решение. Здесь удобно рассмотреть треугольную пирамиду — своего рода 1/6 часть от данной,— вершинами которой являются концы высоты и одной стороны основания исходной пирамиды (рис. 1). В этой пирамиде $OB=OA$, $\angle BOA=60°$, SO перпендикулярна плоскости AOB, $\angle ASB=\alpha$. Двугранный угол между плоскостями ASB и OBS (или OAS) равен половине искомого угла (искомый угол φ). Опустим из A перпендикуляры AD и AK на BS и OB. Тода $\angle KDA=\varphi/2$ (докажите). Положив $OA=OB=R$, будем иметь

$$AK=R\frac{\sqrt{3}}{2},\ AB=R,\ AD=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AK}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Эта очень простая задача носит чисто иллюстративный характер.

Практически в каждой сколько-нибудь содержательной задаче по стереометрии возникают те или иные проблемы, связанные с чертежом. Можно выделить некоторые типичные приемы, используемые в соответствующих ситуациях. Так, например, в задачах, в которых фигурируют прямые и плоскости в пространстве, надо постараться «привязать» заданную конфигурацию к «хорошему» многограннику. Прямые и плоскости не должны «болтаться» в пространстве! Они должны быть связаны

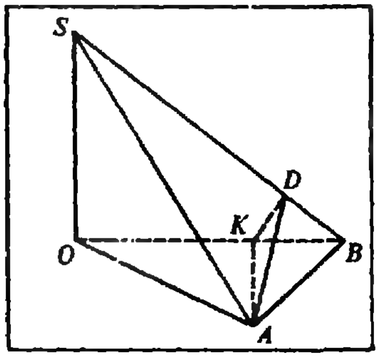


Рис. 1.

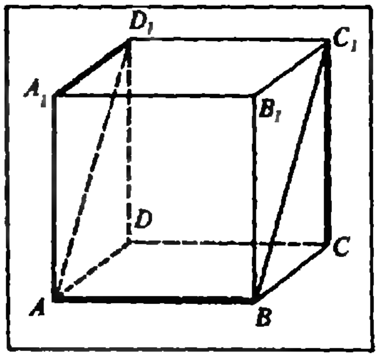


Рис. 2.

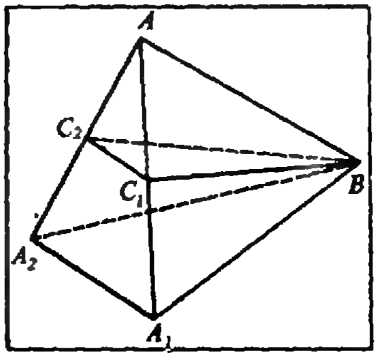


Рис. 3.

с каким-то многогранником, опираться на него, являться его элементами. Рассмотрим два примера на эту тему.

Задача 2. *В пространстве даны три попарно перпендикулярные прямые, расстояния между которыми равны 1. Найдите площадь параллелограмма, две вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся — на двух других прямых.*

Решение. В качестве опорного многогранника рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2). Прямые AB, CC_1 и D_1A_1 попарно перпендикулярны и находятся на расстоянии 1 друг от друга. Параллелограмм ABC_1D_1 (а точнее, прямоугольник) удовлетворяет условию задачи. Его площадь равна $\sqrt{2}$. Любой другой параллелограмм, удовлетворяющий условию, имеет такую же площадь. Докажите это самостоятельно.

Не так просто найти нужную интерпретацию в следующей задаче.

Задача 3. *На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?*

Решение. Идея решения в том, что мы не будем отражать наш луч по законам физики, а отразим его симметрично относительно зеркала по математическим правилам. Итак, пусть A — какая-то точка на падающем луче, B — точка падения луча на зеркало, A_1 и A_2 — точки, симметричные A соответственно относительно исходного зеркала и повернутого, C_1 — середина AA_1 (C_1 — проекция A на исходное зеркало), C_2 — середина AA_2 (рис. 3). Поскольку отраженные лучи представляют собой продолжения отрезков A_1B и A_2B, искомый угол равен углу A_1BA_2. Прямые AC_1 и AC_2 перпендикулярны соответственно данному зеркалу и повернутому. Значит, $\angle C_1AC_2 = \angle A_1AA_2 = \beta$. По условию $\angle ABC_1 = \alpha$. Если $AB = A_1B = A_2B = a$, то

$$AC_1 = a\sin\alpha,\quad C_1C_2 = AC_1\cdot\sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta.$$

($\angle AC_2C_1 = 90^\circ$, так как C_1C_2 принадлежит повернутому зеркалу, а C_2 — проекция A на него). Значит, $A_1A_2 = 2C_1C_2 = 2a\sin\alpha\sin\beta$. Теперь в равнобедренном треугольнике A_1BA_2 мы знаем все стороны и легко найдем угол A_1BA_2. Он равен

$$2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta).$$

Во многих задачах по стереометрии пространственный чертеж носит чисто иллюстративный характер (в некоторых случаях можно и вовсе обойтись без него), а вся работа ведется на плоском чертеже, представляющем собой либо какое-то сечение пространственной конструкции, либо специальным образом выбранную проекцию. В этой связи, раз уж мы повели разговор о прямых в пространстве, проиллюстрируем заодно и один специфический прием определения расстояния между скрещивающимися прямыми, основанный на ортогональном проектировании.

Задача 4. *В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M соответственно середины AB*

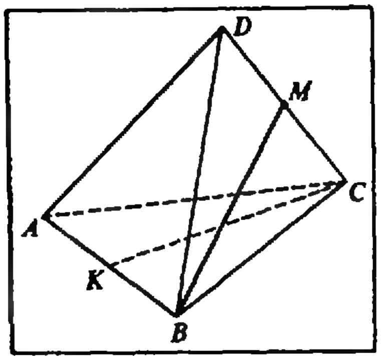


Рис. 4.

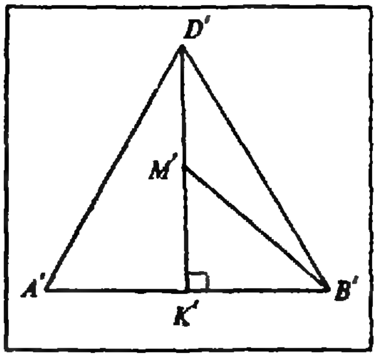


Рис. 5.

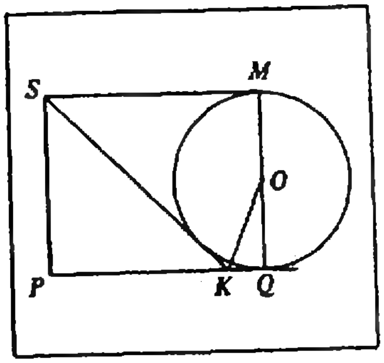


Рис. 6.

и DC. Найдите расстояние между прямыми CK и BM.

Решение. Рисунок 4 иллюстрирует задачу. Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CK, и спроектируем нашу пирамиду на эту плоскость (рис. 5). При этом прямая CK спроектируется в точку K' — середину отрезка $A'B'=$ $=AB=1$. Высота $D'K'$ треугольника $A'B'D'$ равна высоте нашей пирамиды, т. е. $D'K'=\sqrt{2/3}$. M' — середина $D'K'$, является проекцией точки M. Расстояние между прямыми CK и BM равно расстоянию от точки K' до прямой $B'M'$ (почему?). Имеем простейшую планиметрическую задачу: найти высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{2}$. Искомое расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Особая тема — чертежи в задачах про круглые тела. Здесь нередко можно (и нужно) обойтись вовсе без изображения самих тел, ограничившись изображением некоей скелетной конструкции, образованной их центрами, осями, точками, касательными и т. д. И если одинокие цилиндры или конусы иногда все же полезно изобразить, то по отношению к сфере сделанная рекомендация практически не имеет исключений.

Например, вполне типичная ситуация — четыре равные, попарно касающиеся сферы,— иллюстрируется треугольной пирамидой, все ребра которой равны диаметрам этих сфер. Вершины этой пирамиды суть центры данных сфер.

Иногда приходится и вовсе обходиться одними плоскими (не проекционными) чертежами, удерживая пространственную конфигурацию в голове, поскольку ее изображение далеко выходит за рамки графических возможностей нормального человека. Например:

Задача 5. *Четыре равные шара касаются плоскости, а каждый шар касается двух соседних. Рассмотрим конус, основание которого расположено в плоскости, касающейся данных шаров, высота равна диаметру этих шаров, а боковая поверхность касается каждого шара. Найдите отношение объемов конуса и шара.*

Решение. Если R — радиус каждого шара, то центры шаров образуют квадрат со стороной $2R$. Для решения задачи вполне достаточно рисунка 6, на котором SP — ось конуса, MQ — диаметр одного из шаров (Q — точка касания шара с плоскостью), SK — образующая конуса, касающаяся шара. Более того, мы могли бы не изображать и окружность, по которой плоскость SPO пересекает шар. Понятно, что $SM=$ $=R\sqrt{2}$ как половина диагонали квадрата со стороной $2R$. Если $\angle MSO=\varphi$, то $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $\angle PSK=90°-$ -2φ и $PK=2R\operatorname{tg}(90°-2\varphi)=$ $=R\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=R\frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь нетрудно найти искомое отношение, оно равно $\frac{1}{4}$.

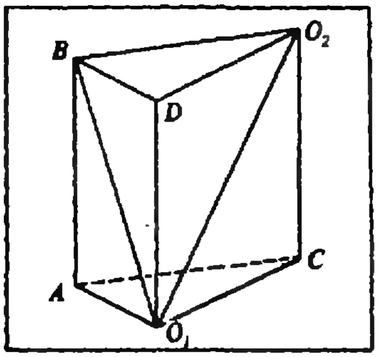


Рис. 7.

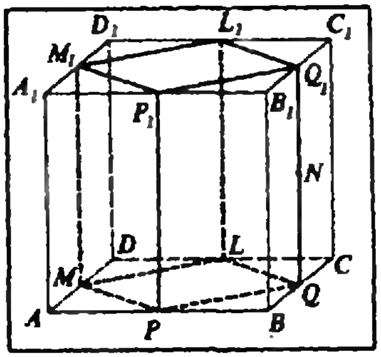


Рис. 8.

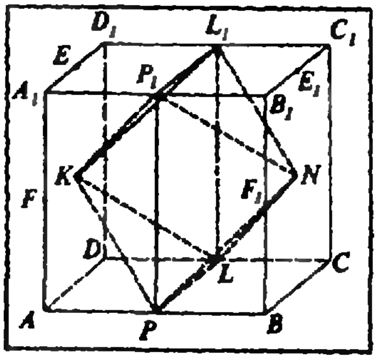


Рис. 9.

В следующей задаче основная проблема (как и в задаче 4) — найти нужную графическую интерпретацию.

Задача 6. *Два шара радиусами 1 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через точку М, расположенную на расстоянии 3 от центра меньшего шара, проведены две прямые, касающиеся обоих шаров. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует угол 45° с прямой, проходящей через центры шаров.*

Решение. Обозначим центры шаров соответственно через O_1 и O_2, а через A и B — точки касания с ними той касательной, которая образует угол 45° с прямой O_1O_2. А теперь достроим эту конструкцию до треугольной призмы O_1ACDBO_2 (рис. 7). Поскольку ребро AB перпендикулярно ребрам AO_1 и BO_2, то эта призма — прямая. В прямоугольнике O_1CO_2D диагональ O_1O_2 образует угол в 45° с ребром O_1D, следовательно, этот прямоугольник является квадратом. Его диагональ $O_1O_2=4$, значит, сторона этого квадрата равна $2\sqrt{2}$. Основания нашей призмы — прямоугольные треугольники с прямыми углами при вершинах O_1 и D ($O_1C^2=9-1=AC^2-AO_1^2$). Точка M, по условию, расположена на расстоянии 3 от O_1 на прямой AB. Но $O_1B=3$. Таким образом, возникают два случая: 1) M совпадает с B; 2) M симметрична B относительно точки A.

Далее заметим, что вторая касательная симметрична AB относительно плоскости MO_1O_2. Следовательно, угол между касательными равен удвоенному углу между одной из них и плоскостью MO_1O_2 (или дополняет этот угол до 180°).

Рассмотрим первый случай: M совпадает с B. Нам надо найти угол между прямой BA и плоскостью BO_1O_2. Этот угол равен углу между DO_1 и плоскостью BO_1O_2. Рассмотрим треугольную пирамиду BDO_1O_2. Ее объем равен $\frac{1}{6}BD\cdot DO_2\cdot DO_1=\frac{4}{3}$. Возьмем теперь за основание треугольник BO_1O_2: $BO_2=3$, $BO_1=3$, $O_1O_2=4$. Площадь BO_1O_2 равна $2\sqrt{5}$. Если h — высота, опущенная из D на BO_1O_2, то $\frac{2}{3}\sqrt{5}h=\frac{4}{3}$. Из этого уравнения найдем $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, синус угла между DO_1 и плоскостью BO_1O_2 равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Значит, $\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ (или $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$), где α — искомый угол.

Второй случай рассмотрите самостоятельно. Впрочем, можно сообразить, что во втором случае ответ такой же, как и в первом. Это следует из того, что AO_1 — общий перпендикуляр между AB и O_1O_2, а точки M, соответствующие каждому случаю, симметричны относительно A.

Хочу подчеркнуть, что построение чертежа — это не единичная акция, предшествующая решению задачи, а процесс, включенный в решение, и нередко сопровождающий все решение от начала до конца.

В него могут входить изображение общей ситуации, отдельных ее фрагментов, специальных сечений и проекций. Иногда полезно выстраивать последовательность чертежей, изменяющихся одновременно с развитием сюжета задачи, а также с появлением новых знаний об изучаемой конфигурации в процессе решения, создавая своеобразный чертеж-мультфильм. (К сожалению, во многих учебных пособиях решения задач сопровождаются итоговым чертежом, а вся динамика его развития остается «за кадром».) Частично подтверждением этого может служить следующая задача.

Задача 7. *Найдите объем общей части трех правильных четырехугольных призм, вписанных в единичный куб так, что вершинами каждой призмы служат середины ребер этого куба.*

Решение. Попробуем разобраться в ситуации постепенно, последовательно вписывая в куб три призмы. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (первый кадр нашего мультфильма, который мы из экономии журнального места не изображаем). Впишем в него призму $PQLMP_1Q_1L_1M_1$ (рис. 8). Теперь рассмотрим призму с основаниями на гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Понятно, что боковая грань этой призмы, проходящая через P, L и середины BB_1 и CC_1, отсечет от первой призмы «уголок» при вершине Q, представляющий собой треугольную пирамиду $PQLN$, где N — середина QQ_1. Точно так же отрезаются уголки при вершинах Q_1, M и M_1. В результате получаем многогранник PLL_1P_1KN (рис. 9). Теперь надо добавить третью призму с основаниями на гранях BCC_1B_1 и ADD_1A_1 и отсечь от полученного многогранника все, выходящее за границы третьей призмы. Поскольку попытка изобразить эту общую часть трех призм на одном чертеже приводит к чрезмерной перегрузке чертежа и потере наглядности, попробуем проделать эту операцию умозрительно. Общая часть двух призм есть объединение двух правильных четырехугольных пирамид с общим основанием PLL_1P_1. Этот же многогранник (октаэдр) можно рассматривать и как объединение двух (не правильных) четырехугольных пирамид с основанием PNL_1K. Грань третьей призмы, проходящей через точки F, E, F_1, E_1 — середины ребер куба AA_1, A_1D_1, BB_1, B_1C_1, пересечет боковые ребра P_1P, P_1K, P_1L_1, P_1N пирамиды PKL_1NP_1 в их серединах, а следовательно, эта грань отсечет 1/8 объема этой пирамиды или 1/16 объема октаэдра PKL_1NP_1L. То же самое можно утверждать относительно каждой из трех других боковых граней третьей призмы. Значит, третьей призмой отсекается 1/4 объема октаэдра PLL_1P_1KN, а общая часть всех трех призм имеет объем, равный 3/4 его объема, т. е. объем части равен $3/4\cdot 1/3=1/4$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дан двугранный угол величиной α. В плоскости одной грани проведена прямая, перпендикулярная ребру этого двугранного угла, а в плоскости другой грани проведена прямая, образующая угол β с ребром. Чему равен угол между этими прямыми?

2. Плоский угол α повернут на угол β вокруг своей биссектрисы. На какой угол повернулись стороны угла?

3. В пространстве расположены три прямые и плоскость такие, что все попарные углы между ними (между парами прямых, а также между каждой прямой и плоскостью) равны между собой. Найдите эти углы.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M соответственно середины ребер AB и BC. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и DM.

5. Внутри конуса находятся четыре шара равных радиусов. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

6. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

7. На прямой l расположены центры трех шаров радиусами 1, 2 и 5, причем шар радиусом 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p.

8. Найдите объем общей части шести правильных четырехугольных пирамид, основание каждой из которых совпадает с гранью данного единичного куба, а противоположная вершина принадлежит противоположной грани куба.

МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

В природе существует принцип, который, мне думается, никто до сих пор не подметил... Каждый час рождаются и умирают миллиарды триллионов маленьких живых существ — бактерий, микробов, «микроскопических животных», и жизнь каждого из них не имеет особого значения, разве что в совокупности с множеством других таких же существ, когда их крошечные деяния суммируются и становятся заметны. Они мало что чувствуют. Практически не страдают. И даже смерть сотни миллиардов не может сравниться по своей значимости со смертью одного-единственного человека.

В ряду огромного количества живых существ на Земле от мельчайших микробов до таких крупных созданий, как люди, существует определенное равновесие — примерно так же, как масса собранных вместе ветвей высокого дерева равна массе сучьев, расположенных внизу, а масса всей кроны равна массе ствола.

Таков по крайней мере принцип. И я думаю, что первым его нарушил Верджил Улэм.

Мы не виделись с ним около двух лет. И его образ, сохранившийся у меня в памяти, лишь весьма отдаленно напоминал загорелого, хорошо одетого джентльмена, что стоял передо мной. За день до этого мы договорились по телефону, что встретимся во время ленча, и теперь разглядывали друг друга, остановившись прямо в дверях кафетерия для сотрудников медицинского центра «Маунт фридом».

— Верджил? — неуверенно спросил я.— Боже, неужели это ты?!

— Рад тебя видеть, Эдвард,— произнес он и крепко пожал мою руку.

За время, прошедшее с нашей последней встречи, он сбросил десять или двенадцать килограммов, а то, что осталось, казалось теперь жестче и сложено было гораздо пропорциональнее. С университетских лет Верджил запомнился мне совсем другим: толстый, рыхлый, лохматый умник с кривыми зубами. Нередко он развлекался тем, что подводил электричество к дверным ручкам или угощал нас пуншем, от которого все потом мочились синим. За годы обучения Верджил почти не встречался с девушками — разве что с Эйлин Термаджент, которая весьма напоминала его внешне.

— Ты выглядишь великолепно,— сказал я.— Провел лето в Кабо-Сан-Лукас?

Мы встали в очередь и выбрали себе закуски.

— Загар,— ответил он, ставя на поднос картонный пакет шоколадного молока,— это результат трех месяцев под ультрафиолетовой лампой. А зубы я выправил вскоре после того, как мы виделись в последний раз. Я тебе все объясню, но только давай найдем место, где к нам не будут прислушиваться.

Я повел его в угол для курильщиков: на шесть столиков таких оказалось только трое.

— Слушай, я серьезно говорю,— сказал я, пока мы переставляли тарелки с подносов на стол.— Ты здорово изменился. И действительно выглядишь очень хорошо.

— На самом деле я так изменился, как тебе и не снилось,— эту фразу он произнес зловещим тоном, словно актер из фильма ужасов, и карикатурно поднял брови.— Как Гэйл?

— Гэйл в порядке,— сказал я ему,— учит ребятишек в детском саду. Мы поженились год назад.— Верджил перевел взгляд на тарелки — кусок ананаса, домашний сыр, пирог с банановым кремом — и спросил надтреснутым голосом:

— Ты ничего больше не замечаешь?

— М-м-м,— произнес я, пристально вглядываясь в него.

— Смотри внимательно.

— Я не уверен... Хотя да, ты перестал носить очки. Контактные линзы?

— Нет. Они мне больше просто не нужны.

Пер. изд.: Bear G. Blood Music: в сб. The Year's Best SF: First Annual Collection.— New York: Bluejay Books, 1984.

© 1983 by Davis Publications, Inc.
© перевод на русский язык, «Мир», 1990.

— И ты стал довольно ярко одеваться. Кто это проявляет о тебе столько заботы? Надеюсь, у нее не только хороший вкус, но и внешность.

— Кандис тут ни при чем,— ответил он.— Просто я устроился на хорошую работу и могу теперь позволить себе пошвырять деньгами. Очевидно, мой вкус в выборе одежды лучше, чем в выборе еды.— На лице его появилась знакомая виноватая улыбка, потом она вдруг сменилась странной ухмылкой.— В любом случае, она меня бросила. С работы меня тоже уволили, так что теперь я живу на сбережения.

— Стоп, стоп!— запротестовал я.— Не все сразу. Давай рассказывай по порядку. Ты устроился на работу. Куда?

— В «Генетрон корпорейшн»,— сказал он.— Шестнадцать месяцев назад.

— Никогда не слышал.

— Еще услышишь. В следующем месяце они выбрасывают акции на рынок. Им удалось здорово продвинуться вперед с мебами. С медицинскими...

— Я знаю, что такое меб,— перебил его я.— Медицинский биочип.

— Они наконец получили работающие мебы.

— Что?— Теперь настала моя очередь удивленно поднимать брови.

— Микроскопические логические схемы. Их вводят в кровь, они закрепляются, где приказано, и начинают действовать. С одобрения доктора Майкла Бернарда.

Это уже значило не мало — Бернард обладал безупречной научной репутацией. Помимо того что его имя связывали с крупнейшими открытиями в генной инженерии, он до своего ухода на отдых по крайней мере раз в году вызывал сенсации работами в области практической нейрохирургии. Фотографии на обложках «Тайм», «Мега» и «Роллинг стоун» уже говорят сами за себя.

— Вообще-то это держится в строгом секрете — акции, прорыв в исследованиях, Бернард и все такое.— Он оглянулся по сторонам и, понизив голос, добавил:— Но ты можешь поступать, как тебе вздумается. У меня с этими паразитами больше никаких дел.

Я присвистнул:

— Этак можно здорово разбогатеть, а?

— Если тебе этого захочется. Но всетаки посиди немного со мной, прежде чем бросаться сломя голову к своему биржевому маклеру.

— Конечно.

К сыру и пирогу он даже не притронулся, однако съел ананас и выпил шоколадное молоко.

— Ну, рассказывай.

— В медицинском колледже я готовился к исследовательской работе. Биохимия. Кроме того, меня всегда тянуло к компьютерам. Так что последние два года учебы я содержал себя тем...

— Что писал матобеспечение для «Вестингхауза».

— Приятно, когда друзья помнят... Короче, именно так я и связался с «Генетроном» — они тогда только начинали, хотя уже располагали сильной финансовой поддержкой и лабораториями на все случаи жизни. Меня приняли на работу, и я быстро продвинулся. Спустя четыре месяца я уже вел собственную тему, и мне кое-что удалось сделать.— Он беззаботно махнул рукой.— А затем я увлекся побочными исследованиями, которые они сочли преждевременными. Но я упирался, и в конце концов у меня отобрали лабораторию. Передали ее какому-то слизняку. Часть результатов мне удалось спасти и скрыть еще до того, как меня вышибли, но, видимо, я был не очень осторожен... или рассудителен. Так что теперь работа продолжается вне лаборатории.

Я всегда считал Верджила человеком амбициозным, слегка тронутым и не особенно тонким. Его отношения с начальством и вообще с властями не складывались гладко. Наука для Верджила всегда была словно недоступная женщина, которая вдруг раскрывает перед человеком объятия, когда он еще не готов к зрелому проявлению чувств, заставляя его бояться, что он упустит свой шанс, потеряет представившуюся возможность, наделает глупостей. Видимо, так и случилось.

— Вне лаборатории? Что ты имеешь в виду?

— Эдвард, я хочу, чтобы ты меня обследовал. Мне нужно очень тщательное физиологическое обследование. Может быть, с применением методов диагностики рака. Тогда я смогу объяснить дальше.

— Стандартное обследование за пять тысяч?

— Все, что сможешь. Ультразвук, ядерный магнитный резонанс, термограммы и все остальное.

— Я не уверен, что получу доступ ко всему этому оборудованию. Магнитный резонанс вообще используют в обследованиях всего месяц или два. Черт, более дорогой метод и выбрать-то...

— Тогда только ультразвук. Этого хватит.

— Верджил, я всего лишь акушер, а не прославленный ученый. Гинеколог, излюбленная мишень анекдотов. Вот если ты вдруг начнешь перерождаться в женщину, тогда я смогу тебе помочь.

Он наклонился вперед, едва не ткнувшись локтем в пирог, но в последний момент отклонил руку и опустил локоть буквально в миллиметре от тарелки. Прежний Верджил вляпался бы в самый центр.

— Ты проведи тщательное обследование, и тогда...— Он прищурил глаза и покачал головой.— Пока просто проверь меня.

— Ладно, я запишу тебя на ультразвук. Кто будет платить?

— «Голубой щит».— Он улыбнулся и достал медицинскую кредитную карточку.— Я проник в компьютерные досье «Генетрона» и кое-что там поменял. Так что любые счета за медицинское обслуживание в пределах ста тысяч долларов они оплатят без вопросов и даже ничего не заподозрят.

Верджил настаивал на полной секретности, и я предпринял соответствующие меры. Его бланки, во всяком случае, я заполнил сам. Так что до тех пор, пока счета оплачиваются, практически всю работу можно было провести без постороннего вмешательства. За свои услуги я денег с него не брал. В конце концов, он и меня поил тем самым пуншем, от которого моча окрашивалась в голубой цвет. Можно сказать, старые добрые друзья.

Пришел Верджил поздно вечером. В это время я обычно уже не работаю, но на этот раз остался в институте, дожидаясь его на третьем этаже корпуса, который медсестры в шутку называют отделением Франкенштейна. Когда он появился, я восседал в пластиковом оранжевом кресле. Под светом флюоресцентных ламп лицо Верджила приобрело странный зеленоватый оттенок.

Раздевшись, он лег на смотровой стол, и прежде всего я заметил, что у него распухли лодыжки. Однако мышцы в этих местах оказались нормальными, плотными на ощупь. Я проверил несколько раз, и, судя по всему, никаких аномалий там не было, просто выглядели они очень необычно.

Озадаченно хмыкнув, я обработал переносным излучателем труднодоступные для большого аппарата места и запрограммировал полученные данные в видеоустройство. Потом развернул стол и задвинул его в эмалированный лаз ультразвуковой диагностической установки, в «пасть», как говорят наши медсестры.

Увязав данные установки с данными переносного излучателя, я выкатил Верджила обратно, затем включил экран. После секундной задержки там постепенно проступило изображение его скелета.

Спустя еще три секунды, которые я просидел с отвисшей челюстью, на экране возникло изображение торакальных органов, затем мускулатуры, системы кровеносных сосудов и наконец кожи.

— Давно ты попал в аварию?— спросил я, пытаясь унять дрожь в голосе.

— Ни в какую аварию я не попадал,— ответил он.— Все это сделано сознательно.

— Тебя что, били, чтобы ты не выбалтывал секретов?

— Ты не понимаешь, Эдвард. Взгляни на экран еще раз. У меня нет никаких повреждений.

— А это? Здесь какая-то припухлость.— Я показал на лодыжки.— И ребра у тебя... Они все переплетены крест-накрест. Очевидно, они когда-то были сломаны и...

— Посмотри на мой позвоночник,— сказал он.

Я перевернул изображение на экране. Боже правый! Фантастика! Вместо позвоночника — решетка из треугольных отростков, переплетенных совершенно непонятным образом. Протянув руку, я попытался прощупать позвоночник пальцами. Он поднял руки и уставился в потолок.

— Я не могу найти позвоночник,— сказал наконец я.— Спина совершенно гладкая.

Повернув Верджила лицом к себе, я попробовал нащупать через кожу ребра. Оказалось, они покрыты чем-то плотным и упругим. Чем сильнее я нажимал пальцем, тем больше становилось сопротивление. Но тут мне в глаза бросилась еще одна деталь.

— Послушай,— сказал я.— У тебя совершенно нет сосков...

В том месте, где им полагалось быть, остались только два пигментных пятнышка.

— Вот видишь!— произнес Верджил, натягивая белый халат.— Меня перестраивают изнутри.

Кажется, я попросил его рассказать, что произошло. На самом деле я не очень хорошо помню, что именно тогда сказал.

Он начал объяснять в своей привычной манере — то и дело сбиваясь на посторонние темы и уходя в сторону. Слушать его — все равно что продираться к сути дела через газетную статью, чрезмерно напичканную иллюстрациями и вставками в рамочках. Поэтому я упрощаю и сокращаю его рассказ.

В «Генетроне» ему поручили изготовление первых биочипов, крошечных электронных схем, состоящих из белковых молекул. Некоторые из них подключались к кремниевым чипам размером не больше микрона, затем запускались в артериальную систему крыс. Они должны были укрепиться в отмеченных химическим способом местах и вступить во взаимодействие с тканями, чтобы сообщать о созданных в лабораторных условиях патологических нарушениях или даже оказывать на них влияние.

— Это уже большое достижение!— сказал Верджил.— Наиболее сложный чип мы извлекли, пожертвовав подопытным животным, затем считали его содержимое, подключив к видеоэкрану. Компьютер выдал нам гистограммы, затем химические характеристики отрезка кровеносного сосуда, а потом сложил все это вместе и выдал картинку. Мы получили изображение одиннадцати сантиметров крысиной артерии. Видел бы ты, как все эти серьезные ученые прыгали до потолка, хлопали друг друга по плечам и глотали «клоповник»!

«Клоповник» — это этиловый спирт, смешанный с газировкой «Доктор Пеппер».

В конце концов кремниевые элементы полностью уступили место нуклеопротеидам. Верджил не очень хотел вдаваться в подробности, но я понял, что они нашли способ превращать большие молекулы — как ДНК или даже более сложные — в электрохимические компьютеры, использующие структуры типа рибосом в качестве кодирующих и считывающих устройств, а РНК — в качестве «ленты». Позже, внося программные изменения в ключевых местах путем замены нуклеотидных пар, Верджилу удалось скопировать репродуктивное деление и слияние.

— В «Генетроне» хотели, чтобы я переключился на супергенную инженерию, поскольку этим занимались все подряд. Самые разные монстры, каких только можно вообразить, и так далее... Но у меня были другие идеи. Время безумных ученых, верно?— Он покрутил пальцем у виска, издав плавно переливающийся звук, потом рассмеялся, но тут же умолк.— Чтобы облегчить процесс дупликации и соединения, я вводил свои самые удачные нуклеопротеиды в бактерии. Затем стал оставлять их там на длительное время, чтобы схемы могли взаимодействовать с клеточными механизмами. Все они были запрограммированы эвристически, то есть они самообучались в гораздо большем объеме, чем в них закладывали изначально. Клетки скармливали химически закодированную информацию компьютерам, а те в свою очередь обрабатывали ее, принимали решения, и таким образом клетки «умнели». Ну, для начала, скажем, становились такими же умными, как планарии. Представь себе E. coli*), которая не глупее планарии, а?

— Представляю,— кивнул я.

— Ну, а потом я совсем увлекся. Оборудование было, технология уже существовала, и я знал молекулярный язык. Соединяя нуклеопротеиды, я мог получить действительно плотные и сложные биочипы, своего рода маленькие мозги. Пришлось исследовать и такую проблему: чего я смогу достичь — теоретически? Получалось, что, продолжая работать с бактериями, я бы сумел получить биочип, сравнимый по производительности обработки информации с мозгом воробья. Можешь себе представить мое удивление? Но потом мне открылся способ тысячекратного увеличения производительности, причем с помощью того же явления, которое мы прежде считали помехой — электронного дрейфа между сложившимися электронными схемами. При таких размерах даже незначительные флуктуации грозили биочипу уничтожением, но я разработал программу, которая предсказывала и обращала туннельный эффект в преимущество. Тем самым, подчеркивая эвристический аспект этих компьютеров, я использовал дрейф для увеличения сложности.

— Тут я уже перестаю понимать,— признался я.

— Я воспользовался преимуществом, которое дает элемент случайности. Схемы могли самовосстанавливаться, сравнивая содержимое памяти и исправляя поврежденные элементы. Целиком. Я дал им только базовые инструкции. Живите и размножайтесь! Становитесь лучше! Боже, ты бы видел, что стало с некоторыми культурами через неделю! Потрясающие результаты! Они начали развиваться сами по себе, словно маленькие города. Пришлось их все уничтожить. Особенно меня поразила одна чашка Петри: думаю, если бы я продолжал кормить ее жильцов, она отрастила бы ноги и дала ходу из инкубатора.

— Ты, надо понимать, шутишь?— спросил я, взглянув на него в упор.— Или нет?

— Слушай, они действительно знали, что значит становиться лучше, совершеннее. Они видели направление развития, но, находясь в телах бактерий, были очень ограниченны в ресурсах.

---

* Escherichia coli — кишечная бактерия.

— И насколько они оказались умны?

— Я не уверен. Они держались скоплениями по сто — двести клеток; и каждое скопление вело себя как самостоятельная особь. Может быть, каждое из них достигло уровня макаки-резуса. Они обменивались информацией через фимбрии — передавали участки памяти и сравнивали результаты своих действий. Хотя наверняка их сообщество отличалось от группы обезьян прежде всего потому, что мир их был намного проще. Но зато в своих чашках они стали настоящими хозяевами. Я туда запускал фагов — так им просто не на что было рассчитывать. Мои питомцы пользовались любой возможностью вырасти и измениться.

— Как это возможно?

— Что? — Он, похоже, удивился, что я не все принимаю на веру.

— Запихнуть так много в столь малый объем. Макака-резус это все-таки нечто большее, чем просто калькулятор, Верджил.

— Возможно, я не очень хорошо объяснил, — сказал он, заметно раздражаясь. — Я использовал нуклеопротеидные компьютеры. Они похожи на ДНК, но допускают интерактивный обмен. Ты знаешь, сколько нуклеотидных пар содержится в организме одной-единственной бактерии?

Последнюю свою лекцию по биохимии я слушал уже довольно давно и поэтому только покачал головой.

— Около двух миллионов. Добавь сюда пятнадцать тысяч модифицированных рибосом — каждая с молекулярным весом около трех миллионов — и представь себе возможное количество сочетаний и перестановок. РНК выглядит как длинная спираль из бумажной ленты, окруженная рибосомами, которые считывают инструкции и вырабатывают белковые цепи. — Слегка влажные глаза Верджила буквально светились. — Кроме того, я же не говорю, что каждая клетка была отдельной особью. Они действовали сообща.

— Сколько бактерий ты уничтожил в чашках Петри?

— Не знаю. Миллиарды. — Он усмехнулся. — Ты попал в самую точку, Эдвард. Как планета, населенная E. coli.

— Но тебя не за это уволили?

— Нет. Прежде всего они не знали, что происходит. Я продолжал соединять молекулы, увеличивая их размеры и сложность. Поняв, что бактерии слишком ограничены, я взял свою собственную кровь, отделил лейкоциты и ввел в них новые биочипы. Потом долго наблюдал за ними, гоняя по лабиринтам и заставляя справляться с химическими проблемами. Они показали себя просто великолепно. Время на их уровне течет гораздо быстрее: очень маленькие расстояния для передачи информации и окружение гораздо проще... Затем как-то раз я забыл спрятать свое компьютерное досье под секретный код. Кто-то из руководства его обнаружил и догадался, чем я занимаюсь. Скандал был страшный! Они решили, что из-за моих работ на нас вот-вот спустят всех собак бдительные стражи общественной безопасности. Принялись уничтожать мою работу и стирать программы. Приказали, чтобы я стерилизовал свои лейкоциты. Черт бы их побрал! — Верджил скинул лабораторный халат и начал одеваться. — У меня оставалось от силы дня два. Я отделил наиболее сложные клетки...

— Насколько сложные?

— Они, как и бактерии, держались группами штук по сто. И каждую группу по уровню интеллекта можно было сравнить, пожалуй, с десятилетним ребенком. — Он взглянул мне в глаза. — Все еще сомневаешься? Хочешь, я скажу тебе, сколько нуклеотидных пар содержится в клетках млекопитающих? Я специально запрограммировал свои компьютеры на использование вычислительных мощностей лейкоцитов. Так вот, их там десять миллиардов, Эдвард! Десять, черт побери, в десятой! И у них нет огромного тела, о котором нужно заботиться, растрачивая бо́льшую часть полезного времени.

— Ладно, — сказал я. — Ты меня убедил. Но что было дальше?

Перевод с английского А. Корженевского

(Продолжение следует)

Вниманию читателей!

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Москва — Сеул

В штурманских картах Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества (ВАКО) «Союз» в феврале нынешнего года проложен еще один маршрут — в Республику Корея. Именно туда, с ответным визитом к «Клубу юных астронавтов», отправилась делегация, в составе которой было девять школьников из различных городов Советского Союза, президент ВАКО «Союз» летчик-космонавт А. Серебров, а также автор этих строк.

Насыщенная программа, тепло и внимание, окружавшие нашу делегацию, красота мест, в которых мы побывали, сделали поездку незабываемой.

Удивительным было все, начиная с огромного интереса, которым сопровождался визит непривыкшей к такому вниманию группы наших учащихся. Попав прямо с самолета под прицелы теле- и фотокамер, школьники и взрослые чуть ли не ежедневно в течение своего двухнедельного пребывания в Республике Корея могли видеть сообщения и репортажи о себе в центральных и местных газетах и по телевидению.

Посетив ряд городов, советские школьники познакомились с такими крупнейшими компаниями, как электронная «Самсунг», сталелитейная «Поско», машиностроительная и судостроительная «Хьондей». Увидели множество исторических и культурных памятников, олимпийские объекты...

Очень интересными были посещения школ и образовательного центра в городе Похан. Там мы воочию убедились в тесной связи между успехами, достигнутыми страной, и вниманием к образовательному уровню населения. Впрочем, и сами юные корейцы свои будущие успехи в жизни прочно связывают со своей учебой. Примечательно, что единственное место, где появление советских школьников не отвлекало внимания, были читальные залы.

В Республике Корея, которая не так давно сама переживала трудности в экономике, схожие с сегодняшними нашими, мы увидели реальный вариант выхода из них — когда активная конкуренция отдельных государственных и частных фирм и предприятий, в том числе и в сельском хозяйстве, принимающих самостоятельные решения и не связанных по рукам и ногам ни экономическими, ни идеологическими путами, приводит к изобилию на прилавках. Разумеется, не последнюю роль здесь сыграло и природное трудолюбие корейского народа. И тем не менее, не покидало ощущение, что он, этот народ, лучше нашего знает, ради чего и ради кого он работает. И это знание вкупе с реалистическими задачами помогло стране ворваться в десятку ведущих стран мира.

Утешало и отвлекало от грустных размышлений и ассоциаций (а они, конечно, возникали) лишь то, что по-прежнему престиж наших специалистов — их мы встречали во всех городах, где нам довелось побывать,— довольно высок. Вот только как бы сделать так, чтобы квалификация (особенно в точных науках) советских ученых приносила бóльшую пользу нашей стране?..

Итак, поездка завершена. Ребята из Красноярска и Томска, Запорожья и Мариуполя, Ленинграда и Москвы, своим трудом и успехами в овладении знаниями попавшие в команду, познакомились с другим, неизвестным им миром. В самолете, возвращаясь на Родину, они делились своими впечатлениями. Мне кажется, все

их мысли сконцентрированы в словах Сергея Жатько из Красноярской краевой физико-математической школы-интерната с космической специализацией: «...на наши головы свалилась очень большая масса разнообразной информации, и поэтому мне показалось, что время замедлило свой бег, что я пробыл в Республике Корея два месяца, а не две недели. Но в то же время все пролетело очень быстро. И каждый день мы повторяли «А было ли вчера?»... Понравилось абсолютно все — прием в аэропорту и экскурсии, жизнь в семьях и встреча с советскими моряками, сеульский диснейленд и огромные предприятия и многое другое... Я надеюсь, это не последняя моя поездка и я еще смогу увидеть удивительное многообразие жизни. А будет ли «вчера»?..»

В. Боровишки
Фото Кьюнг Хианга

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год. Главная цель школы — развить инженерный склад мышления, помочь учащимся глубже изучить математику и физику в объеме школьной программы, научить правильно оформлять решения, подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, готовящие инженеров.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания; решенные задания оцениваются и рецензируются. Предусмотрено обучение в 9, 10 и 11 классах. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В. Н. Образцова (ЛИИЖТ).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером задачи стоит указание, поясняющее, для какого класса предназначена эта задача (например, задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов). Задание для каждого класса состоит из шести задач, но для зачисления в ЗИФМШ достаточно решить большую их часть. Решение вступительного задания необходимо прислать до 31 июля 1991 года по адресу: 190031, Ленинград, Московский проспект, д. 9, ЛИИЖТ, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	Сидоров Иван Петрович
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1991 года)	9
Подробный домашний адрес	524806, г. Тверь, ул. Ленина, д. 5, кв. 7
Номер и адрес школы	школа № 5, г. Тверь, ул. Ленина, д. 7
Ф.И.О. и профессия родителей	мать — Сидорова Анна Ивановна, врач отец — Сидоров Петр Ильич, электромонтер

Если у вас в семье есть железнодорожники или вы учитесь в железнодорожной школе, отметьте это.

При ЗИФМШ действуют группы «Коллективный ученик». Прием в эти группы проводится без конкурса, достаточно заявления учителя математики или физики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ЗИФМШ как факультативные занятия.

Несколько слов о ЛИИЖТ. Институт готовит инженеровстроителей, инженеров-электромехаников, инженеров-электриков, инженеров-механиков, инженеров-экономистов, инженеров-системотехников (по специальности ЭВМ), инженеров путей сообщения для работы на железнодорожном транспорте и в других отраслях народного хозяйства.

Задачи вступительного задания

1 (9 кл.). При движении со скоростью 6,4 км/ч электродвигатель аккумуляторного рудничного электровоза развивает мощность 12 кВт. Определите силу тяги электровоза. Почему эксплуатация электровоза в рудниках выгоднее, чем других видов транспорта?

2 (9 кл.). Вычислите значение числового выражения

$$1991\cdot 19901990-1990\cdot 19911991$$

наиболее рациональным образом (без микрокалькулятора!).

3 (9, 10 кл.). Поезд длиной 150 метров проехал мимо столба за 10 секунд. За какое время поезд проедет мост длиной 300 метров?

4 (9, 10 кл.). Фермеру выделили в аренду поле в форме прямоугольника. Когда срок аренды кончился, ему предложили участок той же формы, но других размеров: одна сторона прямоугольника уменьшена на 20 %, а другая увеличена на 20 %. На сколько процентов изменилась площадь участка?

5 (9, 10, 11 кл.) Радиолюбителю нужен резистор сопротивлением 70 кОм. У него нашлись три резистора сопротивлениями 100 кОм, 50 кОм и 25 кОм. Может ли он составить из них требуемое сопротивление? Если может, то как? Начертите схему.

6 (9, 10, 11 кл.) Решите уравнение

$$\left(\frac{x^2-x-1}{3x-5}\right)^2-\frac{x^2-x-1}{3x-5}=2.$$

7 (10, 11 кл.). Пожарный насос вертикально вверх выбрасывает струю воды диаметром 2 см со скоростью 25 м/с. Найдите мощность насоса.

8 (10, 11 кл.). На аноде электронной лампы за счет кинетической энергии электронов выделилось 20 Дж тепла за 20 минут. Определите скорость движения электрона в лампе, если анодный ток 8 мА.

9 (11 кл.). Наблюдая за равномерно движущимся поездом, мальчик определил, что мимо начала железнодорожной платформы поезд двигался в течение 24-х секунд, а мимо всей платформы поезд прошел за 40 секунд. Измерив длину платформы, которая оказалась равной 240 м, мальчик определил скорость и длину поезда. Какие числовые значения этих физических величин получил мальчик?

10 (11 кл.). Решите уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1{,}5.$$

Нам пишут

Уважаемая редакция! Пишет ученик 6 класса школы № 2 г. Гайворона Александр Мельник. Однажды мне попалась на глаза задача: *Найти наименьшее целое число, оканчивающееся на 2, такое, что переставив эту цифру в начало, получим вдвое большее число.* Решив эту задачу, я попробовал решить соответствующую задачу для других цифр, а именно: *найти все такие числа (притом наименьшие из возможных), которые увеличиваются при перестановке последней цифры в начало числа во столько раз, какова эта цифра.* Эту задачу мне удалось решить. Вот эти числа для всех 9 цифр.

$1\cdot 11=11,$
$2\cdot 105263157894736842=210526315789473684,$
$3\cdot 1034482758620689655172413793=3103448275862068965517241379,$
$4\cdot 102564=410256,$
$5\cdot 1020469387755=5102046938775,$
$6\cdot 1016949152542372886440677966=6101694915254237288644067796,$
$7\cdot 1014492753623188405797=7101449275362318840579,$
$8\cdot 1012658227848=8101265822784,$
$9\cdot 10112359550561797752808988764044943820224719=$
$=91011235955056179775280898876404494382022471,$

От редакции

Задачу можно переформулировать и так: *Найти все натуральные числа, которые уменьшаются, если некоторое число, стоящее в начале числа переставить в его конец, притом уменьшается во столько раз, каково переставляемое число.* Казалось бы та же задача, но здесь можно переставлять уже любые числа. Так, $100100=10\cdot 10010$. Конечно же, решить эту задачу так, как она сформулирована, невозможно, т. к. таких чисел может оказаться бесконечно много. Но можно выяснить для всех ли чисел, переставляемых в конец, соответствующее число существует.

Мы спрашиваем — нам отвечают

(по материалам «Анкеты — 90»)

Как наверное уже заметили наши постоянные читатели, раз в квартал мы помещаем в журнале анкету. Нам важно знать, что вам нравится в журнале, а что — нет, о чем вы хотели бы прочитать на его страницах, чем мы можем помочь школьнику, учителю, абитуриенту и чего ждет от «Кванта» просто любитель физики или математики, космонавтики или информатики.

Благодарим всех, кто нашел время ответить на наши вопросы.

К сожалению, на «Анкету — 90» откликнулось значительно меньше читателей, чем в прошлые годы, и поэтому труднее говорить о закономерностях. И все же...

Вот какая картина сложилась по результатам «Анкеты — 90».

Большинство наших читателей — это, конечно, школьники старших классов. Хотя среди тех, кто заполнил анкету, есть учителя и студенты, рабочие и инженеры. Есть совсем новые подписчики и те, кто выписывает «Квант» со дня рождения журнала.

О популярности рубрик. Самым большим вниманием читателей неизменно пользуются рубрики «Задачник «Кванта», «Школа в «Кванте», «Калейдоскоп», чуть меньшим — «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных экзаменов в вузы», «Лаборатория «Кванта», «Математический кружок» и «Квант» для младших школьников» (кстати, этот раздел нравится и «старшим»). К концу года стали очень популярными разделы «Р — значит ракета» и «Фантастика».

Наиболее понравившиеся статьи:

М. Беркинблит, Е. Глаголева. «Математика в живых организмах»,

П. Капица. «О сверхтекучести жидкого гелия II»,

А. Стасенко. «Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха»,

А. Абрикосов. «О чем не думает горнолыжник»,

А. Савин. «Камушки и шахматная доска»,

Д. Фукс. «Рогатая Сфера Александера»,

М. Каганов. «Письма о физике»,

К. Богданов. «Большие и маленькие на прогулке»,

Л. Ксанфомалити. «Перспективы поиска обитаемых планет»,

К. Феоктистов. «Полет к звездам»,

Б. Левин. «Моретрясение»,

Е. Нариманов. «56 миллионов километров до Красной планеты»,

Я. Смородинский. «Закон всемирного тяготения»,

С. Табачников. «Вариации на тему Эшера»,

С. Табачников. «Математика и нацизм».

Заметим, что среди лучших статей названы четыре статьи, перепечатанные из номеров «Кванта» прошлых лет,— и мы, и вы отметили их высокий уровень.

Наиболее понравившиеся обложки: обложки номеров 8 и 9 (к статье «Ультразвук в медицине» и к материалу «Гиперболический параболоид»).

Оценки и пожелания как всегда разнообразны, нередко диаметрально противоположны (порой категоричны!), нас спрашивают, от нас требуют:

«Пусть «Квант» будет такой, какой был до этого времени»,

«Я надеялась на лучшее, зря выписала!»,

«Обращайтесь, пожалуйста, к старым публикациям и изданиям»,

«Больше историзма и занимательности»,

«Не отдавать обложку абстракционистам!»,

«Каждая обложка хороша и соответствует номеру»,

«Больше опытов для самостоятельной работы»,

«Поместите хотя бы один тест, чтобы узнать свой уровень развития»,

«Все иллюстрации «на пять»,

«Дурацкие рисунки»,

«Нравятся все статьи, кроме фантастических рассказов. Не засоряйте журнал!»,

«Фантастики!»,

«Нельзя ли создать «Квант» для химиков и биологов?»,

«Журнал должен потолстеть»,

«Программирование! Программирование! Программирование!»...

Нам жалуются: «Как только прочту условие задачи из «Задачника», сразу голова болит».

Многое из того, что мы обещали нашим читателям, мы выполняем. Постоянно публикуются статьи о сегодняшних достижениях физики и математики, о выдающихся ученых прошлого, интервью с современными учеными. В журнале регулярно появляются «космические» материалы и фантастика. Почти в каждом номере есть материалы для любителей игр и головоломок. И на отсутствие задач и конкурсов пожаловаться нельзя! Одних только задач в каждом номере бывает до 100, а конкурсов в 1990 году объявлено целых 6.

Да... Какие-то обещания мы выполнили, а какие-то вопросы все еще обдумываем и обсуждаем (так, к сожалению, еще не возник обещанный раздел, условно названный нами «Для самых младших школьников», пока не получился и материал с ответами на ваши вопросы главного редактора журнала академика Ю. А. Осипьяна).

В будущем мы намерены сохранить облик журнала. Но жизнь идет вперед, и, несомненно, будет меняться и наш журнал. По многочисленным просьбам читателей мы хотим возродить раздел «Информатика и программирование», расширить «Квант» для младших школьников». Планируем помещать в журнале материалы на темы «физика и биология», «математика, информатика и биология».

Мы надеемся, что каждый читатель найдет «свой» материал в «Кванте».

Наша анкета все так же будет появляться раз в квартал. И мы все так же ждем от вас писем!

От уравнения — к системе

Кандидат физико-математических наук
А. ЯРСКИЙ

Начнем с примера, достаточно типичного для вступительных экзаменов.

Задача 1 (МИЭМ, 1982 г.). *Решите уравнение*

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$$

Обычно примеры такого типа решают двукратным возведением в квадрат. При этом возникает необходимость отсеять приобретенные в результате возведения в квадрат посторонние корни, что при наличии в уравнении параметра оказывается довольно сложной задачей. Мы попробуем поступить иначе.

Решение. Введем новые неизвестные

$$\begin{cases} u=\sqrt{x+2}\geqslant 0,\\ v=\sqrt{x-a+2}\geqslant 0.\end{cases}$$

Неизвестные u и v связаны равенством

$$u^2-v^2=a,$$

и исходное уравнение принимает вид

$$u-v=1.$$

Таким образом, от уравнения мы пришли к системе

$$\begin{cases} u-v=1,\\ u^2-v^2=a,\end{cases}$$

которая легко решается:

$$\begin{cases} u-v=1,\\ (u-v)(u+v)=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u-v=1,\\ u+v=a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u=(a+1)/2,\\ v=(a-1)/2.\end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}=(a+1)/2\geqslant 0,\\ \sqrt{x-a+2}=(a-1)/2\geqslant 0,\end{cases}$$

откуда получаем

Ответ: $x=\frac{(a+1)^2}{4}-2$ при $a\geqslant 1$, при $a<1$ решений нет.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

Решение. Введем неизвестные

$$u=\sqrt[3]{2-x}\,,\ v=\sqrt{x-1}\geqslant 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} u^3+v^2=1,\\ u+v=1.\end{cases}\qquad (1)$$

Следовательно,

$$u^3+u^2-2u=0,$$

откуда $u\in\{0,1,-2\}$, так что система (1) имеет 3 решения: (0; 1), (1; 0), (—2; 3), после чего находим

Ответ: 2; 1; 10.

Разумеется, для отыскания значения x нет необходимости на заключительном этапе рассматривать оба соотношения системы (6). Но в таком случае для завершения решения потребуется проверка.

При переходе от уравнения к системе могут, вообще говоря, возникнуть некоторые сложности: не видна связь входящих в уравнение комбинаций неизвестных, сложна возникшая система, не ясно, что принимать за новые неизвестные и т. п.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4.$$

Решение. Введя неизвестные

$$u=\sqrt[4]{97-x}\geqslant 0,\ v=\sqrt[4]{x-15}\geqslant 0,$$

приходим к системе

$$\begin{cases} u^4+v^4=82,\\ u+v=4.\end{cases}\qquad (2)$$

Далее,

$$u^4+v^4=((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2,$$

а так как $u+v=4$, то

$$u^4+v^4=(16-2uv)^2-2u^2v^2.$$

Мы получим квадратное уравнение относительно $t=uv$:

$$(16-t)^2-2t^2=82.$$

Отсюда $t=29$ или $t=3$. С учетом (2) получаем

$$\begin{cases} u+v=4, \\ uv=29 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u+v=4, \\ uv=3. \end{cases}$$

Первая из этих систем несовместна. Вторая — имеет 2 решения:

$$(1;\ 3),\ (3;\ 1).$$

Теперь уже без труда находим x.

Ответ: 16; 96.

Решенная нами система уравнений (7) является частным случаем так называемых симметрических систем.

Задача 4 (МИИТ, 1973 г.). *Решите уравнение*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0.$$

Решение. Напрашивается замена

$$\sqrt{x+1}=u\geqslant 0,\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}=v\geqslant 0, \qquad (3)$$

так что $u-v=1$. Исключим x из системы (3). Поскольку

$$x=u^2-1;\ x=\frac{1}{1-v^2},$$

то

$$(u^2-1)(v^2-1)=-1.$$

Итак, u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2v^2-u^2-v^2+2=0. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$(uv)^2-(u-v)^2-2uv+2=0.$$

Так как $u-v=1$, приходим к уравнению

$$(uv)^2-2uv+1=0,$$

откуда $uv=1$. Итак, мы пришли к системе

$$uv=1,\ u-v=1.$$

С учетом условия $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, получаем

$$u=(1+\sqrt{5})/2;\ v=(-1+\sqrt{5})/2,$$

после чего легко найти

Ответ: $x=(1+\sqrt{5})/2$.

В задаче 4 исключение из системы (3) неизвестного x потребовало выкладок. Но нередко, введя новые неизвестные, все-таки не удается исключить x из возникшей системы. Тем не менее система оставляет заметно больше возможностей для ее решения, нежели исходное уравнение. Сказанное может проиллюстрировать

Задача 5. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=x.$$

Решение. Положим

$$u=\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}\geqslant 0,\ v=\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}\geqslant 0,$$

тогда

$$\begin{cases} u^2-v^2=x^2-x, \\ u+v=x. \end{cases}$$

Подстановка приводит первое уравнение системы к виду

$$x(u-v)=x(x-1).$$

Так как $x\neq 0$, то u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u-v=x-1, \\ u+v=x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u=x-1/2, \\ v=1/2. \end{cases}$$

Любое из равенств последней системы после несложных преобразований приводит к уравнению

$$4x^3-x^2-28=0.$$

Заметим, что $x=2$ является корнем этого уравнения, и разложим лéвую часть на множители:

$$4x^3-x^2-28=4x^3-8x^2+7x^2-14x+$$
$$+14x-28=(x-2)(x^2+7x+14),$$

отсюда видно, что $x=2$ — единственный корень. Выполнив проверку, убеждаемся, что он удовлетворяет и исходному уравнению.

Ответ: 2.

Отметим, что логика решения последнего уравнения не была столь прозрачной, как в предыдущих случаях. Поэтому, чтобы избежать длинных объяснений, проще сделать проверку.

Довольно часто подстановка, которую целесообразно применить, бывает замаскирована.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\frac{1}{x}.$$

Решение. Преобразуем уравнение

$$\frac{(x^2+1)(x^2+1+2x)+x^2}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{x}.$$

Введя новое неизвестное

$$y = x^2 + 1,$$

приведем уравнение к виду

$$\frac{y(y+2x)+x^2}{y^2-x^2} = \frac{y}{x}.$$

После замены $y/x = t$ получаем уравнение

$$\frac{t(t+2)+1}{t^2-1} = t, \text{ или } t+1 = t(t-1),$$

имеющее корни $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Итак, $\frac{x^2+1}{x} = 1 \pm \sqrt{2}$,

т. е. $x^2 - (1 \pm \sqrt{2})x + 1 = 0$, откуда получаем

Ответ: $(1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$.

Введение дополнительных неизвестных бывает особенно полезным при решении систем уравнений.

Задача 8. *Решите систему*

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 1, \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \dfrac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$$

Решение. Во втором уравнении системы удобно положить

$$z = \frac{3x}{(1-x)^2}.$$

Тогда

$$z^2 = 2 + zy. \qquad (4)$$

Теперь, разделив первое уравнение на x^2, приведем его к виду

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 2 + \left(\frac{1}{x}\right)y \qquad (5)$$

($x \neq 0$). Дальнейшее напрашивается: вычтя из уравнения (4) уравнение (5), получим

$$\left(z - \frac{1}{x}\right)\left(z + \frac{1}{x}\right) = \left(z - \frac{1}{x}\right)y,$$

откуда либо $z = 1/x$, либо $z + 1/x = y$. В первом случае получаем

$$\frac{3x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x}, \text{ т. е. } x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}),$$

$$y = 2.$$

Во втором случае $xz + 1 = xy$, что вместе с первым уравнением исходной системы дает $2x^2 + xz + 1 = 1$. А так как $x \neq 0$, то $2x + z = 0$, т. е.

$$\frac{3x}{(1-x)^2} + 2x = 0.$$

Это уравнение ненулевых корней не имеет.

Ответ: $((-1 \pm \sqrt{3})/2;\ 2)$.

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить следующие упражнения.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) (МИЭМ, 1979 г.) $\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1$;

б) (ЛГУ, матмех, 1975 г.) $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p$;

в) $2\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[3]{27-14x} = 1$;

г)* $x = \sqrt{a-x}\,\sqrt{b-x} + \sqrt{b-x}\,\sqrt{c-x} + \sqrt{c-x}\,\sqrt{a-x}$;

д)* $7\sqrt{4x^2+5x-1} - 14\sqrt{x^2-3x+3} = 17x - 13$;

е) $(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-5x+3)^3 = (3x^2-2x-1)^3$;

ж) (ЛГУ, физфак, 1974 г.)

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}};$$

з) (МАИ, 1973 г.) $\sqrt{3-x} - \sqrt{\frac{1-x}{2-x}} = 1$;

и) (МИРЭА, 1986 г.)

$$\sqrt{7x^2+8x+10} - \sqrt{7x^2-8x+10} = 2x;$$

к) $(x^2+2x-5)^2 + 2(x^2+2x-5) = x + 5$;

л) $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$;

м) $\frac{(x-1)^2 x}{(x^2-x+1)^2} = \frac{2}{9}$;

н) $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15} = \frac{3x}{x^2-8x+15}$;

о) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$;

п) $\frac{x^4+4}{x^2+2} = 5x$;

р) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

2. Решите неравенства

а) $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}$;

б) $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} < x^2$.

3. Решите системы уравнений

а) (НГУ, геологич. ф-т, 1976 г.)

$$\begin{cases} \sqrt{-1-x} - \sqrt[3]{2y-x} = 1, \\ \sqrt{1-2y} + \sqrt{2y-x} = 4; \end{cases}$$

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Перейдя на более производительный станок, рабочий экономит 3 минуты при обработке одной детали, а за шестичасовую смену обрабатывает на 10 деталей больше, чем прежде. Сколько деталей делает теперь рабочий за смену?

2. Решите уравнение

$$2\cos x+\sqrt{6\sin x}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(3x+8)=1-\log_3 x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{8}{4^{x-1}-1}>4^x.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+1, \\ y^2-x^2-ay-ax+\frac{y}{a}-\frac{x}{a}-1=0 \end{cases}$$

имеет решение.

6. В прямоугольном параллелепипеде с ребрами $a=2$, $b=3$, $c=6$ через точку M, лежащую на одном из самых коротких ребер, и диагональ параллелепипеда, не пересекающую это ребро, проведена плоскость. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? Найдите длины сторон этого сечения.

Вариант 2

1. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 342 км. Через один час навстречу ему из пункта B вышел второй поезд, проходивший в час на 9 км больше, чем первый. Определите скорость каждого поезда, если они встретились на расстоянии 162 км от пункта B.

2. Решите уравнение

$$\cos 9x+\cos 6x+\cos 3x=0.$$

3. Решите уравнение

$$8\cdot 64^{\frac{1}{x}}-3\cdot 2^{\frac{3x+3}{x}}+16=0.$$

4. Определите, при каких значениях p прямая $y=x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2+px+2$. Сделайте чертеж.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+1)^2+y^2=a^2, \\ y^2=2x \end{cases}$$

имеет четыре различных решения.

6. Основанием пирамиды служит ромб со стороной $c=5$ и радиусом вписанной окружности $r=2{,}4$; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна стороне основания. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед, одна грань которого лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины противолежащей грани принадлежат ее боковым граням. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью v, разрывается на большое число осколков одинаковой массы. Максимальная скорость осколков относительно земли равна u. Считая, что осколки равномерно разлетаются в пространстве с равными стартовыми скоростями, найдите скорость осколков, летящих перпендикулярно направлению движения снаряда.

2. По сторонам прямого угла скользит жесткая спица длиной $2l$, посередине которой закреплена бусинка массой m (рис. 1). Скорость точки B постоянна и равна v. Определите, с какой силой действует бусинка на спицу в тот момент, когда угол $\alpha=45°$.

3. Легкая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе (рис. 2). На нее падает небольшой шарик, имеющий начальную скорость, равную нулю. Пружина упруго деформируется, и шарик подскакивает вертикально вверх. Максимальная скорость шарика при его движении оказалась равной v. На какую высоту поднимется центр тяжести пружины?

4. Бассейн заполнен двумя несмешивающимися жидкостями, плотности которых ρ и 2ρ, толщина слоев $2h$ и h соответственно. На дне бассейна лежит однородный стальной стержень, длина которого $l=2h$, а плотность 6ρ. К одному концу стержня привязана нить, за которую стержень медленно вытаскивают из бассейна, так что центр тяжести стержня поднимается на высоту H над поверхностью жидкости ($H>l$). Какая работа совершается при подъеме стержня? Силами сопро-

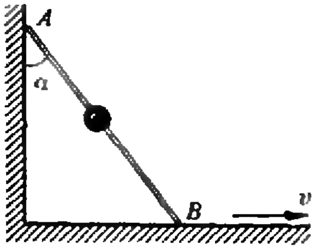


Рис. 1.

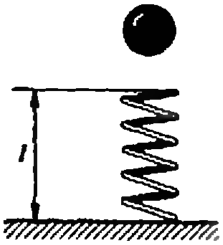


Рис. 2.

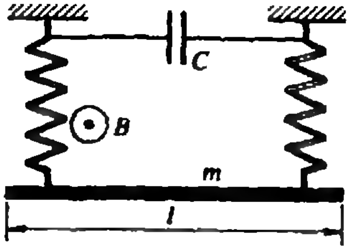


Рис. 3.

тивления и массой нити пренебречь. Масса стержня m.

5. Один моль идеального одноатомного газа расширяется по закону $pV^3=\text{const}$ от объема V_1 и давления p_1 до объема V_2. Определите изменение внутренней энергии газа.

6. В цилиндре под поршнем находится газ. Поршень соединен с дном цилиндра пружиной, упругие свойства которой подчиняются закону Гука. При нагревании газа его объем изменяется от V_1 до V_2, а давление — от p_1 до p_2. Пренебрегая трением и массой поршня, определите совершаемую при этом работу.

7. Три электрона движутся под действием сил электростатического отталкивания. Какую скорость будут они иметь, когда расстояние между ними станет бесконечно большим? В начальный момент электроны находились на расстоянии $a=1$ см друг от друга и имели скорость, равную нулю.

8. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых пружин с общей жесткостью k (рис. 3). Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости рисунка. К верхним концам пружины присоединен конденсатор емкостью C. Пренебрегая сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определите период колебаний системы в вертикальной плоскости.

9. Заряженная частица массой m и зарядом q, пройдя разность потенциалов U_0, влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Расстояние между пластинами конденсатора d, разность потенциалов U. Конденсатор находится в однородном магнитном поле. Какова должна быть индукция магнитного поля, чтобы скорость частицы не изменилась?

10. В установке для демонстрации опыта Юнга по дифракции света расстояние между щелями $d=0{,}07$ мм, а расстояние от двойной щели до экрана $l=2$ м. Прибор освещается зеленым светом с длиной волны $\lambda=5{,}0\cdot10^{-5}$ см. На сколько нужно изменить длину волны источника, освещающего прибор, чтобы при помещении установки в воду расстояние между соседними светлыми дифракционными полосами осталось неизменным? Коэффициент преломления воды принять равным $n=1{,}3$.

Публикацию подготовили
Л. Паршев, Ю. Струков

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2=5,\\ x-y=2. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{3}{\lg x-2}<-2.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$$

4. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 часа 54 минуты, а на обратную дорогу затратил 3 часа 6 минут. Скорость ходьбы: в гору 3 км/ч, по ровному месту — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному месту?

5. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB=15$, $BC=13$ и $AC=14$. Через точку C проведен перпендикуляр к стороне AC до пересечения в точке K с продолжением стороны AB. Определите BK и CK.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x-1}=x-2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4^x+4\cdot 2^x-9}{x}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^5 x\cos x-\sin x\cos^5 x=2/8.$$

4. Найдите число членов арифметической прогрессии, сумма членов которой равна 154, сумма первых трех членов равна 6, а сумма первых пяти членов равна 25.

5. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите длины сторон треугольника.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$4^x+2^x-6=0.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2+4x-1|<4.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2\cos x(\cos x-1).$$

4. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомобиля. В B они прибывают одновременно, а затем выезжают в пункт C, лежащий на расстоянии 240 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу после этого поворачивает обратно и в 80 км от C встречает первую машину. Определите скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.

5. В трапецию, у которой меньшее основание равно 6, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки с длинами 9 и 4. Найдите площадь трапеции.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Вы в состоянии сообщить мячу начальную скорость $v=20$ м/с. Какова максимальная дальность вашего броска в спортивном зале, высота которого $h=5$ м?

2. Минимальное время разгона автомобиля до скорости $v=72$ км/ч (при трогании с места) равно $t=5$ с. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой и наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость, до остановки.

3. На дне сосуда стоит деревянный куб с ребром $a=20$ см. В сосуд наливают воду, которая постепенно проникает под нижнюю грань куба. Когда уровень воды в сосуде поднимается выше верхней грани куба на $h=5$ см, куб всплывает. Определите площадь сухой поверхности нижней грани куба перед его всплытием. Плотность дерева $\rho_1=0{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2=10^3$ кг/м^3.

4. Баллон емкостью $V_1=2$ л, содержащий $\nu_1=1$ моль газа при температуре $t_1=27$ °C, соединили с другим баллоном емкостью $V_2=4$ л, содержащим $\nu_2=2$ моля этого же газа при температуре $t_2=87$ °C. Определите давление и температуру газа после установления теплового равновесия. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

5. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_1=0$ °C кипятильнику с водой при температуре $t_2=100$ °C. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m=1$ кг воды в кипятильнике? Удельная теплота плавления льда $\lambda=333$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r=2250$ кДж/кг.

6. Протон на большом расстоянии от проводника имел скорость $v_0=10^6$ м/с. Потенциал проводника $\varphi=-3$ кВ. Траектория протона заканчивается на поверхности проводника. Какую скорость имел протон вблизи этой поверхности? Масса протона $m=1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

7. Зарядка аккумулятора производится током $I_1=4$ А. Напряжение на клеммах аккумулятора при зарядке $U_1=12{,}6$ В. При разрядке того же аккумулятора током $I_2=6$ А напряжение на клеммах $U_2=11{,}1$ В. Найдите ток короткого замыкания.

8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C=1{,}2$ нФ и катушки индуктивностью $L=6$ мкГн и сопротивлением $R=0{,}5$ Ом. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m=10$ В?

9. Самолет пролетает над погрузившейся на небольшую глубину подводной лодкой на высоте $h=3$ км. Какой покажется высота полета самолета при наблюдении с лодки? Показатель преломления воды $n=4/3$.

10. Реакцию синтеза дейтерия и трития $^2\text{H}+^3\text{H}\to{}^1n+^4\text{He}$ изучают, направляя ускоренные до энергии $E=2$ МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E=17{,}6$ МэВ.

Публикацию подготовили
Р. Ведерников, М. Либерзон, А. Симонов

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите при $a=\sqrt{5}-7$

$$\frac{5\sqrt{5}-15a+3\sqrt{5}a^2-a^3}{(\sqrt{5}-a)^2}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(8-x)}>2-x.$$

3. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии при условии, что ее девятый член равен 13, а разность прогрессии равна 2.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{0{,}2^{5x-7}}{0{,}04^{1{,}5x+3}}\geqslant 25.$$

5. Решите уравнение

$$\log_2(2x+1)-\log_2(3x+5)=-1.$$

6. Найдите в градусах решение уравнения

$$5\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos^2 x}+7=0,$$

удовлетворяющее условию $-90^\circ<x<0$.

7. Преобразуйте в произведение выражение

$$4\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{7\alpha}{8}-\sin^2\frac{49\alpha}{8}\right)$$

и вычислите его значение при $\alpha=\pi/21$.

8. Объем конуса равен $\frac{\pi}{3}\sqrt{143}$. Величина угла развертки боковой поверхности конуса равна 30°. Чему равна длина его образующей?

9. Через точку $M_0(x_0;\,y_0)$ параболы $y=x^2+10$ проведена к ней касательная. Касательная пересекает параболу $y=x^2-1$ в точках $M_1(x_1;\,y_1)$ и $M_2(x_2;\,y_2)$, причем $x_1<x_2$. Найдите отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка M_0M_2.

10. Найдите середину интервала, являющегося решением системы

$$\begin{cases}|2x^2-33x+112|\leqslant 21,\\ x\geqslant 7{,}5.\end{cases}$$

11. Дано:

$$x=\log_{0,1}8-\frac{1}{\log_4 0{,}1}.$$

Найдите 10^x.

12. В параллелограмме $ABCD$ известны длины диагоналей $AC=15$, $BD=9$. Радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен 10. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\frac{a^6+8}{a^4-2a^2+4}-\frac{a^4-4}{a^2+2}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(x+2)}>2x+1.$$

3. Отношение седьмого члена геометрической прогрессии к четвертому равно 27. Найдите первый член прогрессии, если ее третий член равен 36.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$0{,}25^x-6\cdot 0{,}5^x-16>0.$$

5. Найдите меньший корень уравнения

$$\log^2_{0,25}x+3\log_{0,5}x+5=0.$$

6. Найдите в градусах корень уравнения

$$\cos 5x=\sin x,$$

удовлетворяющий условию $0<x<60^\circ$.

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 56^\circ-\sin^2 4^\circ}{\cos 52^\circ}.$$

8. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Высота призмы равна 2. Найдите площадь полной поверхности призмы.

9. При каком значении c функция

$$y=4-(2c+4)x+(c+2{,}5)x^2-\frac{1}{3}x^3$$

монотонно убывает на всей числовой оси?

10. Найдите количество целых чисел, не являющихся решениями неравенства

$$|4x^2+6x-59|>49.$$

11. Вычислите

$$\frac{\log_2\frac{2}{11}\cdot\log_2\frac{11}{2}\cdot\log_{11}2}{\log_2 11+\log_{11}2-2}.$$

12. В параллелограмме $ABCD$ бóльшая сторона AD равна 5. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Вычислите площадь параллелограмма, если $BM=2$ и $\cos\angle BAM=0{,}8$.

Физика

Письменный экзамен

В каждом варианте 4 задачи из 12 были относительно более сложными и при подсчете баллов оценивались в два раза «дороже». Такие задачи здесь отмечены звездочкой.

Вариант 1

1*. Конькобежец проходит путь $s=450$ м с постоянной скоростью v, а затем тормозит до остановки с ускорением, модуль которого $a=0{,}5$ м/с^2. При некотором значении v общее время движения конькобежца будет минимальным. Чему оно равно?

2. Шарик массой $m=20$ г, падающий со скоростью $v_1=5$ м/с, ударяется о плиту и отскакивает от нее в противоположном направлении со скоростью, абсолютная величина которой $v_2=4{,}5$ м/с. Найдите среднюю силу, с которой плита действовала при ударе на шарик, если время соударения $t=0{,}01$ с.

3. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол нужно отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в $n=4$ раза больше минимальной?

4*. Из двух абсолютно упругих шаров шар большей массы до удара покоился. В результате прямого удара меньший шар потерял $\alpha=3/4$ своей кинетической энергии. Чему равно отношение масс шаров?

5. Металлический брусок плавает в сосуде, в который налита ртуть, а поверх нее — вода. При этом в ртуть брусок погружен на $\alpha_1=1/4$ своей высоты, а в воду — на $\alpha_2=1/2$ высоты. Найдите плотность металла. Плотность ртути $\rho_1=13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_2=1$ г/см^3.

6. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул газа, если, имея массу $m=6$ кг, он занимает объем $V=4{,}9$ м^3 при давлении $p=200$ кПа.

7*. Количество теплоты, получаемое тепловой машиной от нагревателя, равно $Q=1$ кДж. При этом объем газа увеличивается от $V_1=1$ л до $V_2=2$ л, а давление в зависимости от объема линейно убывает от $p_1=1000$ кПа до $p_2=400$ кПа. Найдите изменение внутренней энергии газа.

8. Плоский конденсатор, пластины которого расположены вертикально, погружается на $\alpha=1/3$ площади пластин в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Во сколько раз при этом возрастает емкость конденсатора?

9. За время $t=1$ мин через поперечное сечение проводника прошел электрический заряд $q=100$ Кл. При этом первые $t_1=10$ с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины I, а последние $t_2=t_1=10$ с — равномерно уменьшалась до нуля. Найдите величину I.

10*. Протон влетает со скоростью $v=60$ км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно этим линиям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля $B=0{,}1$ Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, $a=10^{12}$ м/с^2. Отношение заряда протона к его массе q/m принять равным 10^8 Кл/кг.

11. Имеются два когерентных источника звука. В точке, отстоящей от первого источника на $x_1=2{,}3$ м, а от второго на $x_2=2{,}48$ м, звук не слышен. Минимальная частота колебаний, при которой это возможно, равна $\nu=1$ кГц. Найдите скорость распространения звука.

12. Два точечных источника света находятся на расстоянии $l=24$ см друг от друга. Между ними на расстоянии $l_1=6$ см от одного из них помещена собирающая линза. При этом изображения обоих источников получились в одной и той же точке. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Скорость свободно падающего тела увеличилась за время $t_1=2$ с в $n_1=5$ раз. Во сколько раз увеличится его скорость по сравнению с начальной через $t_2=6$ с после начала падения?

2*. Автомобиль начал двигаться с ускорением $a_0=3$ м/с^2. При скорости $v_1=60$ км/ч ускорение стало равным $a_1=1$ м/с^2. С какой скоростью будет двигаться автомобиль при равномерном движении, если сила тяги двигателя постоянна, а общая сила сопротивления пропорциональна скорости?

3. При движении гоночного автомобиля вдоль экватора со скоростью $v=360$ км/ч с запада на восток и в обратном направлении силы давления автомобиля на дорогу отличаются на $\Delta F=73$ Н. Чему равна масса автомобиля? Угловая скорость вращения Земли $\omega=7{,}3\times10^{-5}$ с$^{-1}$.

4. Груз массой $m=0{,}1$ кг, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Чему равна при этом максимальная разность натяжений нити?

5*. Согласно желанию сиракузского властителя, Архимед должен был определить содержание золота в короне, состоящей из золотых и серебряных частей, не разрушая ее. Для этого Архимед взвесил корону в воздухе и получил вес $P_1=25{,}4$ Н, а затем — в воде, получив вес (подъемную силу) $P_2=23{,}4$ Н. Зная плотность золота и серебра ($\rho_1=19{,}3$ г/см^3 и $\rho_2=10{,}5$ г/см^3), определите, как и Архимед, массу золота, содержавшегося в этой короне. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, плотность воды $\rho_0=1$ г/см^3.

6. Объем цилиндра откачивающего поршневого насоса в $\alpha=4$ раза больше объема откачиваемого сосуда. За сколько ходов поршня давление в сосуде уменьшится от атмосферного $p_0=100$ кПа до $p=800$ Па?

7. Двигатель реактивного самолета с коэффициентом полезного действия $\eta=20\,\%$ при полете со скоростью $v=1800$ км/ч развивает силу тяги $F=86$ кН. Найдите расход керосина (m) за время полета $t=1$ ч. Теплота сгорания керосина $q=4{,}3\cdot10^7$ Дж/кг.

8*. Конденсатор, подключенный к источнику тока проводами с сопротивлением $R=100$ Ом, имеет первоначальную емкость $C=2$ мкФ. Затем его емкость за некоторое время равномерно увеличивают в $n=5$ раз. При этом в подводящих проводах выделяется в виде тепла $Q=2{,}56$ мДж энергии. Сколько времени длилось увеличение емкости конденсатора? Напряжение на конденсаторе считать постоянным и равным $U=2$ кВ.

9. При замыкании на сопротивление $R=5$ Ом батарея дает ток $I=1$ А. Ток короткого замыкания батареи $I_0=6$ А. Какую наибольшую полезную мощность может дать эта батарея?

10. Какая масса меди выделится за время $t=2000$ с на катоде при электролизе медной соли, если в течение первой половины этого времени сила тока равномерно возрастает от нуля до $I_1=6$ А, а в течение второй половины равномерно уменьшается до $I_2=3$ А? Электрохимический эквивалент меди $k=3\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

11*. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины?

12. Атом водорода переходит из низшего энергетического состояния в возбужденное при поглощении фотона, энергия которого составляет $\alpha=8/9$ энергии ионизации атома водорода. Каков номер этого возбужденного состояния?

Публикацию подготовили
Л. Белопухов, Б. Писаревский

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Выведите формулу корней квадратного уравнения.

2. Дайте определение косинуса числа α.

3. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите длину диагонали BD, если $AC=4$, $CD=2\sqrt{2}$ и $\angle BAC : \angle CAD=2:3$.

4. В двух бидонах находится 70 литров молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5 % молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

5. Найдите первый член и знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если сумма ее первых трех членов равна 21, а произведение этих же членов равно 64.

6. Упростите

$$\frac{a-1}{a^{3/4}+a^{1/2}}\cdot\frac{a^{1/2}+a^{1/4}}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}+1.$$

7. Решите уравнение:
а) $\log_2(2^x-7)=3-x$;
б) $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$;
в) $(4+2\sqrt{3})^{\frac{\cos x}{2}}=3$;
г) $5\sin 2x-2\sin x=0$;
д) $|x+3|-|x+1|=2$.

8. Решите неравенство:

$$\sqrt{-x^2+4x-3}<x-2.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=9. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Выведите формулу логарифма частного.

2. Дайте определение арифметической прогрессии.

3. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40 % золота. Найдите, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35 % золота.

4. Сумма первых шести членов геометрической прогрессии со знаменателем $1/3$ равна $364/9$. Найдите первый и шестой члены прогрессии.

5. Две стороны треугольника равны a и b. Найдите третью сторону c треугольника, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

6. Упростите

$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

7. Вычислите:

а) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=a$;

б) $\log_{12}90$, если $\log_{24}3=a$, $\log_{24}5=b$.

8. Решите уравнение:

а) $\operatorname{ctg}^2 x=3$;

б) $\log_6(5+6^{-x})=x+1$.

9. Решите неравенство:

а) $|\log_3 x|<\left|\log_3\frac{x}{9}\right|$;

б) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geqslant 0$.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Три звезды массой m каждая, удаленные от других небесных тел, сохраняют в своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной L. Найдите период вращения этого треугольника. Постоянная всемирного тяготения G известна.

2. Конец капиллярной трубки опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии воды по капилляру? Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}072$ Н/м, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Две стороны правильного треугольника — однородно заряженные палочки. При этом в центре треугольника — в точке O — напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Каковы будут величина и направление напряженности поля в точке O, если одну из палочек убрать?

4. Длины сторон квадратного проводящего витка увеличиваются со скоростью $\Delta a/\Delta t=2$ см/с. Виток находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B=1$ Тл и перпендикулярной плоскости витка. При $t=0$ стороны квадрата были равны $a=10$ см. Найдите ЭДС индукции в момент $T=2$ с.

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=8$ см на расстоянии $d=12$ см от линзы. Линзу начинают смещать в направлении, перпендикулярном своей главной оптической оси, со скоростью $v_0=1$ см/с. С какой скоростью будет смещаться изображение источника, если сам источник остается неподвижным?

6. В микрокалориметр с теплоемкостью $C=1000$ Дж/К помещено $m=100$ мг изотопа кобальта (атомная масса $A=61$). При распаде одного ядра ^{61}Co выделяется энергия $Q=2\cdot10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0{,}06$ К. Найдите период полураспада изотопа кобальта. Постоянная Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ 1/моль.

Вариант 2

1. На тело массой m, вначале покоившееся на горизонтальной плоскости, в течение времени τ действует горизонтальная сила F. Какое расстояние пройдет тело за время движения? Коэффициент трения тела о плоскость μ, ускорение силы тяжести g.

2. В сосуд квадратного сечения, лежащий на горизонтальной поверхности и закрытый с одного конца, начинают медленно вдвигать поршень с открытого конца. Найдите давление воздуха в сосуде в тот момент, когда сосуд сдвинется с места. Масса сосуда вместе с поршнем $m=2$ кг, площадь поршня $S=6$ см^2, атмосферное давление $p_0=100$ кПа, коэффициент трения между горизонтальной поверхностью и сосудом $\mu=0{,}3$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Напряжение на резисторе сопротивлением $R=100$ Ом меняется во времени по закону $U=k\sqrt{t}$, где $k=2$ (численно), если t измеряется в секундах, а напряжение в вольтах. Найдите количество теплоты, выделяющееся в резисторе за первые $\tau=100$ с.

4. По круговой орбите радиусом R вокруг протона вращается электрон. На сколько изменится частота обращения электрона по этой орбите, если систему поместить в слабое магнитное поле, индукция которого равна B и направлена вдоль оси вращения? Масса электрона m, заряд e.

5. Посередине плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено плоское зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определите площадь светлого пятна, образованного на экране отраженными от зеркала лучами.

6. Азот облучался в течение $\tau=1$ ч пучком α-частиц (${}^4_2\mathrm{He}$), ускоренных в циклотроне. Найдите количество атомов образовавшегося изотопа ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$, если ток в пучке $I=200\cdot10^{-6}$ А и ядерную реакцию ${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}={}^{17}_{8}\mathrm{O}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}$ вызывает одна α-частица из каждых $n=10^5$ частиц в пучке.

Публикацию подготовили
Г. Гайдуков, В. Плис, А. Ревякин,
А. Терещенко

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(4)$, $f'(7)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{(x-5)^2}+\sqrt{x^2+5x}+\sqrt[4]{(x^2-25)^2}}{\sqrt{x+\sqrt{4x+20}}+6}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{36x}}{6-x}\right)^2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2^4(0{,}5x)+\log_2^4(8x)=256.$$

3. Найдите двузначное число по следующим условиям: сумма цифр, изображающих это число, равна 14; цифра, изображающая единицы искомого числа, на 2 больше цифры, изображающей его десятки.

4. Найдите корни уравнения

$$3\cos(x-21\pi)-2\sin 2\left(x+\frac{19}{4}\pi\right)=$$

$$=\sin\frac{31}{2}\pi+\cos 27\pi,$$

принадлежащие области определения функции

$$y=\log_2(\sin x-\sqrt{7}/4).$$

5. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна S, высота пирамиды образует с боковым ребром пирамиды угол α. Найдите площадь поверхности сферы, диаметр которой равен высоте данной пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right)\cdot 0{,}2^{\log_5(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})}-\sqrt[4]{a}\right)^4.$$

2. Решите неравенство

$$(5^{x^2}+3\cdot5^{-x^2})^{\log_5 x^2-0{,}25\log_5(x-2)^4}-1\geqslant0.$$

3. Две трубы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 ч 12 мин. Если бы производительность первой трубы увеличили вдвое, а вторую трубу включили через 10 мин после включения первой, то бассейн заполнился бы за 2 ч 30 мин. За какое время заполнит бассейн вторая труба?

4. Найдите корни уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{4\pi}{3}\sin x+\cos x=\frac{3}{4},$$

лежащие на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$.

5. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна S, а площадь полной поверхности равна Q. Найдите объем цилиндра.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Индукция магнитного поля. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

2. Как известно, заряженный шарик притягивает бумажку. Как изменится сила притяжения, если окружить металли-

ческой сферой а) заряженный шарик, б) бумажку?

3. Шарик массой m, движущийся со скоростью v, упруго ударяется о гладкую стенку под углом α к ее плоскости и отскакивает без потери скорости. Определите изменение импульса шарика.

4. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен водой. С какой силой вода давит на стенку аквариума, если ее длина $l=0{,}8$ м, а высота $h=0{,}6$ м?

5. Сколько времени будет нагреваться $V=2$ л воды от $t_1=0\ ^\circ\mathrm{C}$ до $t_2=100\ ^\circ\mathrm{C}$ в электрическом чайнике мощностью $P=600$ Вт, если его коэффициент полезного действия $\eta=80\ \%$? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К).

Вариант 2

1. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Температура и ее измерение. Абсолютная температурная шкала.

2. Вдоль оси вертикально стоящей катушки падает магнит. С одинаковыми ли ускорениями он движется при замкнутой и разомкнутой обмотке катушки?

3. При подключении к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}=15$ В резистора сопротивлением $R=15$ Ом мощность, выделяемая на нагрузке, составляет 75 % от полной мощности. Какую максимальную мощность во внешней цепи может выделить данный источник?

4. Тело начинает двигаться вдоль прямой без начальной скорости с постоянным ускорением. Через время $\tau=30$ мин ускорение тела меняет направление на противоположное, оставаясь таким же по величине. Через какое время от начала движения тело вернется в исходную точку?

5. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $L=2\times10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d=1$ мм, площадь пластин $S=80\ \text{см}^2$, конденсатор заполнен диэлектриком с $\varepsilon=11$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, А. Касаткин

АБИТУРИЕНТУ — 91, 92,...

Тем, кто мечтает поступить
в Московский физико-технический институт,
тем, кто хочет попрактиковаться в решении
математических и физических «абитуриентских» задач,
предназначен

СБОРНИК ЗАДАЧ,

подготовленный МФТИ и Центром НТТМ «ФИЗТЕХ».
В сборнике — условия задач,
предлагавшихся на письменных экзаменах
по математике и физике в МФТИ в 1989—1990 годах,
и ответы на них.

Цена — 1 рубль.

Сборник может быть выслан наложенным платежом.
Заказы направляйте по адресу:
141700, г. Долгопрудный Московской обл.,
Институтский пер., 9, приемная комиссия.
Справки по телефону (московскому):
408-48-00.

Ответы, указания, решения

[illegible]ранные школьные [illegible]чи по физике

1. Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1v_1=m_2v_2,$$

откуда находим отношение начальных скоростей тележек:

$$v_1/v_2=m_2/m_1=3.$$

Путь, пройденный каждой тележкой до остановки, пропорционален квадрату начальной скорости и обратно пропорционален ускорению (оно одинаково для обеих тележек). Поэтому отношение пройденных путей будет равно

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{v_1^2/a}{v_2^2/a}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=9.$$

2. Пусть начальная скорость первого тела до удара равна v_1, а общая скорость обоих тел после удара — v. Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v.$$

Кинетическая энергия системы до удара равна $m_1v_1^2/2$, а после удара — $(m_1+m_2)v^2/2$. Искомая доля потерянной кинетической энергии оказывается равной

$$\frac{m_1v_1^2/2-(m_1+m_2)v^2/2}{m_1v_1^2/2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

3. Поскольку скорость первого шарика по модулю не изменилась, из закона сохранения энергии следует, что модуль скорости второго шарика остался прежним. Тогда из закона сохранения импульса получаем

$$m_1v_1-m_2v_2=-m_1v_1+m_2v_2,$$

и

$$v_2=m_1v_1/m_2=5\ \text{м/с}.$$

4. Работа, совершенная человеком, пошла на сообщение кинетической энергии $mv^2/2$ камню и кинетической энергии $MV^2/2$ человеку. Согласно закону сохранения импульса,

$$mv=MV.$$

Дальность полета камня —

$$l=vt,$$

высота полета —

$$H=gt^2/2.$$

Окончательно получаем

$$A=\frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2}=\frac{m(m+M)v^2}{2M}=$$

$$=\frac{m(m+M)gl^2}{4MH}\approx 354\text{м}.$$

5. В момент отрыва (рис. 1) на тело действует только сила тяжести, проекция которой $mg\cos\alpha$ сообщает телу центростремительное ускорение $a=v^2/R$ (v — скорость тела в момент отрыва):

$$mg\cos\alpha=mv^2/R.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgH=mv^2/2+mgh.$$

Из рисунка 1

$$\cos\alpha=(h-R)/R.$$

Таким образом, искомая высота отрыва будет равна

$$h=(2H+R)/3.$$

6. При вращении круга возникает электрическое поле. Чтобы найти его напряженность, рассмотрим электрон, движущийся по окружности радиусом $r\,(0\leqslant r\leqslant R)$. Со стороны электрического поля на него действует сила eE, которая сообщает центростремительное ускорение ω^2r:

$$eE=m\omega^2r.$$

Отсюда получаем, что на расстоянии r от центра круга напряженность поля равна

$$E_r=m\omega^2r/e=\omega^2r/\gamma,$$

средняя напряженность —

$$E_{\text{ср}}=(E_0+E_R)/2=\omega^2R/(2\gamma),$$

а напряжение, измеряемое вольтметром,—

$$U=E_{\text{ср}}R=\omega^2R^2/(2\gamma).$$

7. На подвижный стержень действуют две горизонтальные силы: сила Ампера, вызывающая его движение, и сила трения, его тормозящая. Согласно второму закону Ньютона,

$$ma=F_A-F_{\text{тр}},$$

где

$$F_A=BIl,\ F_{\text{тр}}=\mu mg.$$

Отсюда получаем ускорение стержня:

$$a=BIl/m-\mu g=8\text{м/с}^2.$$

8. В состоянии равновесия сумма всех действующих на проводник сил (рис. 2) — силы тяжести mg, силы Ампера F_A и силы натяжения нитей $2T$ — равна нулю. Другими словами,

$$F_A=mg\operatorname{tg}\alpha,$$

где

$$F_A=BIl.$$

Таким образом, ток, текущий по проводнику, равен

$$I=mg\operatorname{tg}\alpha/(Bl)\approx 2\text{А}.$$

9. Чтобы ион двигался равномерно и прямолинейно, магнитная и электрическая силы должны быть одинаковы по величине, но на-

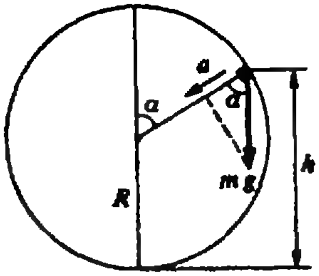


Рис. 1

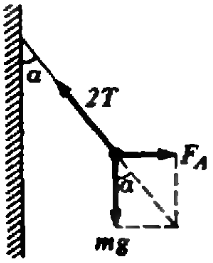


Рис. 2

правлены в противоположные стороны:

$$\vec F_м=-\vec F_э, \text{ или } qvB=qE.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mv^2/2=qU.$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{q}{m}=\frac{E^2}{2B^2U}\approx 10^5 \text{Кл/кг}.$$

10. Электрон влетает в магнитное поле со скоростью

$$v=\sqrt{2eU/m}.$$

Разложим вектор скорости электрона $\vec v$ на две составляющие: $\vec v_{\parallel}$ и $\vec v_{\perp}$ (рис. 3). Вдоль магнитного поля электрон движется равномерно и прямолинейно, а в перпендикулярном направлении он описывает окружность, т. е. траекторией электрона является винтовая линия. За время одного оборота T электрон по окружности пройдет путь $2\pi R=v_{\perp}T=v\sin\alpha\cdot T$, а вдоль поля он сдвинется на расстояние $h=v_{\parallel}T=v\cos\alpha\cdot T$.

Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R}=ev_{\perp}B.$$

Таким образом, шаг винтовой линии равен

$$h=\frac{2\pi\cos\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\approx 2{,}1\cdot 10^{-2}\text{м}.$$

11. Натяжение нити самое большое в крайнем нижнем положении. Из второго закона Ньютона

$$ma=T-mg, \qquad \text{где } a=\omega^2 l,$$

получаем искомую угловую скорость вращения:

$$\omega=\sqrt{(T-mg)/(ml)}\approx 5{,}5\text{с}^{-1}.$$

12. При полете предмета вверх сила тяжести совершает работу

$$A_1=-mgH'=-16\text{Дж},$$

при полете вниз —

$$A_2=mg(H'-H)=4\text{Дж},$$

а на всем пути —

$$A_3=A_1+A_2=-mgH=-12 \text{ Дж}.$$

13. Из первого закона термодинамики получаем

$$\Delta U=Q-A=Q-p\Delta V=2 \text{ МДж}.$$

Поскольку $\Delta U>0$, заключаем, что газ нагрелся.

14. Напряженность поля направлена параллельно той стороне треугольника, где находятся заряды (рис. 4), и равна

$$E_3=E_1=E_2=kq/a^2=q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)=90\text{В/м}.$$

15. Согласно закону Ома,

$$I=\mathscr{E}/(R+r),$$

где

$$R=R_1R_2/(R_1+R_2)+R_3.$$

Таким образом, внутреннее сопротивление источника равно

$$r=\frac{\mathscr{E}}{I}-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}-R_3=2 \text{ Ом},$$

а ток короткого замыкания —

$$I_{к.з.}=\mathscr{E}/r=5 \text{ А}.$$

[redacted]теж в стереометрических задачах

1. $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$.

2. $2\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$.

3. $\arccos\frac{\sqrt7-1}{3}$.

4. $\arccos\frac{1}{6}$. $\sqrt{\frac{2}{35}}$.

5. $\arccos\frac{1}{3}$.

6. 60°.

7. $\left|\frac{2\pi}{\sqrt3}\right|$.

8. $\frac{\pi\sqrt2(53-7\sqrt3)}{48}$.

9. $\arcsin\left|\frac{1}{\sqrt5}\right|, \left|\frac{2}{\sqrt5}\right|$.

10. $\frac{1}{18}$.

[redacted]уравнения — к системе

1. а) $(a-1+\sqrt{1+2a})/2$, $a\geqslant0$.

б) $\frac{1}{8}(p\pm\sqrt{8/p-p^2})^3-1$, $p\in(0;\ 2]$.

в) -7; 0; 2.

г) Неизвестные $u=\sqrt{a-x}$, $v=\sqrt{b-x}$, $w=\sqrt{c-x}$ удовлетворяют системе

$$x=a-u^2=b-v^2=c-w^2=uv+uw+vw.$$

Исключив x, получим систему

$$\begin{cases}(u+v)(u+w)=a,\\(u+v)(v+w)=b,\\(u+w)(v+w)=c.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{a+b+c}{2}-\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4abc}$, причем

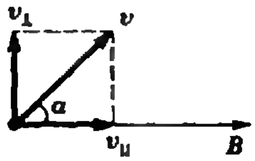


Рис. 3.

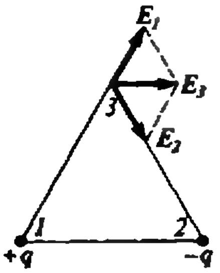


Рис. 4.

$a, b, c > 0$ и среди чисел ab, ac, bc сумма двух любых больше третьего.

д) Неизвестные $u=\sqrt{4x^2+5x-1}$, $v=\sqrt{x^2-3x+3}$ связаны соотношением $u^2-4v^2=17x-13$. Возникает система

$$\begin{cases} 7u-14v=u^2-4v^2, \\ u^2-4v^2=17x-13. \end{cases}$$

Отсюда либо $u-2v=0$, либо $u+2v=7$. Первый вариант приводит к $x=13/17$. Второй вариант приводит к системе

$$\begin{cases} u+2v=7, \\ 7(u-2v)=17x-13 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 14u=17x+36, \\ 28v=62-17x. \end{cases}$$

Ответ: 13/17; 2; $-746/495$.

е) 1; $-1/3$; -4; 3/2.

ж) 2.

з) $(3-\sqrt{5})/2$.

и) -1; 0; 1.

к) $(-1\pm\sqrt{21})/2$; $(-3\pm\sqrt{17})/2$.

л) Если $a=0$, то $x=0$; если $a\geqslant 1$, то $x=\sqrt{a-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$, при остальных значениях a решений нет.

м) Положите $x^2+1=y$. Ответ: 2; 1/2; $2\pm\sqrt{3}$.

н) Положите $x^2-8x+15=y$. Ответ: $7\pm\sqrt{34}$.

о) Положив $\sqrt{1-x^2}=y\geqslant 0$, получим симметрическую систему

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{35}{12},\ x^2+y^2=1.$$

Ответ: $(\sqrt{73}-5)/14$.

п) Переписав уравнение в виде $\frac{(x^2+2)^2-4x^2}{x^2+2}=5x$, положите $x^2+2=y$.

Ответ: $\frac{1}{4}(5+\sqrt{41}\pm\sqrt{34+10\sqrt{41}})$.

р) Переписав уравнение в виде

$$\frac{1}{(1/x)^2}+\frac{1}{(1/5+1/x)^2}=11,$$

положите $u=1/x$, $v=1/5+1/x$.

Ответ: $(1\pm\sqrt{21})/2$.

2. а) Введя неизвестные $u=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$, $v=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, решите соответствующее неравенству уравнение и воспользуйтесь методом интервалов.

Ответ: $[(1+\sqrt{5})/2;\ +\infty)$.

б) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ -\sqrt{12}]\cup[\sqrt{12};\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

3. а) Положив $\sqrt{-1-x}=a$, $\sqrt{2y-x}=b$, $\sqrt{1-2y}=c$, получим систему

$a-b=1$, $b+c=4$, $a^2-b^2-c^2=-2$.

Ответ: $(24\sqrt{3}-49;\ 2\sqrt{3}-6)$.

б) (2; 2).

[redacted]ковский государственный технический ерситет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 40. 2. $\pi(12k+5)/6$, $k\in Z$. 3. 1/3. 4. (1; 3/2).

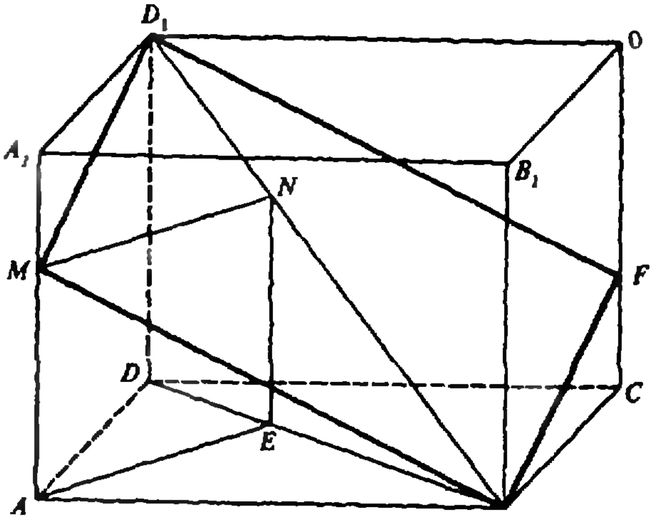


Рис. 5.

5. $a\in[-4/3;\ 0)\cup[3/4;\ +\infty)$. **Указание.** Левая часть второго уравнения раскладывается на множители $(y-x-a)(y+x+1/a)$. Поэтому данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} y=x+a, \\ y=x^2+1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y+x+1/a=0, \\ y=x^2+1. \end{cases}$$

6. $42/\sqrt{5}$; $\sqrt{229}/5$; $2\sqrt{241}/5$. **Указание.** Пусть точка M лежит на ребре AA_1 параллелепипеда, а MD_1PB — искомое сечение (рис. 5). Площадь сечения будет наименьшей, если будет наименьшей высота MN треугольника MD_1B, т. е. тогда, когда MN окажется общим перпендикуляром прямых AA_1 и BD_1. Для построения MN достаточно опустить из точки A перпендикуляр AE на BD, затем провести $EN\parallel D_1D$ и $MN\parallel AE$, после чего вычисления затруднений не вызывают.

Вариант 2

1. 45 км/ч, 54 км/ч.
2. $\pi(2k+1)/12$; $2\pi(3k\pm1)/9$, $k\in Z$.
3. 3.
4. -1; 3. **Указание.** Пусть $x=c$ — абсцисса точки касания параболы $y=x^2+px+2$ с прямой $y=x+1$. Тогда

$$\begin{cases} 2c+p=1, \\ c^2+pc+2=c+1. \end{cases}$$

5. $a>3$. **Указание.** Исходная система имеет четыре различных решения, если уравнение $x^2-4(a-1)x+3a^2-4a+1=0$ имеет два различных положительных корня, т. е. при условии

$$\begin{cases} D/4=(a-1)(a-3)>0, \\ a-1>0, \\ 3a^2-4a+1>0. \end{cases}$$

6. 64/5. **Указание.** На расстоянии z от вершины пирамиды проведем плоскость, параллельную плоскости ее основания и, следовательно, пересекающую ее по ромбу $ABCD$, подобно-

му ромбу, лежащему в основании. Выясним, какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, вписанный в усеченную пирамиду. Для этого достаточно вписать в ромб $ABCD$ прямоугольник наибольшей возможной площади. Если на одной из сторон ромба лежат две вершины прямоугольника, (рис. 6), то наибольшую площадь имеет прямоугольник $AECF$. При этом если $BD=2b$, $AC=2a$, то $S_{AECF}=4ab^3/(a^2+b^2)$. Если же на всех четырех сторонах ромба имеется по одной вершине прямоугольника $MPNQ$, то центры ромба и прямоугольника совпадают (точка O), и причем либо стороны прямоугольника параллельны диагоналям ромба (рис. 7), либо нет (рис. 8). Во втором случае заметим, что углы MOP и AOE равны (убедитесь в этом). Пусть $\angle AOE=\alpha$, тогда площадь $MPNQ$ равна $2MO^2\sin\alpha$, а площадь $AECF$ равна $2b^2\sin\alpha$, но $b>MO$, и поэтому $S_{AECF}>S_{MPNQ}$.

Если же стороны параллельны диагоналям, причем $MP=2x$, то $S_{MPNQ}=S(x)=4\frac{b}{a}(ax-x^2)$, и при $x=a/2$ достигает максимума $S=ab$. Теперь сравним S_{AECF} и S:

$$ab-\frac{4ab^3}{a^2+b^2}=\frac{ab(a^2-3b^2)}{a^2+b^2}.$$

Эта разность положительна, если $a>b\sqrt{3}$, т. е. когда острый угол ромба меньше 60°, и отрицательна, если этот угол больше 60°. В нашем случае синус острого угла ромба равен $0{,}96>\sqrt{3}/2$, т. е. наибольшую площадь имеет прямоугольник $AECF$.

Пусть S_0 наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в основание пирамиды. Тогда наибольшая площадь основания параллелепипеда с высотой $c-z$ равна $S_0\left(\frac{z}{c}\right)$ (c — высота пирамиды), а объем его равен $f(z)=S_0\left(\frac{z}{c}\right)(c-z)$. Функция $f(z)$ достигает максимума при $z=2c/3$.

Физика

1. $u_\perp=\sqrt{u(u-2v)}$ при $u\geqslant 2v$.
2. $F=m(g-v^2/(\sqrt{2}l))$.
3. $h\approx(v^2-mg^2/k)/(8g)$.
4. $A=mg(H+7/3h)$.
5. $\Delta U=3/2pV_1(V_1^2/V_2^2-1)$.
6. $A=1/2(p_1+p_2)(V_2-V_1)$.
7. $v=\sqrt{e^2/(2\pi\varepsilon_0 ma)}=225$ м/с.
8. $T=2\pi\sqrt{(m+B^2l^2C)/k}$.
9. Индукция магнитного поля должна быть перпендикулярной напряженности электрического поля конденсатора и равной $B=(U/d)\times\sqrt{m/(2qU_0)}$.
10. $\Delta\lambda=1{,}5\cdot10^{-5}$ см.

[redacted]ковский авиационный ологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. (3; 1). 2. $(0{,}1;1)\cup(10;100)$. 3. πn, $n\in Z$. 4. 4 км. 5. 25/3, 56/3.

Вариант 2

1. 5. 2. (1/2; 2). 3. $(-1)^{n+1}\pi/16+\pi n/4$, $n\in Z$. 4. 11. 5. 3; 4; 5.

Вариант 3

1. 1. 2. $(-5;-3)\cup(-1;1)$. 3. $\pi/2+\pi n$, $(-1)^n\pi/4-\pi n/4$, $-\pi/4+\pi n$, $n\in Z$. 4. 60 км/ч. 5. 186.

Физика

1. $L=2\sqrt{2gh(v^2-2gh)}/g\approx34$ м.

Указание. Мяч должен коснуться потолка.

2. $\mu=v/(gt)=0{,}4$; $l=vt/2=50$ м.
3. $S=(\rho_2-\rho_1)a^3/(\rho_2(a+h))=0{,}016$ м².
4. $p=R(\nu_1T_1+\nu_2T_2)/(V_1+V_2)=282{,}5$ кПа; $T=(\nu_1T_1+\nu_2T_2)/(\nu_1+\nu_2)=340$ К.
5. $m_в=mrT_1/(\lambda T_2)\approx5$ кг.
6. $v=\sqrt{v_0^2-2e\varphi/m}\approx1{,}2\cdot10^6$ м/с.
7. $I=(I_1U_2+I_2U_1)/(U_1-U_2)=80$ А.
8. $P=RCU_m^2/(2L)=5$ мВт.
9. $H=nh=4$ км.
10. $E_n=\frac{m_\alpha}{m_n+m_\alpha}\left(\Delta E+\frac{m_\alpha-m_D}{m_\alpha}E_D\right)\approx14{,}9$ МэВ.

Указание. Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса

$$E_n+E_\alpha=E_D+\Delta E,$$
$$P_\alpha^2=P_D^2+P_n^2$$

и очевидным соотношением $P^2=2mE$.

[redacted]ковский институт и и газа им. И. М. Губкина

Математика

Вариант 1

1. 7. 2. 8. 3. 33. 4. 4. 5. 3. 6. —45. 7. 2. 8. 12. 9. 2. 10. 11,25. 11. 0,5. 12. 6.

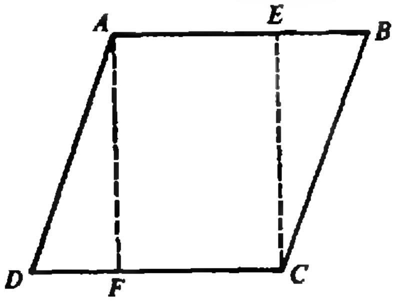


Рис. 6.

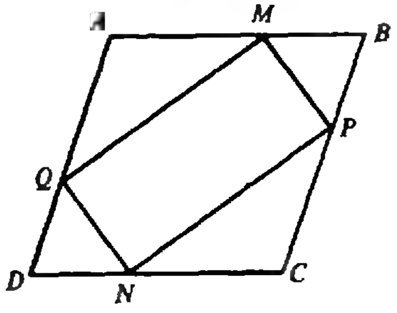


Рис. 7.

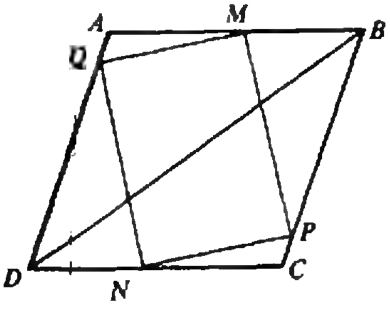


Рис. 8.

Вариант 2

1. 4. 2. −2. 3. 4. 4. −4. 5. 4. 6. 15. 7. 0,5. 8. 36. 9. −1,5. 10. 8. 11. −1. 12. 16.

Физика

Вариант 1

1. $t=2\sqrt{s/a}=60$ с.
2. $F_{\text{ср}}=m(v_1+v_2)/t=19$ Н.
3. $\alpha=\arccos\dfrac{3}{n+2}=60^\circ$.
4. $n=(1+\sqrt{1-\alpha})/(1-\sqrt{1-\alpha})=3$.
5. $\rho=\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2=3{,}9$ г/см^3 $=3900$ кг/м^3.
6. $v=\sqrt{3pV/m}=700$ м/с.
7. $\Delta U=Q-1/2(p_1+p_2)(V_2-V_1)=300$ Дж.
8. $n=\alpha(\varepsilon-1)+1=3$.
9. $I=q/(t-t_1)=2$ А.
10. $E=\sqrt{(ma/q)^2-(Bv)^2}=8$ кВ/м.
11. $v=2\nu(x_2-x_1)=360$ м/с.
12. $F=2l_1(1-l_1/l)=9$ см.

Вариант 2

1. $n_2=1+(n_1-1)t_2/t_1=13$.
2. $v_2=v_1a_0/(a_0-a_1)=90$ км/ч.
3. $m=\Delta F/(4v\omega)=2500$ кг.
4. $\Delta F_{\max}=6mg=6$ Н.
5. $m=\dfrac{\rho_1(P_1\rho_0-(P_1-P_2)\rho_2)}{\rho_0(\rho_1-\rho_2)g}=965$ г.
6. $n=(\lg(p_0/p))/(\lg(\alpha+1))=3$.
7. $m=vFt\cdot 100\,\%/(\eta q)=18$ т.
8. $t=(n-1)^2C^2U^2R/Q=10$ с.
9. $P_{\max}=I_0^2IR/(4(I_0-I))=9$ Вт.
10. $m=kt(2I_1+I_2)/4=2{,}25$ г.
11. В два раза.
12. $n=\sqrt{1/(1-\alpha)}=3$.

Московский институт электронной техники

Математика

Вариант 1

3. $\sqrt2+\sqrt6$. 4. 40 л, 30 л. 5. 1; 4. 6. $\sqrt a$. 7. а) 3, б) −1, в) $\varnothing$, г) πn, $\pm\arccos 1/5+2\pi n$, $n\in Z$, д) $[-1;+\infty)$. 8. $(2+\sqrt2/2;\ 3]$. 9. (1; 2; 1).

Вариант 2

3. 2. 4. 27; 1/9. 5. $\sqrt{b(a+b)}$. 6. $1/ab$. 7. а) $a(3-a^2)/2$, б) $(5a+3b+1)/(a+2)$. 8. а) $\pi(6k\pm1)/6$, $k\in Z$, б) 0. 9. а) (0; 3), б) $[-2]\cup[1;3]$. 10. (5; 1), (1; 5).

Физика

Вариант 1

1. $T=2\pi L\sqrt{L/(3Gm)}$.
2. $Q=2\pi\sigma^2/(\rho g)=3{,}25$ мкДж.
3. Вектор напряженности будет перпендикулярен оставшейся палочке, а величина напряженности останется прежней.
4. $\mathscr{E}=2B(a+T\Delta a/\Delta t)(\Delta a/\Delta t)=5{,}6$ мВ.
5. $v=v_0d/(d-F)=3$ см/с.
6. $T=-\tau/\log_2(1-AC\Delta t/(mN_AQ))=100$ мин.

Вариант 2

1. $l=F\tau^2(F/m-\mu g)/(2\mu mg)$.
2. $p=p_0+\mu mg/S=1{,}1\cdot10^5$ Па.
3. $Q=(k\tau)^2/(2R)=200$ Дж.
4. $\Delta\nu=\pm eB/(4\pi m)$.
5. $S=2a^2\sin 60^\circ\approx 690$ см^2.
6. $N=I\tau/(2en)=0{,}23\cdot10^{14}$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $f(x)=|x-5|$, $x\geqslant0$, $x\neq6$; $f'(4)=-1$, $f'(7)=1$. 2. 1/8; 2. 3. 68. 4. $\pi(4n+1)/2$, $n\in Z$. 5. $\dfrac{4\pi S}{3\sqrt3\,\mathrm{tg}^2\alpha}$.

Вариант 2

1. b, $a>b\geqslant0$. 2. $(-\infty;-2]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$. 3. 14 ч. 4. $-\pi/3$; $\pi/3$; $5\pi/3$. 5. $\dfrac14 S\sqrt{2\pi(Q-\pi S)}$.

Физика

Вариант 1

2. а) Электрическое поле за пределами сферы останется прежним, поэтому сила притяжения не изменится; б) электрического поля внутри сферы не будет, поэтому на бумажку со стороны заряженного шарика сила действовать не будет.

3. Изменение импульса направлено перпендикулярно стенке и равно $\Delta P=2mv\sin\alpha$.

4. $F=\rho gh^2l/2=1{,}4\cdot10^3$ Н (здесь $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $\tau=\rho Vc(t_2-t_1)/(P\eta)=1{,}75\cdot10^3$ с $=29$ мин.

Вариант 2

2. При разомкнутой обмотке катушки магнит падает с ускорением свободного падения, а при замкнутой обмотке, из-за явления электромагнитной индукции,— с меньшим ускорением.

3. $P_{\max}=3\mathscr{E}^2/(4R)=11{,}25$ Вт.

4. $t=(2+\sqrt2)\tau=102$ мин.

5. $\lambda=2\pi c\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon SL/d}\approx2{,}3\cdot10^3$ м (здесь $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

«Квант» для младших школьников
(см. *«Квант» № 4*)

1. Обозначим количество пойманных мышей каждым котом начальной буквой его имени. Тогда условия задачи запишутся так: Л+П=В+Б, В>Б, В+Л<П+Б, П=3. Отсюда нетрудно вывести, что П>В>Б>Л. Но так как П=3, то В=2, Б=1, Л=0.

2. 32467+32467=64934.

3. Рассмотрим треугольник ACM, где M — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на основание AD данной трапеции $ABCD$ (рис. 9). Его высота равна высоте трапеции, а основание AM — длине ее средней линии. Поэтому площадь этого треугольника, как и площадь треугольника BDN, равняется полови-

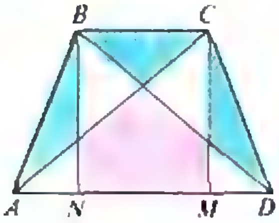


Рис. 9.

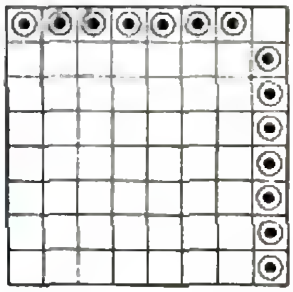


Рис. 10.

не площади трапеции. Отсюда следует, что площадь общей части этих треугольников (красный пятиугольник) равняется сумме площадей, непокрытых ими в трапеции (синие треугольники).

4. 169, 196, 961.

5. Если среди 15 фигур найдется фигура такая, что и в горизонтальном ряду клеток и в вертикальном ряду клеток, в которых она стоит, есть еще хотя бы по одной фигуре, то эту фигуру можно убрать. Тогда оставшиеся 14 фигур будут удовлетворять нужному требованию. Допустим, что такая фигура не найдется. Тогда для каждой из 15 фигур можно указать либо горизонтальный, либо вертикальный ряд, в котором она стоит в одиночестве. Это означает, что в сумме найдутся 15 горизонтальных и вертикальных рядов, в каждом из которых стоит по одной фигуре. Но так как всего таких рядов 16, то либо все горизонтальные, либо все вертикальные ряды таковы, что в них стоит по одной фигуре. Это значит, что на доске стоит только 8 фигур — противоречие с условием задачи. Итак, фигура, которую можно убрать, найдется.

На рисунке 10 показано расположение 14 фигур, доказывающее, что в условии задачи число 15 нельзя заменить на 14.

[illegible]йдоскоп «Кванта»
([illegible] «Квант» № 4)

Вопросы и задачи

1. В электростатическую энергию системы «тело — электроны» и в кинетическую энергию электронов.

2. Металлическая пластинка зарядится отрицательно, полупроводниковая — останется нейтральной.

3. На фотопленке — она чувствительна и к длинноволновым излучениям.

4. Можно — в ультрафиолетовых или инфракрасных лучах.

5. На белую — в 2 раза больше, чем на черную.

6. Да. Например, луч достаточно мощного лазера удерживает во взвешенном состоянии мелкие прозрачные стеклянные шарики.

7. От заходящего Солнца.

8. Если скорости электрона и позитрона равны по величине и противоположно направлены.

9. Да, но только в присутствии какой-либо частицы, которая «примет на себя» его импульс.

10. Нет, так как в этом случае не могут одновременно выполняться закон сохранения импульса и закон сохранения энергии.

11. Частоту либо длину волны излучения.

12. Фотон.

Микроопыт

Можно, если осветить пластину и поднести к ней стеклянную палочку, натертую бумагой.

[illegible]с. обложки
([illegible] «Квант» № 4)

Фигура а) является объединением половинок 1 и 2 (нумерацию половинок см. на обложке «Кванта» № 3), б) 4 и 6, в) 1 и 4, г) 4 и 7, д) 4 и 8, е) 4 и 10, ж) 8 и 10, з) 10 и 11, и) 5, 7 и 9, к) 5, 8 и 10, л) 4, 8 и 11, м) 4, 5 и 7.

[illegible]курс «Математика 6—8»
([illegible] «Квант» № 2)

16. Заполним треугольную таблицу следующим образом: в каждую клетку поставим число способов прийти в эту клетку от начала — буквы *М* (рис. 11). Сумма чисел в правом столбце равняется количеству способов прочесть слово *маршрут*: $51+76+69+44+20+6+1=267$. Заполним теперь ту же таблицу, поставив в клетке количество способов, которыми можно из этой клетки дойти до конца слова (рис. 12). Теперь заметим, что если к букве можно прийти n способами, а из нее можно дойти до конца m способами, то, изымая эту клетку, мы уменьшаем количество способов на nm. Заполним третью таблицу, поставив в каждую клетку произведение чисел в этой клетке в первой и второй таблицах (рис. 13). Чтобы получить 145 способов, следует изъять клетку с числом 122.

17. Чтобы вспахать поле, одному трактору требуется $300:15=20$ дней. Если работает несколько тракторов, то количество дней работы равно одному из делителей числа 20, т. е. 20, 10, 5, 4, 2 или 1. Разность, равная 6, получается лишь для чисел 10 и 4, поэтому в первом случае 2 трактора работали 10 дней, а во

1	1	2	4	9	21	51
	1	2	5	12	30	76
		1	3	9	25	69
			1	4	14	44
				1	5	20
					1	6
						1

Рис. 11.

267	96	35	13	5	2	1
	171	61	22	8	3	1
		75	26	9	3	1
			27	9	3	1
				9	3	1
					3	1
						1

Рис. 12.

267	96	70	52	45	42	51
	171	122	110	96	90	76
		75	78	81	75	69
			27	36	42	44
				9	15	20
					3	6
						1

Рис. 13.

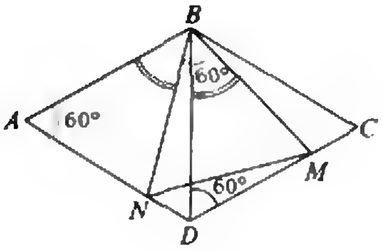


Рис. 14.

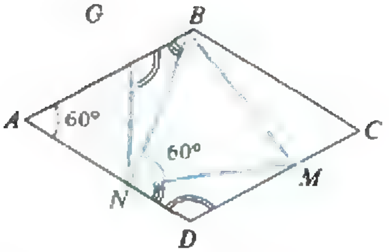


Рис. 15.

втором — 5 тракторов 4 дня. Дополнительное количество тракторов — 3.

18. Если $\angle MBN=60^\circ$ (рис. 14), то треугольник ABN равен треугольнику DBN, так как $AB=BD$, $\angle BAN=\angle BDM=60^\circ$, а углы ABN и DBM равны как дополняющие до 60° угол NBD. Поэтому $BN=BM$ и треугольник BMN — равносторонний.

Пусть теперь $\angle BNM=60^\circ$. Отложим на стороне AB отрезок $AG=AN$ (рис. 15) и докажем, что треугольники GBN и DNM равны. В самом деле, $BG=DN$, $\angle BGN=\angle NDM=120^\circ$, а равенство углов GBN и MND следует из равенств

$$\angle BND=\angle BAN+\angle GBN=\angle BNM+\angle NMD,$$
$$\angle BAN=\angle BNM=60^\circ.$$

Итак, $BN=NM$, что и требовалось.

КВАНТ

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Савин, В. Тихомирова,
А. Черноуцан

Номер оформили:
Д. Крымов, Н. Кузьмина, С. Лухин,
Э. Назаров, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.02.91. Подписано к печати 8.04.91.
Формат 70×100/16. Бумага № 1. Гарнитура школьная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09.
Уч.-изд. л. 7,97. Тираж [illegible] 775 экз. Заказ 319. Цена 70 коп.

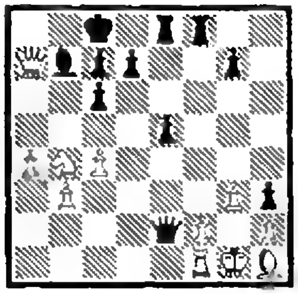
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

СИЛА И БЕССИЛИЕ КОМПЬЮТЕРА

Шахматные компьютеры все активнее внедряются в жизнь мастеров и гроссмейстеров, можно сказать, затрагивают их профессиональные интересы. Вот и в репортажах с очередного, пятого по счету, матча на первенство мира между Г. Каспаровым и А. Карповым постоянно сообщалось об участии машин в анализе позиций, возникающих в ходе игры.

Компьютеры, которым предлагалось оценить различные острые положения из партий, часто «спорили» с чемпионом мира и экс-чемпионом, иногда соглашались с участниками матча, а иногда предлагали свои собственные оригинальные решения...



Г. Каспаров — А. Карпов

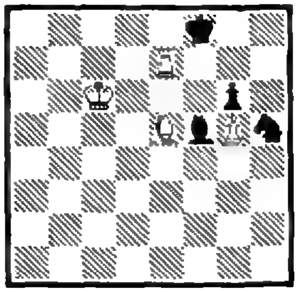
Эта позиция возникла в 14-й партии матча после 25-го хода белых. Хотя у черных лишнее качество, положение их вызывает серьезные опасения — грозит и марш пешки «а», и страшное Kb4 — a6. Для защиты от этих угроз в пресс-центре матча многие аналитики предлагали 25... Kpd8, чтобы на 26. Ф:b7 воспользоваться уходом ферзя с важной диагонали и объявить вечный шах — 26...Л:f2 27. Л:f2 Фe1+28. Лf1 Фe3+ 29. Лf2 Фe1+ и т. д.

Однако белые красиво опровергали эту комбинацию — после 26...Л:f2 в их распоряжении есть страшный промежуточный удар — 27. Фb8+! Kpe7 28. K:c6+!! Вертикаль «f» недоступна для черного короля из-за Л:f2+, и поэтому все кончено: 28... dc (28...Kpe6 29. Cd5+ Kpd6 30. Фb4×) 29. Ф:c7+Kpe6 30. Ф:c6+Kpe7 31. Фc7+ Kpe6 32. Фb6+ и 33. Ф:f2.

Получается, что вечного шаха нет? Окончательный диагноз поставил микрочемпион «Мефисто». Он обнаружил, что эффектный промежуточный ход имеется не только у белых, но и у черных. В позиции на диаграмме они могут сыграть 25...Лf3!! и только в ответ на 26. Ka6 (на 26. a5 следует простое 26...Л:b3, в случае 26. C:f3 Фf3 черные ставят мат) — 26...Kpd8! Теперь вечный шах неизбежен — 27. Ф:b7 Л:f2! Белый конь удалился от поля c6, и знакомая операция стала возможной: 28. Л:f2 Фe1+ и т. д.

Заметим, что партия все-таки закончилась вничью, но при этом Карпову пришлось пережить немало неприятных минут.

В данном примере позиция была насыщена тактическими нюансами, причем перебор вариантов требовался на относительно небольшое число ходов. В такой ситуации современная ЭВМ чувствует себя как рыба в воде. Совсем другое дело, когда задача состоит не в отыскании одного-двух точных ходов, а в определении плана игры и лишь затем вариантов, реализующих его.



Г. Каспаров — А. Карпов

В этом положении на 88-м ходу вторично была отложена 16-я партия матча. Напомним, что по дебюту у Карпова было очень плохо, затем 60 ходов он упорно защищался и вот уже почти построил неприступную крепость... Есть ли у белых путь к победе? — этот вопрос интересовал всех. Самые мощные компьютерные программы, в том числе чемпион мира «Дип сот», анализировали это окончание (как перед доигрыванием партии, так и еще долго после него), но так и не смогли найти выигрыш за белых. Таким образом, слухи о том, что в этой партии Г. Каспарову помог компьютер, не оправдались. Чемпион мира вместе со своими помощниками наметили четкий стратегический план победы, математически точно доказав, что белые выигрывают максимум в 18 ходов.

В этом окончании важно найти заключительное положение цугцванга для черных, а соответствующие варианты уже дело второе. В позиции отсутствуют комбинационные мотивы, и отдельные ходы приобретают смысл только во всей цепочке, ведущей к цели. Короче говоря, правильность ходов определяется конечной целью — приближают ли они нас к финальной критической позиции или нет. Поскольку машина анализирует эндшпиль методом перебора (разумеется, речь идет об игровой программе, а не специальной, составленной для определенного вида эндшпиля), справиться с заданием не представляется возможным даже современным быстродействующим ЭВМ.

Осталось привести ходы, указанные сильнейшими компьютерами мира.

89. Лa7 Ce4+ 90. Kpc5 Cg2 91. Kpd4 Cf3 92. Kpe3 Cd5 93. Kpf2 Ce4 94. Лd7 Cf5 95. Лc7 Ce4 96. Лc4 Cd5 97. Лd4 Ch1 98. Лd6 Kpf7 99. Kpe3 Cg2 100. Cd4 Ca8 101. Cb2 Cg2 102. Cc3 Ca8 103. Cd4 Cg2 104. Ce5 Ch1 105. Лb6 Cg2 106. Ca1 Cd5 107. Cc3 Cg2 108. Лa6 Cf1 109. Лd6. Любопытно, что от начала до конца оценка оставалась постоянной: +1,66 пешки в пользу белых. Машина пробовала и так, и сяк, но при отсутствии плана все попытки были безуспешны.

«Дип сот» увидел выигрыш за белых только после введения в машину первых шести ходов Каспарова. Так что до чемпиона мира шахматным компьютерам пока еще далеко.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

С давних времен в Китае распространена игра «танграм»: квадрат разрезан на 7 частей (рис. 1) и из этих кусочков складываются различные фигурки. Об этой игре рассказывалось в № 7 за 1987 год в статье А. Савина «Задачи на разрезание», а также на 4-й странице обложки № 5 за 1989 год.

Существует много разновидностей разрезания квадрата для этих целей. Одна из таких игр — «пифагор» — продается в магазинах игрушек. В ней квадрат разбит на 7 частей, но уже другим образом (рис. 2). В статье А. Панова «Загадка фигуры № 51» («Квант» № 12 за 1982 год) содержится целое исследование о фигурах, которые можно сложить из элементов танграма или пифагора. Наш читатель Сун Вей-цы из Китая прислал еще один вид танграма (рис. 3), в котором квадрат разрезан лишь на 5 частей. Он предлагает из этих кусочков составить шесть фигурок (рис. 4). Ответы вы найдете в следующем номере.

А. П.

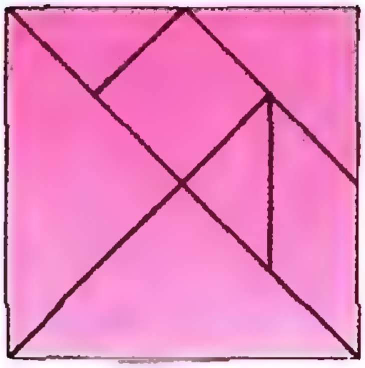


Рис. 1.

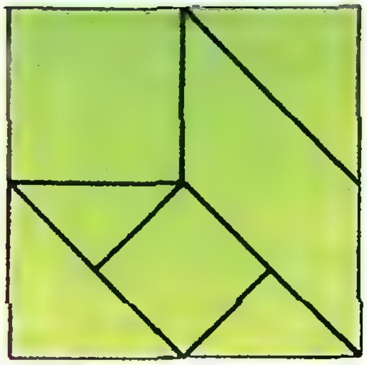


Рис. 2.

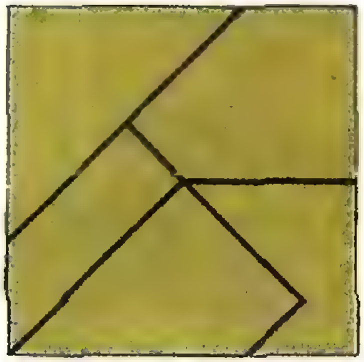


Рис. 3.

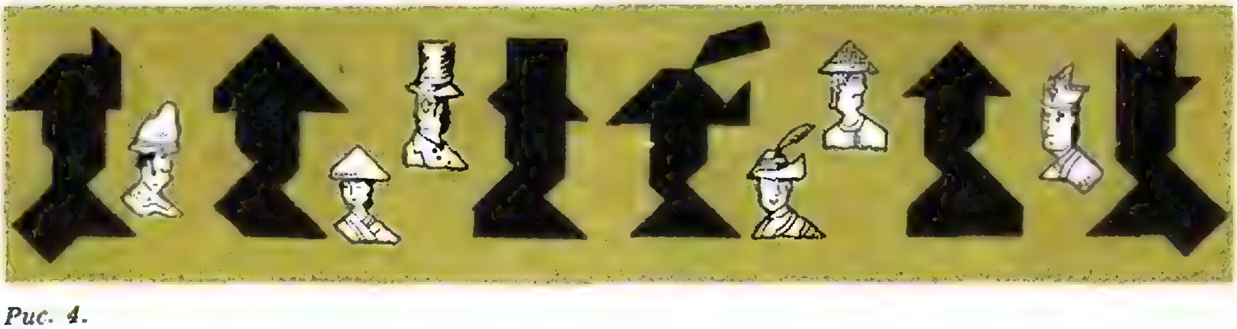


Рис. 4.

НОМЕР
6

Квант
6 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *В. Тихомиров.* Что такое размерность?
10 *Г. Ефашкин.* Электреты — диэлектрические аналоги магнитов
17 *А. Савин.* Перпетуум-мобиле и математика

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1286—М1290, Ф1293—Ф1297
23 Решения задач М1261—М1265, Ф1273—Ф1277

«Квант» для младших школьников

32 Задачи
33 *Дж. Уокер.* Как кипит вода?

Школа в «Кванте»

Математика 9—11:

36 Деление с остатком и сравнения по модулю

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Лаборатория «Кванта»

42 *Д. Чокин.* Слинки — шагающая пружинка

Практикум абитуриента

45 *А. Шеронов.* Работа и изменение энергии идеального газа

Фантастика

50 *Бир.* Музыка, звучащая в крови

Информатика и программирование

58 *Тарасенко.* Алгоритмика простоты. 50 томов кармане

Игры и головоломки

60 Коммутативная головоломка Эрне Рубика
64 **Варианты вступительных экзаменов 1990 г.**
77 **Ответы, указания, решения**
79 **Анкета 6—91**
«Квант» улыбается *(76)*
Смесь *(9, 44)*

Наша обложка

1 *Многие выдающиеся умы были заняты изобретением вечного двигателя. На рисунке — проект, принадлежащий Леонардо да Винчи. Здесь вода поднимается архимедовым винтом, который приводится в движение вторым архимедовым винтом за счет падающей воды. Еще об одном вечном двигателе можно прочитать в статье «Перпетуум-мобиле и математика».*

2 *Репродукция картины Мариа Эндера (1879—1942) «Опыт новой пространственной меры» — иллюстрация к статье В. Тихомирова «Что такое размерность?».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Японские комбинаторные головоломки с переменной ориентацией.*

© «Квант», 1991

ЧТО ТАКОЕ РАЗМЕРНОСТЬ?

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

«Я это вижу, но я не верю в это»

Одна из последних статей великого ученого Анри Пуанкаре (1854—1912), опубликованная в вышедшем уже после его смерти сборнике «Последние мысли», называлась «Почему пространство имеет три измерения?». В этой статье Пуанкаре размышляет над вопросом, что такое число измерений, или что такое размерность.

Когда люди стали задумываться над этим? Точка, линия, поверхность — чем они отличаются друг от друга? Впервые об этом было написано в самых первых строках самой первой из дошедших до нас книг по математике — в «Началах» Евклида (IV—III вв. до н. э.)*). Вот они, эти первые строки.

«Определения

1. Точка есть то, что не имеет частей. 2. Линия же — протяженность без ширины. 3. Концы же линии — точки. 4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину. 5. Концы же поверхности — линии.»

У многих эти слова способны вызвать улыбку: так они не похожи на то, что сейчас принято называть определениями, но здесь заложена попытка осмыслить важнейшие понятия, и мы увидим, сколь глубоки связи первых слов книги Евклида с «Последними мыслями» Пуанкаре. Но обо всем — по порядку. Мы начнем сейчас с гораздо более позднего времени, чем третий век до нашей эры. Исходная точка нашего путешествия — Германия, семидесятые годы прошлого века. Молодой математик — Георг Кантор (1845—1918) — пытается доказать, что в квадрате «больше» точек, чем в отрезке. Но в итоге он внезапно приходит к столь неожиданному результату, что пишет своему коллеге с некоторой растерянностью: «Я это вижу, но я не верю в это».

О каком же математическом факте шла здесь речь?

Размерность — это количество?

Пусть заданы два множества. Когда можно сказать, что в одном из них столько же точек, сколько в другом? Все совершенно очевидно для конечных множеств. Каждое из них можно пересчитать, и если полученные при пересчете числа окажутся одинаковыми, то это и будет означать, что число элементов в двух данных множествах одинаково.

Но для бесконечных множеств все не так просто. Еще Галилей заметил, что квадратов натуральных чисел «столько же», сколько самих натуральных. Действительно, можно выстроить два ряда чисел

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 & \dots \end{array}$$

так, что каждому натуральному числу (числу в верхнем ряду) соответствует одно и только одно число в нижнем ряду — квадрат числа, стоящего в верхней строчке.

Кантор назвал два множества *равномощными* (или *эквивалентными*), *если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие* (т. е. такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого и наоборот). Равномощность — это термин, который для конечных множеств означает, что данные множества состоят из одинакового числа элементов, а для бесконечных множеств равномощность по определению означает, что множества одинаковы по «числу» элементов.

---

*) Этот трактат содержал изложение почти всех математических знаний своего времени.

Равномощные множества естественно объединить в один класс, приписав им то общее, что свойственно всем им. Это свойство, названное Кантором *мощностью* характеризует как бы «число элементов» в любом множестве данного класса. Так, мощность множества, состоящего из n элементов, равна n. Мы уже видели, что бесконечное множество может иметь столько же элементов, сколько имеет его подмножество (это совершенно немыслимо для конечных множеств).

Рассмотрим еще два примера.

Теорема 1. *Множество пар натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел.*

Доказательство. Обозначим множество пар натуральных чисел через N^2. Установить взаимооднозначное соответствие между N и N^2 можно многими способами. Вот один из простейших.

Если $n=2^{n_1-1}(2n_2-1)$, то числу n ставится в соответствие пара $(n_1;\ n_2)$. Так как каждое натуральное число единственным образом разлагается в произведение степени двойки и нечетного числа (скажем, $48=2^4\cdot 3$), это соответствие взаимно однозначно и приводит к такому расположению в ряд пар $(n_1;\ n_2)$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ (1;1) & (2;1) & (1;2) & (3;1) & (1;3) & \\ & & & & & \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ (2;2) & (1;4) & (4;1) & (1;5) & (2;3) & \dots \end{array}$$

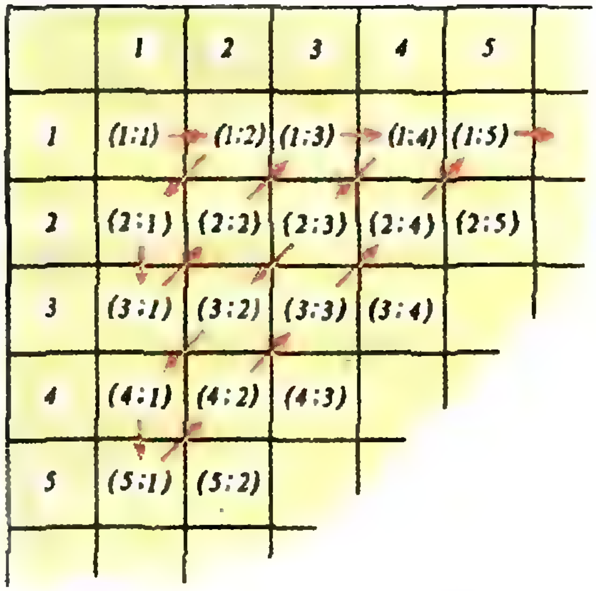
При этом каждая пара натуральных чисел $(p;\ q)$ получает номер $n=2^{p-1}(2q-1)$. Например, пара (3; 4) имеет номер $n=28$, пара (1; 50) — номер 99.

Можно поступить иначе. Расположим все пары в таблицу и будем последовательно нумеровать пары, обходя их по стрелкам (при этом, например, пара (2; 3) получит номер 8).*)

Упражнения

1. Задайте описанный способ нумерации пар явной формулой. Какой номер получит при этом пара (99; 100)?

Таблица



	1	2	3	4	5	
1	(1:1)	(1:2)	(1:3)	(1:4)	(1:5)	
2	(2:1)	(2:2)	(2:3)	(2:4)	(2:5)	
3	(3:1)	(3:2)	(3:3)	(3:4)		
4	(4:1)	(4:2)	(4:3)			
5	(5:1)	(5:2)				

2. Установите взаимно однозначное соответствие между N и множеством всех рациональных чисел.

3. Установите взаимно однозначное соответствие а) между двумя отрезками; б) между отрезком [0; 1] и интервалом (0; 1).

Докажем теперь, что *множество чисел интервала (0; 1) равномощно всей числовой прямой R.*

В самом деле, функция $y=\operatorname{ctg}\pi x$ каждому $x\in(0;\ 1)$ ставит в соответствие одно и только одно $y\in R$ и наоборот. Еще один пример равномощности множества и его части!

Тут же возникает вопрос, а нельзя ли пересчитать вообще все элементы любого множества так, как мы пересчитали множество N^2? Оказывается, далеко не всегда.

Назовем бесконечное множество A *счетным*, если его можно пересчитать и *несчетным* в противном случае.

Теорема 2 (Кантора). *Интервал (0; 1) несчетен.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть отрезок можно пересчитать. Запишем каждую точку отрезка в виде десятичной дроби. Такая запись, вообще говоря, неоднозначна (0,1=0,0999...), но она становится однозначной, если условиться, что конечные дроби вида 0,1, 0,25 и т. д. записываются так 0,0 (9) (девять в периоде) 0,24 (9) и т. п., т. е. конечные десятичные дроби записываются через девятки в периоде. Итак, пусть числа из I пересчитаны, т. е. $I=\{x_1, x_2, \dots\}$, где

---

*) Эта таблица изображена на одном из обелисков, посвященных памяти Кантора.

$$x_1=0,x_{11}x_{12}\dots x_{1n}\dots,$$
$$x_2=0,x_{21}x_{22}\dots x_{2n}\dots,$$

……………………………………………

а x_{ij} принимают значения от нуля до девяти и нет чисел, у которых, начиная с какого-то момента, стоят одни нули.

Рассмотрим десятичную дробь $\alpha=0,y_1y_2\dots$, где $y_i=1$, если $x_{ii}\neq 1$, и $y_i=2$, если $x_{ii}=1$ (этот процесс получил название диагонального из-за того, что мы рассматриваем числа x_{ii} на диагонали и изменяем их). Число α, разумеется, принадлежит I. Если I можно пересчитать, то у α должен быть какой-то номер, скажем, N, т. е. $\alpha=x_N$. Но тогда $\alpha=0, x_{N1}\dots x_{NN}$, а это не так, ибо по построению, $y_N\neq x_{NN}$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Так, может быть, размерность связана с количеством точек? Ведь, вроде бы, ясно, что в квадрате больше точек, чем в отрезке, в кубе — больше, чем в квадрате. Но нет! Кантор доказывает теорему о том, что количества всех точек в отрезке и в квадрате одинаковы.

Именно по поводу этой теоремы и было сказано: «Я это вижу, но я не верю в это!»

Теорема 3. *Отрезок I и квадрат I^2 равномощны.*

Наметим доказательство этой теоремы. Рассмотрим квадрат I^2, состоящий из точек $(x_1; x_2)$, $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$. Как и раньше, разложим числа x_1 и x_2 в десятичные дроби, где конечные десятичные дроби записываются через девятки в периоде:

$$x_1=0,\alpha_1\dots\alpha_n\dots,$$
$$x_2=0,\beta_1\dots\beta_n\dots,$$

и поставим в соответствие паре $(x_1; x_2)$ число

$$y=0,\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots\alpha_n\beta_n\dots\ .$$

При этом разным парам соответствуют разные числа, т. е. множество всех пар эквивалентно некоторому подмножеству отрезка I, и потому мощность I^2 не превосходит мощности отрезка I. С другой стороны, мощность I^2 не меньше мощности I (в квадрате содержится сколько угодно отрезков), так что I и I^2 эквивалентны.

Мы здесь неявно воспользовались утверждением, что мощность подмножества не больше мощности самого множества, и тем, что мощности можно сравнивать.

Упражнения

4. Докажите, что квадрат и круг эквивалентны.

5. Докажите, что отрезок I эквивалентен кубу I^3.

Что же такое размерность?

Так чем же все-таки квадрат отличается от отрезка или от куба? Что означает, что пространство имеет три измерения? Пришла пора вернуться к статье Пуанкаре.

Он пишет: «Что такое протяженность n измерений, чем она отличается от протяженности с числом измерений большим или меньшим? Напомним сперва некоторые результаты, полученные недавно в школе Кантора. Можно установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и плоскости*). Это возможно, пока мы не связываем себя условием, чтобы двум близким точкам прямой соответствовали бы близкие точки плоскости и наоборот».

Из этих слов видно, что Пуанкаре считал невозможным такое отображение $x\to F(x)$, которое отображало бы отрезок I на квадрат и было бы при этом взаимно однозначным и непрерывным в обе стороны (т. е. непрерывно должно быть и само отображение, и обратное к нему). Продолжим цитату.

«Я хочу обосновать определение числа измерений на понятии сечения. Представим себе замкнутую кривую, т. е. протяженность одного измерения. Если на этой кривой отметим какие-либо две точки, через которые запретим переходить, то кривая окажется разрезанной на две части и будет невозможно перейти из одной части в другую, не пересекая заданные точки.

---

*) Именно об этом и шла речь в теореме 3.

Возьмем, напротив, замкнутую поверхность, образующую протяженность двух измерений. Мы можем поместить на ней одну, две, любое число запретных точек, поверхность от этого не окажется разбитой на части.»

Приведенные здесь слова Пуанкаре составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 4. *Не существует взаимно однозначного и непрерывного в обе стороны отображения отрезка на квадрат.*

Доказательство. Пусть такое отображение $\widehat{F}$ существует. Рассмотрим в квадрате образы $\widehat{F}(0)$, $\widehat{F}(1/2)$ и $\widehat{F}(1)$ трех точек: 0, 1/2 и 1. Соединим $\widehat{F}(0)$ и $\widehat{F}(1)$ ломаной, лежащей целиком в квадрате и не проходящей через точку $\widehat{F}(1/2)$, что, очевидно, всегда возможно (на рисунке 1 $\widehat{F}(0)$ и $\widehat{F}(1)$ соединены отрезком). Будем теперь двигаться вдоль этой ломаной от $\widehat{F}(0)$ к $\widehat{F}(1)$. Нашему пути вдоль ломаной на квадрате соответствует непрерывный путь на отрезке от нуля к единице. Но на этом пути обязательно встретится точка 1/2, а на пути вдоль ломаной (в силу выбора этой ломаной) точка $\widehat{F}(1/2)$ не встретится. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Пуанкаре далее пишет: «Перейдем теперь к случаю пространства. Его невозможно разделить на несколько частей, ни запрещая переступать через отдельные точки, ни запрещая переступать отдельные линии. Необходимо будет запретить переходы через отдельные поверхности, т. е. определенные сечения двух измерений. Вот почему мы говорим, что пространство имеет три измерения».

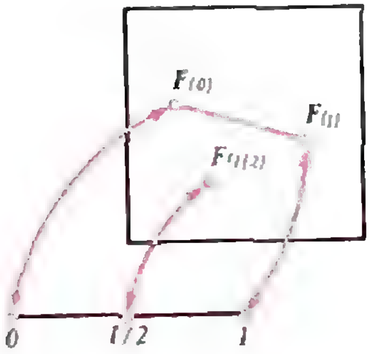


Рис. 1.

Таким образом, Пуанкаре предложил *определять размерность индуктивно*, пользуясь идеей сечения или разбиения.

Эта идея очень проста и естественна. Два *запретительных* знака (в абстракции — две *точки*), расположенные на участке шоссе, не дадут возможности машинам, оказавшимся на данном участке, проследовать ни вперед, ни назад, если только на этом участке нет какого-либо ответвления. Чтобы коровы не разбежались, нужно построить забор, т. е. оградить участок поля *линией*, а запретительные знаки здесь не помогут. Чтобы птичка не улетела, нужно оградить ее со всех сторон клеткой, которая является моделью *поверхности*, а забор — не помеха. Здесь на «бытовом» уровне мы иллюстрируем мысль Пуанкаре о сечении или о разбиении.

Но ведь в точности та же мысль скрыта и в «определениях» Евклида, не так ли? Давайте взглянем еще раз на эти определения. «Точка есть то, что не имеет частей», т. е. точка не допускает возможность разбиения или сечения. «Линия же — протяженность без ширины.» «Концы же линии — точки», т. е. точки делят линию, секут ее. «Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину. Концы же поверхности — линии.» Здесь индуктивный подход к размерности высказан с достаточно полной определенностью.

Все сказанное Пуанкаре относительно различия поверхности и пространства совершенно справедливо. В частности, на этом пути можно доказать аналог теоремы 4, согласно которому не существует взаимно однозначного и непрерывного в обе стороны отображения квадрата на куб.

Вскоре после опубликования «Последних мыслей» была создана *теория размерности*, где размерность определялась индуктивно, т. е. так, как это наметил в своей статье Пуанкаре. Среди создателей теории размерности на базе индуктивного подхода надо назвать прежде всего голландского математика Брауэра, австрийского математика Менгера и (в наибольшей степени) советских математиков Павла Самуиловича Урысона (трагически погибшего в 1924 году в возрасте 26 лет) и Павла Сергеевича Александрова.

Но оказалось, что индуктивный способ определения размерности — не единственный. Возможен еще один совершенно неожиданный подход к ответу на вопрос, почему пространство имеет три измерения. Этот подход связан с именами замечательных математиков XX века — французского математика А. Лебега и уже упомянутого Л. Брауэра.

Теорема Лебега — Брауэра

Предположим, вам нужно разделить большой круглый (или квадратный) участок земли между несколькими арендаторами, причем во избежание скандалов вы хотите, чтобы одновременно друг с другом соседствовали как можно меньше арендаторов. Так, на рисунке 2, *а* соседствуют друг с другом арендаторы *А*, *Б*, *В*, *Г*, на рисунке 2, *б* (кирпичная кладка) попарно соседствуют друг с другом не более чем 3 арендатора. Возникает вопрос, нельзя ли так устроить раздел, чтобы не было трех арендаторов, попарно соседствующих друг с другом?

Заметим, что при аналогичном дележе дороги такой раздел возможен (рис. 3).

Может показаться, что и круглый участок можно разделить нужным образом, порезав его «в лапшу», как на рисунке 4. Но это неудобно — участки слишком длинные.

Пусть для определенности радиус круглого участка равен 1 км, а диаметр (наибольшее расстояние между двумя точками) каждого надела должен быть меньше, скажем, 250 м.

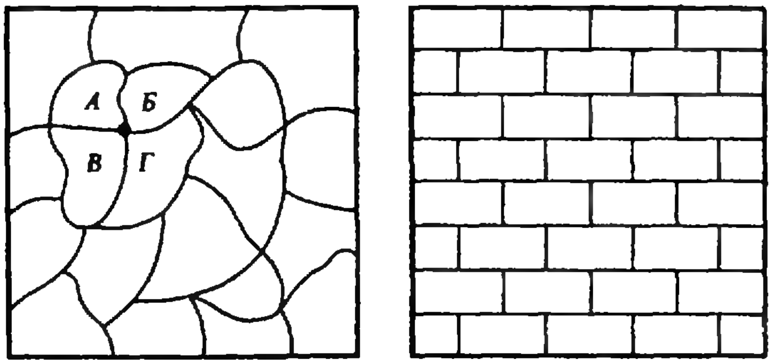
Тогда, как бы вы ни пытались разбить круглый участок на «наделы», обязательно найдутся по крайней мере 3 арендатора, чьи наделы попарно соседствуют, как участки *А*, *Б*, *В* на рисунке 2, *а*. Это утверждение и составляет содержание теоремы, впервые доказанной А. Лебегом.

Теорема 5. *При любом разбиении n-мерного куба (шара) на части достаточно малого диаметра найдутся $n+1$ частей, имеющих общую граничную точку. (У нас $n=1, 2, 3$, под n-мерным кубом понимаются, соответственно, отрезок, квадрат и куб.)*

Эта теорема позволяет дать определение размерности.

Определение. *Данное множество А, лежащее на плоскости (или в пространстве), имеет размерность n, если при любом его разбиении на части достаточно малого диаметра найдутся $n+1$ частей, имеющих общую граничную точку, причем для любого $\varepsilon>0$ существует такое разбиение на части с диаметром, меньшим ε, что никакие $n+2$ части не имеют общей граничной точки.*

Из этого определения, рассмотренных примеров и теоремы 5 сразу следует, что размерность отрезка равна 1,



а)

б)

Рис. 2.

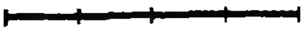


Рис. 3.

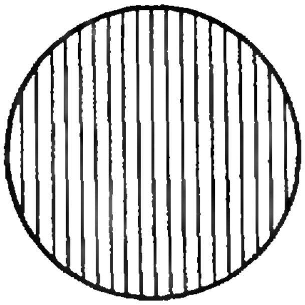


Рис. 4.

размерность квадрата 2, размерность куба 3.

Доказательство теоремы 5, данное Лебегом, содержало пробелы, устранить которые удалось Брауэру с помощью доказанной им удивительной теоремы о неподвижной точке.

Теорема 6. *При непрерывном отображении круга в себя имеется неподвижная точка*[*].

Поясним это. Представьте себе, что вы позвали к себе гостей, а они предались такой забаве. С круглого стола, целиком покрытого хорошо растягивающейся скатертью, ваши гости сорвали скатерть и начали ее растягивать, сжимать, складывать и, наконец, бросили назад на стол, где скомканный, где смятый, где сжатый, где растянутый кусок материала, который прежде был вашей скатертью. Тогда (утверждает теорема Брауэра), если этот кусок нигде не был порван и целиком уместился на столе, хотя бы одна точка скатерти не изменила своего положения.

Собственно говоря, нам понадобится даже не сама теорема Брауэра, а такое следствие из нее. Допустим, что после того безобразия, которое учинили со скатертью ваши гости, вы выкинули старую скатерть и на середину стола постелили маленькую круглую салфеточку — с центром в центре стола. Но снова гости разбушевались и стали тянуть салфетку в разные стороны (а также складывать ее, сжимать и т. п., не разрывая ее). Тогда, если никакая точка салфетки не сдвинулась на величину, бо́льшую половины ее радиуса, можно быть уверенным, что центр стола оказался покрытым тем, что ранее было вашей бедной салфеткой. И не только центр, но и любая точка, отстоящая от центра менее чем на половину радиуса салфетки.

В это утверждение легко поверить и так, но совсем просто вывести его из теоремы Брауэра. Действительно пусть наша салфетка — это круг единичного радиуса и по воле гостей каждой точке X этого круга непрерывно ставится в соответствие точка плоскости $F(x)$ так, что длина отрезка $[X; F(x)]$ меньше 1/2. Предположим, что некоторая точка x_0, находящаяся от центра круга на расстоянии, меньшем чем 1/2, не оказалась покрытой, т. е. для всякого x выполнено соотношение $F(x) \neq X_0$. Тогда мы построим следующее непрерывное отображение нашего круга: точке X мы сопоставим точку $G(x)$ на границе круга так, чтобы точка X_0 лежала внутри отрезка $[F(x); G(x)]$ (рис. 5). Можно доказать, что такое отображение действительно непрерывно (и даже дать явную формулу для $G(x)$). Из построения следует, разумеется, что расстояние от $F(x)$ до $G(x)$ больше 1/2. Но, с другой стороны, ясно, что никакая точка круга при отображении $X \to G(\bar{x})$ не может быть неподвижной, ибо неподвижная точка $\bar{x}$ должна была бы лежать на граничной окружности и тогда, по построению, расстояние от $\bar{x}$ до $F(\bar{x})$ (а это то же самое, что расстояние от $G(\bar{x})$ до $F(\bar{x})$ (ибо $\bar{x} = G(\bar{x})$) было бы больше 1/2, что противоречит основному допущению. Но такого непрерывного отображения единичного круга в себя, согласно теореме Брауэра, не бывает. Следствие доказано.

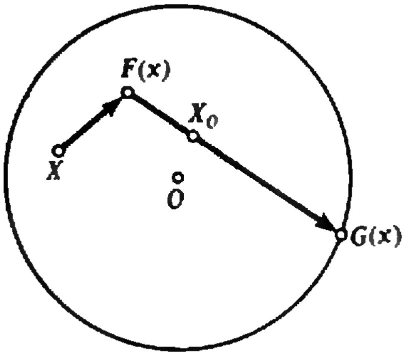


Рис. 5.

А теперь пора перейти к доказательству самой теоремы Лебега — Брауэра, т. е. к объяснению того, что размерность круга равна двум.

Ясно, что размерность круга не больше двух, ибо «кирпичной кладкой» можно разбить любой круг на сколь угодно мелкие части так, что они будут пересекаться не более, чем по трое. Таким образом, осталось доказать, что размерность круга не равна единице.

---

[*] Мы не будем доказывать эту теорему.

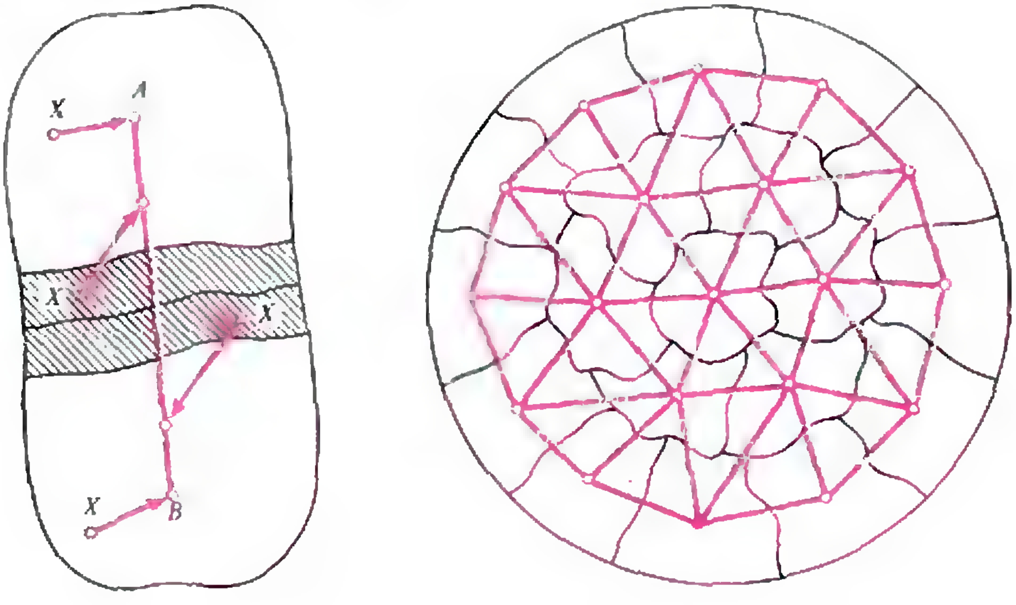
Предположим, что она все-таки равна единице. Представьте себя тогда в роли председателя дачного кооператива, которому выделили круглый участок земли (радиусом, скажем, в один километр), и вам надо нарезать участки пайщикам. Не исключено, что узнав, что размерность круга равна единице, вы бы очень обрадовались: ведь это означало бы, что можно нарезать участки так, что никакие три пайщика не были бы одновременно соседями друг с другом и все соседствовали бы лишь по двое. Разве это не здорово: меньше поводов для споров и разногласий!

Увы, такое оказывается невозможным, если только потребовать, чтобы диаметр каждого участка был достаточно мал, скажем, не больше 250 м. Именно это мы и докажем.

Пусть где-то имеются два участка, принадлежащие соседям — Андрею и Борису. Оба они — цивилизованные люди и потому не разделили свои территории забором, а от межи, разделяющей по закону их участки, несколько отступили каждый в свою сторону, провели новые межи и территорию между ними объявили общей (см. рис. 6, *а*). Следующее простое построение является эпицентром всего доказательства. Выберем на участке Андрея какую-нибудь точку и обозначим ее буквой A, а на участке Бориса выберем точку B. Построим теперь отображение обоих участков (и Андрея, и Бориса) на отрезок AB по следующему правилу. Если какая-то точка лежит на участке Андрея и не является общей, она отображается в A, аналогично — необщая точка территории Бориса отображается в B. Если же точка X — «общая», то ей ставится в соответствие точка отрезка AB, делящая этот отрезок в отношении $d(X, A):d(X, B)$, где $d(X, A)$ — расстояние от X до андреевского участка, а $d(X, B)$ — расстояние от X до участка Бориса.

И вот мы почти у цели. Допустим, нам удалось разделить тот круглый участок километрового радиуса так, что участки соседствуют лишь попарно и диаметры участков меньше 250 м.

Возьмем на каждом из участков по точке — пусть это будут точки $A_1, A_2, \ldots, A_s$ (на рисунке 6, *б* это вершины красных треугольников) — и для любых двух соседних участков построим последовательно такие же отображения, которые только что осуществили для участков Андрея и Бориса. Необходимо только позаботиться о том, чтобы не появилось точек, общих для трех соседей,— для этого «отступления» от граничных межей



а)

б)

Рис. 6.

при выделении общей территории должны быть достаточно малыми*).

Из построения ясно, что любая точка сдвинется не больше чем на 500 м (докажите это!) и весь большой круглый участок радиусом в километр отобразится в некоторый набор отрезков $[A_i; A_j]$. Этим набором отрезков нельзя, разумеется, покрыть никакого круга, а ведь по следствию из теоремы Брауэра мы должны были бы покрыть целый круг радиусом в 500 м. Мы пришли к противоречию. Значит, размерность круга равна двум.

Так завершается доказательство теоремы Лебега — Брауэра для $n=2$. Случай $n=3$ — аналогичен.

Упражнение 6. Продумайте сами и получите ответ на вопрос, поставленный Пуанкаре: почему пространство имеет три измерения?

В заключение осталось сказать немногое. Центральное место в рассуждении — построение непрерывного отображения двух областей на отрезок — является духовной собственностью Павла Сергеевича Александрова. Своей всемирной известностью и своим положением признанного лидера советских топологов, которое он занимал несколько десятилетий, П. С. Александров обязан, в значительной мере, внезапному озарению, которое снизошло на него (по его словам, во время продумывания некоей конструкции Пуанкаре) и привело к построению, зерно которого мы воспроизвели. С помощью этого построения удалось очень многое понять, и в частности, как мы видим, доказать теорему Лебега — Брауэра.

А мне показалась заманчивой идея в краткой и непринужденной беседе рассказать вам о сюжете, имеющем не только математическое, но и общекультурное значение, о решении проблемы, занимавшей ученых на протяжении двадцати трех веков, о том вкладе, который внесли в это решение Евклид, Кантор, Лебег, Брауэр и Александров, о том вопросе, над которым напряженно думал в последние годы своей жизни Анри Пуанкаре.

---

*) Построенная система отрезков называется «нервом» покрытия $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Такая конструкция играет очень важную роль в топологии.

Вниманию наших читателей

Башкирский магазин № 1 «Академкнига» высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Блюменау Д. И. *Информация и информационный сервис.* (Наука и технический прогресс).— 45 к.

Бронштэн В. А. *Как движется Луна?* (Проблемы науки и технического прогресса).— 70 к.

Задачи по физике. Учебное пособие. Под ред. О. Я. Савченко. Изд. 2-е, перераб.— 1 р. 20 к.

Информатика в рабочих профессиях. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 60 к.

Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 55 к.

Компьютеры и автоматизация инженерного труда. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 55 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 80 к.

Литлвуд Д. *Математическая смесь.* Пер. с англ. Изд. 5-е, испр.— 40 к.

Пильщиков В. Н. *Сборник упражнений по языку Паскаль.*— 35 к.

Робот. Компьютер. Гибкое производство. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 60 к.

Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А. *Математические задачи компьютерной томографии.* (Проблемы науки и технического прогресса).— 55 к.

Филонович С. Р. *Судьба классического закона. Прошлое и настоящее закона Кулона.* (Б-чка «Квант». Вып. 79).— 55 к.

Шелест А. Е. *Микрокалькуляторы в физике.* Справочное пособие.— 90 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 450059, г. Уфа, ул. Р. Зорге, дом 10. Магазин № 1 «Книга — почтой» «Академкнига».

ЭЛЕКТРЕТЫ — ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ МАГНИТОВ

Доктор технических наук
Г. ЕФАШКИН

Магниты в виде кусков железной руды часто встречаются в природе и известны с очень давних времен. Когда была обнаружена связь между магнитными и электрическими явлениями, возник вопрос: а нельзя ли получить электрический аналог магнита — диэлектрик, который создавал бы электрическое поле? Такое предположение высказал английский физик О. Хевисайд в 1892 году. Он же предложил название аналогу магнита — «электрет».

В природе в естественном состоянии электреты не встречаются. Может быть, можно получить электрет искусственно, как получают искусственные магниты? Намагничивание магнитного материала (магнетика) производят помещая его во внешнее магнитное поле. Можно попробовать получить электрет аналогичным способом, помещая диэлектрик во внешнее электрическое поле.

Дело оказалось сложнее. Лишь в 1922 году, через тридцать лет после теоретического предположения Хевисайда, Мототоро Ёгучи в Японии удалось получить первые электреты. Ёгучи помещал смесь пальмовой смолы с канифолью (карнаубский воск) между двумя металлическими электродами, расплавлял смесь, включал напряжение и, не снимая напряжения, охлаждал ее. Получалась пластинка диэлектрика, которая создавала внешнее электрическое поле,— электрет.

Вскоре после этого был создан первый микрофон на электретах. Конструкция микрофона была предельно проста. Электрет помещали между двумя электродами, один из которых плотно прижимали, а второй, играющий роль мембраны,— располагали с небольшим зазором. Микрофон работал без источника питания. Это производило впечатление чуда. На самом деле при вибрации мембраны менялось электрическое поле между электродами, и во внешней цепи генерировался ток. Электрет непосредственно преобразовывал энергию звука в электрический ток.

Почему же такие простые микрофоны не получили широкого распространения? Как говорят конструкторы, карнаубский воск был нетехнологичным материалом — расплавлялся при низкой температуре, был непрочным.

Но идея была хороша. Поэтому начались поиски технологичного электретного материала. В 50-е годы в Физическом институте Академии наук СССР Г. И. Сканави и А. Н. Губкин получили прочную керамику с хорошими электретными свойствами — титанат кальция — и сконструировали микрофон на керамическом электрете.

В 60-е годы был открыт электретный эффект в тонких полимерных пленках лавсана, фторопласта, поликарбоната. Практическое применение электретов стало быстро развиваться.

Параллельно с поисками новых электретных материалов ученые работали над теорией электретного состояния диэлектриков. Советский ученый профессор А. Н. Губкин создал феноменологическую теорию электретов, которая в настоящее время признана во всем мире.

Магниты и электреты: сходство и различие

Магниты давно привлекали внимание человека. Но понимание природы магнитов возникло только после того, как в начале прошлого века обнаружили, что магнитное поле создается движущимися зарядами (токами). Магнитные свойства вещества Ампер объяснил замкнутыми электрическими токами внутри вещества. Согласно гипотезе Ампера, внутри атомов и молекул циркулируют элементарные электрические токи (движение электронов в атомах). В намагниченном состоянии элементарные токи в теле ориентированы так, что их действия складываются.

Магнитные свойства вещества характеризуются магнитной проницаемостью μ. Огромной магнитной проницаемостью обладают ферромагнетики (железо, кобальт и др.), магнитные поля которых создаются не движением электронов вокруг ядер, а вследствие свойства электрона создавать магнитное поле «собственного вращения» (спина).

Теория ферромагнетизма была разработана французским физиком П. Вейсом, советским ученым Я. И. Френкелем и немецким ученым В. Гейзенбергом. По Вейсу, ферромагнетик имеет макроскопические области микронных размеров — домены, которые самопроизвольно намагничены до насыщения (все спины внутри домена ориентированы в одном направлении). Если внешнего поля нет, домены ориентированы хаотически, их поля компенсируют друг друга, и ферромагнетик не намагничен. При включении внешнего поля домены ориентируются по полю, и ферромагнетик намагничивается (в действительности процесс намагничивания имеет более сложный характер).

Очень эффектен опыт, который подтверждает доменную структуру ферромагнетиков. Если на ферромагнитный сердечник, намагничивающийся в поле катушки, надеть другую катушку и соединить с громкоговорителем, то при включении намагничивающей катушки домены, ориентируясь в магнитном поле, производят сильный шорох, слышный на всю аудиторию.

Области спонтанной (самопроизвольной) намагниченности можно увидеть под микроскопом, если на отполированную поверхность ферромагнетика нанести мелкий порошок магнетика. Частицы порошка, ориентируясь в магнитном поле доменов, проявляют форму доменов.

Диэлектрики стали изучать значительно позже. Термин «диэлектрик» ввел Фарадей в 1839 году, и, по существу, с этого же времени началось систематическое изучение диэлектриков.

При этом использовалась аналогия между магнитными и электрическими явлениями. Аналог ферромагнетика — сегнетоэлектрик — был открыт в 1918 году. Как и в ферромагнетике, в сегнетоэлектрике имеются домены — области спонтанной поляризации (электрические диполи домена ориентированы в одном направлении). Под действием внешнего поля домены ориентируются, и диэлектрик поляризуется. Отметим важную особенность магнитов, отличающую их от электретов: полюса магнита, в том числе и на молекулярном уровне, неразделимы. Иначе говоря, магнитных зарядов (так называемых магнитных монополей) не существует. Этим, в частности, объясняется устойчивость естественных магнитов.

Модель электрета в приближении плоского конденсатора

В диэлектриках положительные и отрицательные заряды находятся в основном в связанном состоянии, например входят в состав полярных молекул (каждая такая молекула образует электрический диполь); однако диэлектрик может содержать и несвязанные, свободные заряды.

Если внешнего поля нет, диэлектрик неполяризован, диполи и свободные заряды разбросаны хаотически, диэлектрик собственного поля не имеет.

Если диэлектрик поместить в электрическое поле, диполи ориентируются по полю. Так как молекулярных диполей очень много, то при их ориентации «плюсы» и «минусы» соседних диполей внутри диэлектрика компенсируют друг друга. Нескомпенсированными остаются только поверхностные заряды. Диэлектрик поляризуется. На одной поверхности выступают заряды одного знака, на другой — противоположного. Свободные заряды во внешнем поле двигаются (дрейфуют) и также разделяются.

Ориентация диполей и дрейф свободных зарядов протекают во времени. Если процесс происходит быстро, за очень короткий промежуток времени (миллионные доли секунды), поляризация называется мгновенной. Медленная поляризация (время поляризации исчисляется минутами, часами, сутками и даже годами) называется релаксационной. Для характеристики процесса поляризации вводится понятие времени релаксации.

Релаксационную поляризацию можно представить себе так, как будто диполи диэлектрика медленно поворачиваются в вязкой жидкости. Время релаксации очень сильно зависит от температуры, и если нагреть диэлектрик, то вязкость «жидкости» снижается, диполи поворачиваются значительно быстрее.

Знак поверхностного заряда при ориентировании диполей противоположен знаку поляризующего электрода. Плюсы диполей притягиваются к минусу электрода. Поэтому такие поверхностные заряды назвали гетерозарядами (от греческого слова heteros — другой).

С электрода на поверхность диэлектрика могут «натекать» (инжектироваться) заряды, знак которых одинаков со знаком электрода. Такие заряды назвали гомозарядами (от слова homos — одинаковый).

При релаксационной поляризации, если внешнее поле выключить, тепловое движение не сразу разбросает молекулы. Деполяризация диэлектрика происходит также медленно. Диэлектрик остается некоторое время заполяризованным. Возникает остаточная поляризация.

Поместим электретный материал между двумя прижатыми к материалу электродами и подадим на них напряжение U_0; тогда между электродами возникнет поле $E_0=U_0/d$. В поле происходит релаксационная поляризация диполей и формируется поверхностный гетерозаряд, плотность которого $\sigma_{\text{гетеро}}$ (рис. 1). На рисунке диполи изображены в виде удлиненных прямоугольников. На поверхность электретного материала с электродов инжектируются гомозаряды. Они на рисунке изображены кружками. Плотность гомозарядов $\sigma_{\text{гомо}}$. Плотности гетеро- и гомозарядов неодинаковы. Суммарная плотность заряда равна $\sigma_{\text{сум}}=\sigma_{\text{гетеро}}-\sigma_{\text{гомо}}$.

Отключим напряжение, снимем внешнее поле, уберем электроды. Мы получили электрет. При поляризации электретного материала заряды разделились, на одной поверхности выступили положительные заряды, на другой — отрицательные. По аналогии с магнитами сформировались «северный» и «южный» полюсы.

Рассмотрим свободный (без электродов) электрет. Электрическое поле электрета создается разностью гомо- и гетерозарядов. Часть гетерозарядов скомпенсирована гомозарядами. Представим, что на поверхностях находится только избыточный заряд (рис. 2). Картинка знакомая. Ведь это плоский конденсатор. Отличие в том, что в плоском конденсаторе заряд находится на металлических обкладках и он свободен, т. е. легко может стечь с металла. А электретный заряд связан. Однако поля, создаваемые плоским конденсатором и электретом, подчиняются одним и тем же законам.

В этом случае говорят, что электрет рассматривается в приближении плоского конденсатора. Известно, что поле плоского конденсатора сосредоточено внутри конденсатора. Внешнее поле имеется только у краев. Следовательно, в этом приближении у электрета имеется только внутреннее поле. Если рассчитать внутреннее поле электрета, то оно окажется очень сильным. При реальной плотности заряда $\sigma=10^{-4}$ Кл/м^2 $E=10^7$ В/м.

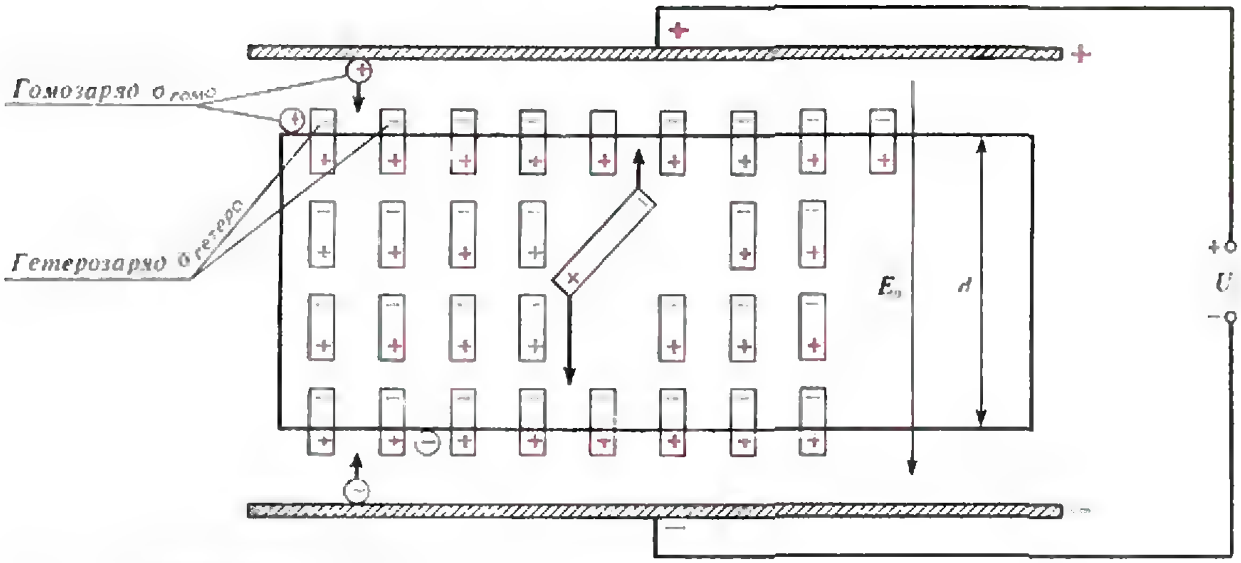


Рис. 1. Формирование электрета.

За счет натекания зарядов извне и медленного дрейфа имеющихся в диэлектрике несвязанных зарядов, а также хаотического теплового движения происходит медленная деполяризация электрета. Время жизни электрета во многом зависит от проводимости диэлектрика. Чем ниже проводимость, тем больше время релаксации, тем стабильнее электрет. По этой причине диполи сегнетоэлектрика довольно быстро экранируются *свободными* зарядами. Электреты из сегнетоэлектрика обладают малым временем жизни.

Теоретически электретными свойствами обладают все диэлектрики, но время жизни большинства из них очень мало́ — секунды или, в лучшем случае, часы. И лишь некоторые диэлектрики (керамика из титаната кальция, пленки фторопласта, поликарбоната, лавсана, а также полиметилметакрилат плексиглас) длительное время — месяцы, годы и даже десятки лет — сохраняют электретное состояние. *)

Как получают электреты

Первый способ получения электретов уже описан. Электретный материал помещают между электродами, нагревают, чтобы существенно уменьшить время релаксации, выдерживают под напряжением (10—20 кВ), не снимая напряжения охлаждают, потом снимают напряжение и извлекают электрет. Такие электреты назвали термоэлектретами. Но позже выяснилось, что электреты можно получить и другими способами, лишь бы электретный материал подвергался действию электрического поля. Если диэлектрик несет *избыточный заряд*, то материал диэлектрика находится в собственном электрическом поле и поляризуется. Поэтому, если потереть диэлектрик, появятся избыточные заряды, возникнет электрическое поле, и диэлектрик сам себя заполяризует. Такие электреты получили название трибоэлектретов («трибо» по-гречески — натирать). Это простейший способ получения электретов.

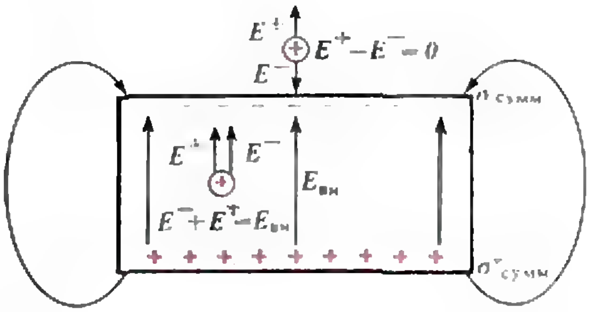


Рис. 2. Приближение плоского конденсатора.

---

*) Тем, кто заинтересуется теорией электретов, рекомендуем прочитать книгу А. Н. Губкина «Электреты» (М.: Наука, 1978).

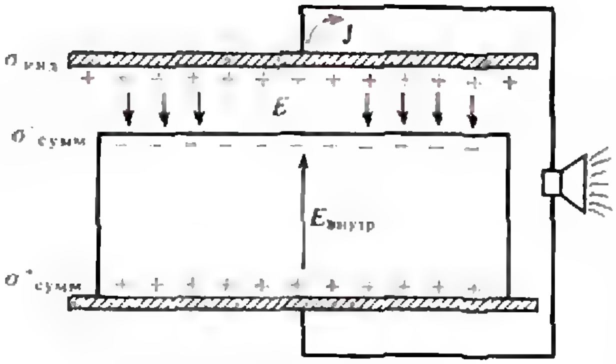


Рис. 3. Закороченный электрет.

Можно облучить диэлектрик электронами или ионами и получить радиоэлектрет (от слова «радиация»). В поле коронного разряда образуются короноэлектреты. Если поля возникают под действием механических напряжений — механоэлектреты. Электроэлектрет формируется в поле без нагрева.

Как же использовать электрет для практических целей? Для этого электрет опять помещают между двумя электродами, которые соединены между собой цепью. Как говорят, электрет закорачивают. Но если нижний электрод прижат к электрету, то верхний располагают с зазором. Тогда на металлическом электроде возникают индуцированные заряды (рис. 3), и в зазоре «электрет — электрод» появляется рабочее поле E.

Если пластинка верхнего электрода вибрирует, меняет свое положение, то поле тоже меняется, соответственно меняется величина индуцированного заряда, а так как на электроде заряды свободны, то они или стекают с электрода, или натекают на него; в цепи генерируется ток. Электрет преобразует внешнюю механическую энергию колебаний электрода в электрическую.

Так применяют на практике принцип закороченного электрета. Многие зарубежные фирмы выпускают радиоаппаратуру с микрофонами на электретах. В Советском Союзе в Туле завод «Октава» выпускает около двадцати модификаций высококачественных электретных микрофонов, среди которых привлекают внимание миниатюрные микрофоны для слуховых аппаратов.

На том же принципе работают электретные устройства для измерения вибраций, числа оборотов (тахометры), генераторы переменного тока, датчики давления. С помощью электретов можно управлять электронным лучом, измерять проникающую радиацию, влажность воздуха, можно сделать измерительную аппаратуру для измерения зарядов и потенциалов электростатического поля, сконструировать фокусирующие и сортирующие системы.

Но, наверное, читателю хотелось бы увидеть электрет или сделать его самостоятельно. В Приложении к статье (в следующем номере журнала) рассказывается, как самому сделать электрет и изготовить простейший наушник.

Модель электрета с дискретным поверхностным зарядом (о вреде стереотипов)

В приближении плоского конденсатора предполагалось, что заряд распределен равномерно по поверхности электрета. К этому настолько привыкли, что понятие равномерного распределения стало стереотипом. Стереотип — привычное представление человека о явлении. *Стереотипы очень* трудно преодолеваются, мешают правильно оценивать явления.

Стереотип «равномерное распределение» мешал объяснить отказы в работе устройств на электретах или их нестабильность. Когда стало ясно, что причина отказов — неравномерное распределение зарядов, то долго считали, что неравномерность возникает случайно, из-за технических дефектов.

«Наверное, технология несовершенна»,— говорили производственники. «Ничего, через некоторое время заряд растечется по поверхности равномерно,— говорили ученые.— Ведь на плоском металлическом конденсаторе заряд всегда распределен равномерно».

И те и другие усердно улучшали технологию: тщательно полировали электроды, ставили охранные кольца, чтобы поляризующее поле сделать равномерным, придумывали необыкновенные электроды в виде проводящей жидкости и т. д. А заряд упорно «не желал» распределяться равномерно. Более того, на полированном электроде распределение заряда получалось более неоднородным, чем на неполированном.

Распределение заряда можно наглядно увидеть, если посыпать поверхность электрета порошком, который применяют при копировании текста или документов,— ксеропорошком. Там, где заряд больше, осядет больше порошка, и поверхность будет черной. Поэтому метод проявления заряда был назван ксерографическим методом.

Для примера приводим две фотографии проявленного «рельефа» заряда электрета (рис. 4). Любопытные картинки, не правда ли?

Работа по получению как можно более равномерного распределения заряда продолжалась. Заметив, что шероховатые электроды дают более равномерное распределение, решили в качестве электрода использовать очень мелкую сетку — ее ячейки видны только под микроскопом.

Распределение заряда по поверхности изучили под микроскопом. Оказалось, что области «равномерного» распределения (на фотографиях — совершенно черные области) представляют собой плотно расположенные черные пятнышки овальной формы. В Институте кристаллографии АН СССР в лаборатории поверхностных явлений под руководством профессора Г. И. Дистлера с помощью очень тонкого метода декорирования посмотрели зарядовую топографию поверхности электрета под электронным микроскопом. Маленькие зарядовые пятна вновь распадались уже на скопления точечных дефектов почти круглой формы. Ученые сформулировали это так: «Существование скоплений точечных дефектов является правилом, а не исключением...»

Иначе говоря, неравномерное распределение заряда по поверхности закладывается уже на молекулярном уровне и является закономерным.

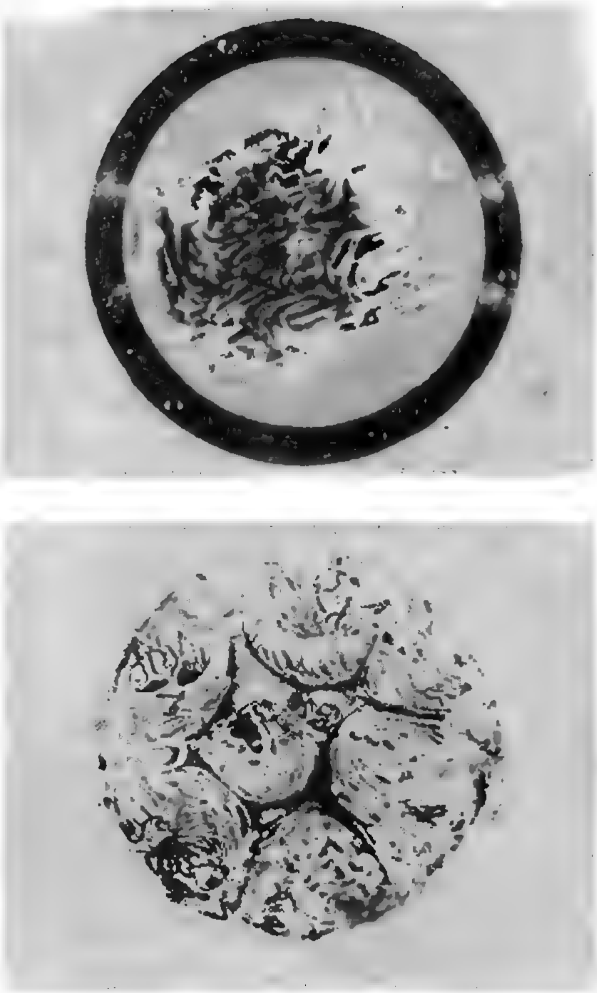


Рис. 4. Распределение заряда по поверхности электрета.

И вот тогда возник на первый взгляд странный вопрос: а что назвать «равномерным» распределением? И как количественно оценить «неравномерное» распределение?

Мы говорим: «Земля круглая». А разве она круглая? На Земле существуют горы, огромные впадины. Мы говорим: «Отполированная поверхность — гладкая». А под микроскопом поверхность — шероховатая. В зависимости от высоты шероховатостей различают 14 классов чистоты поверхности. Понятия «равномерное», «круглая», «гладкая» являются относительными.

Автор данной статьи предложил физическую модель электрета с дискретным поверхностным зарядом. За-

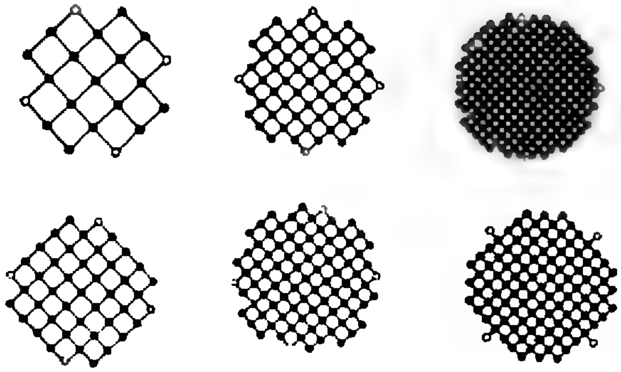


Рис. 5. Схема расположения зарядовых пятен на поверхности электрета.

ряд электрета в принципе дискретен. Неоднородности заряда начинаются с атомарного уровня. Электрические поля дискретных зарядов неоднородны, и если заряды расположены регулярно, как в кристаллической решетке, то поля периодичны. Если удаляться от поверхности, то периодичность сглаживается. Поля усредняются, и довольно быстро поле становится однородным. Как в телевизионном изображении: если рассматривать его вблизи, мы видим систему точек разной яркости, а издалека видна плавно меняющаяся окраска изображения.

Размер тонкого приповерхностного слоя (ТП-слой), в пределах которого различима дискретность заряда и неоднородность поля, является количественным критерием понятий «однородное» и «неоднородное» распределение.

Так, для элементарных зарядов, расположенных регулярно (плоскость кристаллической решетки), ТП-слой составляет всего 3Å($1\,\text{Å}=10^{-10}$ м). Если рассматривать электрет с расстояния, большего 3Å, то можно считать, что заряды распределены равномерно, а поле однородно.

Модель не противоречила принятому ранее приближению плоского конденсатора. Действительно, можно считать, что поле за пределами тонкого приповерхностного слоя равно нулю, как для плоского конденсатора.

Предложенная модель включает в себя приближение плоского конденсатора как частный случай.

Электрет «охотно» поляризовался в виде системы круглых зарядовых пятен. Расчеты показали, что при круглых зарядовых пятнах ТП-слой составляет порядка трех радиусов пятен.

Приповерхностные поля могут быть очень сильными, и их можно использовать для практических целей. Регулируя размеры и шаг пятен, можно формировать требуемые величины полей (рис. 5). Электрет, показанный на рисунке, получил название электрета с искусственной дискретной структурой заряда (ИДС-структурой).

Из модели электрета с дискретным поверхностным зарядом, как из рога изобилия, посыпались принципиально новые возможности применения приповерхностных полей электретов.

(Окончание следует)

Вниманию наших читателей!

Мы получаем много писем от наших читателей с вопросом, почему журнал в некоторых городах поступает подписчикам с большим опозданием. Не связано ли это с отсутствием бумаги?

Спешим заверить читателя, что причина в другом. По договору между редакцией, типографией и ЦРПА «Союзпечать» весь тираж «Кванта» должен поступать в ЦРПА в первых числах подписного месяца. Свои обязательства перед типографией редакция выполняет аккуратно. Небольшая задержка (5—10 дней) бывает у типографии. Все остальное на совести Министерства связи, которое, увеличив резко стоимость доставки, посчитало, очевидно, свои функции исчерпанными.

Мы выражаем свое сожаление подписчикам и надеемся, что это явление все же временное. Во всяком случае, причина опоздания нами названа и подписчик может требовать от Министерства связи выполнения обязательств...

Редакция

ПЕРПЕТУУМ-МОБИЛЕ И МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Слова «вечный двигатель» (по-латыни «перпетуум-мобиле») мы связываем с машиной наподобие той, что изображена на рисунке 1: колесо с катящимися внутри него шарами, которое по мысли изобретателя не только само бесконечно долго крутится, но и приводит в движение другие машины, станки. Но со школьной парты мы твердо знаем, что подобная машина не может работать, поскольку это противоречило бы закону сохранения энергии. Правда, в академии наук стран всего мира ежегодно приходят сотни новых (и не новых) проектов таких машин. Физики их называют вечными двигателями первого рода. Значит, есть и вечные двигатели второго рода? Да. О них мы и поговорим.

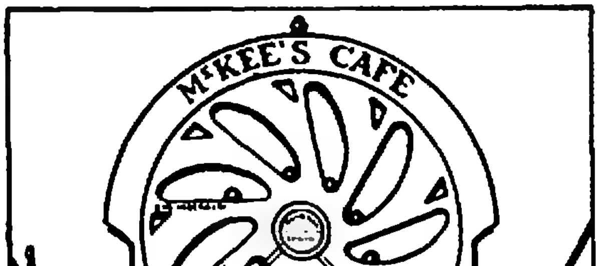


Рис. 1.

Идея вечного двигателя второго рода состоит в том, чтобы, имея два одинаково нагретых тела, передать часть тепла от одного из них другому без затраты энергии, а потом получить энергию движения с помощью тепловых машин, использующих возникшую разность температур. В результате работы тепловой машины температуры тел снова выравниваются. Теперь снова передаем тепло от одного тела другому, получаем работу — и так далее до бесконечности. Вечный двигатель второго рода не противоречит закону сохранения энергии. Здесь энергия не исчезает и не появляется, а лишь переходит сначала от одного тела к другому, а потом тратится на работу тепловой машины, производящей полезную работу. При этом температура обоих тел становится меньше, чем первоначально, но эта потеря тепла может компенсироваться нагреванием от тепла окружающей среды.

Однако осуществлению вечных двигателей второго рода мешает уже другой закон. Его идеи были заложены в работах замечательного французского физика Сади Карно, сына выдающегося деятеля Великой французской революции, известного математика Лазаря Карно, и развиты в работах английского физика У. Томпсона и немецкого физика Р. Клаузиуса. Этот закон носит название «второй закон термодинамики» и звучит так:

Нельзя без затраты энергии передать часть тепла от одного тела другому, если температура первого тела не превосходит температуры второго.

Этот запрет выглядит не очень убедительно. Всегда ли он верен? Великий английский физик Дж. Максвелл высказал идею, призванную опровергнуть этот запрет. Она получила название «демон Максвелла». Давайте, говорит он, возьмем ящик с газом, разделим его пополам перегородкой, около которой будет сидеть демон и пропускать за перегородку, из левой половины в правую, только быстрые молекулы газа, а медленные оставлять в левой. Поскольку температура газа характеризуется средней скоростью его молекул, то в правой половине ящика газ будет нагреваться, а в левой — остывать. Было предложено несколько конструкций, которые, по мысли авторов, должны были сыграть роль такого демона, но в них обнаруживались неучтенные эффекты, в силу которых конструкции не работали.

Там, где пасуют физики, бывает, добиваются успеха математики. Я вам предлагаю устройство, свободное от демонов и прочей нечистой силы, которое можно изготовить даже в школьной мастерской. Оно, согласно расчетам, способно передавать тепло от одного тела другому в том случае, если первоначально тела были нагреты до одинаковой температуры.

Прежде чем приступить к описанию нашего вечного двигателя, необходимо проглотить некоторую дозу математики, чтобы вы сами смогли убедиться в правильности дальнейших рассуждений и построений. Речь пойдет об эллипсе и его свойствах.

Эллипсом называется кривая, состоящая из всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 *и* F_2 *(они называются фокусами эллипса) есть постоянная величина. Обычно она обозначается через* $2a$. Это свойство эллипса используют садовники при разметке овальных клумб. Они втыкают в землю две палки (в фокусах эллипса), к ним привязывают концы веревки, затем берут еще одну палку с острым концом и с ее помощью натягивают веревку (рис. 2). Если теперь передвигать эту палку, оставляя веревку натянутой, то ее острый конец будет вычерчивать на земле эллипс. Его размеры и форма будут зависеть от длины веревки и расстояния между воткнутыми в землю палками. Вы можете проделать тоже самое в тетради, если вместо двух палок возьмете булавки, а вместо третьей — карандаш.

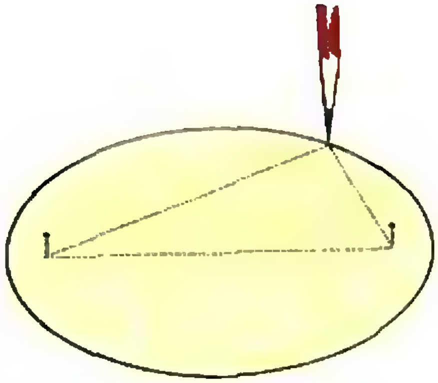


Рис. 2.

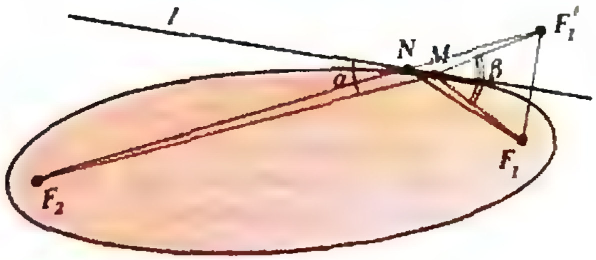


Рис. 3.

Нарисовав несколько эллипсов, вы придете к выводу, что всякий эллипс — замкнутая выпуклая кривая, обладающая центром симметрии и двумя осями симметрии, одна из которых — прямая F_1F_2, а вторая — перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка F_1F_2. Кроме того, нетрудно заметить, что для точек, лежащих внутри эллипса, сумма расстояний до фокусов меньше чем $2a$, а для точек, лежащих вне его, эта сумма больше чем $2a$.

Этих сведений оказывается достаточно, чтобы доказать важное и неочевидное свойство эллипса:

Если произвольную точку M, *лежащую на эллипсе, соединить отрезками с его фокусами, то эти отрезки образуют равные углы с прямой, касающейся эллипса в этой точке* M.

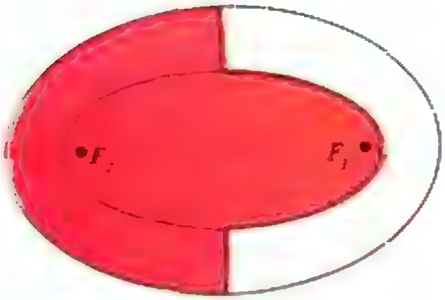


Рис. 4.

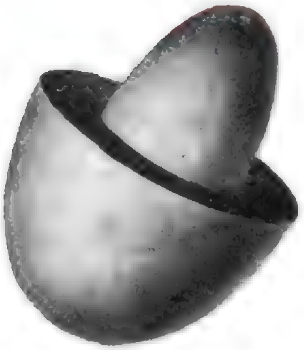


Рис. 5.

Вспомнив закон отражения света — угол падения равен углу отражения,— можно сформулировать это свойство так: *всякий луч, выходящий из одного фокуса эллипса, после отражения попадает во второй фокус*. Это свойство называют оптическим свойством эллипса. Оно наблюдается и в природе: существуют пещеры с эллипсоидальными сводами, в которых обнаруживается два места, достаточно удаленные друг от друга, но голос человека, стоящего в одном из этих мест, слышится в другом так, будто говорящий стоит рядом. В некоторых дворцах и замках архитекторы проектировали залы с таким эффектом.

Поскольку оптическое свойство эллипса будет основным в наших рассуждениях, то приведем его доказательство, тем более, что оно довольно короткое и простое.

Пусть l — прямая, касающаяся эллипса в точке M, и отрезки F_1M и F_2M образуют с прямой l неравные углы α и β (рис. 3). Построим точку F_1', симметричную точке F_1 относительно прямой l. Точка N пересечения прямой l с отрезком $F_1'F_2$ находится вне эллипса (в силу его выпуклости), и поэтому сумма ее расстояний до фокусов больше, чем у точки M, лежащей на эллипсе. Но из симметрии следует, что $F_1M=F_1'M$ и $F_1N=F_1'N$. Поэтому $F_2M+MF_1=F_2M+F_1'M$, что меньше, чем $F_2N+NF_1=F_2N+NF_1'$, т. е. $F_2F_1'>F_2M+MF_1'$. Но отрезки F_2F_1', F_2M и MF_1' — стороны треугольника F_2MF_1', а в нем сумма двух сторон больше третьей стороны, т. е. выполняется обратное соотношение $F_2F_1'<F_2M+MF_1'$. Таким образом, предположение о различии углов α и β привело нас к противоречию. Следовательно, эти углы равны (точка N совпадает с точкой M).

Теперь приступим к осуществлению нашего проекта создания вечного двигателя 2-го рода. Возьмем лист хорошей чертежной бумаги, отметим две точки F_1 и F_2, начертим два эллипса с фокусами в этих точках, взяв один раз нитку подлиннее, а во второй раз покороче. Начертим также прямую, проходящую через середину отрезка F_1F_2 перпендикулярно к нему. Теперь возьмем канцелярскую резинку и сотрем часть нарисованного так, чтобы получился «гриб», подобный тому, что изображен на рисунке 4.

Свернем бумагу в трубку и отправимся в ближайшую жестяную мастерскую. Там попросим по этому чертежу изготовить из жести оболочку, которая получается, если нарисованную кривую вращать вокруг ее оси симметрии F_1F_2 (рис. 5). (Поверхность, получаемая вращением эллипса вокруг его оси симметрии, называется эллипсоидом вращения). Внутренность полученной оболочки попросим покрыть отражающим слоем. Изготовленную конструкцию принесем домой. Вы стали владельцем вечного двигателя! Не верите? Докажем это строго математически.

Поместим в точках F_1 и F_2 по одинаково нагретому телу. Заметим, что любой луч (световой или тепловой), выходящий из точки F_1, попадает в точку F_2 (рис. 6). Луч, идущий по этой траектории из точки

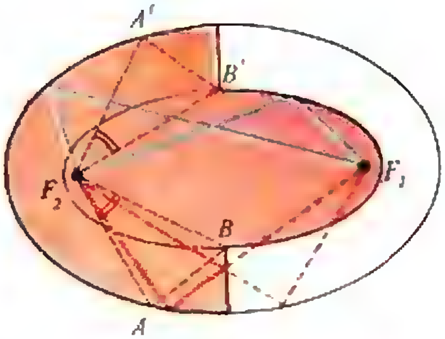


Рис. 6.

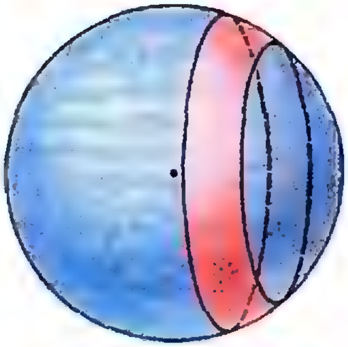


Рис. 7.

F_2, конечно же, попадет в точку F_1. Но возьмем луч, направленный из точки F_2 в вертикальную перегородку. Если бы этой перегородки не было, то этот луч, отразившись от стертой нами части эллипса, попал бы в фокус F_1. Но сейчас он после отражения пойдет по зеркально-симметричному пути и попадет вновь в точку F_2. Если путь по этой траектории проделать в обратную сторону, то мы снова, выйдя из точки F_2, вернемся в нее. Таких лучей будет довольно много. В сечении нашей конструкции, которое рассмотрено на рисунке 6, это будут лучи, расположенные внутри угла F_2AB и симметричного ему угла $F_2A'B'$.

Таким образом, тело в точке F_2 будет нагреваться, а тело в точке F_1 — охлаждаться. Можно даже подсчитать, каковы будут температуры тел после стабилизации процесса, если первоначальные температуры составляли T_0 градусов по шкале Кельвина.

(Кстати, шкала Кельвина названа так в честь уже упоминавшегося английского физика У. Томпсона, которому за выдающиеся научные заслуги был присвоен титул лорда Кельвина.)

Известно, что излучение тела пропорционально четвертой степени его температуры (по шкале Кельвина). Поэтому, если в точке F_1 температура равна T_1, а в точке F_2 она равна T_2, то излучение из точки F_1 равно kT_1^4; излучение из точки F_2 равно kT_2^4, но в точку F_1 попадает только его часть. Какая? Рассмотрим небольшую сферу вокруг точки F_2. Те лучи, которые возвращаются обратно в точку F_2, образуют на этой сфере кольцо (рис. 7). Если обозначить его площадь через S_1, а площадь сферы — через S, то получим, что доля излучения, возвращающегося обратно в точку F_2, равна $\frac{S_1kT_2^4}{S}$, а доля уходящего излучения равна $(S-S_1)\frac{kT_2^4}{S}$.

Если процесс установился, то энергия, уходящая из точки F_1, равняется падающей туда энергии, т. е.

$$(S-S_1)\frac{kT_2^4}{S}=kT_1^4.$$

В то же время тепловая энергия тела при температуре T равна произведению массы этого тела на теплоемкость и на температуру тела: $W=m\lambda T$. Из закона сохранения энергии следует, что

$$2m\lambda T_0=m\lambda T_1+m\lambda T_2.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения получаем:

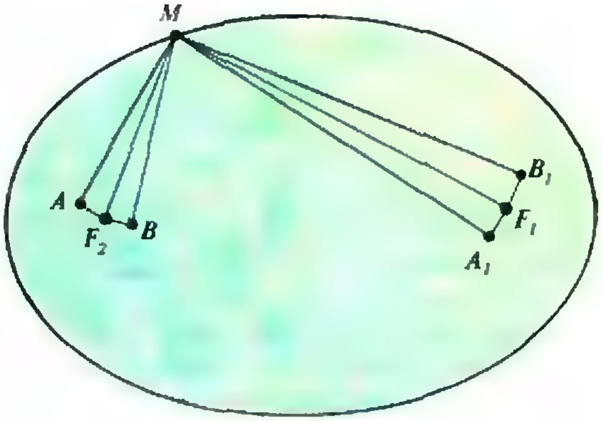


Рис. 8.

$$T_1 = \frac{2T_0\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}}{1+\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}},$$

$$T_2 = \frac{2T_0}{1+\sqrt[4]{\frac{S-S_1}{S}}}$$

Все! Можете проверить рассуждения с самого начала и убедиться в их справедливости. Неужели мы опровергли второе начало термодинамики? К сожалению (или к счастью), нет. Здесь есть ошибка. В чем она? Подумайте сами, а потом сверьте свой ответ с тем, что написано дальше. Думаю, что не все правильно ответят на этот вопрос.

Не правы будут те, кто ищет ошибку в физике, например в том, что здесь не учитывается конвекционный процесс, потому что внутри полости можно создать вакуум. Но кроме физики и математики здесь, вроде бы, ничего нет? Ошибка находится как бы на границе этих двух наук — при переходе от физического процесса к его математической модели.

Вспомним, что речь шла о телах, которые мы помещаем в фокусы. Тем самым мы пренебрегли размерами этих тел. Такая процедура привычна в физических рассуждениях, и фраза «тело находится в точке M» не вызывает чувства протеста. Такое пренебрежение размерами тела во многих случаях оправдано, поскольку движение тела под действием заданных сил, приложенных к его центру тяжести, не зависит от формы и размеров тела. Более того, и в ряде других случаев такая замена правомерна. Так, И. Ньютон показал, что слоисто-однородное тело (тело, составленное из нескольких однородных концентрических слоев) притягивает другие тела так же, как точка с той же массой, расположенная в центре этого шара. Так что замена тела точкой — процедура в физике вполне обычная.

Но в данном случае именно она приводит к ошибке. Посмотрим, что даст нам рассмотрение шаров ненулевого радиуса, центры которых лежат в фокусах.

Пусть точка M лежит на эллипсе в его левой половине. Рассмотрим луч, выходящий из точки F_2, отражающийся от эллипса в точке M и идущий далее в точку F_1, а также два луча, идущие в точку M и отстоящие от точки F_2 на расстояние r (рис. 8). Посмотрим, на каком расстоянии R от точки F_1 они пройдут после отражения от эллипса в точке M. Из подобия треугольников AF_2M и A_1F_1M, а также треугольников BF_2M и B_1F_1M получаем, что $\frac{r}{R}=\frac{F_2M}{F_1M}$. Поэтому, если точка M лежит в левой половине эллипса, то отраженный луч пройдет от фокуса F_1 на расстоянии бо́льшем, чем он находился от фокуса F_2. Таким образом, не все лучи, выходящие из тела Φ_2, попадут на тело Φ_1 или вернутся на Φ_2, а будут рассеиваться. Это обстоятельство разрушает все наши рассуждения и построения.

Любители физики, прочитавшие статью до этого места, могут быть довольны: второе начало термодинамики осталось незыблемым. А для любителей математики предложим еще несколько любопытных фактов о поведении лучей, отражающихся в эллиптическом зеркале.

Итак, если луч вышел из фокуса эллипса, то после отражения он попадает во второй фокус, и если там нет задерживающего тела, то он вновь попадает в первый фокус, потом снова во второй и так далее. Это очевидно. Но любопытно, что на каждом шаге траектория луча все больше приближается к прямой, на которой лежат фокусы и в пределе совпадает с отрезком AB. Если же траектория луча пересекает отрезок AB не в фокусе, то она уже никогда не пройдет через фокус. Более того, если она пересекает этот отрезок вне промежутка между фокусами, то и дальше она будет пересекать этот отрезок в точках, лежа-

(Окончание см. на с. 31)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1286—М1290, Ф1293—Ф1297

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1286» или «Ф1293». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1286—М1289 предлагались на олимпиадах и матбоях в г. Ленинграде в 1968—1971 гг.

М1286. На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50-ти двухместных номерах гостиницы так, что живущие в одном номере могли бы разговаривать между собой.

М1287. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника $BCDM$ можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

М1288*. Докажите, что число 235^2+972^2 — составное.

М1289*. Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что их сумма равна 1. Для каждого k от 1 до n через N_k обозначим количество положительных чисел среди n сумм: $a_k,\ a_k+a_{k+1},\ \ldots,\ a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+a_1+\ldots+a_{k-1}$. Докажите, что все N_k различны.

М1290*. Квадратный лист бумаги размерами 8×8 разграфлен 14-ю прямыми на 64 квадратные клетки 1×1 и произвольным образом сложен по этим линиям в книжку 1×1 (из 64 листов). Листы книжки нумеруются по порядку числами 1, 2, .., 64, а затем она вновь разворачивается. Пусть p — наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение p и при каком складывании оно достигается?

М. Гусаров

Ф1293. Цилиндрический сосуд с легким и тонким приставным дном, плотно прилегающим к стенке сосуда, опущен в воду так, что дно находится на глубине $H=4$ см, и удерживается неподвижно (рис. 1). Гирю какой минимальной массы и куда надо поставить на дно, чтобы дно отвалилось? Диаметр дна $D=10$ см, размеры гири считать малыми по сравнению с диаметром сосуда.

Ф1294. Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена солнцем. При температуре воздуха T_0 освещенная сторона имеет температуру T_1, противоположная — T_2. Какими будут значения температур, если взять пластинку двойной толщины?

Е. Пономарев

Ф1295. К точкам A и $Б$ подключена многозвенная резисторная цепь (рис. 2). Каждое звено содержит два одинаковых резистора, сопротивление резисторов каждого следующего звена в два раза больше предыдущего. Каким будет сопротивление между точками A и $Б$ при очень большом числе звеньев? Резисторы в первом звене имеют сопротивление R.

А. Зильберман

Ф1296. В контуре LC происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе U, а ток через катушку I, замыкают ключ K, присоединяя параллельно контуру цепь, состоящую из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью $2L$ (рис. 3). Определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе.

О. Савченко

Ф1297. Параллельно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F движется точечный источник света. На каком расстоянии от линзы он окажется в тот момент, когда скорость изображения его в линзе будет равна по величине скорости источника? Расстояние от главной оптической оси линзы до источника $H=F/4$.

З. Рафаилов

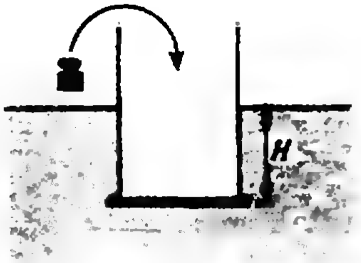


Рис. 1.

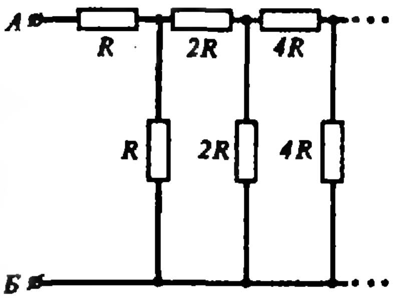


Рис. 2.

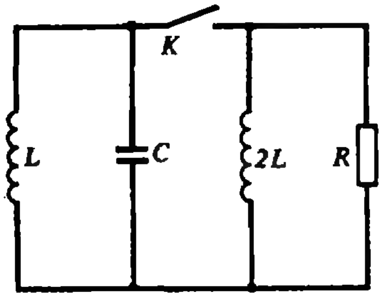


Рис. 3.

Решения задач

М1261 — М1265, Ф1273 — Ф1277

М1261. *На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точкой.*

В формулировке задачи М1261 было пропущено важное условие. Приводим правильную формулировку. Срок отправки решений продлевается до 1 сентября.

М1262. *Пусть d_1, d_2, d_3 — попарные разности длин сторон треугольника (по*

Это утверждение можно доказать разными способами. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$ — положительные числа, для которых $b+c \geqslant a$ (длины сторон треугольника). Будем раздви-

абсолютной величине), P — его периметр. Докажите неравенство

$d_1d_2+d_2d_3+d_3d_1 \leqslant P^2/4$.

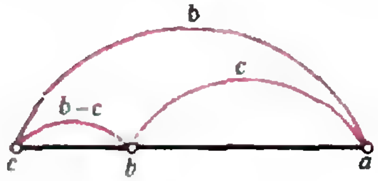


Рис. 1.

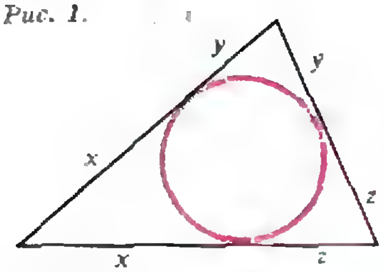


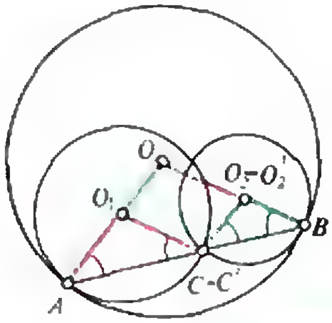
Рис. 2.

гать крайние числа a и c так, что их сумма сохраняется, до тех пор, пока не придем к тройке, в которой большее число равно сумме остальных ($b+c=a$). Очевидно, что при этом $P=a+b+c$ и правая часть неравенства не меняется, а все попарные разности между числами и тем самым левая часть возрастают. Таким образом, достаточно доказать неравенства для тройки, в которой $a-c=b$ (рис. 1). Но в этом случае оно очевидно: левая часть равна $b^2+c(b-c)=$ $=b^2+bc-c^2$, а правая — $(b+c)^2=b^2+2bc+c^2$.

Другое, более лобовое решение. Стороны треугольника всегда можно представить в виде $x+y$, $x+z$, $y+z$, где $x \geqslant y \geqslant z$ — положительные числа (это — отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны (рис. 2). Выразив через x, y, z обе части неравенства, мы сразу придем к очевидному неравенству.

Н. Васильев, Л. Курляндчик

M1263. *Внутри окружности лежат еще две окружности, касающиеся внешней окружности в точках A и B соответственно и пересекающиеся между собой. Докажите, что если одна из точек пересечения лежит на отрезке AB, то сумма радиусов меньших окружностей равна радиусу большей. Верно ли обратное?*



Пусть O, O_1, O_2 — центры данных окружностей; r, r_1, r_2, соответственно,— их радиусы (см. рисунок), причем O_1 лежит на OA, а O_2 — на OB. Если точка C пересечения окружностей O_1 и O_2 лежит на AB, то равнобедренные треугольники OAB, O_1AC и O_2BC подобны друг другу (у них равны углы при основании). Отсюда, очевидно, следует, что OO_1CO_2 — параллелограмм, а значит, $r=OA=OO_1+O_1A=O_2C+O_1A=r_2+r_1$.

Верно и обратное утверждение: если $r=r_1+r_2$, то отрезок AB проходит через точку пересечения окружностей O_1 и O_2. Для его доказательства построим параллелограмм $OO_1C'O_2'$, вершины C' и O_2' которого лежат на отрезках AB и OB. Треугольники O_1AC' и $O_2'BC'$ подобны равнобедренному треугольнику OAB, поэтому

$$O_1C'=O_1A=r_1,$$

а значит, C' лежит на окружности O_1, и

$$O_2'B=O_2'C'=OO_1=OA-O_1A=r_3,$$

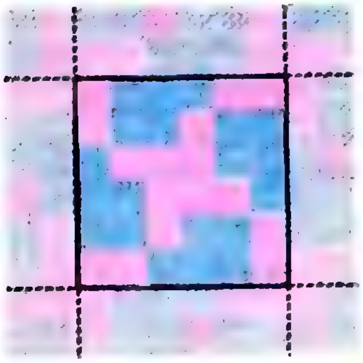
откуда следует, что $O_2'=O_2$ и что C' лежит также и на окружности O_2.

В. Дубровский

M1264*. *На бесконечном белом листе клетчатой бумаги квадрат 2×2 клетки надо закрасить в черный цвет. Можно ли это сделать несколькими опера-*

Ответ: нельзя. Мы докажем это, пользуясь идеей, часто встречающейся при решении подобных задач. Раскрасим клетчатую плоскость в два цвета (скажем, красный и голубой) так, чтобы любой квадрат 3×3 и 4×4 клетки содержал четное число красных клеток, а некоторый квадрат 2×2 — нечетное их число.

циями, каждая из которых — перекрашивание в противоположный цвет всех клеток в квадрате 3×3 или 4×4 клетки?



Из существования такой раскраски сразу следует нужное утверждение: ведь после любых операций, указанных в задаче, черными станет лишь четное число красных клеток. А если бы лишь один (можно считать — тот самый, с нечетным числом красных клеток) квадрат 2×2 стал черным, это бы означало, что черными стали нечетное число красных клеток.

Но придумать нужную раскраску не так просто. Мы приведем пример нужной периодической раскраски с периодом 6: в каждом квадрате 6×6, на которые разбита плоскость двумя рядами прямых, раскраска получается параллельным переносом квадрата, показанного на рисунке.

И. Кан

M1265*. *а) Докажите, что среди 21 попарных расстояний между 7 различными точками плоскости одно и то же число встретится не более 12 раз.*

б) Какое наибольшее количество раз может встретиться одно и то же число среди 15 попарных расстояний между 6 различными точками плоскости?

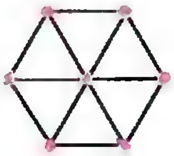


Рис. 1.

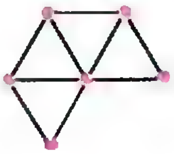


Рис. 2.

Ответ: б) 9. Пример приведен на рисунке 2.

Докажем утверждение а). Пусть расстояние a для точек $A_1, A_2, \ldots, A_7$ плоскости повторяется самое большее k раз. Обозначим через n_i количество отрезков длины a, выходящих из точки A_i. Не нарушая общности, можем считать, что $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_7$.

Заметим, что $n_1 + n_2 \leqslant 9$. Действительно, в противном случае на окружностях с центрами A_1 и A_2 и радиусом a из 7 точек найдутся самое меньшее $n_1 + (n_2 - 2) \geqslant 8$ точек, что невозможно.

Ясно, что из точек A_1, A_2, A_3, A_4 расстояние между какими-то двумя точками не равно a. Пусть $A_iA_j \neq a$ $(i \neq j)$. В этом случае на окружностях с центрами A_i, A_j и радиусом a найдутся самое меньшее $n_i + n_j - 2$ точки, так как точки A_i и A_j не находятся на указанных окружностях, значит, $n_i + n_j - 2 + 2 \leqslant 7$. Поэтому $n_3 + n_4 \leqslant n_i + n_j \leqslant 7$, отсюда имеем $n_4 \leqslant 3$, тем самым $n_7 \leqslant n_6 \leqslant n_5 \leqslant 3$.

Поэтому

$$k = \frac{1}{2}\Big((n_1 + n_2) + (n_3 + n_4) + n_5 + n_6 + n_7\Big) \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(9 + 7 + 3 + 3 + 3),$$

откуда $k \leqslant 12$.

Пример очевиден (рис. 1) в правильном шестиугольнике со стороной a, расстояние a для вершин и центра повторяется 12 раз. Значит, $k = 12$.

Для задачи б) аналогичное рассуждение дает оценку

$$k \leqslant \frac{1}{2}(8 + 6 + 3 + 3) \leqslant 10.$$

Однако легко проверить, что наборы $n_1 = 5$, $n_2 = \ldots = n_6 = 3$ и $n_1 = n_2 = 4$, $n_3 = \ldots = n_6 = 3$ невозможны (в последнем случае для точки A_i — единственной, не лежащей на окружности радиуса a с центром A_1 — $n_i \leqslant 2$).

Интересно было бы найти точное (или хотя бы «асимптотически» точное) значение k_n для аналогичной задачи про n точек плоскости. Можно доказать, что $k_n/n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, но мы не знаем, верно ли (хотя это и правдоподобно), что $k_n \leqslant Cn$ при некотором C, и тем более не умеем находить наименьшее значение C. Вполне вероятно, что наименьшее из попарных расстояний между n точками может повторяться не более $3n - 9$ раз.

А. Акопян, Н. Седракян

Ф1273. *Веревка длиной l закреплена одним из своих концов в вершине сферы радиусом R (рис. 1). В некоторый момент веревку отпускают. Найдите ускорение веревки сразу после этого. Трение отсутствует.*

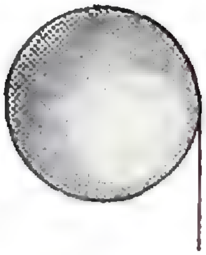


Рис. 1.

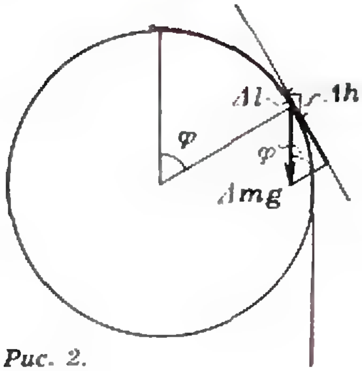


Рис. 2.

Единственной силой, ускоряющей веревку, является сила тяжести. Значит, надо найти ее составляющую вдоль сферы.

Разобьем веревку на маленькие участки длиной Δl (рис. 2). Пусть угол между радиусом, проведенным к одному из таких участков из центра сферы, и вертикалью равен φ. Тогда составляющая силы тяжести вдоль сферы для этого участка равна

$$\Delta F = \Delta mg \sin\varphi = \frac{M}{l}\Delta lg \sin\varphi,$$

где M — длина веревки. Но из рисунка видно, что

$$\Delta l \sin\varphi = \Delta h,$$

где Δh — разность высот концов этого участка, следовательно,

$$\Delta F = \frac{M}{l} g \Delta h.$$

Искомая суммарная ускоряющая сила есть

$$F = \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i = \frac{M}{l} g \sum_{i=1}^{N} \Delta h_i = \frac{M}{l} gH.$$

В случае, если длина веревки равна, например, четверти длины окружности, т. е. $l = \pi R/2$, $H = R$, и ускорение веревки в начальный момент равно

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2}{\pi} g.$$

А. Быцко

Ф1274. *В теплоизолированном сосуде, разделенном пополам перегородкой, находится пар, близкий к насыщению: в левой части — при температу-*

При решении задач такого типа важно установить, происходит ли фазовый переход, что может дать дополнительные слагаемые в уравнение теплового баланса. В нашем случае такого не произойдет, и вот почему. Давление и плотность насыщенного пара при +50 °С существенно выше, чем при +20 °С:

ре $+20$ °С, а в правой — при $+50$ °С. Перегородку удаляют. Какое давление установится в сосуде? Какое давление в нем будет, если нагреть содержимое до $+50$ °С? охладить до $+20$ °С? Воды в сосуде первоначально нет. Необходимые для расчета данные возьмите в таблицах.

	$t_1=+20$ °С	$t_2=+50$ °С
ρ, кг/м^3	0,0176	0,084
p, Па	2380	12 500

Это означает, что почти вся масса пара сосредоточена в правой части сосуда, и после смешивания почти то же самое количество пара придется на вдвое больший объем. Следовательно, пар останется ненасыщенным.

Обозначим установившуюся в сосуде температуру через T_3 и запишем уравнение теплового баланса:

$$\rho_1\frac{V}{2}(T_3-T_1)=\rho_2\frac{V}{2}(T_2-T_3),$$

откуда

$$T_3=\frac{\rho_1T_1+\rho_2T_2}{\rho_1+\rho_2}=318\ \text{К},\ t_3=45\ °\text{С}.$$

Теперь легко найти установившееся давление:

$$p_3=mRT/(MV)=(\rho_1+\rho_2)RT/M=p_2T_3/(2T_2)=6150\ \text{Па}.$$

Можно, на всякий случай, убедиться, что полученное давление меньше давления насыщенного пара для температуры $+45$ °С.

Если теперь нагреть пар до $+50$ °С, то давление немного вырастет и составит

$$p_4=p_3T_2/T_3=6250\ \text{Па}.$$

Если пар охладить до $+20$ °С, то он станет насыщенным, а его давление составит (см. таблицу)

$$p_5=2380\ \text{Па}.$$

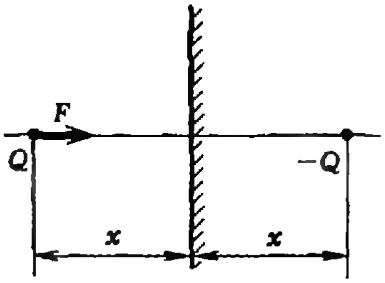
М. Яскевич

Ф1275. *Точечную частицу, имеющую массу m и заряд Q, помещают на расстоянии L от бесконечной проводящей плоскости и отпускают. За какое время частица долетит до плоскости? Сила тяжести отсутствует. (Подсказка: можно воспользоваться методом зеркальных отображений.)*

При помещении заряженной частицы у проводящей плоскости на этой плоскости наводятся заряды, притягивающие частицу. Их действие эквивалентно действию заряда-изображения, равного по величине $-Q$ и расположенного на таком же расстоянии от плоскости, но по другую ее сторону (см. рисунок). Сила, действующая на частицу, удаленную на расстояние x от плоскости, находится из закона Кулона:

$$F=\frac{kQ^2}{(2x)^2}=\frac{kQ^2}{4x^2}.$$

Представим себе, что такая же сила действует на нашу частицу, испытывающую не электрическое, а гравитационное взаимодействие с точечной массой M, помещенной в точке O. Эта масса должна быть



равна

$$M=\frac{Fx^2}{Gm}=\frac{kQ^2}{4mG}.$$

Теперь движение частицы можно описать, используя законы Кеплера.

Траекторию частицы можно считать очень вытянутым эллипсом, имеющим большую полуось $a=L/2$ и малую полуось $b\ll a$ (при этом фокусы эллипса находятся в точке O и в точке первоначального положения частицы). Заменим эллиптическую орбиту круговой с радиусом L и найдем период обращения T_0 частицы вокруг массы M:

$$m\frac{4\pi^2}{T_0^2}L=G\frac{mM}{L^2}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{GM}}.$$

Для нахождения периода T в случае эллипса с полуосью $a=L/2$ применим третий закон Кеплера:

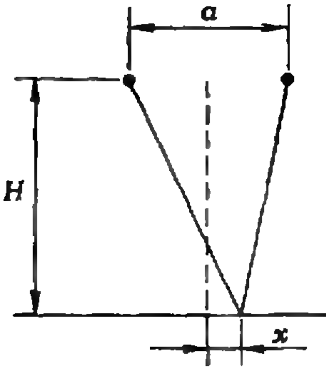
$$T=T_0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{3/2}=T_0\left(\frac{L/2}{L}\right)^{3/2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}T_0.$$

Очевидно, что время, за которое частица долетит до плоскости, равно половине периода обращения:

$$t=\frac{1}{2}T=\frac{1}{4\sqrt{2}}T_0=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{L^3}{GM}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{L}{Q}\sqrt{\frac{Lm}{k}}.$$

А. Быцко

Ф1276. *На высоте $H=20$ м над плоскостью пола в вершинах квадрата со стороной $l=1$ м расположены четыре одинаковых громкоговорителя. На них подается синусоидальный сигнал частотой $f=1$ кГц. На каком расстоянии от точки максимальной громкости на полу громкость падает до нуля?*



Точка максимальной громкости на полу находится точно под центром квадрата, в вершинах которого располагаются громкоговорители. (Для простоты мы будем считать их точечными излучателями звука; правда, для выбранной нами частоты $f=1000$ Гц длина волны составляет $\lambda=0{,}33$ м и наше упрощение не вполне оправданно, хотя и вынужденно.) Если мы отойдем от точки максимума, то пришедшие от излучателей волны будут иметь различные фазы и результат сложения будет меньше, чем в центре.

Сделаем еще одно необходимое упрощение — будем считать, что интересующая нас точка минимума находится недалеко от центра (по сравнению с высотой зала) и амплитуды пришедших волн практически одинаковы (вообще говоря, по мере удаления от излучателя амплитуда падает). Ясно, что ближе всего к центру мы найдем точку минимума, если будем смещаться по полу параллельно одной из сторон квадрата (см. рисунок). Условие минимума определяется разностью хода волн от одной пары излучателей (одновременно и от другой):

$$\sqrt{H^2+(a/2+x)^2}-\sqrt{H^2+(a/2-x)^2}=\lambda/2.$$

Решать это уравнение можно либо численно — подбирая на калькуляторе нужное значение x, либо воспользовавшись каким-нибудь более цивилизованным методом решения уравнений на ЭВМ. Однако можно обойтись и более простыми средствами, заметив, что второе слагаемое в каждом из корней существенно меньше первого. Тогда стоит умножить и разделить выражение в левой части на сумму корней, которая приблизительно равна $2H$ (это только вычитать близкие числа нужно осторожно, а складывать можно смело). При этом уравнение сильно упростится:

$$2ax = 2H\lambda/2 \Rightarrow x = 1{,}65 \text{ м}.$$

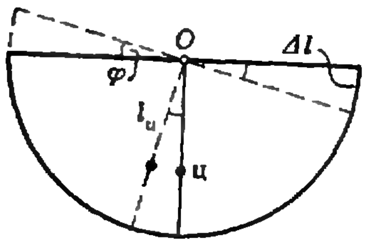
Можно немного уточнить ответ, подставив найденное значение x в подкоренные выражения для суммы, которую мы приняли равной $2H$, однако разница получится совсем незначительной.

Учет отражений звуковых волн от пола ответа не изменит — можно считать, что добавятся «зеркальные» источники звука, а соотношение для разности хода останется прежним. А вот учет отражений от стен может ответ изменить сильно.

Имеет ли ситуация, описанная в задаче, какое-нибудь отношение к реальной действительности? К сожалению, имеет. И это знает каждый, кто пытался понять, что же объявляет диктор на вокзале через множество громкоговорителей, одновременно излучающих звук в условиях многократных отражений от стен и пола. Дело в том, что для различных частот, одновременно присутствующих в речевом сигнале, условия сложения пришедших волн дают и минимумы, и максимумы, в результате полный сигнал сильно отличается от исходного. Вам очень повезет, если рядом будет находиться один из громкоговорителей, сигнал которого будет сильно превышать остальные, и интерференция получится не слишком сильной.

А. Зильберман

Ф1277. *Из тонкой проволоки сделали замкнутую фигуру, изображенную на рисунке. Радиус полуокружности равен R. Где находится центр тяжести этой фигуры? Чему равен период малых колебаний относительно точки O?*



Для определения положения центра масс (центра тяжести) фигуры воспользуемся не прямым расчетом, а энергетическими соображениями. А именно — тем свойством центра масс, что потенциальную энергию произвольного тела массой m можно вычислить по формуле

$$E_p = mgh_\text{ц},$$

где $h_\text{ц}$ — высота центра масс относительно выбранного нулевого уровня.

Повернем нашу фигуру на небольшой угол φ (см. рисунок) и найдем изменение ее потенциальной энергии, причем сделаем это двумя способами. Во-первых, свяжем ΔE_p с изменением высоты центра масс фигуры (учитывая малость угла φ):

$$\Delta E_p = mg\Delta h_\text{ц} = mgl_\text{ц}(1-\cos\varphi) = \\ = mgl_\text{ц}\cdot 2\sin^2(\varphi/2) = {}^1/_2\, mgl_\text{ц}\varphi^2, \qquad (1)$$

где $l_\text{ц}$ — расстояние от центра масс до точки O. Во-вторых, воспользуемся особенностями формы проволочной фигуры. Посмотрите внимательно на рисунок и вы увидите, что при повороте потенциальная энергия прямой перемычки не изменяется, а изменение потенциальной энергии полуокружности связано с перемещением ее небольшого участка длиной Δl с правого конца на левый:

$$\Delta E_p = \Delta m g \Delta l = \frac{m}{2R+\pi R} \Delta l \, g \Delta l = \frac{mgR}{2+\pi} \varphi^2. \qquad (2)$$

Из выражений (1) и (2) получаем

$$l_ц = \frac{2R}{2+\pi}.$$

(Попробуйте самостоятельно рассчитать положение центра масс полуокружности без перемычки; в этом случае $l_ц = 2R/\pi$.)

Продолжим наши вычисления, причем опять воспользуемся энергетическими соображениями. Заметим, что если энергию колебательной системы удается привести к виду

$$E = E_p + E_k = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx'^2}{2},$$

где x — параметр, описывающий отклонение системы от положения равновесия, а x' — производная от x по времени, то период колебаний системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

В нашем случае $x = \varphi$. Из выражения (2) сразу получаем

$$A = \frac{2mgR}{2+\pi}.$$

Для определения величины B вычислим кинетическую энергию нашей фигуры. Вклад полуокружности найти совсем просто, так как скорость любой ее точки равна $v = \omega R = \varphi' R$:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{m\pi R}{2R+\pi R} (\varphi' R)^2 = \frac{\pi m R^2}{2+\pi} \frac{\varphi'^2}{2}.$$

С перемычкой сложнее — разные ее точки имеют различные скорости. Приведем ответ, выраженный через момент инерции стержня I (надеемся, что большинство наших читателей знакомы с этим понятием):

$$E_{k2} = I \frac{\varphi'^2}{2} = \frac{m_2 (2R)^2}{12} \frac{\varphi'^2}{2} = \frac{m 2R}{2R+\pi R} \frac{R^2}{3} \frac{\varphi'^2}{2} = \frac{2mR^2}{3(2+\pi)} \frac{\varphi'^2}{2}.$$

Для полной кинетической энергии получаем

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = \frac{(2+3\pi) m R^2}{3(2+\pi)} \frac{\varphi'^2}{2},$$

откуда

$$B=\frac{(2+3\pi)mR^2}{3(2+\pi)}.$$

Теперь уже можно найти период колебаний системы:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{B}{A}}=2\pi\sqrt{\frac{(2+3\pi)R}{6g}}.$$

Заметим, что если перемычка невесома, то период колебаний равен $T=2\pi\sqrt{\pi R/(2g)}$. Убедитесь в этом самостоятельно.

А. Черноуцан

Поправка.

В «Кванте» № 3, на с. 18 в условии задачи М1273 формула, которую надо доказать, должна выглядеть так:

$$S_1\pm S_2=S(1/2+6k^2).$$

В «Кванте» № 5 на с. 25 последнее слово должно быть не «наибольшим», а «наименьшим».

Приносим свои извинения за допущенные ошибки.

Перпетуум-мобиле и математика

(Начало см. на с. 17)

щих вне этого промежутка. Но самое удивительное состоит в том, что, оказывается, существует эллипс с теми же фокусами F_1 и F_2, которого траектория луча касается после каждого отражения (рис. 9).

Аналогично, траектории, выходящие из точек отрезка F_1F_2, вновь пересекают прямую AB лишь в точках этого отрезка. При этом отрезки траектории (или их продолжения) касаются некоторой гиперболы с фокусами F_1 и F_2. (Гиперболой с фокусами F_1 и F_2 называется кривая, состоящая из всех таких точек M, разность расстояний которых до точек F_1 и F_2 равняется заданной постоянной величине.) Эллипсы и гиперболы, а также многие их свойства были известны еще математикам Древней Греции, они же и дали им эти названия: «гипербола» — преувеличение, избыток и «эллипс» — преуменьшение, недостаток.

Желающие более подробно ознакомиться со свойствами траекторий внутри эллипсоидального зеркала и в других зеркалах могут это сделать, взяв книгу Г. Гальперина и А. Землякова «Математические биллиарды» (М.: Наука, 1990. Библиотечка «Квант»).

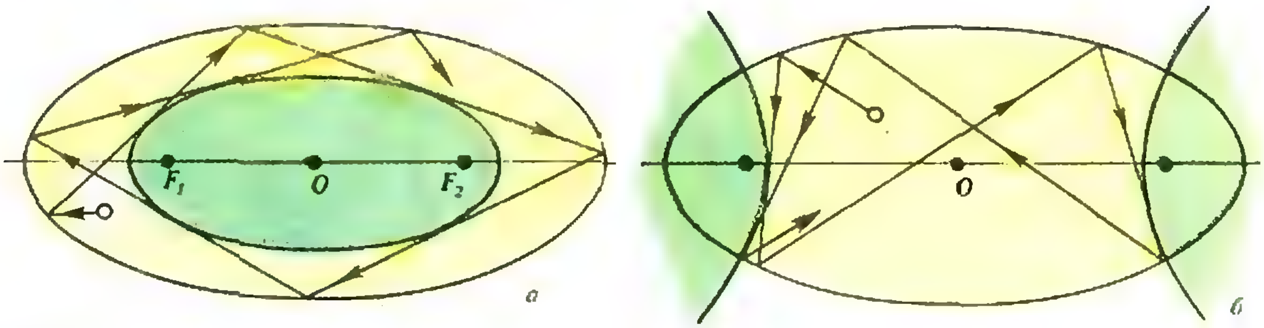


Рис. 9.

Задачи

1. В магазин поступила тонна фруктов: яблоки в ящиках по 48 кг, груши в ящиках по 20 кг, сливы в коробках по 14 кг и вишни в коробках по 10 кг. При этом яблок поступило в два раза больше, чем груш, а вишен столько же, сколько слив. Сколько фруктов каждого вида поступило в магазин?

2. Игра в шашки часто оканчивается вничью, а может ли быть ничья при игре в «поддавки»?

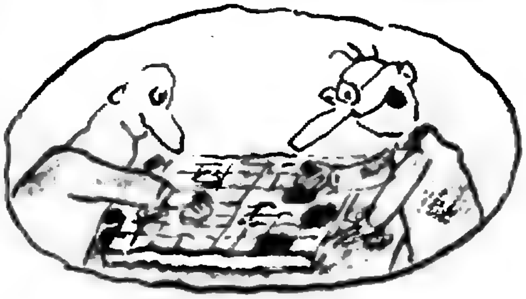
3. Расставьте в кружках числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого синего треугольника равнялась 12, а в вершинах красного треугольника и красного квадрата — по 11.

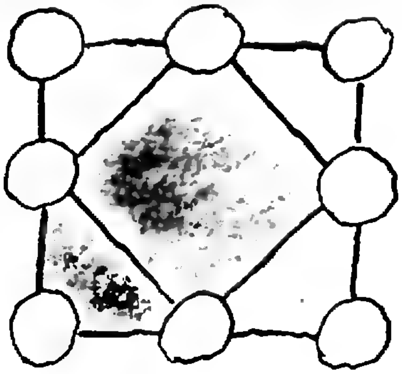
4. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.

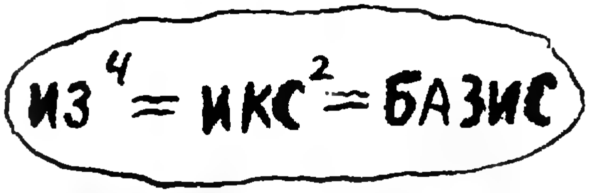
5. Имеются две батарейки — одна на 3 вольта, а вторая на 9 вольт. Какое напряжение покажет вольтметр, подключенный к плюсу первой батарейки и к минусу второй?

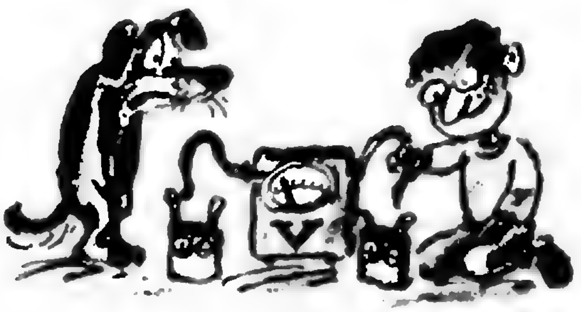
Эти задачи нам предложили: В. Вьюн, А. Домашенко, шестиклассник Володя Дутов, Н. Антонович и А. Савин.

Цены договорные!









КАК КИПИТ ВОДА?

(Эффект Лейденфроста)

Дж. УОКЕР

Тот факт, что капля воды, нанесенная на металл, температура которого гораздо выше температуры кипения воды, живет долго, был впервые описан еще в 1732 году, но достаточно широко не исследовался до 1756 года, пока Иоганн Готлиб Лейденфрост не опубликовал свой «Трактат о некоторых свойствах обычной воды». Из-за того, что работа Лейденфроста не переводилась с латыни до 1965 года, она оказалась мало известной. Тем не менее сейчас именно его имя связывается с явлением долговременности жизни капли на горячей пластине. Кроме того, температура, соответствующая пику полученного мной графика зависимости времени жизни капли от температуры поверхности (рис. 1), называется точкой Лейденфроста.

Лейденфрост делал опыты с железной ложкой, докрасна раскаленной в горне. Помещая в ложку каплю воды, он измерял время ее жизни с помощью качающегося маятника. Он отметил, что капля, казалось, всасывала свет и тепло ложки, оставляя на поверхности пятно более тусклое, чем остальная часть ложки. Первая капля продержалась в ложке 30 секунд, вторая капля — только 10, последующие — лишь несколько секунд.

Лейденфрост неправильно понял результаты своих опытов, потому что не осознал, что долгоживущие капли на самом деле кипели. Разрешите мне объяснить это.

При температуре пластины ниже точки Лейденфроста вода растекается по пластине и быстро отводит тепло от нее, что обеспечивает полное испарение капли за несколько секунд. Когда температура равна или выше точки Лейденфроста, нижняя часть капли, нанесенной на пластину, почти мгновенно испаряется, и давление образовавшегося пара не позволяет остальной части капли коснуться пластины. Слой пара постоянно пополняется за счет дополнительной воды, испаряющейся с нижней поверхности, благодаря теплу от пластины, которое излучается и проводится сквозь пар. Хотя толщина слоя менее 0,1 мм у наружной границы и около 0,2 мм в центре, он резко замедляет испарение капли (рис. 2). Таким образом пар поддерживает и защищает каплю в течение минуты или около того.

Чтобы показать течение пара из-под капли Лейденфроста, я посыпа́л пла-

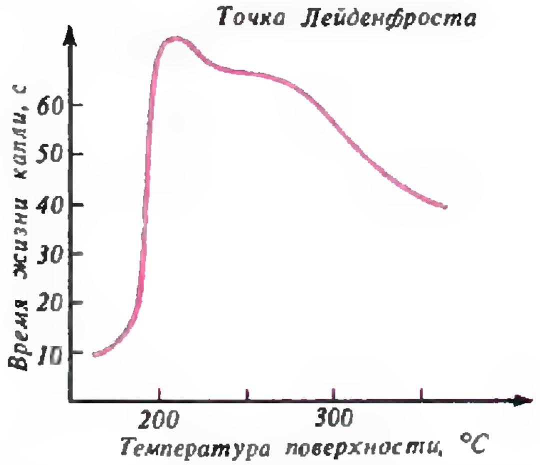


Рис. 1. Время жизни капли на горячей пластине.

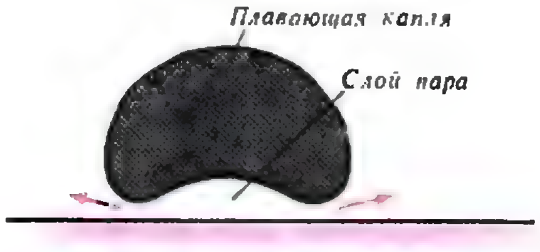


Рис. 2. Поперечное сечение капли Лейденфроста.

Продолжение. Начало статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

стину мелким порошком. Когда капля кружилась по пластине, пар, идущий из-под нее, сдувал с пути крупицы порошка. Я также создавал большие амебоподобные капли воды, вводя шприц в верх плавающей капли и добавляя в нее несколько струек воды. Такие капли были довольно громоздкими и часто разрушали слой пара под ними из-за своего большого веса. Каждое такое разрушение отмечалось громким шипением, так как часть капли внезапно испарялась.

Аналогичные опыты можно проводить не только с водой, но и с другими жидкостями. Для уксуса, например, точка Лейденфроста соответствует температуре около 250 °С, для спирта — около 150 °С.

Прочитав перевод исследования Лейденфроста, я вспомнил описание интересного трюка, который показывали на карнавалах в начале века. Рассказывают, что исполнитель мог окунать мокрые пальцы в расплавленный свинец. Решив, что там не было надувательства, я предположил, что этот трюк должен основываться на эффекте Лейденфроста. Как только мокрые пальцы исполнителя прикасались к горячему жидкому металлу, часть воды испарялась, покрывая кисть слоем пара. Если пальцы погружать быстро, они значительно не нагреются.

Я не мог воспротивиться искушению проверить свое объяснение. На лабораторной горелке я расплавил в тигле крупный кусок свинца. Затем я нагрел свинец до температуры более 400 °С, что гораздо выше его температуры плавления (328 °С). Намочив палец в водопроводной воде, я приготовился коснуться поверхности расплавленного свинца. Должен признаться, что мой помощник стоял рядом с аптечкой. Также должен признаться, что несколько первых попыток оказались неудачными, так как мой мозг протестовал против этого нелепого эксперимента, направляя палец мимо свинца.

Когда я наконец преодолел страх и быстро коснулся свинца, я был поражен. Как я и думал, часть воды на пальце испарилась, образуя защитный слой. Так как контакт был коротким, излучения и проводимости тепла было недостаточно для того, чтобы ощутимо поднять температуру кожи. Я расхрабрился. Намочив кисть, я погрузил все пальцы в свинец, коснувшись дна сосуда,— ожога не было. Очевидно, эффект Лейденфроста, или точнее — наличие пленочного кипения, защитило мои пальцы.

Я еще сомневался в моем объяснении. А возможно ли коснуться свинца сухим пальцем, не обжегшись? Отбросив все разумные мысли, я попытался это сделать и мгновенно понял свою глупость, когда боль пронзила палец. Я продолжил эксперимент с помощью маленькой сухой сосиски, погружая ее в расплавленный свинец на несколько секунд. Ее кожица быстро чернела — ей недоставало защиты пленочным кипением, как и моему сухому пальцу.

Вы не должны повторять этот опыт ни в коем случае!

Надо сказать, что погружение пальцев в расплавленный свинец представляет собой серьезную опасность. Если температура свинца лишь чуть выше точки плавления, потеря тепла при испарении воды может привести к затвердению свинца на пальцах. Если выдергивать получившуюся «перчатку» из горячего твердого свинца из сосуда, она будет контактировать с пальцами так долго, что они обязательно будут сильно обожжены. Кроме того, очень опасны мокрые пальцы. Когда избыточная вода испаряется, она может вызвать разбрызгивание расплавленного свинца на все окружающее и, что особенно серьезно, в глаза. От таких взрывных испарений у меня остались шрамы на руках и лице.

Похожий пример использования эффекта Лейденфроста описан в бестселлере Роберта Руанка «Нечто значительное». Чтобы определить, кто из двух людей говорит правду, вождь африканской деревни приказал каждому лизнуть горячий нож. Считается, что язык правдивого человека будет смочен слюной. Тогда часть слюны подвергнется пленочному кипению, и язык не будет обожжен. С другой стороны, у лжеца пересохнет во рту, и защиты пленочным кипением не будет.

Пленочное кипение можно также увидеть, когда проливается жидкий азот — большие и маленькие капли сворачиваются в шарики и катаются по полу. Температура жидкого азота около —200 °С. Когда капля пролитой жидкости приближается к полу, ее нижняя поверхность испаряется, образовавшийся слой пара поддерживает оставшуюся жидкость, позволяя ей прожить удивительно долгое время.

Мне рассказывали о трюке, при котором исполнитель лил в рот жидкий азот «не обжигаясь», несмотря на его крайне низкую температуру. Жидкость немедленно подвергалась пленочному кипению по нижней поверхности и не касалась непосредственно языка. По глупости я повторил этот опыт. Неоднократно все проходило гладко и эффектно. С большой каплей жидкого азота во рту я концентрировался на том, чтобы не проглотить ее, и при этом выдыхал. Влага в моем холодном дыхании конденсировалась, создавая ужасную струю, тянущуюся изо рта примерно на метр. Однако в последний раз жидкость термически повредила два моих передних зуба так сильно, что эмаль превратилась в «дорожную карту» из трещин. Мой дантист убедил меня прекратить этот опыт.

Эффект Лейденфроста может также играть роль в другом безрассудно храбром опыте — ходьбе по горячим углям. Иногда средства массовой информации с большой шумихой и различной мистической чушью сообщают об исполнителе, шагающем по горячим углям. Заявляется, что защита от сильного ожога дается властью духа над материей. На самом деле при успешной «прогулке» ступни защищает физика. Особенно важен тот факт, что, хотя поверхность углей очень горяча, ее теплопроводность очень мала. Если исполнитель идет умеренным шагом, прикосновение ступни такое кратковременное, что она проводит от углей очень мало энергии. Конечно, более медленная ходьба может вызвать ожог, так как более долгий контакт допустит передачу ступне тепла не от поверхности, а от внутренней части углей.

Если смочить ступни перед ходьбой, жидкость также сможет защитить их. Например, исполнитель мог пройти по сырой траве, перед тем как ступить на горячие уголья. Или его ноги могли быть просто потными из-за жара углей или возбуждения перед представлением. Когда исполнитель ступает на угли, тепло испаряет влагу на ступнях, и к коже передается меньше тепла. Кроме того, могут быть точки контакта, где жидкость подвергается пленочному кипению, что тоже дает защиту от горячих углей.

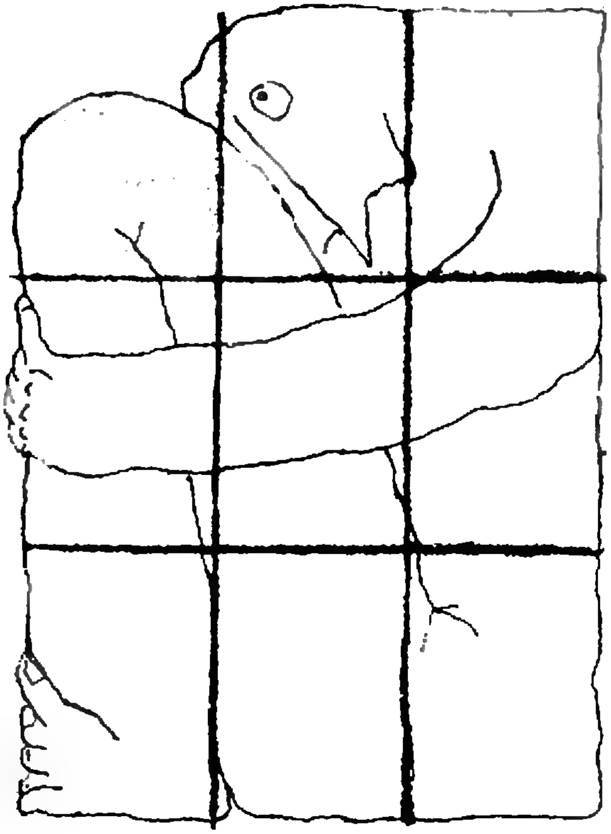
Я ходил по горячим углям пять раз. Четыре раза я достаточно боялся, и ноги были потными. Однако в пятый раз я счел мою безопасность само собой разумеющейся, и ноги были сухими. Ожоги, которые я получил, оказались сильными и очень болезненными. Ноги не заживали несколько недель.

Моя неудача могла быть вызвана отсутствием пленочного кипения на ступнях, но я пренебрег и дополнительным фактором безопасности. В предыдущие дни я из предосторожности прижимал к груди раннее издание этой книги*), чтобы укрепить мою веру в физику. Увы, в тот день, когда я так сильно обжегся, я забыл книгу.

Я долго доказывал, что последним из финальных экзаменов для получения ученой степени должна быть «ходьба по огню». Если кандидат на степень верит в физику так сильно, что он не обожжет ноги, председатель тут же вручает ему диплом. Это испытание будет гораздо более показательным, чем традиционные экзамены.

---

*) Имеется в виду книга: D. Halliday, R. Resnick „Fundamentals of Physics“, Third edition extended, 1988 (John Willey & Sons, N. Y.).



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Мы решили несколько расширить тематику этой рубрики, помещая в ней статьи о вещах широко известных, но изучаемых разве лишь в математических школах и классах. Тем самым мы надеемся хотя бы отчасти компенсировать недостаток научно-популярной и учебной литературы для школьников. Статьей «Деление с остатком и сравнения по модулю» мы открываем эту новую серию публикаций.

Деление с остатком и сравнения по модулю

Третьего сентября 1990 года мне понадобилось узнать, каким днем недели будет 20 декабря 1991 года. Календаря у меня под рукой не было, поэтому пришлось заняться подсчетами. Я знал, что 3 сентября — понедельник, а с 3-го сентября 1990 года по 20-е декабря 1991 года проходит $27+31+30+20+365=473$ дня, т. е. 67 полных недель и еще 4 дня ($473=67\cdot7+4$). Следовательно, 20-е декабря 1991 года — пятница.

Возводя в квадрат многозначное число, ученик получил ответ 46 991 075. Учитель, заглянув в его тетрадку, сразу сказал: «Ответ неверен!» Как он это понял?

Упражнение 1. Подумайте, может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрами 75.

Дальше мы увидим, что в основе решения и этой нехитрой задачи, и многих других лежат соображения делимости. Однако сначала нам нужно вспомнить, что такое деление с остатком.

Деление с остатком

Определение. *Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком значит записать a в виде $a=qb+r$, где q и r неотрицательные целые числа, причем $r<b$. Число q при этом называется частным, а r — остатком от деления a на b.*

На практике деление с остатком выполняют обычным способом, т. е. «делением углом». Например:

$$\begin{array}{r|l} -179 & 14 \\ \underline{14} & \overline{12} \\ -39 & \\ \underline{28} & \\ 11 & \end{array}$$

Здесь сразу видны остаток 11 и частное 12: $179=12\cdot14+11$.

Заметим, что в данном определении мы не требуем, чтобы a было больше, чем b. Можно, например, разделить 5 на 7: $5=0\cdot7+5$. Вообще, если $a<b$, то $a=0\cdot b+a$, т. е. в этом случае $q=0$, $r=a$.

Замечание. Можно определить деление с остатком любого целого числа a на любое целое число $b\neq0$ так: *разделить a на b с остатком значит представить a в виде $a=qb+r$, где q — целое, а* $0\leqslant r\leqslant|b|$. Например, при $a=-15$, $b=7$: $-15=(-3)\cdot7+6$; при $a=-224$, $b=-9$: $-224=15\cdot(-9)+1$ и т. п.

Если остаток равен нулю, т. е. $a=qb$, говорят, что a *делится на* b.

Очень важно следующее простое наблюдение. *Если a и b делятся на c, то при любых целых k и l число $ka+lb$ делится на c.*

Задача 1. Числа $7n+1$ и $8n+3$ делятся на некоторое натуральное число $d \neq 1$. Найдите d.

Решение. Поскольку $7(8n+3)-8(7n+1)=13$, число 13 делится на d, то $d=13$ (т. к. $d \neq 1$, и 13 — простое число).

Упражнения

2. Разделите с остатком
а) 1931 на 17; б) -295 на 31;
в) -1005 на -98.

3. Число $17x+3y$ делится на 61. Докажите, что $8x+5y$ тоже делится на 61 (x и y — целые).

4. Найдите остатки от деления чисел
а) n на $n-1$ и на $n-2$;
б) n^2+n+1 на $n+1$ и $n+2$;
в) n^4+1 на $n+3$ ($n \geqslant 80$).

5. Найдите все целые n, при которых будет целым число а) $\frac{n^2+1}{n-1}$; б) $\frac{n^3+3}{n^2+1}$.

Сравнения по модулю

Давайте сразу условимся, что все числа, о которых пойдет речь дальше, будут целыми, так что в последующем это не будет специально оговариваться. Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. *На какую цифру оканчивается число 2^{999}?*

Решение. Выпишем последовательные степени двойки:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ldots$$

Легко видеть, что последние цифры этих чисел повторяются через 4, так что последняя цифра числа 2^n зависит только от того, какой остаток при делении на 4 дает показатель n. Поскольку $999=996+3=4\cdot 249+3$, ответ в нашей задаче: 8.

В этом примере все множество показателей степени разбилось на 4 класса, состоящих из чисел n вида

$$4k,\ 4k+1,\ 4k+2,\ 4k+3.$$

Вообще, для любого натурального числа m все целые числа (не только положительные!) разбиваются на m классов. Каждый класс при этом состоит из чисел, дающих при делении на m одинаковые остатки.

Вот эти классы:

0) числа a вида $a=km$,
1) —»— a —»— $a=km+1$,
. . . .
$m-1$) —»— a —»— $a=km+m-1$.

Ясно, что любое число принадлежит одному из выписанных классов. При этом разность любых двух чисел из *одного* класса делится на m, а разность двух чисел из *разных* классов на m не делится.

Определение. *Если разность целых чисел a и b делится на натуральное число m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m.*

Записывается сравнимость чисел по модулю m так:

$$a \equiv b \pmod m.$$

Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу, т. е. дают одинаковые остатки при делении на m. Иначе говоря, $a \equiv b \pmod m$ *означает, что $a=b+km$, где k — целое число.* Например, $27 \equiv 7 \pmod{10}$, $78 \equiv 6 \pmod{24}$, $6 \equiv 0 \pmod 3$, $25 \equiv -4 \pmod{29}$.

Упражнения

6. Докажите, что
а) $a^3 \equiv a \pmod 6$, б) $a^4 \equiv a \pmod 5$.

7. Докажите, что число
$\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!}$ — целое.

8. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100}$ по модулям 5, 13, 211.

9. Докажите, что $11^{10}-1$ делится на 100.

10. Пусть $S(N)$ — сумма цифр числа N. Докажите, что $N \equiv S(N)$ по модулям 3 и 9.

11. Пусть $S(A)=S(5A)$. Докажите, что $A \equiv 0 \pmod 9$.

12. Некоторое число записывается в десятичной системе счисления с помощью 1991 единицы и некоторого количества нулей. Может ли оно быть полным квадратом?

13. Пользуясь тем, что $10 \equiv -1 \pmod{11}$, докажите признак делимости числа на 11: число $a=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0} \equiv 0 \pmod{11}$ тогда и только тогда, когда $(-1)^n a_n+(-1)^{n-1}a_{n-1}+\ldots+a_0$ делится на 11.

Свойства сравнений

Сравнения по своим свойствам напоминают обычные равенства:

1) если $a \equiv b \pmod m$ и $b \equiv c \pmod m$, то $a \equiv c \pmod m$.

Далее, если $a \equiv b \pmod m$ и $c \equiv d \pmod m$, то

2) $a+c \equiv b+d \pmod m$,
3) $a-c \equiv b-d \pmod m$,
4) $ac \equiv bd \pmod m$.

т. е. сравнения, как и обычные равенства, можно складывать, вычитать и перемножать.

Докажем, например, свойство 4. Так как $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a-b$ и $c-d$ делятся на m.

Из равенства $ac-bd=a(c-d)+$ $+d(a-b)$ получается, что число $ac-bd$ делится на m, т. е.

$$ac \equiv bd (\mathrm{mod}\ m).$$

Упражнение 14. Докажите остальные свойства сравнений.

Пусть $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$. Из уже установленных свойств сравнений следует

5) для любого натурального k

$$a^k \equiv b^k.$$

Кроме того, в некоторых случаях сравнения можно сокращать на общий множитель левой и правой частей:

6) если $ac \equiv bc (\mathrm{mod}\ m)$, а числа c и m взаимно просты, то

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ m);$$

7) если $a \equiv b (\mathrm{mod}\ m)$, k — целое число и $a=ka_1$, $b=kb_1$, $m=km_1$, то

$$a_1 \equiv b_1 (\mathrm{mod}\ m_1).$$

Иначе говоря, обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель. Докажем свойство 6. Число $c(a-b)$ делится на m. Так как c и m взаимно просты, то число $a-b$ делится на m. Поэтому

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ m).$$

Упражнение 15. Докажите свойство 7.

Из сказанного следует, что

в любом алгебраическом выражении, полученном из целых чисел a, b, c, ..., z с помощью сложений, умножений и вычитаний можно заменить эти числа их остатками от деления на m, не изменяя при этом остатка, который дает это выражение при делении на m.

Решим теперь следующую задачу.

Задача 3. *Найдите остаток от деления на 3 числа*

$$N=(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)...(1000^2+1).$$

Решение. Из сделанного выше замечания следует, что

$$N \equiv (1^2+1)^{333} \cdot (2^2+1)^{333} \cdot (3^2+1)^{333} \equiv$$
$$\equiv 2^{333} \cdot 2^{333} \cdot 1^{333} \equiv 2^{666} \equiv$$
$$\equiv (2^2)^{333} \equiv 1^{333} \equiv 1.$$

Задача 4. *При каких натуральных n число $8n+3$ делится на 13* (см. задачу 1)?

Решение. Запишем, пользуясь свойствами сравнений, следующую цепочку соотношений:

Пусть $8n+3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 13)$, тогда

$$8n \equiv -3 (\mathrm{mod}\ 13),$$
$$8 \times 8n \equiv -24 (\mathrm{mod}\ 13),$$
$$-n \equiv -24 \equiv -11 (\mathrm{mod}\ 13).$$

Откуда $n \equiv 11 (\mathrm{mod}\ 13)$.

Окончательно, $8n+3$ делится на 13, если и только если $n=13k+11$.

Упражнения

16. Найдите остатки от деления чисел

а) $2^{1991}+1$ на 17;

б) $(3^{20}+11)^{55}$ на 13.

17. Докажите, что число

а) $2^{50}+1$ делится на 125;

б) $2^{48}-1$ делится на 105.

в) $2^{3^n}+1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2}.

18. Найдите все простые числа p, для которых $20p^2+1$ — тоже простое число.

19. Докажите, что число

а) $1^{1991}+2^{1991}+...+30^{1991}$ делится на 31;

б) $1^m+2^m+...+(n-1)^m$ делится на n при любых нечетных m и n.

20. При каких натуральных n число $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323.

21. Докажите, что число $5^{2n+1}+3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

22. При каких n сократима дробь

$$\frac{15n+2}{14n+3}?$$

Китайская теорема об остатках

Рассмотрим m членов арифметической прогрессии

$$a,\ a+d,\ ...,\ a+(m-1) \cdot d, \qquad (*)$$

где a — целое число, а d — взаимно просто с m. Часто бывает очень полезной следующая

Теорема 1. *Среди чисел прогрессии (*) имеется ровно одно, делящееся на m.*

Доказательство. Разность k-го и l-го чисел (*), равная $d(k-l)$, не делится на m. Иначе оказалось бы, что $k-l$ делится на m, что невозможно, так как $|k-l|<m$.

Тем самым числа (*) попарно не сравнимы по модулю m и поэтому дают различные остатки при делении на m.

Следовательно, среди чисел (*) представлены все классы по модулю m, т. е. для каждого из остатков 0, 1, 2, ..., $m-1$ ровно одно из чисел (*) сравнимо с ним по модулю m.

Мы доказали даже несколько более сильное утверждение, чем теорема 1.

Упражнения

23. Найдите все тройки простых чисел вида

$$p,\ p+2,\ p+4.$$

24. Найдите конечную арифметическую прогрессию с разностью 6 максимальной длины и состоящую из простых чисел.

25. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью d.
Докажите, что $d>30\,000$.

Теперь применим теорему 1 для доказательства так называемой *китайской теоремы об остатках*. Эта теорема была известна уже более 2000 лет тому назад в древнем Китае.

Теорема 2. *Пусть даны n попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и n чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ таких, что $0 \leqslant r_i \leqslant m_i-1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Тогда существует число N, дающее при делении на m_i остаток r_i.*
Иначе говоря $N \equiv r_i \pmod{m_i}$ при всех $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема справедлива при $n=k$. Тогда существует число M такое, что

$M \equiv r_i \pmod{m_i}$ при $i=1, 2, \ldots, k$.

Пусть $d=m_1m_2\ldots m_{k-1}$.

Рассмотрим числа

$$M,\ M+d,\ M+2d,\ \ldots,\ M+(m_k-1)d.$$

Поскольку d взаимно просто с m_k, из доказательства теоремы 1 следует, что среди выписанных чисел найдется число N, дающее при делении на m_k остаток r_k. В то же время при делении на $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ число N дает остатки $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ соответственно.

Теорема доказана.

И, наконец, еще одна теорема.

Теорема 3. *Для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \ldots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}$, ..., $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.*

Иначе говоря, для любых попарно взаимно простых модулей $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n подряд идущих натуральных чисел, дающих соответственно любые наперед заданные остатки при делении на эти числа.

Доказательство. По китайской теореме об остатках существует такое a, что

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{m_1},\\ a &\equiv r_2-1 \pmod{m_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a &\equiv r_n-n+1 \pmod{m_n}. \end{aligned}$$

Но тогда числа $a, a+1, \ldots, a+n-1$ удовлетворяют условию теоремы.

Упражнения

25. Докажите, что а) среди любых десяти; б) любых шестнадцати последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

в) верно ли утверждение задачи для любых 17 последовательных натуральных чисел.

26. Докажите, что для любого n существуют n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат некоторого числа.

27. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120°?

28. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 соответственно остатки 1, 2, 4, 6.

29. Найдите наименьшее четное число a, такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ делится на 5, $a+3$ делится на 7, $a+4$ делится на 11, $a+5$ делится на 13.

Как решают сравнения

Если вы помните, решая задачу 4, мы нашли все целые n, для которых $8n+3$ делится на 13.
Другими словами, мы решили сравнение

$$8n+3 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Теперь мы можем решить эту задачу в общем виде. Итак, пусть даны взаимно простые целые числа a и m.

Решим сравнение

$$ax \equiv b \pmod{m}, \text{ где } b \text{ — любое число.}$$

По теореме 1 существует такое k, что $ak \equiv 1 \pmod{m}$.

Умножив левую и правую части данного сравнения на k, получим

(Окончание см. на с. 49)

Калейдоскоп „Кванта"

> *Я принимаю,*
> *что во Вселенной...*
> *есть известное*
> *количество*
> *движения, которое*
> *никогда не*
> *увеличивается, не*
> *уменьшается, и,*
> *таким образом,*
> *если одно тело*
> *приводит в движение*
> *другое, то теряет*
> *столько своего*
> *движения,*
> *сколько его сообщает.*
>
> *Р. Декарт*

А так ли хорошо знакомо вам

количество движения ?

Декарт, судя по его высказываниям, понимал фундаментальное значение введенного им в XVII веке понятия количества движения — или импульса тела — как произведения массы тела на величину его скорости. И хотя он совершил ошибку, не рассматривая количество движения как векторную величину, сформулированный им закон сохранения количества движения выдержал с честью проверку временем. В начале XVIII века ошибка была исправлена, и триумфальное шествие этого закона в науке и технике продолжается по сию пору.

Как один из основополагающих законов физики, он дал неоценимое орудие исследования ученым, ставя запрет одним процессам и открывая дорогу другим. Взрыв, реактивное движение, атомные и ядерные превращения — везде превосходно работает этот закон. А в скольких самых обиходных ситуациях помогает разобраться понятие импульса, сегодня, мы надеемся, вы убедитесь сами.

Вопросы и задачи

1. Тело массой m брошено с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Чему равно приращение модуля импульса тела и модуль приращения импульса за время полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. По изогнутой под прямым углом трубе течет вода. Действует ли вода на трубу? В каком направлении?

3. Мяч, летящий со скоростью v, ударяется в едущий ему навстречу со скоростью u автомобиль. Какой станет скорость мяча после упругого удара?

4. Можно ли разогнать парусную лодку, направляя на паруса поток воздуха из мощного вентилятора, находящегося в лодке? Что случится, если дуть мимо паруса?

5. «Горка» A с закрепленными на ней телами B и C покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Сначала с «горки» соскальзывает тело B, после чего соскальзывает тело C. В каком направлении в конце концов поедет «горка»? Массы тел A, B и C одинаковы. Трением при движении всех трех тел пренебречь.

6. Мальчик может бросить камень с груженой баржи или с легкой надувной резиновой лодки. В каком случае камень полетит дальше?

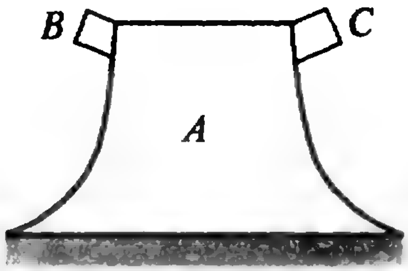
7. Ракета, запущенная вертикально вверх, взрывается в высшей точке своего подъема. При взрыве образуются три осколка. Докажите, что начальные скорости всех трех осколков лежат в одной плоскости.

8. Когда покоящийся шар приобретает бо́льшую скорость от удара другого такого же шара: при упругом или неупругом центральном ударе?

9. В неподвижный шар ударяется не по линии центров другой такой же шар. Под каким углом разлетятся шары, если они абсолютно упругие и абсолютно гладкие?

10. В каком направлении станет перемещаться аэростат, если по свисающей с него лестнице начнет подниматься человек с постоянной скоростью относительно лестницы?

11. Однородный стержень нижним концом касается гладкой горизонтальной поверхности. Верхний конец стержня подвешен



на нити так, что стержень образует с поверхностью некоторый угол. Нить пережигают. В какую сторону сместится нижний конец стержня, когда он упадет?

12. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч, на котором сидит жук. Какие траектории будут описывать жук и центр обруча, если жук поползет по обручу?

13. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газа относительно ракеты меньше скорости самой ракеты, т. е. если вытекающий из сопла ракеты газ летит вслед за ракетой?

14. Можно ли, сидя на стуле и не касаясь пола ногами, проехать через комнату?

Микроопыт
Надуйте резиновый шарик и выпустите его из рук, не завязывая отверстие. Что произойдет при этом? Почему?

Любопытно, что...

...Декарт обосновывал принцип сохранения количества движения совершенством бога, «действующего с величайшим постоянством и неизменностью».

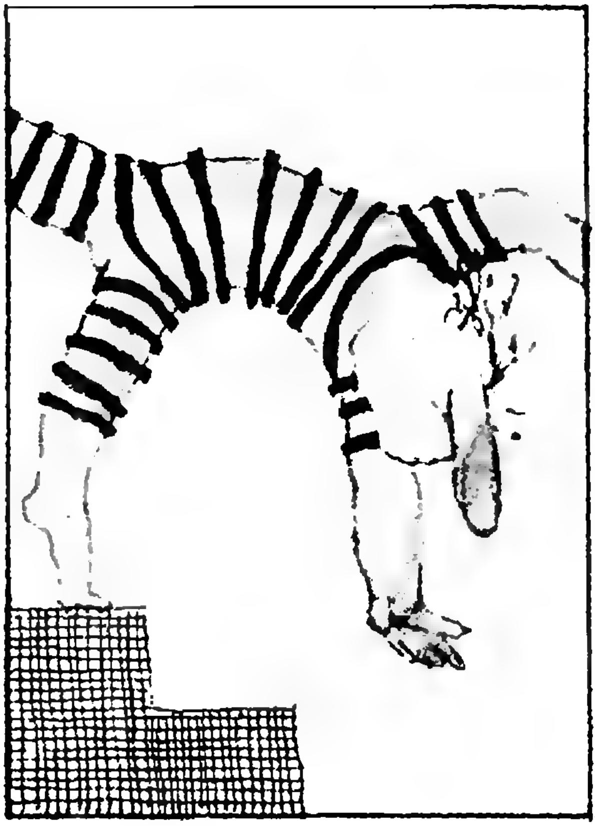
...до изобретения парохода существовал проект судна, основанный на реактивном принципе: запас воды на судне предполагалось выбрасывать с помощью сильного нагнетательного насоса в кормовой части, вследствие чего судно должно было двигаться вперед. Проект этот не был осуществлен, однако он сыграл известную роль в изобретении парохода.

...при неизменной скорости истечения газов из сопла выигрыш в скорости при той же массе горючего получается при использовании многоступенчатых ракет, когда отбрасываются баки, трубопроводы и двигатели отработавших ступеней. Однако до сих пор не существует выгодной конструкции, где бы ненужная масса ракеты отбрасывалась непрерывно.

...закон сохранения импульса позволяет «разыскать» и невидимые объекты, например, электромагнитные волны, излучаемые открытым колебательным контуром, или антинейтрино — субатомные частицы, не оставляющие следов в детекторах.

Что читать в «Кванте» о количестве движения
(публикации последних лет)

1. «О судьбе некоторых понятий механики» — 1986, № 5, с. 20;
2. «Волк, барон и Ньютон» — 1986, № 9, с. 16;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 5, с. 32;
4. «Что такое центр масс» — 1988, № 3, с. 39;
5. «Соударение тел» — 1988, № 9, с. 30;
6. «Законы сохранения энергии и импульса» — 1989, № 4, с. 60;
7. «Системы отсчета в задачах механики» — 1990, № 2, с. 62.



Лаборатория „Кванта"

Слинки — шагающая пружинка

Д. ЧОКИН

В этой статье будет рассказано об одной удивительной игрушке, которую в Америке называют слинки (slinky). Это пружинка с очень малым коэффициентом упругости, диаметр ее витков — от 5 до 10 см, количество витков — от 50 до 100. При всей внешней простоте такую пружинку трудно сделать самому. Нужна особая сталь, прошедшая специальную термообработку, только тогда можно добиться малой упругости пружинки. А именно это свойство и позволяет проводить с ней интересные опыты, которые невозможны с обычной пружинкой.

Самое любопытное заключается в том, что слинки может спускаться по ступенькам лестницы (или по наклонной плоскости). Достаточно, установив слинки в вертикальном положении на краю ступеньки, подтолкнуть ее верхний конец в направлении нижней ступеньки, и слинки зашагает. Пружинка будет как бы перетекать с верхней ступеньки на нижнюю. Когда вся пружинка перетечет, верхний конец, описав в воздухе дугу, шагнет на следующую ступеньку, и движение продолжится (рис. 1).

Попробуем объяснить этот опыт. Очевидно, главная причина в том, что, вследствие своей малой жесткости, пружинка не успевает погасить горизонтальную составляющую скорости своего верхнего конца, и это позволяет ей перешагнуть (перевалиться) на следующую ступеньку. Такую «шагающую» пружинку можно уподобить автоколебательной системе, черпающей кинетическую энергию из потенциальной. Оценим некоторые динамические параметры слинки: время одного шага, отношение массы пружинки, участвующей в движении, к ее полной массе и др. С этой целью решим следующую задачу.

Свободно подвесим слинки за верхний конец (рис. 2) и найдем зависи-

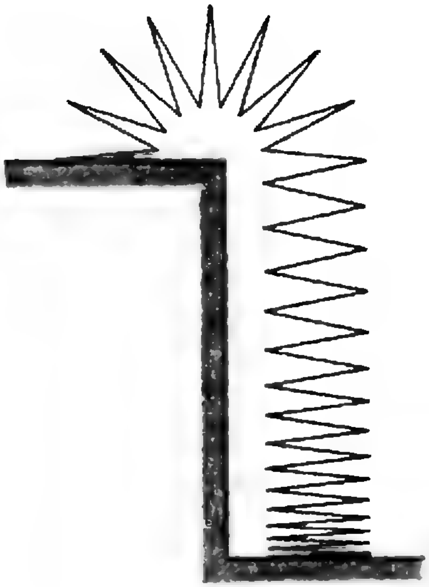


Рис. 1.

Диар Чокин написал эту статью еще будучи школьником (РФМШ, Алма-Ата). Сейчас он студент физического факультета МГУ.

мость линейной плотности пружинки, что пропорционально числу витков на единицу длины, от расстояния до нижнего конца. Рассмотрим некоторый участок пружинки. Пусть он приходится на n-й виток, считая от нижнего конца пружинки. Если длина этого витка равна Δx_n, то

$$\Delta k \Delta x_n = \Delta m n g,$$

где Δk — жесткость одного витка, а Δm — его масса. Тогда получаем, что средняя линейная плотность n-го витка равна

$$\lambda_n = \frac{\Delta m}{\Delta x_n} = \frac{\Delta k}{ng},$$

или, считая, что в пружинке N витков и ее общая жесткость k, —

$$\lambda_n = \frac{Nk}{ng}.$$

Теперь найдем расстояние от этого витка до нижнего конца пружинки. Поскольку $\Delta x_n = \Delta m n g/\Delta k$, искомое расстояние равно

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m g}{\Delta k} i = \frac{\Delta m g}{\Delta k} \frac{n(n+1)}{2} \approx$$

$$\approx \frac{\Delta m g n^2}{2\Delta k} = \frac{Mg}{2k} \frac{n^2}{N^2},$$

где M — масса всей пружинки. (Интересно, что полная длина подвешенной пружины $L_0 = Mg/(2k)$ оказывается в два раза меньше длины, которую имела бы такая же невесомая пружина с подвешенным на конце грузом массой M.)

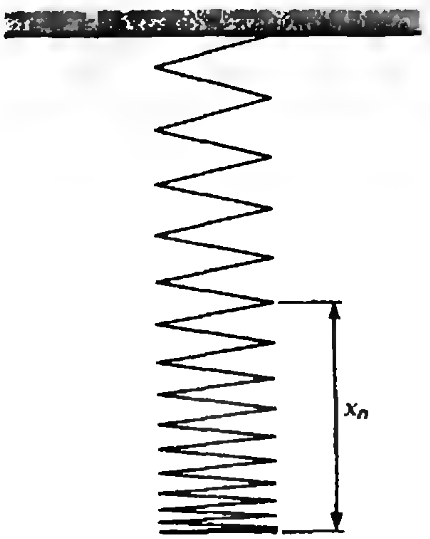


Рис. 2.

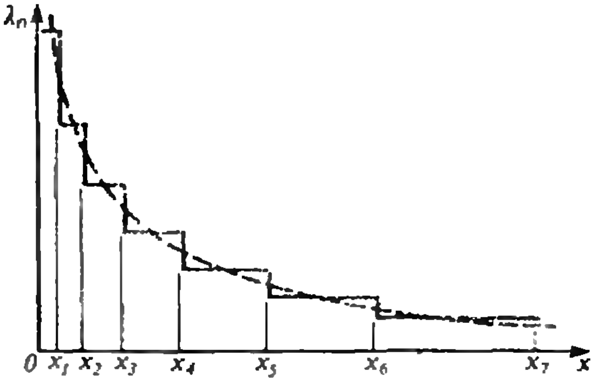


Рис. 3.

Сравнив полученные выражения для линейной плотности λ_n и расстояния x_n, найдем зависимость между ними:

$$\lambda_n = \frac{k}{g} \frac{N}{n} = \sqrt{\frac{Mk}{2gx_n}}.$$

Для удобства (нам это понадобится в дальнейшем) перейдем от дискретной записи распределения линейной плотности к непрерывной, взяв предельный случай бесконечного количества витков (см. рис. 3):

$$\lambda(x) = \sqrt{\frac{Mk}{2gx}}.$$

Теперь настало время оценить массу пружинки, участвующую в движении. Будем считать, что искомая часть эквивалентна свободно подвешенной пружинке, длина которой h (h — высота ступеньки). Тогда, используя последнюю формулу, оценим неизвестную массу:

$$m_0 = \int_0^h \lambda(x)dx = \int_0^h \sqrt{\frac{Mk}{2gx}}\,dx = \sqrt{\frac{2Mkh}{g}}$$

и отношение этой массы к полной:

$$\frac{m_0}{M} = \sqrt{\frac{2kh}{Mg}} = \sqrt{\frac{h}{L_0}},$$

Чем меньшая часть массы пружинки будет участвовать в движении, тем устойчивее она будет ходить. Поэтому для улучшения ходьбы пружинки следует, как видно из полученного отношения, уменьшить коэффициент упругости, увеличить массу пружинки, пускать пружинку с не очень высоких ступенек. И вообще, лучше делать это, скажем, на Юпитере — с целью увеличения ускорения свободного падения g. Для реальной пружинки, взяв $h=10$ см и $L_0=1$ м, получим $m_0/M\approx$ $\approx 0{,}3$.

Чтобы определить время одного шага слинки, воспользуемся вторым законом Ньютона. Пусть начальная скорость верхнего витка v. Тогда

$$v\Delta m=F\Delta t,$$

где F — сила натяжения пружинки в верхней точке, Δm — масса пружинки, которая пришла в движение за время Δt. Если λ_0 — линейная плотность пружинки в месте начала движения, то $\Delta m=\lambda_0 v\Delta t$, и

$$\lambda_0 v^2=F.$$

Очевидно, что

$$\lambda_0=\sqrt{\frac{Mk}{2gh}}, \text{ а } F=m_0 g=\sqrt{2Mgkh}\,.$$

Поэтому для скорости «разматывания» получаем

$$v=\sqrt{\frac{F}{\lambda_0}}=\sqrt{2gh}.$$

Пусть за время Δt «размоталась» часть пружинки массой $\Delta m=\lambda_0 v\Delta t$. Подставив значения λ_0 и v, имеем

$$\Delta t=\frac{\Delta m}{\sqrt{Mk}}\,.$$

Откуда получаем время одного шага слинки:

$$T=\Sigma\Delta t_i=\frac{1}{\sqrt{Mk}}\,\Sigma\Delta m_i=\sqrt{\frac{M}{k}}=\sqrt{\frac{2L_0}{g}}\,.$$

Интересно, что время одного шага не зависит от высоты ступеньки и что это время одного порядка с периодом свободных колебаний пружинки и со временем падения тела с высоты L_0. Взяв значение L_0 равным, например, 1 м, получим $T\sim 0{,}5$ с, что хорошо подтверждается экспериментом.

Другой, не менее важный опыт с пружинкой — моделирование продольных механических волн. Для проведения этого опыта необходимо растянуть пружинку и один из ее витков сжать вдоль оси, тем самым сделав его началом распространения волны. По пружинке побежит волна сжатия и растяжения, отражаясь от ее концов. Интересный и полезный опыт. Его можно показывать в школе для наглядного представления продольных волн и исследования их свойств. Например, известно, что уменьшение плотности среды ведет к увеличению скорости продольных волн. В этом легко убедиться в опытах со слинки — достаточно немного ее растянуть, чтобы скорость волн заметно увеличилась.

Наверное, много еще интересных опытов можно провести с пружинкой, обладающей очень малой жесткостью, т. е. со слинки.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига» принимает заказы на отправку наложенным платежом книг издательства «Наука», готовящихся к печати в I полугодии 1991 г.:

Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л. *Математика для техникумов на базе среднего образования.*— 75 к.

Гильдерман Ю. И. *Закон и случай.* (Наука и технический прогресс).— 70 к.

Гнеденко Б. В. *Введение в специальность математика.*— 1 р.

Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей.* (Библиотечка «Квант»).— 70 к.

Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии.*— 1 р. 10 к.

Лекции по теории графов.— 1 р. 20 к.

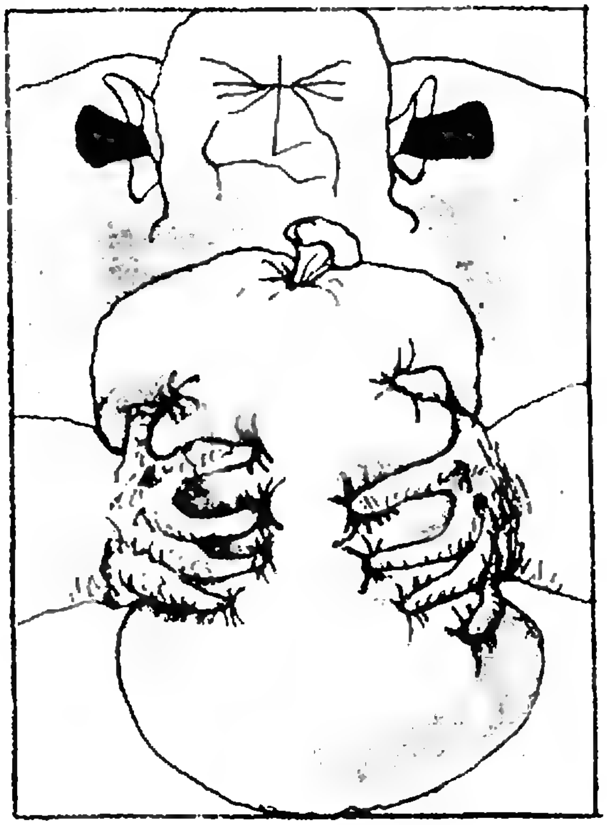
Никифоровский В. А. *Вероятностный мир.* (История науки и техники).— 70 к.

Носов Ю. Р. *Дебют оптоэлектроники.* (Библиотечка «Квант»).— 60 к.

Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* (Библиотечка математического кружка). Ч. 1.— 1 р. 20 к. Ч. 2.— 80 к.

Терин В. П. *Этот телевизионный мир.* (Общество и личность).— 70 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393, г. Москва, ул. Академика Пилюгина, дом 14, корп. 2. Магазин № 3 «Книга-почтой» «Академкнига».



Практикум абитуриента

Работа и изменение энергии идеального газа

А. ШЕРОНОВ

В этой статье мы остановимся на некоторых особенностях тепловых процессов, в которых главным действующим лицом является идеальный газ.

Как известно, газ может совершать работу за счет внешнего источника теплоты или за счет своей внутренней энергии. Но при любом процессе выполняется основное соотношение термодинамики — закон сохранения энергии, или первый закон термодинамики. Запишем его в виде

$$Q=\Delta U+A$$

— подведенное к газу количество теплоты Q идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы A против внешних сил.

Внутренняя энергия U идеального газа зависит только от температуры T и является функцией его состояния. Так, для одного моля одноатомного газа $U=3/2RT$, где R — универсальная газовая постоянная. Поэтому любое (как бесконечно малое, так и конечное) изменение внутренней энергии определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний:

$$\Delta U=\frac{3}{2}R\Delta T$$

и не зависит от способа перехода от одного состояния к другому. Это остается справедливым и в том случае, если газ переводится из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние в результате неравновесного, необратимого процесса.

Элементарная, как ее иногда называют, работа ΔA по определению равна произведению давления p на малое изменение объема газа ΔV в двух соседних равновесных состояниях:

$$\Delta A=p\Delta V.$$

При конечном изменении объема от V_1 до V_2 в некотором обратимом процессе работа A численно равна площади под кривой зависимости давления газа от объема $p=p(V)$, ограниченной изохорами V_1 и V_2. Математически эта площадь равна

$$A=\int_{V_1}^{V_2}p(V)dV.$$

Для замкнутого цикла работа газа определяется площадью внутри кривых $p(V)$, образующих этот цикл. Работа газа при конечном изменении объема, как и работа газа в замкнутом цикле, зависит от вида функции $p(V)$.

Подведенное к газу в обратимом процессе количество теплоты Q можно выразить через теплоемкость газа C и малое изменение температуры ΔT известным соотношением

$$Q=C\Delta T.$$

Тогда первый закон термодинамики можно записать в виде

$$C\Delta T=\Delta U+p\Delta V.$$

Для того чтобы найти теплоемкость, нужно связать элементарную работу $p\Delta V$ с малой разностью температур ΔT двух соседних состояний рассматриваемого процесса. Это можно сделать с помощью уравнения состояния газа и уравнения процесса. Заметим, что теплоемкость одного и того же газа существенно зависит от вида процесса и может даже изменяться во время процесса.

Напомним основные характеристики часто встречающихся в задачах частных процессов.

В изохорическом процессе работа газом (или над газом) не производится. Нагревание или охлаждение газа приводит к соответствующему изменению его внутренней энергии:

$$\Delta U=Q=C_V\Delta T,$$

где C_V — это теплоемкость газа при постоянном объеме. В частности, для моля одноатомного газа $C_V=3/2R$.

В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется. При расширении одного моля газа от объема V_1 до объема V_2 при неизмененной температуре T_0 им совершается работа, которую можно найти по формуле

$$A=\int_{V_1}^{V_2} p(V)dV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT_0}{V}dV=$$
$$=RT_0\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Из формулы для A видно, что работа газа на любом участке изотермы одинакова, если отношение конечного и начального объемов сохраняется постоянным. По закону сохранения энергии, подведенное к газу тепло равно совершенной газом работе. Поскольку температура газа не меняется, теплоемкость в изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится. Теплоемкость газа в этом процессе по определению равна нулю. Работа совершается газом за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A=-\Delta U.$$

Для моля одноатомного газа

$$A=-\frac{3}{2}R(T_2-T_1),$$

где T_2 и T_1 — температуры газа в конечном и начальном состояниях.

В изобарическом процессе с давлением p_0 работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A=p_0(V_2-V_1).$$

Подведенное к газу количество теплоты идет на совершение работы A и увеличение внутренней энергии ΔU. Для моля одноатомного газа

$$A=R(T_2-T_1)\text{ и }\Delta U=\frac{3}{2}R(T_2-T_1).$$

Поэтому молярная теплоемкость газа в изобарическом процессе, ее обозначают C_p, оказывается равной $5/2R$. Нетрудно видеть, что C_V и C_p связаны соотношением

$$C_p=C_V+R.$$

Напомним, наконец, определение КПД замкнутого цикла, в котором внутренняя энергия газа не изменяется. По закону сохранения энергии, работа газа $A_ц$ в цикле равна разности количества теплоты Q_1, подведенного к газу, и количества теплоты Q_2, отведенного от газа. КПД цикла называется отношение

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{A_ц}{Q_1}.$$

Иногда в задачах могут быть внешне простые участки зависимости $p=p(V)$, составляющие цикл, в ходе которых тепло как подводится, так и отводится. Если для такого участка найти итоговое подведенное или отведенное количество теплоты, то при определении КПД возникнет ошибка.

Особое место среди замкнутых обратимых циклов занимает известный цикл Карно. Он состоит из двух изотерм с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2, на которых подводится и отводится тепло, и двух адиабат. Только для цикла Карно

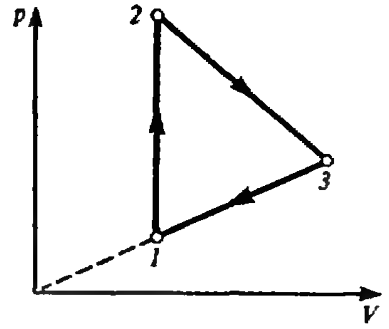


Рис. 1.

КПД может быть записан в виде

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}.$$

Теперь перейдем к разбору некоторых конкретных характерных задач.

Задача 1. *Найдите работу, совершенную молем идеального газа в цикле, состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис. 1). Точки 2 и 3 лежат на изотерме, прямая 1—3 проходит через начало координат. Заданы температуры T_1 и $T_2=T_3$.*

Работа на изохоре *1—2* равна нулю. Работа на участке *2—3* равна площади трапеции. Обозначив $V_3/V_2=\beta$ и учтя, что $p_2V_2=p_3V_3=RT_2$, имеем

$$A_{23}=\frac{p_2+p_3}{2}(V_3-V_2)=$$

$$=\frac{p_2V_3-p_3V_2}{2}=RT_2\frac{\beta^2-1}{2\beta}.$$

Работа на участке *3—1* тоже равна площади трапеции. Поскольку прямая *1—3* проходит через начало координат и, следовательно, $p_1/V_1=p_3/V_3$, получаем

$$A_{31}=\frac{p_1+p_3}{2}(V_3-V_1)=$$

$$=\frac{p_3V_3-p_1V_1}{2}=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Из условия $p_1/V_1=p_3/V_3$ следует $T_1/V_1^2=T_1/V_2^2=T_2/V_3^2$. Поэтому работу A_{23} можно окончательно записать в виде

$$A_{23}=RT_2\frac{T_2/T_1-1}{2\sqrt{T_2/T_1}}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}(T_2-T_1).$$

Искомая работа в цикле равна

$$A_ц=A_{23}-A_{31}=\frac{R}{2}(T_2-T_1)\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}-1\right).$$

Заметим, что для участка прямой *2—3*, соединяющего точки изотермы, так же как и для самой изотермы, работа газа определяется лишь отношением объемов. Работа же газа вдоль участка произвольной прямой, проходящей через начало координат на диаграмме pV, определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний.

Задача 2. *Найдите молярную теплоемкость газа в процессе с линейной зависимостью давления от объема.*

Запишем закон сохранения энергии в виде

$$C\Delta T=C_V\Delta T+p\Delta V.$$

По условию $p=\alpha V+\beta$, где α и β — константы. С учетом уравнения состояния газа находим

$$RT=\alpha V^2+\beta V.$$

Отсюда найдем связь между малым изменением температуры ΔT и элементарной работой $p\Delta V$:

$$R\Delta T=(2\alpha V+\beta)\Delta V.$$

Тогда окончательно для искомой теплоемкости получаем

$$C=C_V+\frac{p\Delta V}{\Delta T}=C_V+R\frac{\alpha V+\beta}{2\alpha V+\beta}.$$

Видно, что теплоемкость переменная и при отрицательном угловом коэффициенте прямой α может менять свой знак. Это означает, что с такими участками следует обращаться аккуратно (например, в задачах, где требуется найти КПД). Читателю рекомендуется самостоятельно проследить за изменением теплоемкости в зависимости от местоположения участка на плоскости pV. Мы же ограничимся замечанием, что для произвольной прямой, проходящей через начало координат ($\beta=0$), теплоемкость постоянна и равна $C_V+R/2$

Задача 3. *Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, переходит в состояние 2, совершая некоторую работу A_{12}. Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая в исходное состояние.*

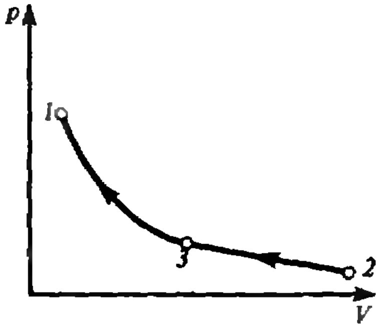


Рис. 2.

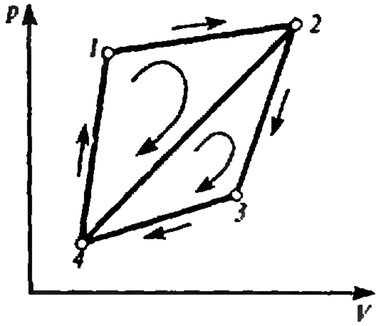


Рис. 3.

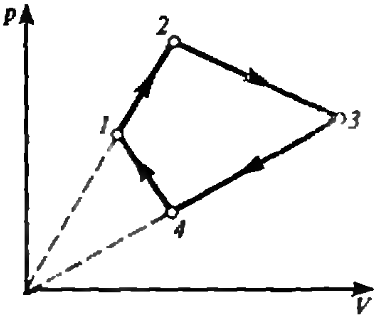


Рис. 4.

Сначала сжатие происходит в процессе 2—3 с линейной зависимостью давления от объема, а затем — в адиабатическом процессе 3—1 (рис. 2). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессе сжатия 2—3—1 над газом совершена работа $A=1090$ Дж. Известно, что $T_2=T_3$, $V_2=2V_3$.

Процесс расширения газа через турбину в пустой сосуд неравновесный, так что всей массе газа в любой момент нельзя приписать некоторое одинаковое давление и одинаковую температуру. Однако если начальное и конечное состояния равновесны, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что газ совершает работу за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A_{12}=-(U_2-U_1)=\frac{3}{2}R(T_1-T_2).$$

По условию, работа по сжатию газа равна

$$A=A_{13}+A_{32}=\frac{3}{2}R(T_1-T_3)+$$

$$+RT_2\frac{(V_2/V_3)^2-1}{2V_2/V_3}=\frac{3}{2}R(T_1-T_2)+\frac{3}{4}RT_2.$$

Здесь нами использованы равенства $T_2=T_3$ и $V_2/V_3=2$ и выражение для работы на участке *2—3* из задачи 1. Из полученного выражения находим температуру T_2, а затем и работу A_{12}:

$$A_{12}=2A-\frac{3}{2}RT_1\approx 935\ \text{Дж}.$$

Задача 4. ***КПД цикла 1—2—4—1, состоящего из трех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 3), равен η_1. КПД аналогичного цикла 2—3—4—2 равен η_2. Найдите КПД цикла 1—2—3—4—1. Все участки линейной зависимости имеют положительные угловые коэффициенты.***

На всех участках температура является монотонной функцией объема, т. е. либо растет, либо убывает. С другой стороны, можно показать (см. задачу 2), что на каждом участке теплоемкость хотя и изменяется по величине, но не меняет своего знака. Это означает, что на каждом участке тепло либо подводится, либо отводится. Для соответствующих циклов имеем

$$\eta_1=1-\frac{Q_{24}}{Q_{12}+Q_{41}},$$

$$Q_{12}+Q_{41}=Q_{24}\frac{1}{1-\eta_1},$$

$$\eta_2=1-\frac{Q_{23}+Q_{34}}{Q_{42}},$$

$$Q_{23}+Q_{34}=Q_{42}(1-\eta_2).$$

Искомый КПД

$$\eta=1-\frac{Q_{23}+Q_{34}}{Q_{41}+Q_{12}}=\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2.$$

Упражнения

1. Найдите работу моля идеального газа в цикле, состоящем из четырех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 4). Вершины цикла лежат на двух изотермах с заданными температурами T_1 и T_2. Прямые *1—2* и *3—4* проходят через начало координат, $V_2=V_4$.

2. Моль одноатомного идеального газа из начального состояния *1* с температурой $T_1=100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние *2*. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе *2—3* линейной зависимости

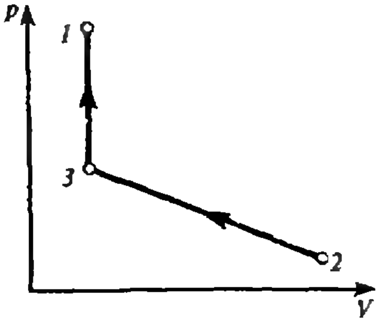


Рис. 5.

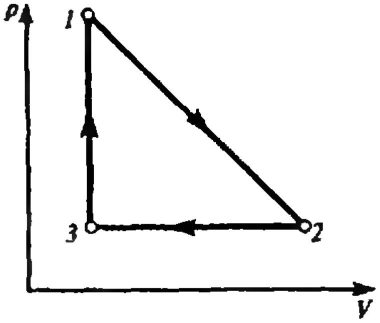


Рис. 6.

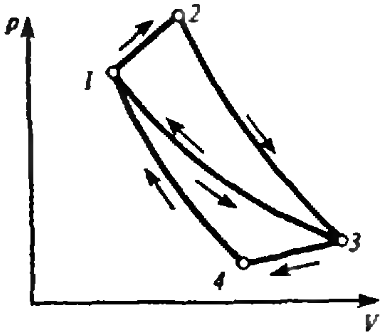


Рис. 7.

давления от объема и, наконец, по изохоре 3—1 возвращают в исходное состояние (рис. 5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессах 2—3—1 к газу в итоге подведено количество теплоты $Q=72$ Дж. Известно, что $T_2=T_3$ и $V_2=3V_1$.

3. Моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса линейной зависимости давления от объема, изобары и изохоры (рис. 6). Найдите количество теплоты, отведенное от газа на участках, где его температура уменьшается. Известно, что $T_1=T_2$ и $p_1=4p_3$. Направление обхода указано стрелками. Температуру T_1 считать известной.

4. КПД цикла 1—2—3—1 равен η_1, цикла 1—3—4—1 — η_2. Найдите КПД цикла 1—2—3—4—1, если участки 2—3 и 4—1 — адиабаты, 1—3 — изотерма, 1—2 и 3—4 — прямые с положительными угловыми коэффициентами (рис. 7).

Деление с остатком и сравнения по модулю

(Начало см. на с. 36)

$$(ak)n \equiv n \equiv bk (\mathrm{mod}\ m),$$

откуда сразу получаем

$$n = bk + ml,$$

где l — произвольное целое число.

Возникает вопрос, как в конкретной ситуации найти k?

Для не слишком больших m эта задача решается достаточно просто (простым подбором). Об общем решении этой и многих других задач мы поговорим в следующей статье.

Задача 5. *Решите сравнение*

$$32n \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 37).$$

Решение. Поскольку $32 \equiv -5 (\mathrm{mod}\ 37)$, приходим к сравнениям

$$5n \equiv -7 \equiv 30 (\mathrm{mod}\ 37)$$

или

$$n \equiv 6 (\mathrm{mod}\ 37)$$

К решению сравнений сводится задача о решении в целых числах линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Задача 6. *Найдите все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $7x-23y=131$.*

Решение. Поскольку $23 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$, получаем сравнения $2y \equiv -131 (\mathrm{mod}\ 7)$ или $2y \equiv 9 \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7)$, откуда $y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$.

Итак $y=7k+1$, где k — целое число. Теперь без труда находим x:

$$7x-23(7k+1)=131,$$

откуда

$$7x=154+23\cdot 7k,$$

т. е.

$$x=22+23k.$$

В заключение предлагаем вам решить несколько упражнений.

Упражнения

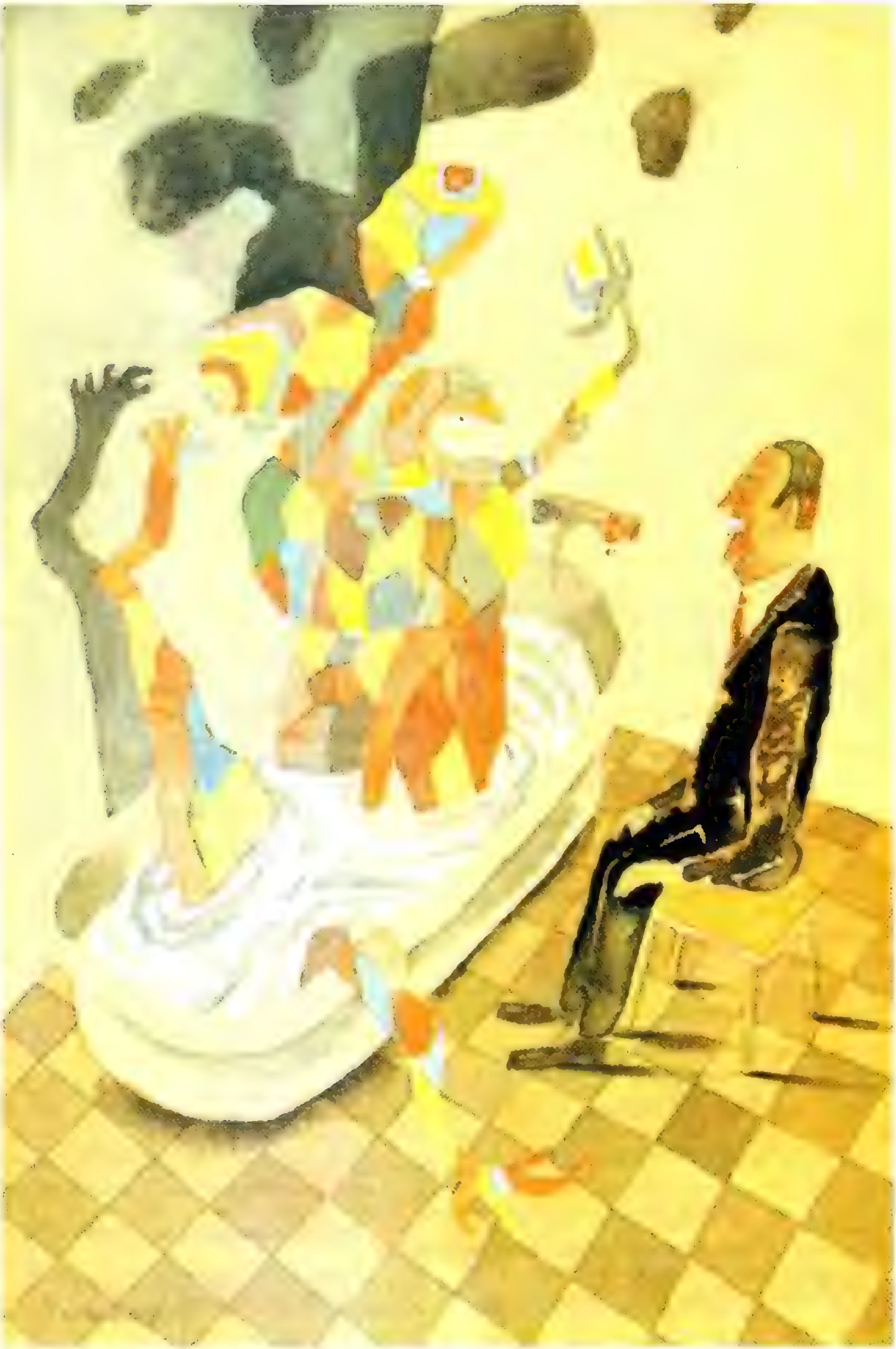
30. Решите сравнения
а) $17x \equiv 19 (\mathrm{mod}\ 37)$,
б) $147x \equiv 63 (\mathrm{mod}\ 29)$.

31. Решите в целых числах уравнения
а) $7x+8y=1$,
б) $13x-15y=16$,
в) $257x+18y=175$.

32. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+5y-7z=1, \\ 4x+9y+11z=2. \end{cases}$$

А. Егоров



МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

— Дальше я смешал лейкоциты со своей кровью, набрал в шприц и ввел все это себе обратно.— Он застегнул верхнюю пуговицу рубашки и неуверенно улыбнулся.— Я запрограммировал их на все, что только можно, общаясь с ними на самом высоком уровне, который допускают энзимы и тому подобное. После чего они зажили своей жизнью.

— Ты запрограммировал их и плодиться и размножаться? Становиться лучше? — повторил я его фразу.

— Я думаю, они развили кое-какие характеристики, заложенные в биочипы еще на стадии кишечных бактерий. Лейкоциты уже могли общаться друг с другом, выделяя в окружающую среду химически закодированные участки памяти. И наверняка они нашли способы поглощать другие типы клеток либо преобразовывать их, не убивая.

— Ты сошел с ума.

— Но ты сам видел изображение на экране! Эдвард, меня с тех пор не берет ни одна болезнь. Раньше я простужался постоянно, зато теперь чувствую себя как нельзя лучше.

— Но они у тебя внутри и постоянно что-то находят, что-то меняют...

— И сейчас каждая группа не глупее тебя или меня.

— Ты действительно ненормальный.

Он пожал плечами.

— Короче, меня вышибли. Решили, видимо, что я попытаюсь отомстить за то, как они расправились с моей работой. Поэтому меня выгнали из лаборатории, и до сего момента мне не представлялось настоящей возможности узнать, что происходит в моем организме. Три месяца уже прошло.

— И ты...— Я едва поспевал за перегоняющими друг друга догадками.— Ты сбросил вес, потому что они улучшили у тебя жировой обмен. Кости стали прочнее, позвоночник полностью перестроен...

— У меня никогда не болит теперь спина, даже если я сплю в очень неудобной позе.

— Сердце у тебя тоже выглядит не так.

— Про сердце я не догадывался,— сказал он, внимательно разглядывая изображение на экране.— А насчет жира... Об этом я думал. Они вполне могли улучшить у меня обмен веществ. В последнее время я никогда не чувствую себя голодным. Привычки в еде у меня не изменились настолько сильно — по-прежнему хочется того, чего и всегда хотелось,— но почему-то я ем только полезные продукты. Видимо, они еще не поняли, что представляет собой мой мозг. Они освоили железистую систему, но пока не осознали глобальной картины, если ты понимаешь, что я имею в виду. Они еще не знают, что я — это я. А вот что такое репродуктивные органы, усвоили просто замечательно.

Я взглянул на экран и отвел глаза.

— Нет, внешне все выглядит нормально,— он захихикал.— Но как, ты думаешь, я подцепил эту красотку Кандис? Она рассчитывала просто на одноразовое приключение с технарем. Я и тогда уже неплохо выглядел: без загара, но уже постройнел и одевался весьма прилично. Ей, видишь ли, никогда раньше не попадался технарь, ну и она решила попробовать ради смеха... Но мои маленькие гении не давали нам спать чуть не до утра, и с каждым разом они становились все умнее и умнее. Я был словно в лихорадке.

Улыбка исчезла с его лица.

— Но однажды ночью я почувствовал, как у меня по всей коже бегают мурашки. Я здорово тогда напугался и решил, что эксперимент выходит из-под контроля. Кроме того, меня беспокоило, что может произойти, когда они преодолеют гематоэнцефалический барьер и узнают обо мне, о настоящих функциях клеток головного мозга. Поэтому я начал кампанию сдерживания. Насколько я понимал, они пытались проникнуть в кожу, потому что по поверхности прокла-

---

Продолжение. См. «Квант» № 5.

дывать коммуникационные каналы гораздо легче, чем устанавливать цепи через органы, мускулы и сосуды или в обход их. По коже получалось проще. Пришлось купить кварцевую лампу...— Тут он перехватил мой удивленный взгляд.— В лаборатории мы разрушали белок в биочипах, подвергая их ультрафиолетовому облучению, а я чередовал лампу дневного света с кварцевой. В результате они не лезут на поверхность, а я получаю отличный загар.

— Ты еще можешь заполучить рак кожи,— добавил я.

— Думаю, они сами сделают все, что нужно, чтобы меня уберечь. Как полицейские патрули.

— Ладно. Я тебя обследовал, ты рассказал мне историю, в которую трудно поверить... но чего ты теперь от меня хочешь?

— Я не настолько беззаботен, как могло показаться, Эдвард. Меня по-прежнему не оставляет беспокойство, и я хотел бы найти какой-нибудь способ ограничить их прежде, чем они узнают о моем мозге. Ты сам подумай: их теперь триллионы, и каждый не глупее меня. Они в определенной степени сотрудничают, так что я, возможно, умнейшее существо на планете, но на самом деле у них еще все впереди. Я бы не хотел, чтобы они захватили надо мной власть.— Он рассмеялся, и у меня по спине пробежал неприятный холодок.— Или украли душу... Поэтому я прошу тебя подумать над каким-нибудь способом ограничить их. Может быть, этих маленьких чертенят можно поморить голодом? Подумай.— Он вручил мне листок бумаги со своим адресом и телефоном, затем подошел к клавиатуре, убрал изображение с экрана и стер данные обследования.— Пока никто, кроме тебя, ничего не должен знать. И пожалуйста... поторопись.

Ушел Верджил только в три часа ночи. Перед этим я взял у него кровь на анализ, затем пожал его влажную, дрожащую ладонь, и он в шутку предупредил меня, чтобы я не принимал образцы внутрь.

Прежде чем уйти домой самому, я заложил кровь на анализ, результаты которого были готовы уже на следующий день. Я получил их во время перерыва на ленч, затем все уничтожил. Проделал я это совершенно механически, словно робот. Лишь через пять дней и почти столько же бессонных ночей я принял увиденное. Кровь его оказалась вполне нормальной, за исключением того, что машина выявила заражение: высокий уровень лейкоцитов — белых кровяных клеток — и гистаминов. На пятый день я наконец поверил.

Гэйл вернулась домой раньше меня, но в тот вечер была моя очередь готовить ужин. Она поставила на проигрыватель один из детсадовских дисков и продемонстрировала мне образцы видеокомпьютерной живописи, которые создавали ее дошкольники. Я молча смотрел. Ужин тоже прошел в тишине.

Ночью мне приснилось сразу два сна — видимо, признак того, что я наконец принял факты. Во время первого, от которого я постоянно ворочался и скомкал всю простыню, мне привиделось разрушение планеты Криптон, родного мира Супермена, где погибали в огне миллиарды супергениев. Скорее всего этот кошмар навеяла стерилизация образцов крови, которые я взял у Верджила.

Второй сон оказался хуже. Мне снилось, как огромный город Нью-Йорк насилует женщину. В конце концов она родила множество маленьких зародышей-городков, завернутых в полупрозрачную пленку и залитых кровью после трудных родов.

На утро шестого дня я позвонил Верджилу. Он ответил после четвертого гудка.

— У меня есть кое-какие результаты,— сказал я.— Ничего окончательного, но я хотел бы с тобой поговорить. Не по телефону.

— Хорошо,— ответил он, и в его голосе мне послышалась усталость.— Я пока сижу дома.

Квартира Верджила находилась в шикарном высотном доме на берегу озера. Я поднялся к нему на лифте, разглядывая под рекламную болтовню голограммы с изображением товаров, свободных квартир и хозяйки здания, обсуждавшей общественные мероприятия на текущей неделе.

Верджил открыл дверь и жестом пригласил меня внутрь. Он был в клетчатом халате с длинными рукавами и домашних шлепанцах. В руке он держал незажженную трубку. Он молча прошел в комнату и сел в кресло; пальцы его вертели трубку, не переставая.

— У тебя инфекция,— произнес я.

— Да?

— Это все, что я смог узнать из анализов. У меня нет доступа к электронным микроскопам.

— Я не думаю, что это на самом деле инфекция,— сказал он.— В конце концов, это мои же собственные клетки.

Может быть, что-то еще... Какой-нибудь признак их присутствия, их перемен. Едва ли можно ожидать, что нам сразу все станет понятно.

Я снял пальто.

— Слушай, я начинаю за тебя беспокоиться...

Остановило меня выражение его лица — странное лихорадочное блаженство. Прищурив глаза, Верджил смотрел в потолок и морщил губы.

— Ты что — накачался? Балдеешь? — спросил я.

Он помотал головой из стороны в сторону, потом кивнул, очень медленно.

— Я слушаю,— сказал он.

— Что?

— Не знаю. Это не совсем звуки... Но что-то вроде музыки... Сердце, кровеносные сосуды, течение крови по артериям и венам. Деятельность... Музыка, звучащая в крови...— Он взглянул на меня грустными глазами.— Ты почему не на службе?

— У меня сегодня свободный день. А Гэйл работает.

— Можешь остаться?

— Видимо, да,— сказал я, пожимая плечами, потом обвел квартиру подозрительным взглядом, выискивая горы окурков или бумажные пакетики от наркотиков.

— Я не под балдой, Эдвард,— произнес он.— Может быть, я не прав, но мне кажется, происходит что-то очень большое и важное. Думаю, они начали понимать, кто я есть.

Я сел напротив Верджила, пристально его разглядывая. Он, похоже, совсем меня не замечал. Какой-то внутренний процесс захватил его целиком. Когда я попросил чашку кофе, он лишь махнул рукой в сторону кухни. Вскипятив воду, я достал из шкафа банку растворимого кофе, потом вернулся с чашкой в руках на свое место. Верджил сидел с открытыми глазами, покачивая головой.

— Ты всегда знал, кем тебе хочется стать, да? — спросил он.

— Более-менее.

— Гинеколог... Только верные шаги по жизни, ни одного — в сторону... А я всегда жил по-другому. У меня были цели, но я не знал направления. Это как карта без дорог, одни только географические точки. И мне на все было наплевать, на всех, кроме себя самого. Даже на науку. Для меня это просто средство... Я вообще удивляюсь, что добился таких значительных результатов... Даже своих родителей я ненавидел.

Неожиданно он схватился за подлокотники кресла.

— Тебе плохо? — встревожился я.

— Они со мной разговаривают,— ответил он и закрыл глаза.

Около часа он лежал без движения, как будто спал. Я проверил пульс — ровный, наполненный, потрогал его лоб — чуть холоднее, чем следовало бы, потом пошел и приготовил себе еще кофе. Когда Верджил открыл наконец глаза, я, не зная чем себя занять, перелистывал журнал.

— Трудно представить себе, как течет для них время,— произнес он.— Всего три или четыре дня у них ушло на то, чтобы понять наш язык и ключевые аспекты нашей цивилизации. Теперь они продолжают знакомиться со мной. Прямо во мне. Прямо сейчас.

— Как это?

Верджил сказал, что несколько тысяч исследователей подключились к его нейронам, но подробностей он и сам не знал.

— Они, вероятно, действуют очень эффективно,— добавил он.— И пока еще не причинили мне никакого вреда.

— Нужно доставить тебя в больницу.

— А что они там смогут сделать? Ты, кстати, придумал какой-нибудь способ ограничить моих умников? Я хочу сказать, это все же мои клетки.

— Я думал об этом. Мы можем заморить их голодом. Нужно только найти различие в метаболизме...

— Я не уверен, что мне хочется избавиться от них совсем,— сказал Верджил.— Они не причиняют мне никакого вреда.

— Откуда ты знаешь?

Он покачал головой, потом поднял палец и замер.

— Тихо! Они пытаются понять, что такое пространство. Им это нелегко. Расстояния они определяют по концентрациям химических веществ. Размерность для них — это как сильный или слабый привкус.

— Верджил...

— Слушай! И думай, Эдвард,— он заговорил возбужденным тоном.— Наблюдай! Во мне происходит что-то значительное. Они общаются друг с другом через жидкости организма, и химические сигналы проникают даже сквозь мембраны. Они там мастерят что-то новое, может быть, вирусы, чтобы переносить данные, хранящиеся в цепях нуклеиновых кислот. Кажется, они имеют в виду РНК... Похоже на правду. Я их так и программировал... Но еще и плазматические структуры... Возможно, именно это твои машины и выделили как признак инфекции — их переговоры у меня в крови, информационные пакеты... Химические характеристики других особей. Равных. Начальников. Подчиненных.

— Верджил, я внимательно слушаю, но мне действительно кажется, что тебе следует лечь в больницу.

— Это моя свадьба, Эдвард,— сказал он.— Я — их вселенная. Они поражены новыми открывшимися горизонтами...

Верджил снова умолк. Я присел на корточки рядом с его креслом и закатал рукав халата. Вся рука у него была словно исчерчена крест-накрест белыми линиями. Я уже собрался вызывать машину скорой помощи, когда он вдруг встал и потянулся.

— Ты когда-нибудь задумывался,— спросил он,— сколько клеток мы убиваем каждый раз, когда делаем даже простое движение?

— Я вызову машину,— сказал я.

— Нет,— произнес он твердо.— Я же сказал, что я не болен. И я хочу иметь возможность распоряжаться самим собой. Знаешь, что они сделают со мной в больнице?.. Это как если бы пещерные люди принялись чинить компьютер тем же способом, каким они чинят свои каменные топоры. Фарс...

— Тогда какого черта я здесь делаю? — спросил я, разозлившись.— Ведь я ничем не могу тебе помочь. Я такой же пещерный человек.

— Ты друг,— произнес Верджил, взглянув мне в глаза, и у меня возникло ощущение, что в мою сторону смотрит не только он один.— Ты мне нужен для компании.— Он рассмеялся.— Хотя на самом деле я отнюдь не одинок.

В течение двух последующих часов он расхаживал по квартире, прикасался к вещам, выглядывал в окна, потом медленно, неторопливо приготовил ленч.

— А знаешь, они действительно могут ощущать свои собственные мысли,— сказал он около полудня.— Я имею в виду цитоплазму. Судя по всему, она имеет собственную волю, своего рода подсознательную жизнь — в отличие от разума, который клетки обрели совсем недавно. Они слышат нечто похожее на химический «шум» отделяющихся и возвращающихся на место молекул.

В два часа я позвонил Гэйл и сказал, что буду поздно. Меня буквально трясло от напряжения, но я старался говорить спокойно.

— Помнишь Верджила Улэма? Я сейчас у него.

— Все в порядке? — спросила она.

Да уж куда там...

— Все отлично,— ответил я.

Верджил заглянул в комнату, когда я попрощался с Гэйл и положил трубку.

— Это целая культура! — провозгласил он.— Они постоянно купаются в море информации. И постоянно вносят туда что-то новое. Получается своего рода «гештальт». Строжайшая иерархия. За клетками, которые взаимодействуют с другими неправильно, они высылают особые фаги. Специально изготовленные вирусы, предназначенные для конкретных клеток или групп. Против них нет абсолютно никакой защиты. Вирус протыкает клетку, она лопается, взрывается и растворяется. Но это не тирания. Я думаю, что на самом деле у них гораздо больше свободы, чем при демократическом устройстве. В том смысле, что они так сильно отличаются друг от друга. Ты можешь себе это представить? Они отличаются друг от друга даже больше, чем мы.

— Подожди,— сказал я, взяв его за плечи.— Верджил, ты слишком много и сразу на меня навалил. Мне это больше не под силу. Я ничего не понимаю и не очень верю.

— Даже сейчас?

— Ладно. Допустим, ты даешь мне э-э-э.. верную интерпретацию. Честную. И все это правда. А ты не задумывался о последствиях? Что все это означает и к чему может привести?

Он прошел на кухню, налил стакан воды, вернулся и встал рядом со мной. Детская увлеченность на его лице сменилась трезвой озабоченностью.

— Я всегда плохо представлял себе будущее.

— А тебе не страшно?

— Было страшно. Но сейчас я не уверен.— Он нервно подергал пояс своего халата.— Знаешь, я не хотел бы, чтобы ты думал, будто я действовал в обход тебя, через голову или еще как, но вчера я встретился с Майклом Бернардом. Он меня обследовал в своей частной клинике, взял образцы на анализы. Сказал, чтобы я прекратил облучение кварц-лампой. Сегодня утром, прямо перед тобой, он мне позвонил и сообщил, что все подтверждается. Но просил никому ничего не говорить.— Верджил замолчал, и на лице его снова появилось мечтательное, самоуглубленное выражение.— Целые города из клеток... Эдвард, они проталкивают сквозь ткани похожие на фимбрии каналы, чтобы распространять информацию...

— Прекрати! — не выдержал я.— Что там еще подтверждается?

— Как сказал Бернард, у меня в организме обнаружились «крайне увеличенные макрофагоциты». И он подтвердил анатомические изменения. Так что мы с тобой на этот счет не заблуждаемся.

— Что он собирается делать?

— Не знаю. Думаю, он сможет убедить руководство «Генетрона» возобновить работы в моей лаборатории.

— Ты этого хочешь?

— Дело не только в лаборатории. Сейчас я тебе покажу. Перестав пользоваться лампой, я изменился еще сильнее.

Он расстегнул халат и сбросил его на пол. Все тело у него было расчерчено белыми пересекающимися линиями. На спине вдоль позвоночника эти линии уже начали образовывать твердый гребень.

— Боже правый! — вырвалось у меня.

— Еще немного — и мне уже нельзя будет появляться нигде, кроме лаборатории. В таком виде невозможно бывать на людях. А в больнице, как я и говорил, просто не поймут, что со мной делать.

— Но ты... Ты же можешь переговорить с ними, сказать, чтобы они действовали не так быстро,— предложил я, понимая, что произношу весьма странные вещи.

— Да, могу. Но они не обязательно меня послушаются.

— Я думал, ты для них бог или нечто вроде этого.

— Те, кто подключился к моим нейронам, на самом деле не очень важные фигуры. Просто исследователи или что-то в этом духе. Они знают о моем существовании, знают, кто я такой, но это не означает, что они убедили тех, кто стоит на верхних ступенях иерархической лестницы.

— У них идут дебаты?

— Похоже на то. Однако все не так плохо, как тебе кажется. Если вновь откроют мою лабораторию, у меня будет и дом, и рабочее место.— Он выглянул в окно, словно высматривал кого-то внизу.— У меня больше никого нет. Кроме них. И они ничего не боятся, Эдвард. Никогда в жизни я не чувствовал ни с кем такого родства.— Снова блаженная улыбка.— Я в ответе за них. Я им как мать.

— Но ты же не знаешь, что они будут делать дальше.

Он покачал головой.

— В самом деле, Верджил. Ты говорил, что это цивилизация...

— Тысяча цивилизаций!

— Тем более. А цивилизации, как известно, нередко кончают плохо. Войны, загрязнение окружающей среды...

Я словно хватался за соломинку, пытаясь унять растущую панику. Мне явно не хватало опыта, компетенции, чтобы охватить происшедшее во всей его потрясающей грандиозности. То же самое относилось и к Верджилу. Когда дело касается глобальных проблем, менее проницательного и способного на зрелые решения человека даже представить себе трудно.

— Но рискую только я один.

— Ты не можешь знать этого наверняка. Боже, Верджил, посмотри, что они с тобой делают!

— Со мной! Только со мной! — выкрикнул он.— Ни с кем другим!

Я покачал головой и поднял руки, признавая свое поражение.

— Ладно. Ну, откроет Бернард лабораторию, ты переселишься туда и превратишься в подопытную морскую свинку. А что дальше?

— Они не приносят мне вреда. Я сейчас больше, чем старый добрый Верджил Улэм. Я — целая галактика, черт побери! Сверхпрародитель!

— Ты, может быть, имеешь в виду, сверхинкубатор?

Он пожал плечами, не желая ввязываться в спор.

Всего этого мне оказалось более чем достаточно. Выдумав какие-то нелепые оправдания, я распрощался с ним и ушел. Потом долго сидел в холле внизу, успокаивая нервы... Кто-то должен убедить его. Но кого Верджил послушает? Он виделся с Бернардом...

И того, похоже, история Верджила не только убедила, но еще и очень заинтересовала. Люди типа Бернарда обычно не подталкивают верджилов улэмов этого мира к необдуманным действиям — за исключением тех случаев, когда чувствуют, что ситуацию можно обернуть себе на пользу.

Всего лишь догадка, но я решил попробовать. Подошел к уличному телефону, воткнул в щель кредитную карточку и позвонил в «Генетрон».

— Будьте добры, разыщите, пожалуйста, доктора Майкла Бернарда,— обратился я к секретарше.

— Простите, кто его спрашивает?

— Это его секретарь из «Телефонного сервиса». Поступил крайне важный звонок, а его бипер, видимо, не работает.

После нескольких минут ожидания Бернард взял трубку.

— Кто вы такой, черт побери? У меня нет никакого секретаря в «Телефонном сервисе».

— Меня зовут Эдвард Миллиган. Я друг Верджила Улэма. Нам, похоже, нужно встретиться и кое-что обсудить.

Договорились о встрече на следующее утро. По дороге домой я пытался придумать себе какое-нибудь оправдание, чтобы не выходить на работу еще один день, потому что я совершенно не мог думать о медицине и пациентах, которые заслуживали гораздо большего внимания.

Я испытал чувство вины, озабоченность, злость и страх.

В таком вот душевном состоянии меня и застала Гэйл. Я нацепил маску спокойствия, и мы вместе приготовили ужин. Потом, обнявшись, долго стояли у окна, выходящего к заливу, глядя, как зажигаются в сумерках городские огни. Несколько скворцов из оставшихся на зиму еще прыгали по увядшей лужайке в последних отблесках дневного света, потом унеслись с налетевшим порывом ветра, от которого задрожали стекла.

— Что-то случилось, Эдвард? — мягко спросила Гэйл.— Ты сам расскажешь или будешь и дальше делать вид, что все нормально?

— Просто настроение неважное,— ответил я.— Нервы. Работа в больнице.

— О боже, я поняла,— сказала она, садясь в кресло.— Ты решил развестись со мной и жениться на той женщине по фамилии Бейкер.

Миссис Бейкер, о которой я как-то рассказывал Гэйл, весила триста шестьдесят фунтов и догадалась, что она беременна, только на пятом месяце.

— Нет,— сказал я вяло.

— О, великое счастье! — провозгласила Гэйл, легко касаясь моего лба.— Но если вытягивать из тебя все клещами, можно с ума сойти.

— Видишь ли, я пока не могу об этом говорить, так что...— Я погладил ее по руке.

— Какие мы отвратительно серьезные,— сказала она, поднимаясь.— Я пойду приготовлю чай. Ты будешь?

Она обиделась, да я и сам мучился от того, что никому не мог ничего рассказать. Хотя почему бы и не открыться ей? Мой старый друг превращается в галактику...

Вместо этого я убрал со стола. В ту ночь мне долго не удавалось заснуть. Я сидел в постели, положив подушку за спину, и глядел на Гэйл. Пытался разобраться, что из всего того, что знаю, реальность, а что домыслы.

Я врач, говорил я себе. Профессия, связанная с наукой, техникой. И мне положено обладать иммунитетом к подобным футуристическим потрясениям.

Верджил Улэм превращается в галактику.

Как бы я себя чувствовал, если бы в меня пересадили триллион крошечных китайцев? Я улыбнулся в темноте и в тот же момент едва не вскрикнул: существа, обитавшие у Верджила внутри, были совсем чужими для нас, настолько чужими, что я или Верджил даже не могли рассчитывать на быстрое понимание. Может быть, мы вообще никогда их не поймем.

Однако это все домыслы, а я очень хорошо знал, что на самом деле относится к реальности. Спальня. Городские огни, просвечивающие из-за тюлевых занавесок. Спящая Гэйл. Это очень важно. Гэйл, спящая в постели.

Снова мне приснился тот самый сон. На этот раз город вошел через окно и набросился на Гэйл. Огромный, шипастый, ползучий, весь в огнях — он рычал что-то на непонятном мне языке, состоящем из автомобильных гудков, шума большой толпы и грохота строек. Я пытался бороться с ним, но он все-таки добрался до Гэйл... и превратился в поток мерцающих звезд, рассыпавшихся по постели, по всему, что нас окружало. Я резко проснулся и до самого рассвета больше не сомкнул глаз. Встал, оделся вместе с Гэйл и поцеловал ее перед уходом, ощутив сладостную реальность доверчивых человеческих губ.

Затем отправился на встречу с Бернардом. В его распоряжение был отдан кабинет в одной из больших пригородных больниц. Я поднялся лифтом на шестой этаж и воочию убедился, что могут сделать известность и состояние.

Прекрасно обставленная комната, изящные гравюры на шелке, украшающие стенные панели из дерева, мебель из хромированного металла и стекла, кремового цвета ковер, китайская бронза, полированные шкафы и столы.

Бернард предложил мне чашку кофе. Я не стал отказываться. Он сел сбоку от письменного стола, я — напротив него с чашкой кофе во влажных ладонях. На нем был серый с иголочки костюм. Седые волосы и четкий профиль дополняли картину. В свои шестьдесят с лишним он здорово напоминал Леонарда Бернстайна.

— По поводу нашего общего знакомого...— начал Бернард.— Мистера Улэма. Блестящий ученый и, я не побоюсь этого слова, отважный.

— Он мой друг. И я обеспокоен тем, что с ним происходит.

Бернард остановил меня, подняв палец:

— Но этот отважный человек совершил безрассудный, идиотский поступок. Того, что с ним произошло, просто нельзя было допускать. Решиться на такой шаг его вынудили обстоятельства, но это, конечно, не оправдание. Однако что сделано, то сделано. Насколько я понимаю, он вам все рассказал.

Я кивнул.

— Он хочет вернуться в «Генетрон».

— Разумеется. Там все его оборудование. И видимо, там же будет его дом, пока мы не разберемся с этой проблемой.

— Разберетесь... Как? И какой в этом прок? — Легкая головная боль мешала мне думать.

— О, я могу представить себе множество областей применения маленьких сверхплотных компьютеров на биологической основе. Право, это не так сложно. В «Генетроне» уже сделали несколько важных открытий, но тут совершенно новое перспективное направление.

— Что вы имеете в виду?

— Я не в праве обсуждать перспективы,— Бернард улыбнулся,— но это будет нечто совершенно революционное. И нам просто необходимо поместить мистера Улэма в лабораторные условия. Мы должны провести также эксперименты на животных. Разумеется, придется начинать все сначала. Дело в том, что э-э-э... колонии Верджила нельзя перенести в другой организм: они базируются на его лейкоцитах. Поэтому нам нужно будет создать новые колонии, которые не будут вызывать в других организмах иммунную реакцию.

— Подобно инфекции? — спросил я.

— Думаю, можно допустить и такое сравнение. Но Верджил не инфицирован.

— Мои тесты показали, что это не так.

— Видимо, аппаратура среагировала на те участки информационных потоков, что плавают в его кровеносной системе. Как вы думаете?

— Я не знаю.

— Послушайте, я бы хотел, чтобы вы заглянули в нашу лабораторию, когда Верджил туда переберется. Ваш опыт может оказаться для нас полезным.

Нас. Значит, он с «Генетроном» заодно. В состоянии ли он сохранить объективность?

— Каков ваш собственный интерес во всем этом деле?

— Эдвард, я всегда держался на переднем крае своей науки. И не вижу причин, почему бы не поработать здесь. С моими знаниями функций головного мозга и нервной системы, после всех исследований по нейрофизиологии, что я провел...

— Вы могли бы помочь «Генетрону» избежать правительственного расследования,— сказал я.

— Весьма грубо. Слишком грубо и, кроме того, несправедливо.

— Возможно. Но я согласен. Я бы очень хотел побывать в лаборатории, когда Верджил туда переедет. Разумеется, если при всей моей грубости приглашение еще остается в силе.

Бернард посмотрел на меня острым взглядом. Он понимал, я не буду играть на его стороне, и на какое-то мгновение эти мысли совершенно отчетливо проступили у него на лице.

— Конечно.

Он поднялся и протянул мне руку. Ладонь у него была влажная. Хотя Бернард старался этого не показать, нервничал он не меньше моего.

Я вернулся домой и просидел там до полудня. Читал и пытался разобраться в своих мыслях. Прийти к какому-то выводу. В частности, решить, что все-таки составляет реальность и что я должен защищать.

Перемены человек может принимать только в определенных дозах. Нововведения — это хорошо, но понемногу и постепенно. Нельзя навязывать их силой. Каждый имеет право оставаться прежним, пока не решит, что готов.

Величайшее научное открытие после...

И Бернард будет навязывать его силой. «Генетрон» тоже. Мысли об этом казались невыносимыми. «Неолуддит»,— обозвал я сам себя. Действительно, грязное обвинение.

Когда я нажал кнопку с номером квартиры Верджила на переговорной панели в холле высотного здания, он ответил почти сразу.

— Да,— сказал он возбужденно.— Поднимайся. Я в ванной. Дверь не заперта.

Я зашел в квартиру и двинулся по коридору к ванной. Верджил сидел в розоватой воде, погрузившись до самого подбородка. Он рассеянно улыбнулся и всплеснул руками.

(Окончание следует)

Перевод с английского А. Корженевского

Настоящая статья открывает серию публикаций о нахождении и анализе простых чисел с помощью самых массовых и недорогих программируемых микрокалькуляторов (ПМК) от Б3-34 до МК-61 или микрокомпьютеров МК-85 (с языком БЕЙСИК). В каждой статье вниманию читателей будет предложено по одной законченной программе. Они позволяют генерировать простые числа, находить простые делители натуральных чисел, исследовать целочисленные последовательности с «аномальным» содержанием простых чисел, строить занимательные и познавательные конструкции из простых чисел и алгоритмы для их получения.

Но учтите: чтение предлагаемых статей без одновременной проверки содержащихся в них программ (например, на МК-61) будет неэффективным. Можно даже сказать сильнее: будет бесполезным.

Алгоритмика простоты

50 томов в кармане

Б. ТАРАСЕНКО

> *Нелегкий вопрос-то,*
> *Но верь одному:*
> *Все сложно и просто,*
> *Считай, по уму!*

Однажды в 1948 году, когда автор этих строк учился в третьем классе, он вместо воскресного мороженого приобрел замечательную книжку Г. Н. Бермана «Число и наука о нем». Эта книжка навсегда сделала меня любителем целочисленной математики, особенно — простых чисел. Книжечка эта, наверное, будет интересна и нынешнему поколению искателей.

Простые числа издавна были объектом постоянного внимания любителей и профессионалов. Напомним, что простое — это натуральное число, отличное от единицы и делящееся нацело только на себя и на единицу. Первые простые числа таковы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... Ряд простых чисел бесконечен.

В опубликованных таблицах простых чисел верхним пределом обычно является 6000, реже 10 000. Можно создать таблицу простых чисел и до 10^6, но она окажется многотомным изданием (примерно 50 томов). А нужно ли оно?

Оказывается его вполне могут заменить «простейшие» из мира компьютеров — программируемые микрокалькуляторы. Б3-34, МК-52, МК-54, МК-56, МК-61, снабженные соответствующей программой, способны дать точный ответ на многие вопросы. Для начала займемся генератором простых чисел. Приведенная ниже программа позволяет генерировать, начиная с заданного нечетного числа И, последовательные простые числа. При этом она проверяет, что исследуемое число И не делится ни на одно нечетное число в диапазоне от 3 до $\sqrt{И}$. Программа работоспособна от И=5 до И=99999989 включительно.

Несколько слов о форме описания программы. Мы полагаем, что имеем дело с той категорией читателей, которых легкое «сопротивление» материала только подзадоривает и обеспечивает большую работоспособность. Поэтому наши пояснения будут минимальными — как раз такими, чтобы владельцы Б3-34 (надписи на клавишах которого отличаются от надписей на МК-61) могли сами разобраться, что им надо нажимать.

Программа 1. Генератор последовательных простых чисел

Пригодны все ПМК от Б3-34 до МК-61. Переменные и используемые регистры: Д=Рг5 — теущий нечетный делитель; И=Рг6 — очередное нечетное испытуемое число; ЧАСТН==Рг9=И/Д — частное от деления И на Д (сначала действительное число, а затем его целая часть).

Описание алгоритма

Задать начальное И. Для последовательных нечетных Д, начиная с Д=3, вычислять ЧАСТН=И/Д, затем К —

Текст программы с пошаговыми комментариями

```
00     X→П   6    46    /+   Занесение в Рг6 стартового И из РгX
01           1    01    /+   Константа 1
02     X→П   5    45    /+   Занесение 1 в Рг5, подготовка счетчика Д
03   К П→X   5    Г5    /+   Д : = Д + 1, начальная фаза работы счетчика Д
04   К П→X   5    Г5    /+   Д : =Д + 1; результат: новД = старД + 2
05     П→X   6    66    /+   Вызов И = Рг6 в РгX
06     П→X   5    65    /+   Вызов Д в РгX; И перемещается в РгY
07     ÷          13    /+   ЧАСТН = И/Д
08     X→П   9    49    /+   ЗАСЫЛКА ЧАСТН в Рг9
09   К П→X   9    Г9    /+   К = целая часть от ЧАСТН
10     П→X   6    66    /+   Вызов И в РгX
11     П→X   9    69    /+   Вызов К в РгX; И перемещается в РгY
12     П→X   5    65    /+   Вызов делителя Д в РгX; РгY = К; РгZ=И
13     x          12    /+   Д × К
14     —          11    /+   ОСТ = И — К × Д, остаток от деления
15   F X≠0        57    /+   ОСТ≠ 0?
16           24   24    /+   НЕТ (т. е. ОСТ = 0), переход на шаг 24
17     П→X   9    69    /+   ДА (т. е. ОСТ ≠ 0), вызов целого ЧАСТН
18     П→X   5    65    /+   Вызов Д
19     —          11    /+   РгX = ЧАСТН — Д
20   F X<0        5С    /+   ЧАСТН — Д < 0?
21           03   03    /+   НЕТ, переход на шаг 03 к новому значению Д
22     П→X   6    66    /+   ДА (множество Д исчерпано)
23     С/П        50    /+   Стоп-индикация И
24   К П→X   6    Г6    /+   И = И + 1, начало генерации нового И
25   К П→X   6    Г6    /+   И = И + 1, конец генерации; новИ = старИ + 2
26     БП         51    /+   Безусловный переход
27           01   01    /+   на шаг 01
```

целую часть И/Д и остаток ОСТ= =И—К×Д. В случае ОСТ=0 переходить на задание нового значения И. Если Д больше ЧАСТН (И — простое число), то осуществлять индикацию И с остановкой вычислений. Затем задать новИ=старИ+2 и перейти к исследованию этого И.

Оценка быстродействия программы: простота числа 5 подтверждается за 7 секунд, простота числа 99999989 — примерно за 7 часов.

Самая интересная команда в программе — 09. В результате ее выполнения число в Рг9 становится целым. Такой способ выделения целой части числа применим и на моделях ПМК, предшествующих МК-61, на которых номинально нет операции выделения целой части числа.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать начальное нечетное целое И и нажать клавишу С/П, начнется счет; после останова счета на индикаторе — очередное простое число. Нажатие С/П запускает новый цикл работы, завершающийся появлением на индикаторе нового простого числа, и так далее.

С помощью этой программы можно легко убедиться, что цепочка чисел 3, 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 составлена из одних простых чисел. Прелесть маленьких личных открытий и побед заметно потускнеет, если мы дадим слишком много подсказок и приведем готовые результаты. Поэтому до следующего выпуска нашей серии оставляем любителя математики, исследователя наедине с ручным персональным компьютером-калькулятором и этой программой.

Коммутативная головоломка Эрне Рубика

В прошлом году мы познакомили читателей «Кванта» с «часами Рубика» (см. 4-ю с. обложки 4-го номера). Хотя эта головоломка была запатентована знаменитым изобретателем в 1988 году, она все еще малоизвестна у нас (да, пожалуй, такой и останется). Тем не менее, мы получили письма с просьбами выполнить данное почти года назад обещание и рассказать о «часах» подробнее. Надеемся, что наш рассказ будет интересен всем любителям головоломок, а не только немногочисленным обладателям «часов Рубика», тем более, что эта головоломка и устроена, и решается проще, чем, скажем, «волшебный кубик», и поэтому, уяснив себе, как «часы» работают, вы можете попробовать придумать алгоритм «на кончике пера».

Рисунок 1 показывает, как выглядят «часы Рубика» снаружи: с двух сторон круглого корпуса расположены по 9 окошек с вращающимися кружками-циферблатами, на которых нарисованы стрелки. Сбоку корпуса выступают 4 шестеренки, вращая которые, стрелки можно переводить. Скрытый зубчатый механизм — «коробка передач» — позволяет подключать к вращению разные наборы циферблатов. Управляется «коробка передач» кнопками; на каждой стороне корпуса их по 4, но фактически это 4 стержня, выступающие с обеих сторон: если нажать на стержень с лицевой стороны, он выскочит с тыльной, и наоборот. Задача ставится так же, как для «кубика» и множества других подобных головоломок — «запутав» показания часов, надо вернуть их все в «правильное» состояние, а именно, поставить на 12 часов.

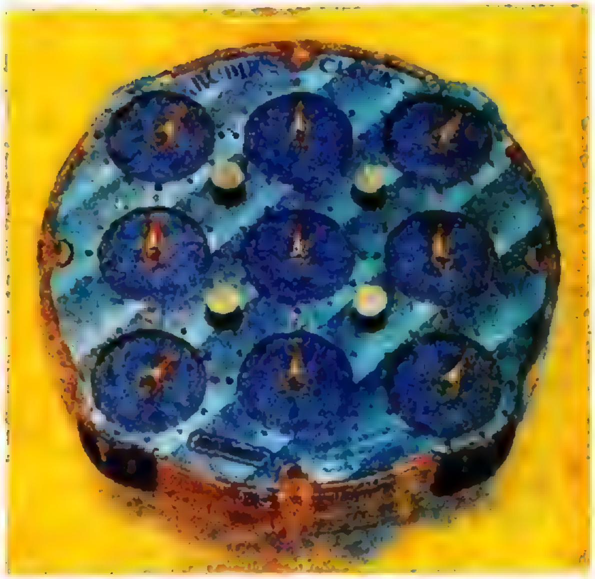


Рис. 1.

Прежде чем решать эту задачу, надо, конечно, разобраться, как «часы» управляются, какие стрелки подключаются к вращаемой шестеренке при том или ином варианте нажатия кнопок («передаче»). Тот, у кого головоломка есть, должен просто перепробовать все варианты. А остальным мы предлагаем сразу заглянуть внутрь «часов». На рисунке 2 вы видите, что на ведущих (угловых) шестеренках, выступающих из корпуса, укреплены по 2 циферблата — с тыльной и лицевой стороны; такие парные циферблаты всегда вращаются синхронно. Эта шестеренка сцеплена с шестеренкой на ближайшей кнопке, а она, в свою очередь, сцеплена либо с шестеренками трех соседних тыльных циферблатов (центрального и двух боковых), если кнопка нажата, либо с тремя соответствующими циферблатами лицевой стороны, если кнопка отжата. С этих шестеренок в зависимости от «передачи» вращение может распространяться еще дальше. Очевидно, сцепленные между собой циферблаты могут вращаться только одновременно, в одну сторону и с одной и той же скоростью. Можно сказать, что «часы Рубика» имеют 14 «степеней свободы», отвечающих 4 парам угловых циферблатов и еще 10 одиночным циферблатам, каждый

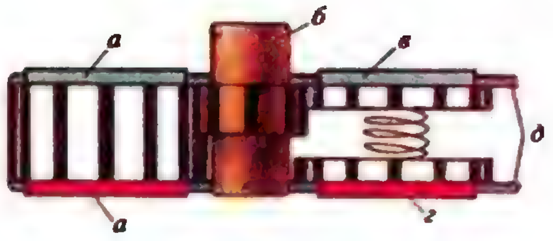


Рис. 2. «Часы Рубика» в разрезе (плоскостью, проходящей через оси углового и центрального циферблатов): а) пара угловых циферблатов, укрепленных на ведущей шестеренке, б) кнопка с шестеренкой для переключения передач, в) лицевой центральный циферблат, г) тыльный центральный циферблат, д) корпус головоломки.

из которых в принципе может быть повернут независимо от остальных. Следовательно, число различных расположений стрелок не превосходит $12^{14}\approx1{,}28\cdot10^{15}$. В дальнейшем мы увидим, что все эти расположения действительно можно получить.

А теперь посмотрим, какими возможностями при переводе стрелок мы располагаем. Каждая из кнопок может находиться в двух положениях, поэтому всего в головоломке имеется $2^4=16$ «передач». При любом нажатии кнопок можно выделить две группы подключенных друг к другу циферблатов: в одну входят угловые пары и лицевые циферблаты, окружающие ненажатые кнопки, другая определяется так же, только если посмотреть на «часы» с тыльной стороны. Каждая пара угловых циферблатов обязательно попадет в одну из групп, но некоторые «одиночные» циферблаты могут оказаться несцепленными с другими. Таким образом, при заданном положении кнопок имеется, вообще говоря, два способа вращения стрелок — можно вращать любую из двух групп. Но в двух случаях — когда все кнопки нажаты или отжаты — образуется только одна группа, поэтому общее число способов вращения равно $2\cdot16-2=30$. Однако если считать *эквивалентными* те способы вращения, которые получаются друг из друга поворотом головоломки в ее плоскости или ее переворачиванием, то останутся всего 5 неэквивалентных вариантов. Все они показаны на рисунке 3. (Проверьте, что имеется 2 способа вращения, эквивалентные варианту A, по 8 способов, эквивалентные B, C и E, и 4 способа, эквивалентные D.) Если повернуть ведущее колесико на $360^\circ/12=30^\circ$, то в зависимости от включенной «передачи» те или иные циферблаты (на рисунке 3 они помечены стрелками) повернуться на тот же угол, т. е. на 1 час. Такие операции будем называть *элементарными;* для «передач», показанных на рисунке 3, мы будем обозначать их, соответственно, A, B, C, D, E. Результат операции можно записывать с помощью таблички из нулей и единиц:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

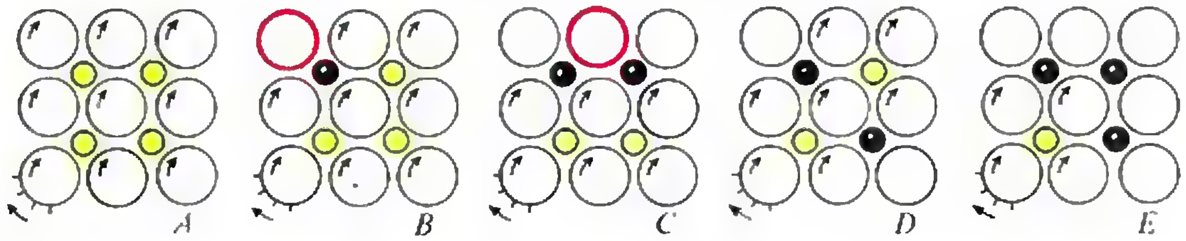


Рис. 3. Пять принципиально различных передач «часов Рубика» (вид с лицевой стороны): желтым показаны ненажатые кнопки, черным — нажатые, зубцы выделены у вращаемой шестеренки.

и т. д.; здесь 1 означает поворот на 1 час, 0 — отсутствие поворота. (Таблички для A, B, C показывают лишь то, что происходит на лицевой стороне «часов», но этого достаточно, т. к. на тыльной стороне будут вращаться только угловые циферблаты, повторяя вращение парных им лицевых.) Чтобы найти результат последовательного выполнения нескольких элементарных операций, надо просто сложить поэлементно соответствующие таблицы. Например,

$$A+A=2A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\ A+C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что такое «сложение» операций коммутативно, т. е. не зависит от порядка слагаемых. И в этом — главная особенность «часов Рубика», которая делает их существенно проще «волшебного кубика» и родственных ему головоломок.

Результат любой «неэлементарной» операции полностью определяется числом повторений в ней каждой из 30 возможных элементарных операций (оно может быть и нулем), поэтому ее можно записать в виде суммы 30 слагаемых $aA+bB+cC+dD+eE$, где коэффициенты a, b, c,...— это количество повторений A, B, C ..., или углы (в часах), на которые поворачивается ведущая шестеренка при соответствующих положениях кнопок. Теперь дело сводится к чисто алгебраической задаче, точнее, просто к решению системы линейных уравнений.

Действительно, определим для каждого циферблата угол, на который его надо повернуть, чтобы поставить стрелку на 12 часов; получатся две таблички для лицевой и тыльной стороны.

Пусть, например, для лицевой стороны эта табличка выглядит так:

$$\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix},$$

тогда соответствующие уравнения имеют вид

$$1\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+0\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{11},$$
$$1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+1\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{12},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+0\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{33}.$$

Всего здесь 9 уравнений с 30 неизвестными, но, добавляя еще 5 уравнений для неугловых циферблатов тыльной стороны, получим систему из 14 уравнений. Ее надо решить в целых числах, а точнее, «по модулю 12», т. е., считая числа, дающие одинаковый остаток при делении на 12, равными (ведь 12 час=0 час). Поскольку число неизвестных здесь больше числа уравнений, часть из них, вообще говоря, можно задать произвольно, а остальные уже найти из системы. Ясно, что оставить нужно 14 неизвестных — по числу уравнений, т. е. из всего многообразия 30 элементарных операций можно ограничиться только 14-ю. Но эти операции (или неизвестные в наших уравнениях) должны быть независимы, т. е. ни одна из них не должна выражаться через остальные — иначе мы не сможем получить все 12^{14} состояний «часов Рубика»...

Прервем здесь наши алгебраические рассуждения. Принцип уже ясен, а такое чисто вычислительное, рутинное решение не требует ни воображения, ни соображения — качеств, без которых любая головоломка теряет всю привлекательность. Обратимся лучше снова к рисунку 3 и попробуем, глядя на него, найти такие комбинации элементарных операций, которые позволяли бы переводить стрелки наших часов по отдельности, или хотя бы небольшими группами. Это позволило бы найти прямой путь к решению.

Одна такая операция видна сразу — это

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(знак «минус», конечно, означает, что стрелки поворачиваются в направлении, противоположном указанному на рис. 3). Операция $t(A-B)$, где $t=0, 1, \ldots, 11$, поворачивает на t делений левую верхнюю пару угловых циферблатов. Аналогично можно поворачивать по отдельности и 3 другие угловые пары. Эти операции удобно использовать в конце решения, поскольку они не разрушат того, что уже достигнуто.

Теперь хотелось бы найти аналогичную операцию для боковых циферблатов. Причем она может поворачивать и угловые циферблаты, ведь мы их все равно будем устанавливать позже. Наверное, вы уже нашли ответ:

$$A-C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Эта операция переводит на 1 час вперед верхнюю стрелку на лицевой строке (и соседние с ней угловые). Понятно, что головоломку можно повернуть так, чтобы на «верхнем лицевом» месте оказался и любой из 7 других боковых циферблатов.

Итак, мы имеем 8 эквивалентных операций для установки боковых циферблатов и 4 — для угловых. Добавим к ним еще две операции для центральных циферблатов, например, A и аналогичную «тыльную» операцию. Получится 14 операций, которых достаточно для решения головоломки (вспомним систему из 14 уравнений!). Действовать можно так:

1) операцией A (точнее, tA, где $t=0, 1, \ldots, 11$) устанавливаем центральную стрелку лицевой стороны на 12 часов;

2) операциями вида $t(A-C)$ устанавливаем лицевые боковые стрелки (центральная останется при этом неподвижной);

3) переворачиваем головоломку и повторяем первые два шага;

4) операциями вида $t(A-B)$ устанавливаем угловые стрелки.

Можно было бы на этом и закончить, но наш алгоритм допускает усовершенствование, точнее, его можно сократить. Если считать «ходом» поворот одной из шестеренок при фиксированной «передаче», то число ходов для 1-го шага равно 1, для 2-го — $2\cdot 4=8$ (на каждый циферблат тратится 2 хода — tA и $-tC$), для 3-го — еще $1+8=9$, для 4-го — $2\cdot 4=8$, а всего — 26. Но ведь мы использовали только 14 разных элементарных операций (A, B, C и получающиеся из них поворотами головоломки), а значит, меняя их порядок, можно свести все к 14 ходам. Вот как это делается:

1) операцией вида tC установим центральную лицевую стрелку параллельно верхней лицевой; поворачивая корпус на 90°, повторим эту процедуру еще 3 раза — в результате 5 стрелок (центральная и боковые) на лицевой стороне станут параллельными;

2) операцией вида tA установим эти 5 стрелок на 12 часов;

3) переворачиваем головоломку и повторяем 1-й шаг;

4) операцией вида tC (на тыльной стороне!) устанавливаем все 5 неугловых стрелок параллельно левой верхней угловой и повторяем это еще 3 раза, поворачивая головоломку на 90° — в результате все 9 стрелок станут параллельными;

5) операцией tA (опять-таки на перевернутой головоломке, т. е. на тыльной стороне) ставим все стрелки на 12 часов. Все.

Сделаем в заключение еще несколько замечаний. Ясно, что наш алгоритм позволяет получить любое из 12^{14} возможных расположений стрелок. При этом мы используем 14 ходов, каждый из которых является повторением (в количестве от 0 до 11) одной из 14 элементарных операций A, B, C и им эквивалентных. С учетом коммутативности имеется всего 12^{14} различных комбинаций этих операций. А это значит, что все они различны и каждому расположению стрелок отвечает только одна такая комбинация.

Итак, если *ограничиться только выделенными нами 14-ю операциями*, можно утверждать, что

от любого расположения стрелок к любому другому можно перейти не

(Окончание см. на с. 75)

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1990 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Донецкий (2), Нижегородский (3), Омский (4), Петрозаводский (5), Уральский (6), Ярославский (7), Рижский технический (8) и институты — Московский институт связи (9), Нижегородский политехнический (10), Томский политехнический (11), Ярославский педагогический (12).

Математика

Алгебра

1 (3). Найдите двузначное число, если оно втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы втрое больше искомого числа.

2 (3). Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном будет 4, а в остатке 1. Если это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 1. Найдите это число.

3 (9). Планку длиной 364 см распилили на две части так, что первая из них оказалась короче второй на 18 %. Найдите длину каждой части.

4 (7). Имеются два сплава, в одном из которых содержится 40 %, а в другом — 20 % серебра. Сколько килограммов второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32 % серебра?

5 (9). Сплав меди и цинка массой в 12,5 кг содержит 40 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал меди и цинка поровну?

6 (7). Два насоса, работая вместе, выкачали из бассейна воду за 12 часов. Если бы сначала один из них выкачал половину воды, а затем другой — оставшуюся половину, то на всю работу им понадобилось бы 25 часов. За сколько часов выкачает всю воду из бассейна каждый из насосов отдельно?

7 (7). Две бригады, работая вместе, могут выполнить работу за 8 часов. Первая бригада, работая одна, может выполнить эту работу на 12 часов быстрее, чем вторая бригада. Сколько часов потребовалось бы первой бригаде для выполнения этой работы?

8 (4). На обработку одной детали первый рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем второй. Сколько деталей каждый из них обработает за 4 часа, если первый обрабатывает за это время на 28 деталей больше второго?

9 (6). Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

10 (2). Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 120 км, на мопеде отправился курьер. Через 30 мин после этого из A вдогонку за первым отправился второй курьер, который, догнав первого и отдав дополнительные поручения начальства, тотчас повернул обратно и двинулся к A с прежней скоростью. Второй курьер прибыл в A на 30 мин раньше, чем первый прибыл в B. Какова скорость второго курьера, если скорость первого равна 30 км/ч?

11 (2). Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 50 км, по спокойному морю отправился на моторной лодке рыбак. Через 1,5 ч из A на скутере вдогонку за первым выехал второй рыбак, который, догнав первого, двинулся обратно к A с прежней скоростью. Когда второй прибыл в A, первый рыбак проделал три четверти пути до B, оставшегося после встречи со вторым. Какова скорость второго рыбака, если скорость первого равна 10 км/ч?

12 (9). В магазине продаются конфеты трех видов. Стоимость покупки 0,8 кг первого, 0,2 кг второго и 0,3 кг третьего вида составляет 10 р. Стоимость покупки 0,5 кг первого, 0,3 кг второго и 0,2 кг третьего вида — 8 р. Сколько потребуется заплатить за покупку 1,1 кг первого, 0,1 кг второго и 0,4 кг третьего вида?

13 (9). Найдите шестой член арифметической прогрессии, если сумма любых первых n членов ее равна 4 n^2.

14 (7). Найдите третий член геометрической прогрессии, если известно, что сумма первого и второго членов составляет 200 % третьего члена, а четвер-

тая степень третьего члена составляет 50 % квадрата четвертого члена.

15 (5). Найдите сумму четырех чисел, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

16 (3). Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 4, а при делении на 3 дают в остатке 2.

17 (9). Определите стороны треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими геометрическую прогрессию, причем произведение этих чисел равно 216.

18 (7). Найдите сумму семнадцати первых членов арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, ..., если $a_4+a_8+a_{11}+a_{13}=16$.

19 (7). Найдите все пятизначные числа вида $74s3t$ (s и t — цифры), которые делятся на 45.

20. Вычислите:

а) (5). $\lg 1000^{2,8}+\lg 0,001^{2,8}$;

б) (8). $\frac{1}{2}\log_5 3+\log_5\sqrt{15}-\frac{1}{3}\log_5\frac{27}{25}$;

в) (9). $\left(\frac{\lg 125-2\lg 2}{\lg\sqrt[3]{4}+\lg 0,2}\right)^2$;

г) (5). $\sin^2 32°+\cos 32°\sin 58°-2,5$;

д) (9). $\sqrt{5\cos(\operatorname{arctg} 0,75)}$;

е) (9). $\cos 72°-\sin 54°$.

21. Докажите равенство:

а) (9). $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}$;

б) (9) $\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) (9). $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\times$
$\times(\sqrt{3}+5)^{-1}=\frac{1}{2}$;

г) (9). $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+2\sin$ [illegible] $\cos\alpha=1$;

д) (9). $\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}=$
$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

е) (9). $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sin\frac{\alpha}{4}$
при $\pi<\alpha<2\pi$.

22. Упростите выражение:

а) (5). $\frac{x^2-\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+x+\sqrt{x})(\sqrt{x}-1)}+2$;

б) (11). $\frac{1-x^2}{2((1-\sqrt{x})^2+2\sqrt{x})(1-x)}$;

в) (11). $\left(\frac{1}{(a^{0,5}+b^{0,5})^{-2}}-\right.$
$\left.-\left(\frac{a^{0,5}-b^{0,5}}{a^{1,5}-b^{1,5}}\right)^{-1}\right)^2(ab)^{-0,5}$;

г) (8). $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\sqrt{(a+b)^2-4ab}-$
$-\left(1+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{-1}$
при $b>a>0$;

д) (9). $\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}-\frac{3^{3/2}-x^{3/2}}{3-x}\right)^2\times$
$\times 10^{-\log_{0,1}(3+2\sqrt{3x}+x)}$;

е) (9). $\left(\frac{\sqrt[4]{a^{-3}}-1}{\sqrt[4]{a^{-1}}-1}+\sqrt[4]{a^{-1}}\right)^{1/2}\times$
$\times\left(a^{-1/2}-\frac{\sqrt[4]{a^{-3}}+1}{\sqrt[4]{a^{-1}}+1}\right)(a^{-0,5}-a)^{-1}$;

ж) (9). $\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\right.$
$\left.+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}$
и вычислите его значение при $a=0,32$, $x=0,08$;

з) (11). $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}}\right):$
$:\sqrt{\frac{a-b}{a}}$,
вычислите его значение при $a=8$, $b=1$;

и) (9). $\frac{4a^{0,25}+bc^{1,5}}{(4+c^{1,5})(a^{0,25}-b)}+$
$+\frac{a^{1/4}c^{3/2}-4b}{(4-c^{1,5})(\sqrt[4]{a}-b)}$;

к) (9). $\left(\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}-2(\sqrt{a}+\sqrt{2})^{-1}\right)\times$
$\times\left(\frac{a\sqrt{a}-2\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{a}}}\right)^{-1}\cdot 7^{\log_{49}a}$;

л) (8). $\frac{8(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)}{3(\cos\alpha+\sin\alpha)}$

и вычислите его значение при $\alpha=75°$;

м) (8). $\frac{\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3}{1+\cos^2 2\alpha-2\cos^4\alpha}$.

23. Решите уравнение:

а) (10). $\sqrt{x^2-5x+6}=x+2$;

б) (11). $\sqrt{3x+1}+1=x$;

в) (8). $\sqrt{5x}-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}=\sqrt{3x+1}$;

г) (11). $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;

д) (7). $|3\sqrt{x}-1|=3$;

е) (7). $\sqrt{|1+x|}=1-2|x|$;

ж) (11). $\sqrt[3]{-12+6\sqrt{4+(2x+1)^3}}+$

$+2x=-1$;

з) (8). $\frac{1}{8}\cdot 6^{3x}=2^{2x}\cdot 3^{3x}$;

и) (10). $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0$;

к) (7). $5^{x+1}+5^{1-x}=10$;

л) (7). $4^{x+2}+3\cdot 4^{x-2}=259/4$;

м) (8). $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

н) (8). $4^x+3^{x+1}\cdot 2^x=4\cdot 9^x$;

о) (7). $2^{x+1}-4\cdot 3^x=0{,}5^{-x}-3^{x+1}$;

п) (5). $4^{\log_2 x}+x^2=8$;

р) (11). $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-4$;

с) (2). $\log_5(5^x-24)=2-x$;

т) (4) $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$;

у) (9). $\log_4 x+\log_x\frac{1}{16}=1$;

ф) (8). $\log_2 x+\log_2(x+5)=1+2\log_2 5$;

х) (9). $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5=1$;

ц) (9). $\sqrt{\log_x\sqrt{2x}}\cdot\log_2 x=-1$;

ч) (3). $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+$

$+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$;

ш) (8). $\log_7(6+7^{-x})=1+x$;

24. Решите тригонометрическое уравнение:

а) (7). $\sin x+\cos 2x+2=0$;

б) (9). $\cos^2 x-\sin^2 x-\sin x=0$;

в) (11). $2\cos x(\cos x-\sqrt{8}\,\mathrm{tg}\,x)=5$;

г) (8). $9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 2x$;

д) (11). $3\,\mathrm{ctg}\,x-3\,\mathrm{tg}\,x+4\sin 2x=0$;

е) (8). $\frac{\sin x}{1-\cos x}=1+\cos x$;

ж) (12). $\sin 2x-\frac{\sin 4x}{4\cos^2 x}=1$;

з) (2). $\mathrm{ctg}\,\frac{3x}{2}-\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}=2\sin x$;

и) (2). $\mathrm{ctg}\,\frac{x}{4}+\mathrm{ctg}\,\frac{3x}{4}=2\sin x$;

к) (8). $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$;

л) (6). $2\cos 8x+4\sin 3x\sin 5x-1=0$;

м) (6). $\sin^4 3x-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=0$;

н) (9). $(1-\cos 2x)\sin^2 x+2\cos^4 x=$

$=0{,}5(5-\cos 4x)$;

о) (3). $(1-\mathrm{tg}\,x)(1+\sin 2x)=1+\mathrm{tg}\,x$;

п) (6). $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=$

$=3\sin 2x$;

р) (4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$;

с) (3). $1+\frac{\cos 2x}{\sin x}=\frac{1+\cos 2x\sin x}{\sin x}$;

т) (3). $1+\mathrm{tg}\,2x=\frac{1-\sin 2x}{\cos^2 2x}$;

у) (3). $(1-\sin 2x)(1-\mathrm{tg}\,x)=\frac{1}{\cos x}-$

$-2\sin x$;

ф) (9). $2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0$;

х) (9). $2\sin^2 3x+\sqrt{3}\sin 6x-1=$

$=2\cos 3x$;

ц) (2). $\sqrt{1+2\sin x}+\cos x=0$;

ч) (7). $\lg\sqrt{\mathrm{ctg}^2 x}=\lg(1/2)-\lg\sin x$;

ш) (9). $\sqrt[3]{1+\lg \operatorname{tg} x}+\sqrt[3]{1-\lg \operatorname{tg} x}=2$;

щ) (7). $\sin(7\pi\sqrt{x})+\cos^2(2\pi\sqrt{x})=$
$=\sin^2(2\pi\sqrt{x})+\sin(\pi\sqrt{x})$;

ь) (9). $\sin^2 x+\cos^2 y+2\sin x+1=0$.

25. Найдите все корни уравнения:

а) (9). $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$, если $0<x<4$;

б) (9). $1+\sin x+\sin 2x=\sin 5\pi/2$, если $x\in[0;\ \pi]$;

в) (2). $2\cos 2x-8\cos x+5=0$, если $\sin x\geqslant 0$.

26. Решите неравенство:

а) (10). $x\leqslant 7-\dfrac{16}{x+1}$;

б) (12). $(x+1)\sqrt{4-x^2}\leqslant 0$;

в) (2). $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

г) (2). $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$;

д) (4). $\sqrt{\left|\dfrac{1}{4}-x\right|}\geqslant x+\dfrac{1}{2}$;

е) (4). $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1$;

ж) (3). $\dfrac{2^{1-x}}{2^x-1}\leqslant 1$;

з) (9). $2^{2x}-15\cdot 11^x<11^x-15\cdot 2^{2x+3}$;

и) (9). $6^{\frac{2x-1}{3-x}}<1$;

к) (9). $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2}<\dfrac{27}{64}$;

л) (8). $\log_3\dfrac{x+2}{3x-1}\leqslant 1$;

м) (8). $\log_{1/2}\log_9(2x+5)>1$;

н) (6). $\log_x\log_2(12-4^x)\geqslant 1$;

о) (6). $\log_{x-1}\log_2(4^x-5)\leqslant 1$;

п) (3). $\log_{1/3}\left(\dfrac{1}{x}\right)\log_x 3>2$;

р) (11). $\log_{1/2}x+\log_{1/2}(x+1)\leqslant$
$\leqslant\log_{1/2}(2x+6)$;

с) (9). $(2x^2-5x+3)^{\log_{0,5}\frac{2x-3}{x+1}}>1$;

т) (6). $\log_{|x-2|}\dfrac{3x-2}{2x-8}<0$;

у) (8). $\dfrac{x^2-x-2}{2-\log_2(x^2-5x+4)}>0$;

ф) (7). $\sqrt{|6\log_2(1/x)-1|}\leqslant 1-3\log_2 x$.

27. Найдите область определения функции:

а) (3). $\lg(7\sqrt{8\log_x 3-2}-$
$-8\log_x 3+10)$;

б) (7). $\sqrt{\log_{1/2}\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+5x+6}}$;

в) (7). $\log_2(1+|1-x^2|-|x^2-4|)$.

28 (7). Решите систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{8-4x}{x+1}>4+\dfrac{x+1}{x-2},\\ |x+4|>|x-3|;\end{cases}$$

29 (7). Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3\sin 3x-11}+\dfrac{1}{8-3\cos 3x}\leqslant 0,\\[2ex] \dfrac{1}{3\sin(3x+7\pi/2)-11}+\\ +\dfrac{1}{8-3\cos(3x+7\pi/2)}\leqslant 0;\end{cases}$$

найдите все ее решения, являющиеся членами арифметической прогрессии $\pi/5$, $-3\pi/5$, $-7\pi/5$, ...

30 (8). Найдите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $x^2-2ax+4=0$ не имеет действительных корней.

31 (8). При каких значениях a уравнение

$$a(x^2+x+1)=x^2-4x-7$$

имеет один корень?

32 (11). При каких значениях a один из корней уравнения

$$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$$

равен удвоенному другому?

33 (2). При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-a^2+1=0$ принимает наименьшее значение?

34 (8). В уравнении $2x^2+ax-6=0$ один из корней равен 3. Найдите a и второй корень.

35 (9). При каких значениях a оба корня уравнения

$$(a-1)x^2-2ax+a+3$$

положительны?

36 (2). При каких значениях m оба корня уравнения

$$x^2+2(m-1)x+4m-7=0$$

отрицательны?

37 (8). Найдите такие значения m, при которых неравенство

$$\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$$

справедливо при любых действительных значениях x.

38 (6). При каких значениях a неравенство

$$ax^2+4x>1-3a$$

справедливо при всех $x>0$?

39 (6). При каких значениях параметра a неравенство

$$(a-1)x^2-4x<a+4$$

справедливо при всех $x<0$?

40 (3). При каких a система

$$\begin{cases} 2x+2(a-1)y=a-2, \\ 2|x+1|+ay=2. \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

41 (7). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|3-x-a|+1=|x-3|$$

не имеет решений.

42 (9). Решите систему уравнений:

а) (9) $\begin{cases} 2|x-1|-5y=1, \\ 7x+5y=-9; \end{cases}$

б) (9). $\begin{cases} x^2+y=3, \\ x-2y=-5; \end{cases}$

в) (2). $\begin{cases} 4^x-25^y=319, \\ 2^x-5^y=7; \end{cases}$

г) (9). $\begin{cases} \log_3(2x+y^2)=0, \\ 2^{x+y^2}-4=0; \end{cases}$

д) (4). $\begin{cases} \log_2(x-y)=5-\log_2(x+y), \\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg 3-\lg y}=1; \end{cases}$

е) (2). $\begin{cases} \log_5^2 x-\log_4^2 y^2=0, \\ \log_5 x+\log_4 y^2=4; \end{cases}$

ж) (9). $\begin{cases} \log_3\log_2 x-\log_3\log_{1/2} y=1, \\ xy^2=4; \end{cases}$

з) (9). $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}. \end{cases}$

43 (12). Может ли квадратное уравнение с целыми коэффициентами иметь корни $-3+\sqrt{7}$ и $\dfrac{2}{\sqrt{7}-3}$? Если да, то составьте это уравнение.

44 (9). Докажите, что при любых действительных значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+y^2+10x+4y+30>0.$$

45. Решите уравнение:

а) (9). $x^2+2y^2+2xy-2x+4y+10=0;$

б) (9). $3x^2+3y^2-4xy-2x-2y+2=0.$

Анализ

1 (10). При каком значении a графики функций $y=4^x$ и $y=\log_a(-x)$ пересекаются в точке с абсциссой $-1/2$? Постройте графики функций.

2 (10). Найдите наименьшее положительное значение m, при котором функции $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=2\sin mx$ пересекаются в точке с абсциссой $\pi/6$. Постройте графики функций и отметьте точку их пересечения.

3 (8). Вычислите $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, если

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x\operatorname{tg} 2x+2{,}5\cos x.$$

4 (11). Решите неравенство $f'(x)\leqslant\varphi'(x)$, где $f(x)=e^x(x^2-3x+1)$, $\varphi(x)=e^x\cdot 2x$. В ответе укажите наибольшее значение x из полученного множества решений.

5 (8). При каком значении x касательная к линии $y=x^2-2x+5$ параллельна прямой $y=2x$?

6 (7). Запишите уравнение касательной к графику функции $y=3e^x+3e$ в точке $x=1$.

7 (9). Дана функция $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[-1{,}5;\ 1]$; найдите промежутки монотонности, экстремумы, нули функции. Постройте ее график.

8 (7). Используя свойства производной, докажите, что для всех $x\in[-2;\ 2]$ справедливо неравенство

$$x^3-3x^2+3x\leqslant 2.$$

9 (10). Найдите критические точки функции

$$y=\sin 3x+\frac{4}{3}\cos 3x-x+2.$$

10 (11). Найдите точку минимума функции

$$y=2x^3-3x^2-36x+10.$$

В ответе укажите ее ординату.

11 (8). Найдите критические точки функции

$$f(x)=\frac{7+x}{2}+\frac{1}{3}\sin 3x$$

на промежутке $[-\pi;\ 0]$.

12 (9). Парабола проходит через точки A, B, C, D, обозначенные в порядке следования. Точки A, C, D имеют координаты $A\ (0;\ 0)$, $C\ (1;\ 1)$, $D\ (2;\ 0)$. Найдите координаты точки B, при которых площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

13 (2). Найдите точки экстремума и интервалы монотонности функции

$$y=3x^4+2x^3-3x^2+2.$$

14 (3). Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=\frac{1}{\cos 2x-\cos 4x+8}.$$

При каких x они достигаются?

15 (3). Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения

$$x^2+(1-3a)x-1=0,\ a\in R.$$

а) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(a)=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} \text{ на отрезке } [-1,\ 1].$$

б) Постройте график функции $f(a)$ на этом отрезке.

16 (3). Пусть $f(x)=(x^2-6)(3-2x)$. Определите

а) интервалы знакопостоянства функции и ее знаки,

б) промежутки монотонности и экстремумы функций.

в) Постройте эскиз графика функции $y=f(x)$ и выясните, сколько действительных корней имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от a?

17 (3). Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой апофема равна $4\sqrt{3}$.

18 (9). В арифметической прогрессии шестой член равен 3, разность прогрессии $d\geqslant 1/2$. При каком значении d произведение первого, четвертого и пятого членов будет наибольшим?

Геометрия

1 (10). Даны три вектора $\bar a\ (-1;\ 2)$, $\bar b\ (2;\ 1)$, $\bar c\ (2;\ 3)$. Разложите вектор $\bar d=\bar a-\bar b-\bar c$ по векторам $\bar a$ и $\bar b$.

2 (7). Известны координаты вершин треугольника: $A\ (0;\ 1)$, $B\ (\sqrt{3};\ 0)$ и $C\ (\sqrt{3};\ 2)$. Найдите стороны AB, AC, угол BAC, а также радиус и координаты центра окружности, описанной около треугольника ABC.

3 (5). Прямоугольный треугольник, площадь которого равна 6, а катеты относятся как 3:4, вписан в окружность. Найдите диаметр этой окружности.

4 (11). Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 и 5. Найдите катеты треугольника. (В ответе запишите сумму длин катетов.)

5 (8). Стороны прямоугольника относятся как 1:4. На большей из них как на диаметре проведена окружность, отсекающая от противоположной стороны прямоугольника отрезок, равный a. Найдите часть площади, общую для прямоугольника и круга.

6 (7). В прямоугольнике $ABCD$ на стороне AD выбрана точка P, а на стороне DC — точки F и Q, после чего проведены отрезки AF и PQ. Известно, что $AD=12$, $CD=17$, $DF=5$; отношение периметров треугольников DPQ и DAF равно $5/12$, а отношение их площадей равно $25/144$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников DPQ и DAF.

7 (7). Из вершины A параллелограмма $ABCD$ с прямым углом CAD опущен перпендикуляр AK на сторону CD. Известно, что $AD=2AK=12$. Из точки M, лежащей на отрезке KC, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны AD и AB соответственно. В четырехугольник $MPAQ$ вписана окружность. Найдите ее радиус.

8 (8). Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с площадью 20. Найдите стороны трапеции.

9 (11). Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=27$, $AC=29$ и медиана $AD=26$.

10 (8). В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

11 (3). Через точку M, лежащую внутри треугольника ABC, проведены прямые PQ, KN, EF, параллельные его сторонам AB, BC, AC. При этом образовались треугольники MEK, MQF, MPN с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь треугольника ABC.

12 (3). Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника как на диаметрах, покрывают этот четырехугольник.

13 (12). Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей из них равен r.

14 (11). Вне окружности радиуса R взята точка A, из которой проведены две секущие: одна проходит через центр, а другая — на расстоянии $1/2\,R$ от центра. Найдите площадь части круга, заключенной между секущими.

15 (12). Две окружности, радиусы которых равны R и r, касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей внешней касательной.

16 (3). Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены хорды AC и AD, касающиеся данных окружностей. Докажите, что

$$AC^2\cdot BD=AD^2\cdot BC.$$

17 (9). Площадь треугольника ABC равна 60. На стороне AC взята точка D так, что $AD:DC=2:3$. Длина перпендикуляра DE, опущенного на сторону BC, равна 9. Найдите BC.

18 (9). В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, соответственно равны 10 и 12. Найдите длину основания.

19 (9). Равнобедренный треугольник с острым углом при вершине и углом α при основании вписан в окружность радиусом R. Найдите площадь этого треугольника.

20 (9). В трапецию с острым углом α и периметром p вписан круг. Найдите высоту трапеции, если один из ее углов равен 90°.

21 (12). В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a, лежащие в перпендикулярных плоскостях. Вычислите объем пирамиды.

22 (9). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α и удалено от середины противоположной стороны на расстояние l.

23 (9). Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, которая отсекает от противоположной грани треугольник, площадь которого равна 16. Найдите боковую поверхность пирамиды, отсеченной проведенной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность всей пирамиды равна 100.

24 (2). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ с вершиной S и стороной основания a. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. На сторонах основания AC и AB взяты точки E и F так, что $AE=\frac{1}{2}AC$, $FB=\frac{1}{2}AB$. Через точки E и F проведена плоскость под углом α к основанию пирамиды, пересекающая грань SBC. Найдите площадь сечения.

25 (2). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S и стороной основания a. На сторонах основания AD и BC взяты точки E и F так, что $AE=\frac{1}{2}AD$, $FC=\frac{1}{2}BC$. Через точки E и F проведена плоскость параллельно грани SAB пирамиды. Найдите площадь получившегося сечения, если боковая грань пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α.

26 (2). Дана правильная треугольная пирамида $SABC$, боковые грани которой наклонены к плоскости основания ABC под углом α. Из точки D, лежащей на высоте AE основания пирамиды и такой, что $AD:AE=1:3$, опущен перпендикуляр длиной p на боковое ребро AS. Найдите объем пирамиды.

27 (12). В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. Через диагональ основания параллельно боковому ребру проведена плоскость. Определите площадь сечения, а также объем треугольной пирамиды, отсекаемой секущей плоскостью.

28 (6). Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину A и середины M и P ребер SB и SD. Определите, в каком отношении сечение делит ребро SC.

29 (6). Основанием усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Точки M и P лежат на боковых ребрах BB_1 и DD_1 соответственно. Известно, что $B_1M:MB=1:2$, $D_1P:PD=1:2$, $AB:A_1B_1=3:1$, $CD:AB=1:2$. Постройте сечение пирамиды, проходящее через вершину A и точки M и P. Определите, в каком отношении сечение делит ребро CC_1.

30 (11). Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Определите объем параллелепипеда.

31 (9). Докажите, что объем конуса равен произведению его боковой поверхности на $1/3$ расстояния от центра основания до образующей.

32 (9). В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине кото-

рого равен α. Найдите объем конуса.

33 (10). В правильной треугольной пирамиде высота основания равна b, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом φ. Через вершину пирамиды и одну из вершин основания проведена плоскость, которая пересекает основание по прямой, образующей угол β с высотой основания. Найдите площадь сечения.

34 (8). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

35 (9). Длина каждого ребра тетраэдра $SABC$ равна a. Найдите расстояние между ребром SA и ребром BC.

36 (9). Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной 6. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

37 (6). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, у которого $AB=BC=a$, $\angle ABC=90°$. Ребро SB перпендикулярно плоскости основания и равно $2a$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

38 (4). Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Боковые ребра пирамиды составляют с ее высотой угол β. Найдите объем пирамиды.

39 (9). В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найдите объем конуса, если угол между высотой и образующей α.

40 (8). Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найдите отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β.

41 (9). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 8. На ребре AA_1 взята точка E так, что $AE=2$. Найдите объем пирамиды, вершиной которой является A_1, а основанием — сечение куба, проходящее через точки D, E и произвольную внутреннюю точку ребра BB_1.

Физика*)

Механика

1 (3). Тело в момент $t=0$ начинает двигаться вдоль оси X из состояния покоя. Ускорение тела задано графиком на рисунке 1. Найдите максимальное значение скорости тела.

2 (8). Найдите радиус вращающегося колеса, если линейная скорость точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости точки, лежащей на $l=3$ см ближе к оси колеса.

3 (8). Поезд массой $m=2\cdot10^6$ кг, движущийся со скоростью $v=36$ км/ч, остановился, пройдя $l=400$ м с начала торможения. Определите силу торможения.

4 (3). Найдите зависимость от угла α величины силы трения F (рис. 2). Коэффициент трения μ, масса тела m.

5 (1). На горизонтальном асфальте стоят санки массой $m=50$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть за веревку, чтобы стронуть санки с места, если коэффициент трения скольжения полозьев по асфальту $\mu=0{,}70$?

6 (1). Поезд, проезжая мимо светофора со скоростью $v=36$ км/ч, начал тормозить. На каких расстояниях от светофора будет находиться поезд спустя время $t_1=1$ мин и $t_2=2$ мин после начала торможения? Масса поезда $m=2{,}5\cdot10^6$ кг, сила трения при торможении $F=2{,}5\cdot10^5$ Н.

7 (11). Шкив радиусом $R=20$ см приводится во вращение грузом, подвешенным на нерастяжимой невесомой нити, постепенно сматывающейся со шкива (рис. 3). В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением $a=2$ см/с^2. Определите угловую скорость шкива в момент времени, когда груз пройдет путь $s=100$ см.

---

*) Во всех задачах табличные данные считайте известными.

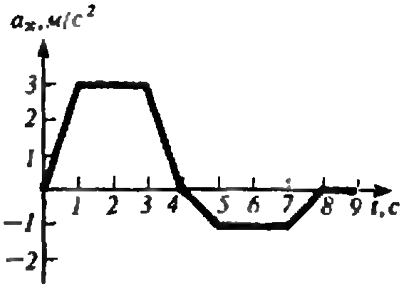


Рис. 1.

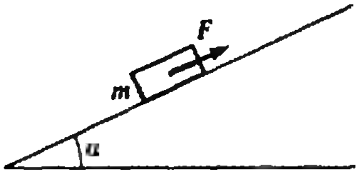


Рис. 2.

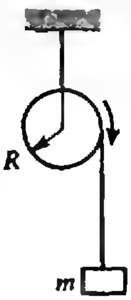


Рис. 3.

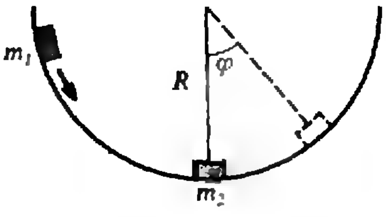


Рис. 4.

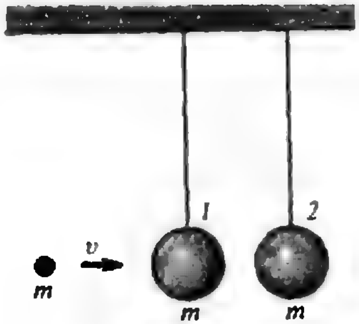


Рис. 5.

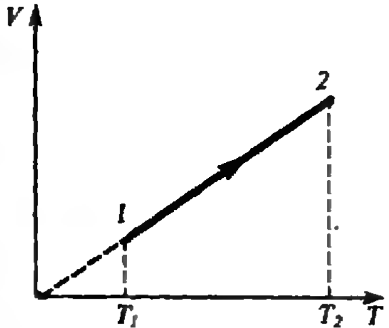


Рис. 6.

8 (5). Через невесомый блок перекинута веревка с грузами, массы которых m и $2m$. Пренебрегая трением, найдите давление блока на ось в тот момент, когда грузы еще неподвижны.

9 (1). К пружинным весам подвешен блок, через который перекинута нить. К концам нити привязаны грузы, массы которых относятся как 1 : 5. Сначала грузы неподвижны, а затем приходят в движение. Во сколько раз при этом изменяется показание весов? Массой блока и нити, а также трением можно пренебречь.

10 (1). Космический орбитальный комплекс «Мир» в автоматическом режиме двигался вокруг Земли практически по круговой орбите: максимальное удаление от поверхности Земли составляло $h_1 = 400$ км, минимальное — $h_2 = 372$ км. Период обращения был равен $T = 92{,}1$ мин. Оцените по этим данным ускорение свободного падения на поверхности нашей планеты, если ее радиус $R = 6370$ км.

11 (8). Мальчик, масса которого $m_1 = 50$ кг, бежит со скоростью $v_1 = 2$ м/с, догоняет тележку, движущуюся в том же направлении со скоростью $v_2 = 0{,}5$ м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью стала двигаться тележка с мальчиком? Масса тележки $m_2 = 100$ кг.

12 (10). С края гладкой полусферы соскальзывает небольшое тело массой m_1 и ударяется неупруго о тело массой m_2, лежащее на дне полусферы (рис. 4). Найдите угловую амплитуду качаний тел после удара.

13 (8). Камень массой $m = 0{,}04$ кг бросают вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Определите полную энергию камня в конце четвертой секунды. Сопротивлением воздуха пренебречь. Потенциальная энергия камня в начальный момент равна нулю.

14 (5). Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела от $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 6$ м/с на пути $l = 10$ м? На всем пути действует постоянная сила трения $F_{тр} = 2$ Н, масса тела $m = 1$ кг.

15 (11). Резиновый мяч массой $m = 200$ г и объемом $V = 200$ см^3 погружают в воду на глубину $h = 3$ м и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать.

16 (10). Небольшое тело массой m лежит на вершине шероховатой полусферы радиусом R. Телу сообщили скорость v_0, и оно начало скользить. В момент, когда тело достигло точки, радиус-вектор которой составил угол α с вертикалью, произошел отрыв тела от сферы. Найдите работу по преодолению сил трения при движении по сфере. Найдите также изменение импульса тела за это же время.

17 (10). Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (рис. 5). Начальная скорость пули v, масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1 (8). Какой высоте ртутного столба (в метрах) соответствует давление $p = 5{,}44 \cdot 10^4$ Па?

2 (1). При нагревании абсолютная температура воздуха в камере мяча возросла на 10 %, а его объем — на 1 %. На сколько процентов увеличилось при этом давление воздуха в мяче?

3 (8). Из баллона выпустили $\Delta m = 7{,}5$ кг газа, при этом оставшийся газ оказался под давлением $p = 2{,}5 \cdot 10^6$ Па. Определите массу газа, который был в баллоне при давлении $p_0 = 10^7$ Па. Температура газа постоянна.

4 (1). Объем газа при нагревании изменяется по закону $V = \alpha\sqrt{T}$, где α — постоянная величина. Начертите график этого процесса в p, V координатах.

5 (10). Цилиндрический стакан опущен отверстием вниз в воду и плавает в ней так, что внутренняя поверхность дна находится на одном уровне с поверхностью

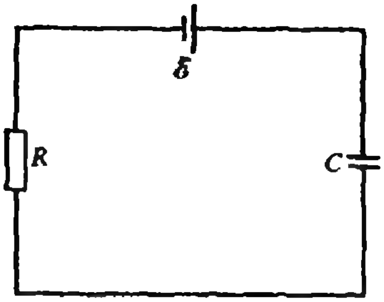


Рис. 7.

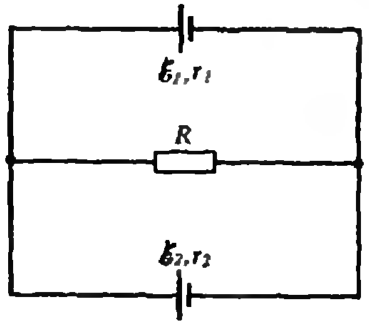


Рис. 8.

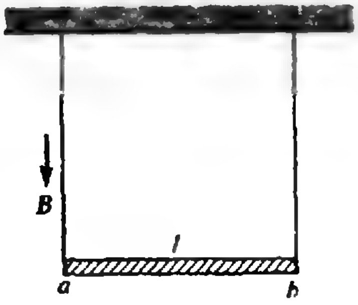


Рис. 9.

воды в сосуде. Масса стакана $m=400$ г, площадь дна стакана $S=10$ см^2. Давление воздуха в стакане перед погружением $p=760$ мм рт. ст. Какую часть стакана будет занимать воздух после погружения?

6 (5). Баллон, содержащий $m_1=1$ кг азота, во время испытаний взорвался при температуре $t_1=350$ °С. Какое количество водорода (в граммах) можно хранить в этом баллоне при $t_2=20$ °С, имея пятикратный запас прочности? Считать прочность баллона не зависящей от температуры.

7 (10). Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом $V=120$ м^3 при повышении температуры от $t_1=15$ °С до $t_2=25$ °С? Атмосферное давление $p=10^5$ Па.

8 (1). Газ, состоящий из трехатомных молекул, находится в закрытом баллоне. Какая часть молекул газа продиссоциировала на атомы, если при увеличении абсолютной температуры газа в n раз его давление увеличилось в $m=1{,}2$ n раза? Объем баллона не изменяется.

9 (3). Какую работу совершит один моль идеального газа в процессе *1—2*, если его температура увеличилась от T_1 до T_2 (рис. 6)?

10 (1). Во сколько раз плотность сухого воздуха больше, чем плотность содержащегося в нем водяного пара, если относительная влажность воздуха $\varphi=90$ %, атмосферное давление $p=100$ кПа, а давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха $p_н=2{,}2$ кПа?

11 (1). Из плохо закрытого крана капает вода. Определите массу вытекающей за сутки воды, если время между отрывом ближайших капель $\Delta t=1$ с. Диаметр шейки капли в момент ее отрыва считайте равным внутреннему диаметру трубы крана $d=1{,}8$ см.

12 (11). В воду массой $m_1=1$ кг при температуре $t_1=20$ °С поместили $m_2=200$ г льда при $t_2=-8$ °С. Какая установилась температура?

13 (5). Лед массой $m_1=20$ кг при температуре $t_1=-20$ °С опущен в воду, масса которой $m_2=20$ кг, а температура $t_2=70$ °С. Весь ли лед растает?

14 (10). Междугородный автобус прошел путь $l=30$ км за $t=1$ ч. Двигатель при этом развивал мощность $N=70$ кВт при КПД $\eta=25$ %. Сколько дизельного топлива, плотность которого $\rho=800$ кг/м^3, сэкономил водитель в рейсе, если норма расхода горючего $V_0=40$ л на $l_0=100$ км пути? Теплота сгорания дизельного топлива $q=42\cdot10^6$ Дж/кг.

Основы электродинамики

1 (8). Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1=7\cdot10^{-9}$ Кл и $q_2=-14\cdot10^{-9}$ Кл равно $l=5$ см. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $a=3$ см от положительного заряда и $b=4$ см от отрицательного заряда.

2 (10). Воздушный плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d опускают в вертикальном положении наполовину в жидкий диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью ε. Какова емкость конденсатора после погружения? На какое расстояние надо раздвинуть пластины, не вынимая их из диэлектрика, чтобы емкость конденсатора стала такой, какой была до погружения?

3 (3). Конденсатор емкостью C заряжается от источника с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 7). Какое количество теплоты выделяется при этом на резисторе?

4 (8). Через поперечное сечение проводника за каждые $t=10$ с проходит $n=2\cdot10^{20}$ свободных электронов. Определите силу тока в проводнике.

5 (1). Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом замыкают на резистор сопротивлением $R_1=500$ Ом. Для измерения силы тока в резисторе последовательно с ним включают амперметр, сопротивление которого $R_2=10$ Ом. Какую относительную погрешность допускают,

если показание амперметра принимают за искомую величину?

6 (1). Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь. При изменении ее сопротивления сила тока в цепи также изменяется. Начертите график зависимости напряжения на клеммах источника от силы тока.

7 (10). В схеме, изображенной на рисунке 8, $\mathscr{E}_1=2$ В, $\mathscr{E}_2=1$ В, $r_1=r_2=r=$ $=1$ Ом. При каком сопротивлении R ток через источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ не пойдет?

8 (8). Две электрические лампочки, соединенные параллельно, подключены к источнику тока. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, второй — $R_2=$ $=240$ Ом. Во сколько раз мощность, выделяемая второй лампочкой, больше мощности, выделяемой первой?

9 (1). Проволочное кольцо подсоединено к аккумулятору. Контакты делят длину кольца в отношении $m:n$, при этом в кольце выделяется тепловая мощность P_1. Какая мощность будет выделяться в кольце, если контакты будут делить его длину в отношении $(m-1):(n+1)$? Внутренним сопротивлением аккумулятора можно пренебречь.

10 (5). Две лампы, соединенные последовательно, включены в городскую сеть с напряжением 220 В. Какова мощность каждой лампы в этом соединении, если на цоколе одной из них значится 50 Вт и 220 В, а на цоколе другой — 100 Вт и 220 В? Считать, что сопротивления ламп не зависят от потребляемой мощности.

11 (1). Электрический нагреватель подключен к двум последовательно соединенным одинаковым источникам тока. Покажите, что КПД нагревателя повысится, если его подключить только к одному источнику. Сопротивление нагревателя считайте постоянным.

12 (11). При силе тока $I_1=4$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1=18$ Вт, при силе тока $I_2=2$ А — соответственно $P_2=10$ Вт. Определите ЭДС батареи.

13 (1). Неоновая лампочка включена в электросеть. Лампочка зажигается и гаснет при напряжении на ее электродах в n раз меньшем, чем амплитудное значение напряжения в сети. Во сколько раз продолжительность одной вспышки лампочки больше промежутка между вспышками?

14 (8). Прямой проводник, по которому течет ток $I=50$ А, расположен в магнитном поле с индукцией $B=2$ Тл так, что образует угол $\alpha=30°$ с линиями индукции. Под действием магнитного поля проводник переместился на $d=0{,}5$ м, и при этом была совершена работа $A=10$ Дж. Определите длину проводника.

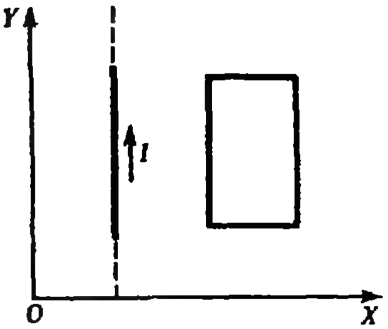


Рис. 10.

15 (10). Проводник ab длиной l и массой m подвешен на тонких невесомых проволочках в однородном магнитном поле (рис. 9). При прохождении по проводнику тока I он отклоняется так, что нити образуют с вертикалью угол α. Какова индукция магнитного поля? Магнитные линии перпендикулярны проводнику.

16 (3). В плоскости XY расположены длинный провод с током I и проводящая рамка (рис. 10). Возникает ли индукционный ток в рамке при ее перемещении а) вдоль OX; б) вдоль OY? Укажите направление индукционного тока.

17 (11). В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл расположена плоская проволочная рамка, площадь которой $S=10^3$ см^2, а сопротивление $R=2$ Ом. Рамка расположена так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции магнитного поля, и замкнута на гальванометр. При повороте рамки на некоторый угол через гальванометр протекает заряд $q=7{,}5\cdot10^{-3}$ Кл. На какой угол (в градусах) повернули рамку?

Оптика

1 (11). На плоскопараллельную прозрачную для света пластину толщиной $d=2$ см падает световой луч под углом $\alpha=60°$. Определите угол преломления этого луча, если при выходе из пластины луч смещается относительно первоначального направления на $l=1$ см.

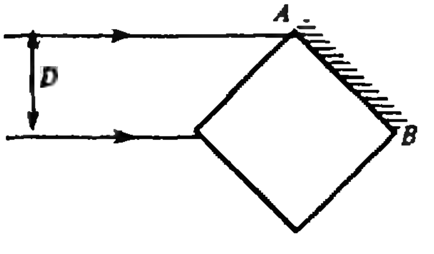


Рис. 11.

2 (10). Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения $\alpha_0 = 42°23'$. Определите скорость распространения света в скипидаре.

3 (1). Параллельный пучок света шириной $D = 10$ мм падает на стеклянный кубик (рис. 11). Определите ширину светового пучка, который после прохождения через кубик, попадает на экран Э, если грань кубика AB посеребрена, а показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

4 (1). Луч света, проходя через прямую правильную треугольную стеклянную призму, отклоняется от первоначального направления распространения на угол $\theta = 60°$. Определите показатель преломления стекла, если внутри призмы луч распространяется параллельно одной из ее граней.

5 (1). У окна с двойными рамами стоит цветок. В окне видны два его изображения. На сколько удалены друг от друга эти изображения, если расстояние между стеклами рам $d = 10$ см?

6 (8). На каком расстоянии от двояковыпуклой линзы, фокусное расстояние которой $F = 40$ см, надо поместить предмет, чтобы его действительное изображение было таких же размеров, как предмет?

7 (1). Постройте действительное изображение предмета в собирающей линзе и докажите, что ее оптический центр и главные фокусы делят расстояние между предметом и его изображением на такие четыре части, для которых произведение длин крайних частей равно произведению длин средних.

8 (1). Переднее фокусное расстояние нормального ненапряженного глаза человека равно $F_1 = 17{,}1$ мм, заднее — $F_2 = 22{,}8$ мм. Чем обусловлено такое различие?

9 (1). При переходе света из одной прозрачной среды в другую изменяется его длина волны, а частота остается постоянной. Какие доказательства можно привести в пользу этих утверждений?

10 (1). Объектив фотоаппарата покрыт слоем прозрачного диэлектрика толщиной $h = 0{,}525$ мкм. Обеспечит ли этот слой просветление объектива для зеленого света с длиной волны $\lambda = 546$ нм, если показатель преломления диэлектрика $n = 1{,}31$?

Квантовая физика

1 (10). В процессе фотоэффекта электроны, вырываемые с поверхности металла излучением частотой $\nu_1 = 2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются тормозящим полем при разности потенциалов $U_1 = 7$ В, а при частоте $\nu_2 = 4 \cdot 10^{15}$ Гц — при разности потенциалов $U_2 = 15$ В. По этим данным вычислите постоянную Планка.

2 (10). Гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме, дает излучение монохроматического света с длиной волны $\lambda = 630$ нм, развивая мощность $P = 40$ мВт. Сколько фотонов излучает лазер за одну секунду?

3 (11). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $P = 2 \cdot 10^8$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если в течение суток расход урана ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ составляет $m = 0{,}54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, в среднем равная $w = 3{,}2 \times 10^{-11}$ Дж.

Публикацию подготовили
А. Егоров, В. Тихомирова

(Начало см. на с. 60)

более чем за 14 ходов, причем последовательность ходов определена однозначно (с точностью до порядка).

В этом — разительное отличие «часов Рубика» от его «волшебного кубика», для которого не только нет речи о какой-либо единственности решения, но и вопрос о кратчайшем алгоритме так и остается открытым (см. статью «Математика волшебного кубика» в «Кванте» № 8, 1982 г.). Более того, с математической точки зрения «часы» вообще можно считать тривиальной головоломкой, поскольку ее решение сводится к линейным уравнениям. Вот к каким последствиям приводит простенькое свойство коммутативности!

И все же и в этой головоломке остается вопрос, над которым можно подумать. Если пустить в ход все 30 элементарных операций, то однозначность решения, конечно, нарушится, а многие операции можно будет сократить. *Верно ли, что и при таком расширенном арсенале ходов найдутся положения стрелок, до которых нельзя будет добраться быстрее, чем за 14 ходов?* Ждем ваших ответов.

В. Дубровский

„Квант" улыбается

Полуправда о полупроводниках

В настоящее время исследования в области полупроводников подвергаются столь интенсивному математическому обстрелу и столь богаты такими неудобоваримыми новыми понятиями как ловушки, дефекты, дырки, вакансии и проч., что за дырками уже почти не видно полупроводника. Поэтому давно настало время напомнить о фундаментальных представлениях и аксиомах, призванных облегчить жизнь пытливому и справедливо недоверчивому читателю, а заодно избавить его от знакомства с тоннами бессмысленных статей, которым все равно через пять лет суждено превратиться в гору макулатуры.

Первая Догма полупроводниковой веры звучит так:

ЧТО БЫ НИ ПРОИСХОДИЛО, ВО ВСЕМ СЛЕДУЕТ ВИНИТЬ ЭЛЕКТРОН (за его отрицательный заряд, его отрицательный моральный облик и т. п.).

Металлы являются исключением в том смысле, что они хорошо проводят электрический ток. Это объясняется тем, что в них имеются отбившиеся от рук электроны, и любое дурное влияние, как например, электрическое поле, заставляет их пускаться во все тяжкие.

Если кусок полупроводника (т. е. не совсем неметалла) подвесить на красной нитке в центре холла конференц-зала, и если присутствующие будут достаточно горячо спорить на эту тему, то в итоге, возможно, удастся определить знак носителей заряда в полупроводнике. Это носит название «эффекта холла».

Неоднократное применение эффекта холла позволило определить, что в одних полупроводниках переносчиками заряда являются электроны, в то время как в других заряд переносят положительные персонажи, которыми электроны, естественно, быть не могут по определению (см. Догму).

В итоге несчастные полупроводники были разбиты на две категории:

1) Полупроводники n-типа (n — нормальный), в которых электроны безобразничают вполне прилично.

2) Полупроводники p-типа (p — распущенный), в которых электроны безобразничают совсем уж неприлично.

Физики-твердотельщики никак не соглашались с тем, что положительными носителями могут быть положительные электроны (позитроны), поскольку последние уже были открыты физиками-ядерщиками и в этой идее не было бы ничего нового. Поэтому после долгих бессонных ночей, проведенных за ДЫРчащим оборудованием, родилась очень новая и очень оригинальная идея — положительные носители — это ДЫРКИ!

Если электрон срывается с места и полный сомнительных намерений направляется в Зону проводимости, то все так радуются, что освобожденную им вакансию называют «положительной дыркой». Когда вакансию заполняет другой электрон, считается приличным (особенно в присутствии дам) говорить, что дырка «рекомбинировала».

В любом куске твердого тела есть масса всяких странностей, таких как фононы, экситоны, ловушки и т. д. Будучи одурманены фотонами и фононами, электроны с легкостью попадают в расставленные им ловушки. Это вызывает некоторую путаницу, так как воспитанные люди не говорят, что электрону потом все-таки удается выбраться из ловушки, а предпочитают уклончиво бормотать что-то о попадании в ловушку дырки. Однако эта путаница легко устранима, если твердо усвоить фундаментальные представления и не обращать внимания на причуды воспитания.

Следует упомянуть также Табу полупроводников. Из приведенного выше хитроумного определения следует, что дырки имеют отрицательную массу. Это означает, что если в полупроводник напихать достаточное количество дырок, он должен воспарить как воздушный шарик. Легко заметить, что в беседах физики обычно уклоняются от обсуждения этой темы. Тому имеется две причины.

а) Они находятся в не очень удобном положении, так как эта идея совсем не оригинальна. Ее давным-давно высказали химики, придерживавшиеся флогистонной теории (правда, сомнительно, чтобы физики знали химию).

б) Эта тематика засекречена, поскольку именно такой метод борьбы с силой тяжести втихую воплощается в ракетах, служащих для уничтожения ракет, служащих для уничтожения ракет.

Автор надеется, что изложением основных фактов о полупроводниках он поможет читателю вести на данную тему самые ученые беседы без риска быть разоблаченным. При этом нужно лишь следовать двум простым правилам (одной Догме и одному Табу) и не забывать строить серьезную физиономию.

Желаем удачи!

М. А. Вайнор. Факультет полумер и весов Политехнического института высших исследований.

(Selected Papers of The Journal of Irreproducible Results, 1981, перевод О. Мацарской)

Ответы, указания, решения

Работа и изменение энергии идеального газа

1. $A=\dfrac{R(T_2-T_1)^2}{2\sqrt{T_2\,T_1}}$.

2. $A_{12}=\dfrac{9}{17}-\left(\dfrac{4}{3}RT_1+Q\right)=625$ Дж.

3. $Q_{\text{отв}}=33/16\ RT_1$. Указание. На участке $1-2$ температура уменьшается от максимальной до T_2.
4. $\eta=\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2$.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1990 году

Математика

Алгебра

1. 27. 2. 13. 3. 164 см, 200 см. 4. 40/3 кг. 5. 2,5 кг. 6. 20 ч, 30 ч. 7. 12 ч. 8. 48 и 20. 9. 3 ч. 10. 40 км/ч. 11. 20 км/ч. 12. 12 р. Указание. Пусть x, y и z — стоимость 1 кг первого, второго и третьего вида конфет. По условию, $8x+2y+3z=100$, $5x+3y+2z=80$. Чтобы найти $A=1{,}1x+0{,}1y+0{,}04z$, достаточно заметить, что $10A=2(8x+2y+3z)-(5x+3y+2z)$.

13. 44. 14. $\pm\sqrt{2}/4$; $\pm\sqrt{2}/2$. 15. -15. 16. 41 100. Указание. Числа, делящиеся на 4 и дающие при делении на 3 в остатке 2, имеют вид $12k+8$ (k — целое число). 17. 4, 6, 9 и 6, 6, 6. Указание. Пусть a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника. Тогда $a_1a_3=a_2^2$, $a_2^3=216$, т. е. $a_2=6$, $a_1a_3=36$. 18. 68. 19. 74835; 74430. 20. а) 0; б) 7/6; в) 9; г) $-3/2$; д) 2; е) $-1/2$. 22. а) 3; б) 1/2; в) 1; г) $a/(b-a)$; д) $3x$; е) $1/(1+\sqrt{a}+a)$; ж) $\sqrt{ax}/(a-2x)$, 1; з) $4a/b$, 32; и) $(16+c^3)/(16-c^3)$; к) 1; л) $8\left(1-\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)/3$; 2; м) $4\operatorname{ctg}^4\alpha$. 23. а) 2/9; б) 5; в) 5; г) 20; д) 16/9; е) 0; ж) $-1/2$; з) 3; и) 1; к) 0; л) 1; м) -1; н) 0; о) 0; п) 2; р) -5; с) 2; т) 0; 2; у) 16, 1/4; ф) 5; х) 4; ц) 1/2; ч) $-1/4$; ш) 0.

24*). а) $\frac{\pi}{2}(4k-1)$; б) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; в) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k$; г) $\pi(2k+1)/4$; д) $\pi(3k\pm1)/3$; е) $\pi(2k+1)$, $\pi(4k+1)/2$; ж) $\pi(4k+1)/4$; з) $\pi(2k+1)$, $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{17}}{4}+2\pi k$; и) $k\pi$, $k\neq4m$; $2\pi(6k\pm1)/3$; к) $\pi k/2$, $\pi(6k\pm1)/6$; л) $\pi(6k\pm1)/6$; м) $\pi(4k-1)/24$; н) $\pi k/2$; о) $\pi(4k-1)/4$, $k\pi$; п) $\pi k/2$, $\pi(6k\pm1)/6$; р) $\pi(4k+1)/4$. Указание. Приведите уравнение к виду $(\sin x+\cos x)^3=4\sin x(\sin^2x+\cos^2x)$, после чего разделите левую и правую части на $\cos^3x$ ($\cos x\neq0$!) и выполните замену $t=\operatorname{tg}x$; с) $\pi(4k+1)/2$; т) $\pi(2k+1)/2$, $\pi(4k+1)/4$; у) $\pi(4k+1)/4$, $2k\pi$; ф) $\pi(4k-1)/4$; х) $2\pi(3k+1)/27$, $2\pi(3k+1)/9$; ц) $\pi(2k+1)$; ч) $\pi(3k+(-1)^k)/3$; ш) $\pi(4k+1)/4$; щ) $(2k+1)^2/64$, $k\geqslant0$; $((12k-1)/18)^2$, $k>0$; $((12k+7)/18)^2$, $k\geqslant0$; ь) $(-\pi/2+2k\pi;\ \pi/2+\pi l)$.
25. а) $\pi/6$, $7\pi/6$; б) 0; $2\pi/3$, π; в) $\pi(6k+1)/3$.

26. а) $(-\infty;\ -1)\cup\{3\}$; б) $[-2;\ 1]$; в) $(-\infty;\ -1]\cup(8;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 1]\cup(5;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 0]$; е) $[-1/2;\ 3-2\sqrt{3})$; ж) $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$; з) $[2;\ \infty)$; и) $(-\infty;\ 1/2)\cup(3;\ +\infty)$; к) $(-1;\ 7)$; л) $(-\infty;\ -2)\cup(5/8;\ +\infty)$; м) $(-2;\ -1)$; н) $(1;\ \log_2 3]$; о) $[\log_2(5/2);\ 2)$; п) $(1;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; р) $[3;\ +\infty]$; с) $(2,\ 4)$; т) $(-1;\ 2/3)\cup(3/2;\ 2)\cup(2;\ 3)$; у) $(-1;\ 0)\cup(4;\ 5)$; ф) $(0;\ 1]$. 27. а) $(3^{4/33};\ 81)$; б) $[-1;\ 5]$; в) $(-\infty;\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};\ +\infty)$. 28. $(-1/2;\ 1)\cup(1;\ 2)$. 29. $\pi(2k+1)/3$, $k=6l+1$, $l<0$. 30. -1. 31. 1; 2; $-22/3$. 32. -4. 33. 4/5. 34. $a=-4$; $x=-1$. 35. $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ 3/2]$. 36. $(7/4;\ 2]\cup[4;\ +\infty)$. 37. $(-\infty;\ -1/2)$. 38. $[1/3;\ +\infty)$. 39. $(-3;\ 0)$. 40. $a\in(2/3;\ 2)$; $(-a/2;\ 1)$. 41. $(-1;\ 1)$. 42. а) $(-2;\ 1)$; б) $(-1;\ 2)$, $(1/2;\ 11/4)$; в) $(\log_2(184/7);\ \log_2(135/7))$; г) $(-1;\ \pm\sqrt{3})$; д) $(6;\ 2)$; е) $(25;\ \pm4)$; ж) $(64;\ 1/4)$; з) $(1/81;\ -3)$, $(27,\ 4)$. 43. $x^2+6x+2=0$. 45. а) $(4;\ -3)$. Указание. Уравнение приводится к виду $(x+y-1)^2+(y+3)^2=0$; b) $(1;\ 1)$.

Анализ

1. 1/4. 2. 2. 3. $-3/2$. 4. 4. 5. 2. 6. $y=3ex+3e$. 7. Промежутки убывания: $(-\infty;\ -3)$ и $(-1;\ +\infty)$. Промежутки возрастания: $(-3;\ -2)$ и $(-2;\ -1)$. $\max\limits_{-1{,}5\leqslant x\leqslant1}f(x)=f(-1)=2$. 9. $-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}\pm\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{5}+\frac{2k\pi}{3}$.
10. -71. 11. $-8\pi/9$, $-4\pi/9$, $-2\pi/9$. 12. $(1/2;\ 3/4)$. 13. $x=-1$ и $x=1/2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума. Промежутки возрастания: $(-1;\ 0)$ и $(1/2;\ +\infty)$. Промежутки убывания: $(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1/2)$.
14. $\min f(x)=f\left(\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+k\pi\right)=\frac{8}{33}$, $\max f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=1$ Указание. Выразите знаменатель дроби через $t=\cos 2x$ и исследуйте полученную функцию от t на отрезке $[-1;\ 1]$. 15. $\max\limits_{-1\leqslant a\leqslant1}f(a)=f(1/3)=-2$, $\min\limits_{-1\leqslant a\leqslant1}f(a)=f(-1)=-15$. 16. а) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;\ -\sqrt{6})\cup(3/2;\ \sqrt{6})$; $f(x)<0$ при $x\in(-\sqrt{6};\ 3/2)\cup(\sqrt{6};\ +\infty)$. б) Убывает на промежутках $(-\infty;\ -1)$ и $(2;\ +\infty)$, возрастает на промежутке $(-1;\ 2)$, в) 1 корень при $a<-25$ и $a>2$; 2 корня при $a=2$ и $a=-25$; 3 корня при $-25<a<2$. 17. $144\sqrt{2}$. 18. 2,4.

Геометрия

1. $\bar d=(\bar a-12\bar b)/5$. 2. $AB=AC=BC=2$. 3. 5. 4. 14. 5. $a^2(2\pi+3\sqrt{3})/36$. 6. 91/24, 119/24. Указание. Докажите, что $PQ\parallel AF$. 7. $3-\sqrt{3}$. Указание. MA — биссектриса угла BAD. 8. 2, 5, 5, 8. 9. 270. 10. 25. 11. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. 12. Указание. Если какая-то точка не покрыта, то все углы, под которыми из этой точки видны стороны, меньше $\pi/2$. 13. $r(\sqrt{2}+\sqrt{6})/2$. 14. $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. 15. $2Rr/(R+r)$.
16. Указание. Докажите, что треугольники ABC и ABD подобны. 17. 8. 18. 15. 19. $2R^2\sin^2\alpha\sin2\alpha$. 20. $(p\sin\alpha)/2(1+\sin\alpha)$. 21. $a^3/8$. 22. $2l^3\sqrt{3}/(27\sin^2\alpha\cos\alpha)$. 23. 81. 24. $3a^2\sqrt{3}/(64\cos\alpha)$. 25. $3a^2/(16\cos\alpha)$. 26. $p^3\sqrt{3}(4+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}/\operatorname{tg}^2\alpha$. 27. $(b^2\cos\alpha)/2$, $(b^3\sin\alpha\cos^2\alpha)/6$. 28. 1:2. 29. 2:9. 30. 144.

---

*) Здесь и далее предполагается, что k, l, $m\in\mathbf{Z}$.

32. $\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}/(12\sin\frac{\alpha}{2})$. **33.** $b^2\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi+4\sin^2\beta}/$ $/(6\cos\beta)$. **34.** $(a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi)/6$. **35.** $a/\sqrt{2}$. **36.** 4. **37.** $a/4$. **38.** $(b^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta)/6$. **39.** $\pi r^3\operatorname{ctg}^3(45^\circ-$ $-\frac{\alpha}{2})/(3\sin\alpha\cos^2\alpha)$. **40.** $\sin\alpha/(4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2})$. **41.** 128.

Физика

Механика

1. $v_{max}=9$ м/с.
2. $R=5/8l=5$ см.
3. $F=mv^2/(2l)=2,5\cdot10^5$ Н.
4. $F=mg\sin\alpha$ при $\operatorname{tg}\alpha<\mu$;
$F=\mu mg\cos\alpha$ при $\operatorname{tg}\alpha>\mu$.
5. $F_{min}=\mu mg/\sqrt{1+\mu^2}=286$ Н.
6. $l_1=vt_1-Ft_1^2/(2m)=420$ м;
$l_2=mv^2/(2F)=500$ м.
7. $\omega=\sqrt{2as}/R=1$ $с^{-1}$.
8. $F=3mg$.
9. $F_1/F_2=3$.
10. $g=4\pi^2(R+(h_1+h_2)/2)^3/(T^2R^2)=9,8$ м/с^2.
11. $v=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)=1$ м/с.
12. $\varphi_m=\arccos(1-m_1^2/(m_1+m_2)^2)$.
13. $E=mv_0^2/2=18$ Дж.
14. $A=m(v_2^2-v_1^2)/2+F_{тр}l=36$ Дж.
15. $H=h(\rho V/m-1)=0,8$ м.
16. $A_{тр}=0,5m(v_0^2+2gR(1-1,5\cos\alpha))$;
$\Delta P=m\sqrt{v_0^2+gR\cos\alpha-2v_0\sqrt{gR\cos^3\alpha}}$.
17. $Q_1=2v\sqrt{Qm}-4Q$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $h=p/(\rho g)=0,4$ м.
2. $\frac{\Delta p}{p}=\frac{\Delta T/T-\Delta V/V}{1+\Delta V/V}100\,\%\approx9\,\%$.
3. $m_0=\Delta mp_0/(p_0-p)=10$ кг.
4. См. рис. 1.
5. $\frac{V_в}{V_{ст}}=\frac{1}{1+mg/(pS)}=0,96$.
6. $m_2=m_1T_1M_2/(5T_2M_1)=30$ г.
7. $N=N_ApV(T_2-T_1)/(RT_1T_2)=10^{26}$.
8. $\alpha=(m-n)/(2n)=0,1$.
9. $A=R(T_2-T_1)$.
10. $\frac{\rho_в}{\rho_п}=\left(\frac{p\cdot100\,\%}{p_н\varphi}-1\right)\frac{M_в}{M_п}=80$.
11. $m=\pi d\sigma t/(g\Delta t)=36$ кг (здесь $t=1$ сутки).
12. $t=2,9$ °C.
13. Нет, не весь.

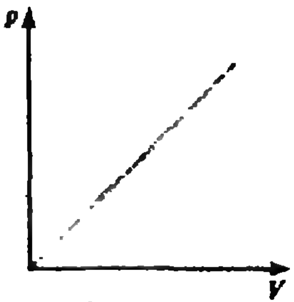


Рис. 1.

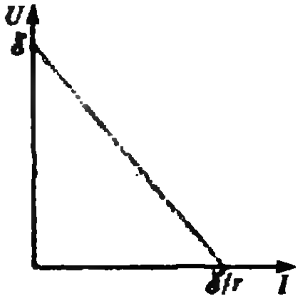


Рис. 2.

14. $\Delta V=\frac{V_0l}{l_0}-\frac{Nt\cdot100\,\%}{\rho\eta q}=2$ л.

Основы электродинамики

1. $E=\sqrt{\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0a^2}\right)^2+\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0b^2}\right)^2}=$ $=10,5\cdot10^4$ В/м.
2. $C=\varepsilon_0S(1+\varepsilon)/(2d)$; $x=(\varepsilon-1)d/2$.
3. $Q=C\mathscr{E}^2/2$.
4. $I=en/t=3,2$ А.
5. $\delta=R_2/(r+R_1+R_2)=0,02$ (или 2 %).
6. См. рис. 2.
7. $R=r\mathscr{E}_2/(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)=1$ Ом.
8. $P_2/P_1=R_1/R_2=1,5$.
9. $P_2=P_1mn/((m-1)(n+1))$.
10. $P_1=22,2$ Вт; $P_2=11,1$ Вт.
11. $\eta_2=\frac{R}{R+r}>\eta_1=\frac{R}{R+2r}$.
12. $\mathscr{E}=\frac{P_2/I_2^2-P_1/I_1^2}{1/I_2-1/I_1}=6,5$ В.
13. $\frac{t_1}{t_2}=\frac{\pi}{2\arcsin(1/n)}-1$.
14. $l=A/(BId\sin\alpha)=0,4$ м.
15. $B=mg\operatorname{tg}\alpha/(Il)$.
16. а) Индукционный ток в рамке возникает, он направлен по часовой стрелке; б) ток не возникает.
17. $\varphi=\arccos(1-qR/(BS))=120^\circ$.

Оптика

1. $\beta=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha-l/(d\cos\alpha))=36^\circ$.
2. $v=c\sin\alpha_0=2\cdot10^8$ м/с (здесь c — скорость света в вакууме).
3. $d=D\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}=5,8$ мм.
4. $n=\sin\frac{\theta+\varphi}{2}/\sin\frac{\varphi}{2}=1,7$ (здесь $\varphi=60^\circ$).
5. $x=2d=20$ см.
6. $d=2F=0,8$ м.
8. Различием показателей преломления среды (воздуха) перед глазом и среды (студенистой жидкости) внутри глаза.
9. Например, изменение радиусов и густоты интерференционных полос в опыте с кольцами Ньютона при заполнении воздушного зазора какой-нибудь жидкостью. Или постоянство энергии квантов монохроматического пучка света в различных прозрачных средах.
10. Да, обеспечит, так как оптическая разность хода интерферирующих лучей содержит нечетное число полуволн света.

Квантовая физика

1. $h=e(U_2-U_1)/(\nu_2-\nu_1)=6,4\cdot10^{-34}$ Дж·с.
2. $n=P\lambda/(hc)=1,26\cdot10^{17}$ $с^{-1}$.
3. $\eta=P\tau M\cdot100\,\%/(wmN_A)=39\,\%$ (здесь $\tau=$ $=1$ сутки).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Заметим, что после переливания в большой бочке оказалось в полтора раза больше молока,

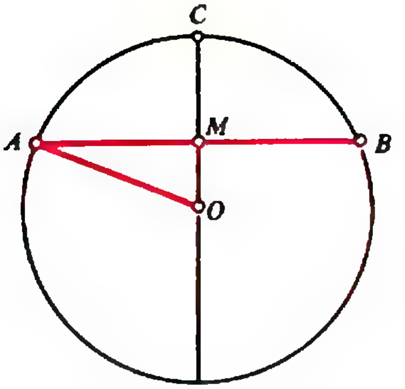


Рис. 3.

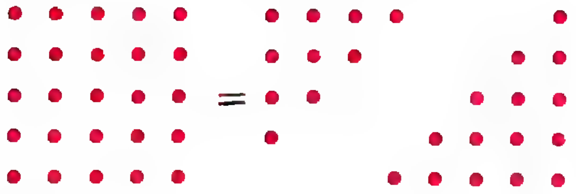


Рис. 4.

чем в маленькой. Если обозначим количество перелитого молока через x, то получим уравнение $1{,}5\,(21+x)=(39+x)$. Отсюда $x=3$, а бочки вмещают 24 и 72 литра.

2. То, что больший отрезок диаметра больше половины хорды следует из того, что он больше радиуса, а половина хорды — меньше радиуса. Второе утверждение доказывается чуть сложнее:
$CM+MO=AO<AM+MO$, отсюда $CM<AM$ (см. рис. 3).

3. Камень вытеснил объем воды, равный своему объему, но плотность камня больше плотности воды, следовательно, вес стакана увеличится.

4. $468532+468532=937064$.

5. См. рис. 4.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант», № 3)

19. Треугольник ABM будет равнобедренным в одном из трех случаев: $AB=BM$, $AB=AM$ и $AM=BM$. В первом случае точка M лежит на окружности радиуса AB с центром в точке B, во втором — на окружности того же радиуса с центром в точке A, в третьем — на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Эти линии изображены на рисунке 5 красным пунктиром. Черным пунктиром изображены на этом рисунке линии, являющиеся геометрическим местом точек M, для которых треугольники ACM являются равнобедренными. Искомым геометрическим местом точек M будут точки, принадлежащие одновременно красным и черным линиям. Это точки M_1, M_2, M_3 и M_4, а также все точки окружности радиуса AB с центром в точке A, за исключением точек B, C, N_1 и N_2, поскольку, поместив точку M в любую из этих точек, получим один из треугольников ABM или ACM вырожденным.

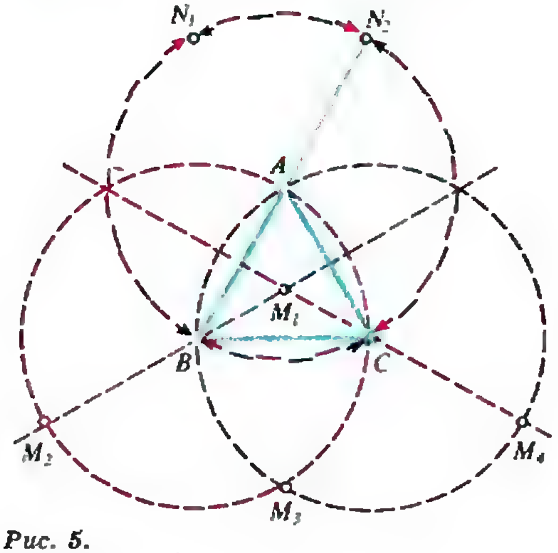


Рис. 5.

20. Пусть выигрыш Андрея равен x. Заметим, что тогда в первой кучке лежит не меньше одной спички, во второй — не меньше чем $1+x$, в третьей не меньше чем $1+2x$, в четвертой не меньше чем $1+3x$, в пятой

Анкета 6—91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении.

Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 6—91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____

Ваша профессия (если Вы работаете): ____

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____

не меньше чем $1+4x$ и в шестой не меньше чем $1+5x$. Следовательно, общее количество спичек (200) не меньше чем $6+15x$. Отсюда получаем, что $x \leqslant 13-1/15$. Значит наибольшее значение для x равно 12.

21. Пусть ладья, стоящая на 1-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_1, ладья, стоящая на 2-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_2 и т. д., ладья, стоящая на 8-й горизонтали, стоит на вертикали с номером a_8. Сумма произведений номеров горизонталей и вертикалей равна $1a_1+2a_2+ \ldots +8a_8$, а для центрально-симметричного расположения ладей такая сумма равна $8(9-a_1)+7(9-a_2)+\ldots+1(9-a_8)$. Разность этих чисел равна $-9(8+7+\ldots+1)+9(a_1+a_2+\ldots+a_8)$. Но сумма номеров вертикалей равна сумме целых чисел от 1 до 8. Следовательно, эта разность равна нулю.

Анкета 6—91

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились? ____

Вы использовали при подготовке к уроку? ____

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____

5. Какая обложка из номеров 4—6 Вам больше всего понравилась? ____

6. Ваши вопросы и пожелания: ____

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33 54

Сдано в набор 25.03.91. Подписано к печати 16.05.91.

Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт. 27,3. Уч. изд. л. 7,86
Тираж 93 961 экз. Заказ 494 Цена 70 коп.

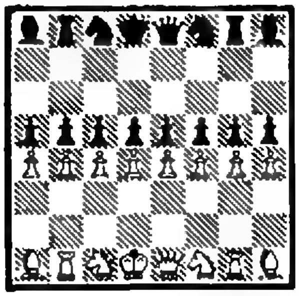
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ЕДИНСТВЕННЫЕ РАССТАНОВКИ

Мартин Гарднер — классик современной занимательной математики, автор более двух десятков книг на эту тему. Многие из них переведены на русский язык. Любопытно, что почти в каждом издании М. Гарднера содержится немало математических задач, игр и головоломок с шахматным сюжетом. Это относится и к двум последним книгам, изданным недавно у нас: «Крестики-нолики» («Мир», 1988) и «Путешествие во времени» («Мир», 1990). Сейчас мы обсудим несколько задач из этих книг.

Начнем со следующей несложной задачки. Представьте себе, что вы с приятелем закончили игру и хотите расставить фигуры для новой партии. Какое максимальное число перемещений фигур понадобится для этого?

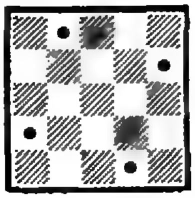


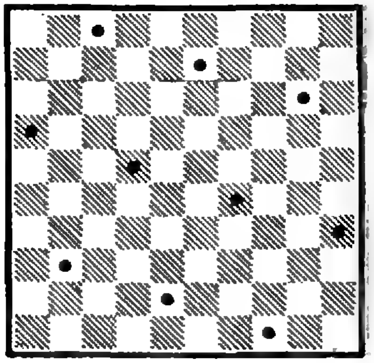
В этой рекордной ситуации понадобится целых 38 перестановок. Рассмотрим сначала одни белые фигуры. Поменять местами короля и ферзя можно только за три «хода». Ферзь становится на любое свободное поле, затем король располагается на родном поле e1 и ферзь на d1. Нетрудно видеть, что за четыре «хода» попадают на свои места фигуры в левом нижнем углу и за столько же в правом нижнем углу. Наконец, за восемь «ходов» на месте оказываются пешки. Итого, 19 «ходов» белых фигур, столько же черных.

Амазонкой называют фигуру, которая ходит одновременно как ферзь и конь. Рассмотрим одну головоломку с участием амазонок.

Как известно, на доске $n \times n$ при любом $n > 3$ можно расставить n не угрожающих друг другу ферзей. А сколько можно расставить «мирных» амазонок?

Х. Лонг обнаружил, что на доске 5×5 умещаются только четыре амазонки, а на доске 10×10 — десять, причем решения в обоих случаях единственные (с точностью до поворотов доски и ее зеркальных отражений). На рисунках амазонки изображены точками.

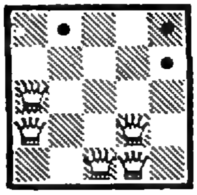




В общем случае эту задачу, кажется, никто не решал. Речь идет не только о нахождении необходимых расстановок, но и о подсчете их числа для различных значений n. Кстати, перебрав все 92 решения классической задачи о восьми ферзях, нетрудно убедиться, что ни одно из них не годится для амазонок, т. е. восемь этих сказочных фигур расставить на доске так, чтобы они не угрожали друг другу, невозможно.

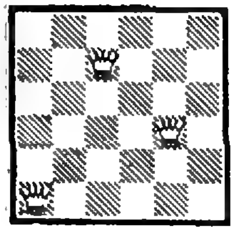
В книге «Крестики-нолики» целая глава посвящена шахматам, она так и называется «Шахматные задания». Большинство задач и головоломок, содержащихся в ней, читатель может найти и в моей книге «Шахматы и математика» («Наука», 1983), но есть у Гарднера и несколько новых для меня находок. Они связаны с расстановками ферзей на досках $n \times n$, обладающих теми или иными свойствами.

Например, такой вопрос: как расставить n ферзей на доске $n \times n$ так, чтобы на ней осталось максимальное число полей, свободных от угрозы ферзей? При $n=1$, 2 или 3 таких полей вообще нет. При $n=4$ может быть только одно поле, а при $n=5$ — три, и рекордная позиция опять единственная — (преобразования доски не в счет).

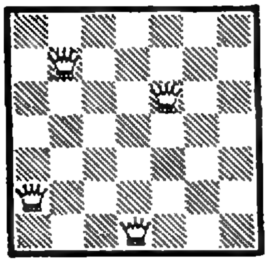


Существует гипотеза, согласно которой максимальное число полей, не атакованных ферзями, при $n=6$, 7, 8, 9, 10, 11 и 12, равно соответственно 5, 7, 11, 16, 22, 27 и 36. Найти рекордные расстановки (или побить рекорд) предоставляется читателю.

В заключение два интересных факта. Оказывается, разместить три ферзя на доске 6×6 так, чтобы все свободные поля оказались под угрозой, можно единственным образом (преобразование доски не в счет).



А на доске 7×7 можно расположить четыре ферзя так, чтобы все свободные поля были под угрозой и ни одна пара ферзей не атаковала друг друга.



И опять это расположение — единственное.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

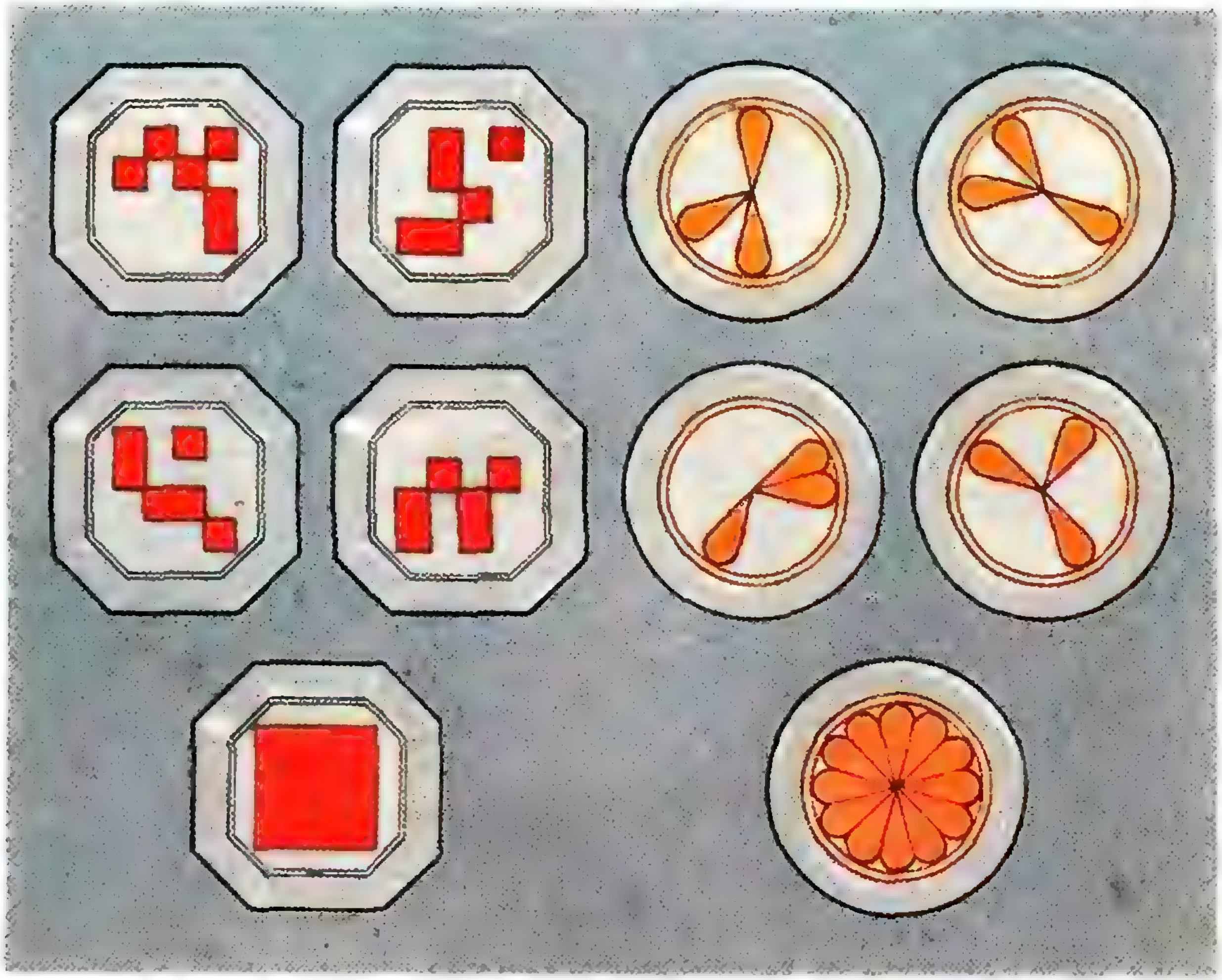
Две головоломки, показанные на наших рисунках, относятся к комбинаторным головоломкам с переменной ориентацией.

В первой из них 4 прозрачные пластинки нужно сложить в стопку так, чтобы отдельные квадратики на пластинках закрыли весь большой квадрат. Поворачивая пластинки на 90° или 180°, можно получить $4^3=64$ варианта их взаимного расположения (с точностью до поворотов всей стопки). Если пластинки разрешить еще и переворачивать, то количество существенно различных вариантов умножается на $2^3=8$, но сложность решения увеличивается еще больше. Ведь в этом случае вы не знаете, можно ли вообще найти решение для данной стопки.

Во второй головоломке требуется закрыть оранжевыми дольками все секторы круга. Число вариантов их взаимного расположения равно $12^3=1728$, но только один из них дает правильное решение.

Пластинки можно вырезать из толстой прозрачной пленки и наклеить на нее кусочки цветной бумаги.

Д. К.



НОМЕР

7

Квант

7 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *В. Гинзбург.* Что сегодня в физике и астрофизике особенно важно и интересно?
4 *Г. Ефашкин.* Электреты — диэлектрические аналоги магнитов
8 *Р. Винокур.* О водяном звере и акустическом резонансе
13 *И. Кокорев, Л. Курляндчик.* Большой торт на маленьких тарелочках
18 *В. Чванов.* «Нет линии прямей кольца...»

Задачник «Кванта»

26 Задачи М1291 — М1295, Ф1298 — Ф1302
27 Решения задач М1266 — М1270, Ф1278 — Ф1282
34 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *А. Панцулая.* Огни святого Эльма у вас дома
42 *А. Волков.* Арифметика Леонтия Магницкого

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Качественные задачи по физике

45 Как дерево спасает от дождя?
45 О «велосипедной» задаче

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

47 *Ю. Соловьев.* Комплексные числа

Лаборатория «Кванта»

55 *В. Майер, В. Динерштейн.* Летающая тарелка

Фантастика

60 *Г. Бир.* Музыка, звучащая в крови

Математические сюрпризы

64 *Дж. Конвей.* Один старый факт и несколько новых

67 **Р — значит ракета**

68 **Игры и головоломки**

Информатика и программирование

70 *Б. Тарасенко.* Алгоритмика простоты. Числовые «атомы»

Информация

74 Заочная школа при НГУ
76 Зимняя школа в Нижнем Тагиле
77 Всесоюзная статистическая ассоциация

78 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(46, 73)*

Нам пишут *(54, 59)*

Наша обложка

1 *Как измерить площадь этой красивой замысловатой фигуры? (см. «Калейдоскоп»)*
2 *Этот дровосек с картины Казимира Малевича занят разбиением больших геометрических фигур на маленькие кусочки. Как решить подобную задачу без помощи топора, вы можете узнать из статьи на с. 13.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Японская головоломка — 6 розеток для варенья.*

© «Квант», 1991

ЧТО СЕГОДНЯ В ФИЗИКЕ И АСТРОФИЗИКЕ ОСОБЕННО ВАЖНО И ИНТЕРЕСНО?

Академик В. ГИНЗБУРГ

В прошлом году в майском номере журнала «Physics Today» («Физика сегодня»), который выпускает Американское Физическое Общество, была опубликована статья советского физика академика Виталия Лазаревича Гинзбурга. Статья называлась «Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными?». Надеемся, что эта статья окажется полезной и интересной вам — нашим читателям, особенно школьникам. Вот почему мы и предлагаем ее вашему вниманию (с небольшими изменениями). Не пугайтесь, если некоторые термины и выражения будут вам сейчас непонятны. «Портрет» современной физики, написанный известным ученым, непременно останется в памяти и — кто знает? — возможно, повлияет на выбор вашего научного направления.

Вероятно, многие обращали внимание на узость горизонта большинства даже способных молодых физиков. Такой физик может знать тонкости в некоторой трудной и сложной области, скажем в квантовой теории поля. Но на вопросы, какова природа сверхпроводимости или ферроэлектричества, каково строение нейтронной звезды или как можно надеяться детектировать гравитационные волны, ответа вы не получите. Между тем, чтобы иметь представление обо всем этом и многом другом, вовсе не нужно потратить много времени и сил. Кроме того, вряд ли нужно доказывать, что широта взглядов и информированность не только естественны (ведь физика так интересна!), но и очень важны для успеха в работе, т. е. к этим широте и информированности должны стремиться даже чистые прагматики. Здесь нет места обсуждать причины отмеченной ситуации и общие пути ее изменения. Скажу только, что для достижения последней цели я организовал и читал специальные дополнительные лекции для студентов, а в 1971 году опубликовал статью [1]*), где было перечислено около 20 проблем, которые казались мне в то время особенно «горячими». В отношении каждого вопроса (проблемы) делались краткие пояснения (суть дела, неясные моменты и т. п.) и приводилась литература. Поскольку я рассчитывал, в основном, на молодое поколение, то довольно подробно пояснил то, что зрелому человеку и так совершенно очевидно. Именно, настоятельно подчеркивал условность и субъективность любого списка «наиболее важных и интересных проблем» и несомненную невозможность заниматься только такими проблемами. Вместе с тем, я убежден, что целый ряд проблем и вопросов действительно выделен по многим причинам — в силу их потенциальной важности для техники, особой загадочности и т. д. и т. п. Кроме того, всего объять невозможно, и для целей образования и расширения кругозора просто неизбежно выделение какого-то ограниченного круга вопросов.

Как отнеслись к моей статье [1] и ее последующим переработанным изданиям молодые физики, я и до сих пор не знаю. А вот коллеги встретили статью в общем без энтузиазма. Не буду перечислять услышанные упреки. А среди неуслышанных, несомненно, был и такой: в списке проблем нет той, которой занимается критикующий, «отсюда очевидно», что список плох. Помню, один мой старший друг сказал: «Если бы Вы опубликовали статью до того, как бы-

---

*) Здесь и далее в скобках указан номер материала в списке литературы, приведенном в конце статьи. *(Примеч. ред.)*

ли выбраны в Академию наук СССР, то никогда не стали бы академиком». Возможно, что он был прав. Так или иначе, я был до какой-то степени увлечен составлением и обсуждением своего «списка». Поэтому статья [1] превратилась в небольшую книжку, переведенную затем на ряд языков. Ее последнее (в составе более широкого сборника статей) издание вышло в 1985 году [2]. Сейчас подготовлено новое русское издание этого сборника (надеюсь, книга появится в 1991 году). Каждый раз текст изменялся и дополнялся, что было необходимо, но имело и свои отрицательные стороны.

Мой список «особенно важных и интересных проблем» сейчас таков:

Макрофизика

1. Управляемый ядерный синтез
2. Высокотемпературная сверхпроводимость. Сверхдиамагнетизм
3. Новые вещества (проблема создания металлического водорода и некоторых других веществ)
4. Некоторые проблемы физики твердого тела
5. Фазовые переходы второго рода и близкие к ним переходы (критические явления). Интересные примеры таких переходов
6. Физика поверхности
7. Жидкие кристаллы. Изучение очень больших молекул
8. Поведение вещества в сверхсильных магнитных полях
9. Разеры, гразеры и сверхмощные лазеры
10. Сильнонелинейные явления (нелинейная физика). Солитоны. Хаос. Странные аттракторы. Турбулентность
11. Сверхтяжелые элементы (далекие трансураны). «Экзотические ядра»

Микрофизика

12. Спектр масс. Кварки и глюоны. Квантовая хромодинамика
13. Единая теория слабого и электромагнитного взаимодействия. $W^{\pm}$- и Z^0-бозоны. Лептоны
14. Великое объединение. Распад протона. Масса нейтрино. Магнитные монополи. Суперобъединение. Суперструны
15. Фундаментальная длина. Взаимодействие частиц при высоких и сверхвысоких энергиях
16. Несохранение CP-инвариантности. Нелинейные явления в вакууме и в сверхсильных магнитных полях. Фазовые переходы в вакууме

Астрофизика

17. Экспериментальная проверка общей теории относительности
18. Гравитационные волны
19. Космологическая проблема. Связь между космологией и физикой высоких энергий
20. Нейтронные звезды и пульсары
21. Черные дыры
22. Квазары и ядра галактик. Образование галактик. Проблема скрытой массы (темной материи) и ее детектирования
23. Происхождение космических лучей и космического рентгеновского и гамма-излучения. Гамма-астрономия сверхвысоких энергий
24. Нейтринная астрономия

В общем, как можно думать, названия тем говорят сами за себя. Лишь тему 4 стоит расшифровать. Сюда можно было бы отнести, например, вопрос о металлической экситонной (электронно-дырочной) жидкости, он фигурировал в моих предыдущих списках. Уместно в рамках этой же темы упомянуть об актуальных сейчас проблемах: переходах металл — диэлектрик, волнах зарядовой и спиновой плотности, о неупорядоченных полупроводниках, спиновых стеклах, квантовом эффекте Холла, мезоскопике и др. Вообще, проблем и задач в физике твердого тела так много, что вряд ли можно все их даже перечислить в таком списке. Разумеется, с течением времени содержание тем изменяется, некоторые из них должны быть исключены из списка, а другие добавлены. Так, проблема высокотемпературной сверхпроводимости фигурировала еще в списке 1971 года [1],

(Окончание см. на с. 25)

ЭЛЕКТРЕТЫ — ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ МАГНИТОВ

Доктор технических наук
Г. ЕФАШКИН

О биоэлектретах

В начале статьи мы сказали, что в природе электреты не встречаются. Однако это не совсем так. Оказывается, живой организм человека или животного использует электретный эффект. Исследования ученых показали, что существуют биоэлектреты. Внутренние стенки кровеносных сосудов несут связанный отрицательный заряд. Потенциал, создаваемый биоэлектретами, медики назвали дзета-потенциалом. Элементы крови — эритроциты, тромбоциты, лейкоциты — также заряжены отрицательно. Возможно, этим объясняется тот факт, что кровь, несмотря на ее огромный молекулярный вес, легко проходит по тончайшим капиллярам.

Как только дзета-потенциал исчезает (из-за болезни, повреждения сосуда), кровь сворачивается, образуется тромб. Так работает защита организма. (Растворимый фибриноген крови переходит в нерастворимое состояние, образует множество нитей, в которых запутываются форменные элементы крови, ранка затягивается, образуется пробка, препятствующая дальнейшему вытеканию крови из сосуда.)

С другой стороны, образование тромбов внутри сосудов часто приводит к серьезному заболеванию — тромбофлебиту, вена забивается сгустком крови, сосуды раздуваются и под кожей бывают видны вздутые, явно больные вены.

Уже давно делают искусственные сосуды — протезы кровеносных сосудов (рис. 1). Их ткут, как чулки, и делают гофрированными. В случае серьезного заболевания пораженные сосуды заменяют протезами.

Но так как искусственный сосуд — чужеродное тело и не несет дзета-потенциала, то на его стенках образуются тромбы.

Оказывается, с помощью электретов можно смоделировать дзета-потенциал. В Институте трансплантологии искусственных органов и тканей была проведена серия экспериментов вне организма (как говорят медики, in vitro), а затем и на подопытных собачках (in vivo).

Вместо сосуда была в одном случае вшита трубочка, на внутренней стороне которой отрицательным электретным зарядом моделировался дзета-потенциал, во втором случае — трубочка без заряда, в третьем — с положительным зарядом. Трубочка (искусственный сосуд) с положительным зарядом через три дня полностью забилась тромбом, без заряда — не забивалась десять дней. В трубочке с моделированным дзета-потенциалом тромб не образовывался совсем.

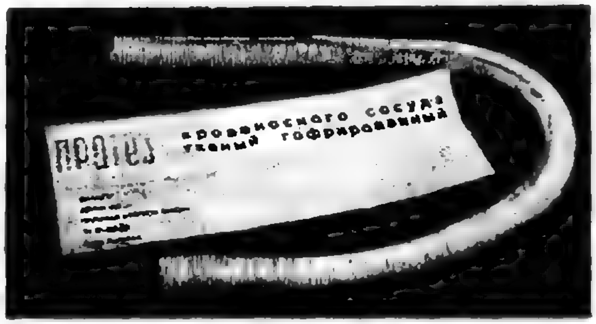


Рис. 1. Протез кровеносного сосуда.

Начало статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

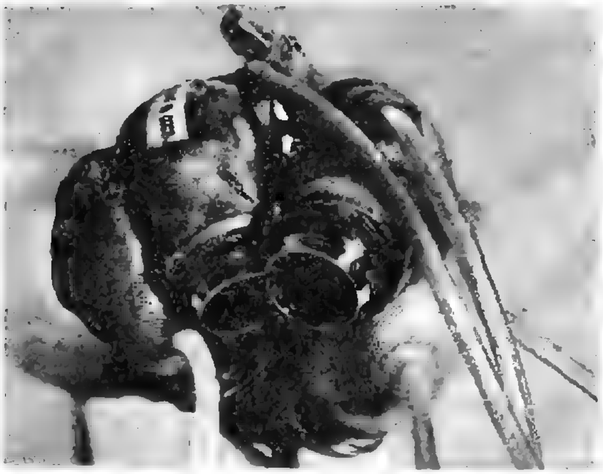


Рис. 2. Советская модель искусственного сердца.

Проблема предотвращения тромбообразования — одна из многих проблем, возникающих при создании искусственного сердца (рис. 2). На внутренней поверхности искусственного сердца необходимо моделировать дзета-потенциал.

Электреты в технике

Ранее считалось, что вода (или другая жидкость) полностью экранирует поле электрета. Выяснилось, однако, что поле полностью экранируется водой только в том случае, когда слой жидкости неподвижен. При движении жидкости по поверхности электрета поле экранируется не полностью, жидкость поляризуется, происходит разделение зарядов. Важно, чтобы слой текущей жидкости находился в пределах ТП-слоя электрета. А если при этом жидкость распылять, то образуются заряженные капельки жидкости. Поле электрета преобразует энергию струи жидкости в энергию заряженных капель, так же как в микрофоне энергия колебаний мембраны преобразуется в электрический сигнал.

На этом принципе была создана электретная форсунка (рис. 3). Без внешних источников питания вода, распыляясь форсункой, дает факел с большим количеством заряженных капель. На фотографии виден электрет на внутренней поверхности форсунки.

Если сделать форсунку без электрета, то в факеле будет 3—5 % заряженных капель. Электретная форсунка дает в 10—15 раз больше. Заряженные капельки воды энергично захватывают пыль из воздуха. Поэтому электретные форсунки используют в угольных шахтах, где много пыли. Орошение запыленного воздуха вблизи угольных комбайнов подавляет угольную пыль, не дает ей возможности распространяться по всему объему забоя. При этом существенно улучшаются условия труда шахтеров. Кроме того, подавляя угольную пыль, снижают опасность ее взрыва.

Если изменить знак заряда электрета на форсунке, то можно заставить ее работать в обращенном режиме, т. е. гасить заряды капель распыляемой жидкости. При распылении, например, бензина или другого взрывоопасного топлива, можно таким способом предотвращать самопроизвольное возгорание или взрыв топлива от статического электричества.

Небольшие замкнутые объемы воздуха можно полностью очистить от пылинок с помощью пленок электрета с дискретным поверхностным зарядом, которые наклеивают на стенки объема. Если свернуть электрет в рулон с зазором, равным ТП-слою, и снабдить его миниатюрным вентилятором для циркуляции воздуха, он будет способен обеспылить уже значительно бóльшие объемы. Первое устройство называют локальным пы-

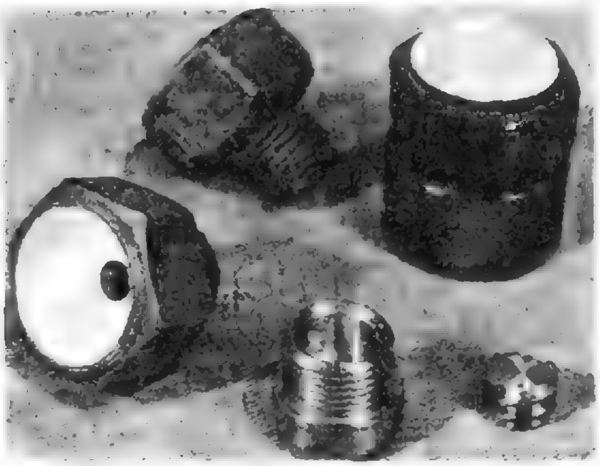


Рис. 3. Электретные форсунки.

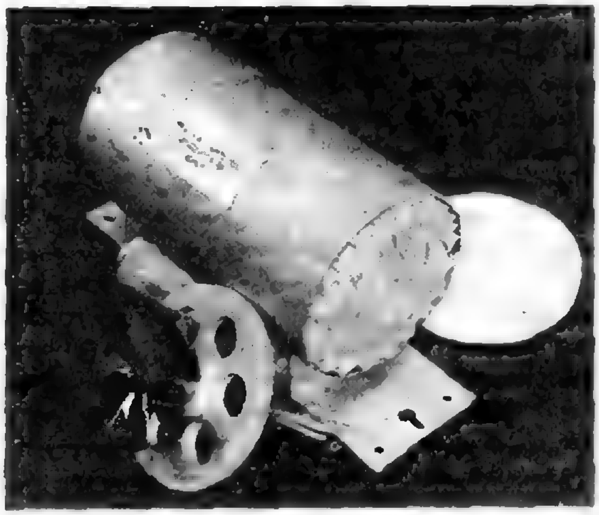


Рис. 4. Местный электретный рециркулятор МЭР-1.

леуловителем, второе — местным рециркулятором (рис. 4).

Проблема получения сверхчистой атмосферы является важной для предприятий микроэлектронного производства, где одна пылинка размером в доли микрона способна вывести из строя сверхбольшую или большую интегральную схему (СБИС или БИС). Поэтому затрачивают огромные средства на создание чистых помещений. Воздух фильтруется через многоступенчатую систему очистки воздуха, которая занимает целые этажи (так называемые технологические этажи).

А требования к чистоте все время повышаются. Если раньше можно было работать при классе чистоты 1000 (1000 пылинок на кубический фут, или 30 пылинок на литр) (сравните, в сельской местности, где мы говорим: «Ах, какой чистый воздух!», содержится порядка 100 000 пылинок на литр), то в настоящее время число пылинок не должно превышать 3-х на литр (класс 100) или даже 0,3 (класс 10). Да и пылинки не должны быть больше 0,3 микрона.

Может ли многоступенчатая система очистки воздуха справиться с такой задачей? В принципе — да, но на очень короткий срок. Дело в том, что очищенный воздух вновь быстро запыляется, так как в цехе находятся работающие механизмы, а самое главное — люди, которые «генерируют» пыль (человек «генерирует» полтора миллиона пылинок в час). Сотрудников пропускают через тамбуры, где сдувают пылинки, одевают в чистейшую одежду из специальных тканей, а иногда даже в скафандры, как космонавтов, но и это не решает проблемы.

В чем же выход? Один из вариантов — улавливать пыль в местах ее генерации локальными электретными пылеуловителями и рециркуляторами. Такой воздух, очищенный в технологических этажах, будет загрязняться гораздо медленнее.

Чистая атмосфера нужна не только в электронной промышленности. Очень вредна радиоактивная пыль на урановых рудниках, на атомных электростанциях. Абсолютно чистый воздух нужен при хирургических операциях, в оптических лабораториях, на космических кораблях. Электретные локальные пылеуловители без внешних источников питания помогут решить эти важные проблемы.

Электретные форсунки имеют множество других применений. Опрыскивая сельскохозяйственные культуры заряженной водой, повышают их урожайность и сокращают расход опасных ядохимикатов. Распыляя топливо в двигателях, снижают его расход, повышают мощность двигателей, уменьшают токсичность выхлопных газов...

Наверное, у читателя возник вопрос: почему магниты известны всем, а об электретах говорят только в узком кругу специалистов? Я думаю, что, во-первых, электреты изучаются сравнительно недавно, а поэтому даже в специальной литературе публикаций об электретах сравнительно немного; во-вторых, в школьном учебнике и даже в учебниках для вузов об электретах практически ничего не говорится.

А перспективы электретов огромны.

Приложение

Как мы уже сказали, простейший электрет — трибоэлектрет — получают трением. Из трибоэлектрета можно изготовить простой наушник, который без всяких преобразователей и усилителей будет воспроизводить программу местного радиовещания.

Для этого нужна фторопластовая или лавсановая пленка толщиной 10—30 микрон. Пленки эти в настоящее время широко распространены. Фторопластовые пленки используют при изготовлении емких конденсаторов, где они служат изолирующей прокладкой вместо парафинированной бумаги. А лавсановая пленка используется в быту для оберток цветов или коробок конфет. Нужна также бытовая алюминиевая фольга. Если ее под рукой нет, можно взять обертку из-под шоколада.

Нужны еще две чистые сухие шерстяные тряпочки, небольшой кусок наждачной бумаги и два тонких провода.

Электрет изготовить просто. Вырежьте прямоугольный кусок пленки любого размера, ну, скажем, 10×5 см. Расстелите пленку на шерстяной ткани. А сверху минуты три-четыре потрите пленку второй шерстяной тканью, желательно в одном направлении. При этом сильно нажимать не нужно. Под действием статического заряда в пленке будут происходить сложные процессы поляризации и образования электрета.

Из фольги изготовьте прямоугольные электроды. Ширина прямоугольника должна быть немного меньше ширины пленки, например 4 см, а длина — 11 см. Фольгу положите на наждачную бумагу и ребром ладони с небольшим усилием проведите по поверхности фольги так, чтобы от наждачной бумаги фольга стала шероховатой. То же самое нужно сделать со второй фольгой.

На фольгу укладывается электрет так, чтобы его края выходили за края фольги с трех сторон (рис. 5). На электрет укладывается вторая фольга. Получилась трехслойная широкая лента, длинные края которой необходимо скрепить липкой лентой или лейкопластырем. Ленточный электретный приемник готов. К выступающим краям-электродам необходимо прикрепить провода. В простейшем варианте это можно сделать с помощью обычных иголок.

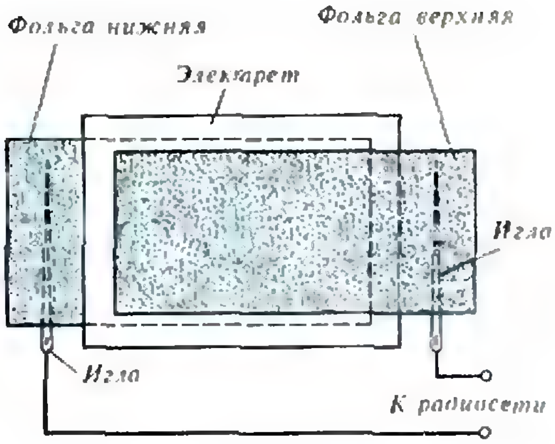
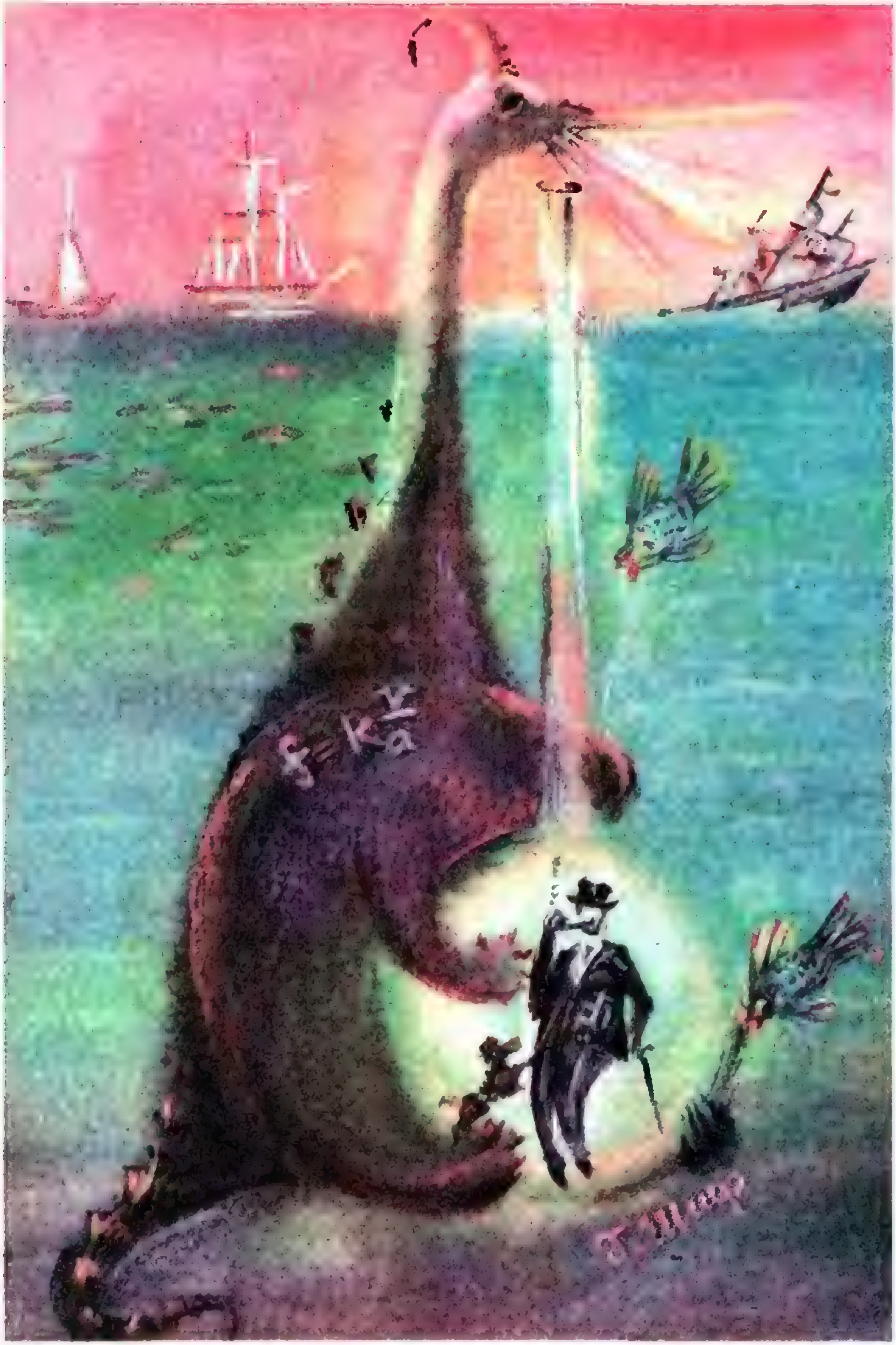


Рис. 5. Действующий макет электретного приемника ленточного типа.

Включив эту предельно простую систему в радиосеть и прижав к уху, вы услышите чистое звучание мелодии или голос диктора.

Если сделать потщательнее два приемника, закрепив трехслойную ленту в рамке или между двумя тонкими пластинами диэлектрика, например плексигласа, в котором аккуратно просверлить акустические отверстия, как у телефонной трубки, и скрепить гибкой дужкой, получатся наушники, с помощью которых можно слушать, не мешая близким, передачу радиосети, телевизионную программу или магнитофон.


$f = k\frac{v}{a}$

О ВОДЯНОМ ЗВЕРЕ И АКУСТИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

Кандидат технических наук
Р. ВИНОКУР

— Это произошло в V веке нашей эры на берегах глубокого озера на севере Англии. Странствующий монах отец Бенедикт пришел сюда, чтобы обратить местных жителей в христианство. Однако оказалось, что у них уже есть свой бог — могучий обитатель озера. Монаха отвели на невысокую скалу, круто обрывающуюся в воду. Услышав голоса людей, из пучины вынырнуло огромное блестяще-черное чудовище, голова которого по форме напоминала тюленью и была украшена белым рогом. Аборигены выглядели очень испуганными, хотя уверяли, что водяной бог мяса не ест, а питается только растительностью. Зверь молча смотрел на людей, его голова почти достигала края скалы. Местные жители попадали ниц. Тогда монах поднял крест и именем божьим повелел чудищу убираться назад в преисподнюю, но это не возымело действия. В ту пору проповедники владели не только словом, но и оружием. Подхватив с земли копье, оброненное одним из местных жителей, отец Бенедикт метко бросил его и поразил зверя в глаз. Чудище застонало, подалось назад и навеки скрылось в глубинах озера...

Рассказчик, молодой человек по имени Джон Стайрон, помолчал и, взглянув на Шерлока Холмса, добавил: — Такова легенда. Однако многие верят, что подобный зверь и поныне живет в нашем озере, а некоторые говорят, что видели его.

— И вы, наверное, тоже верите в живучесть водяного великана и ищете встречи с ним? — улыбнулся знаменитый сыщик.— Впрочем, доктор Уотсон как-то передал мне рассказ своего бывшего сослуживца, побывавшего в Камеруне и утверждающего, что тамошние охотники неоднократно встречались с подобными животными и называют их «мокеле — мбембе». Судя по всему, это — дожившие до нашего времени первобытные ящеры. Кстати, молодой малый пудель черной масти с удовольствием поможет хозяину в поисках.

— Ваша проницательность обнадеживает,— удивленно воскликнул гость,— но где вы могли видеть мою собаку Джуди?

— На каблуках ваших ботинок я заметил следы зубов, а это — обычное дело, если дома живет щенок. Кроме того, я случайно видел из окна, как недалеко от нашего дома вы загляделись на малого черного пуделя и практически не обратили внимания на множество других собак, прогуливающихся в это время со своими хозяевами по Бейкер-стрит. Однако в чем вам нужна моя помощь?

— Я ищу водяного зверя и, не надеясь на случайную встречу на поверхности воды, хочу проникнуть в глубины озера. По моему заказу на заводе был изготовлен подводный дом в виде полой стальной сферы с цилиндрической трубой.— Стайрон взял карандаш и нарисовал эскиз (рис. 1).— В прочных стенках сферы есть иллюминаторы и герметичная входная дверь. Дом был доставлен на берег озера, где монтаж следовало закончить: пропустить через трубу шланги для воздушной вентиляции и телефонные провода для связи. Подводный дом предполагалось затем с

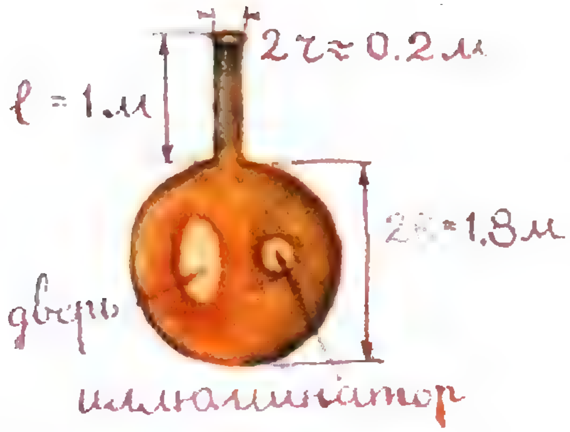


Рис. 1.

помощью системы тросов и парового катера отбуксировать от берега и осуществить его погружение. Однако монтажные работы пришлось неожиданно прекратить: плохо почувствовали себя рабочие, которые должны были завести шланги и провода в трубу и затем загерметизировать оставшиеся щели. Они утверждали, что с домом не все в порядке: там поселился нечистый. Тогда я сказал, что закроюсь в доме на час и ничего не случится. Стоял ясный теплый день, в небе обнадеживающе сияло солнце, с озера дул легкий приятный ветер. Джуди упорно не пускала меня в дом, цепляясь лапами и зубами за брюки. Я отодвинул ее и заперся в доме. Почти сразу я ощутил, как внутри меня все задрожало, потемнело в глазах, возник какой-то непонятный страх. Я не выдержал и выскочил из дома. Впоследствии я несколько раз повторял свою попытку, но с тем же результатом... Сэр, я надеюсь на вас и на ваш дедуктивный метод. Помогите мне, если, конечно, здесь не замешаны сверхъестественные силы.

— До сих пор ни бог, ни дьявол не вставали на моем пути,— задумчиво сказал Холмс.— Думаю, что и водяной зверь здесь ни при чем, а причина страхов лежит в неживой природе. С подобным случаем я уже сталкивался, когда расследовал дело о гибели охотника, укрывавшегося от непогоды в небольшой пещере. В этом мне помог тогда один известный профессор физики...

Холмс достал из кармана миниатюрную игрушку из тонкого разноцветного стекла, очень напоминающую по форме подводный дом Стайрона, поднес ее ко рту и подул поперек горлышка (рис. 2). После нескольких попыток он добился того, что раздался протяжный гудящий свист. Я перехватил недоуменный взгляд гостя, и мне стало неловко за моего друга, который, казалось, впал в детство. Холмс между тем стал объяснять.

— То, что я держу в руках, физики могли бы назвать резонатором Гельмгольца. Такова фамилия ученого, который впервые применил резонаторы для анализа звуков по частоте колебаний. Это устройство состоит из двух основных элементов: узкой трубки, открытой с обоих концов, и гораздо большего по объему сосуда. Изменение давления воздуха у наружного конца трубки вызывает движение воздушной среды внутри резонатора. Поскольку в узком месте скорость потока воздуха намного выше, чем в широком, основная кинетическая энергия среды сосредоточена в трубке. С другой стороны, приток воздуха в сосуд приводит к увеличению давления в нем, что препятствует дальнейшему поступлению воздуха извне в резонатор. Аналогично, отток воздуха из сосуда вызывает уменьшение давления воздуха в сосуде, что порождает силу, мешающую оттоку воздуха. Значит, воздух внутри сосуда

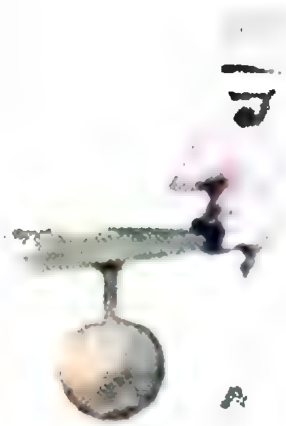


Рис. 2.

можно рассматривать как пружину, а воздух внутри трубки — как материальную точку. В этом смысле резонатор Гельмгольца подобен пружинному маятнику. Следует заметить, что такая аналогия приемлема не всегда, а только при условии, что скорость частиц воздуха по всей длине трубки и давление воздуха во всех точках сосуда соответственно примерно одинаковы. Это имеет место на достаточно низких частотах, когда длина звуковой волны в воздухе намного больше размеров резонатора.

— А кстати,— поинтересовался я,— какова же собственная частота колебаний такого, с позволения сказать, акустического маятника?

— Мой дорогой Уотсон, я постараюсь сразу удовлетворить вашу любознательность, не прибегая к промежуточным выкладкам,— ответил Холмс.— Если длина трубки l намного больше ее поперечных размеров, то собственная частота резонатора

$$f_c = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{Vl}}, \qquad (1)$$

где $c \approx 340$ м/с — скорость распространения звука в воздухе, S — площадь поперечного сечения трубки, V — объем сосуда*). Подводный дом, сконструированный нашим гостем, также можно считать резонатором Гельмгольца. Исходя из тех размеров, что проставлены на эскизе (см. рис. 1), и используя формулу (1), находим

$$f_c \approx 5 \text{ Гц}.$$

— Кажется, я начинаю понимать,— неуверенно проговорил Стайрон.— Игрушка засвистела после того, как вы подули поперек ее горлышка. В моем случае эту роль сыграл ветер, не так ли?

— Совершенно верно,— подтвердил Холмс.— Когда поток воздуха обтекает препятствие, в нем возникают завихрения. Если начальные направление и скорость потока являются постоянными, то образуется периодическая последовательность движущихся вихрей. Давление воздуха внутри вихрей меньше, чем в промежутках между ними (не зря смерчи и водовороты затягивают в себя расположенные рядом предметы), поэтому на препятствие действует переменная сила, частоту которой можно оценить, исходя из соображений размерности:

$$f = k\frac{v}{a}, \qquad (2)$$

где v — скорость набегающего потока воздуха, a — характерный размер препятствия, k — безразмерный коэффициент, зависящий от формы препятствия и его расположения относительно потока. Экспериментально установлено, например, что если поток направлен перпендикулярно цилиндру большой длины и радиуса r, то в формуле (2) следует принимать $a = 2r$ и $k = 0{,}2$. Полагая, что скорость ветра составляла ≈ 5 м/с (при этом ветер еще ощущается как слабый), и подставляя необходимые значения, получаем

$$f \approx 5 \text{ Гц}.$$

Конечно, в данном случае могли возникнуть и колебания другой частоты, ведь роль препятствия играла не только труба в целом, но и края ее внешнего отверстия. Здесь также можно воспользоваться формулой (2), однако в качестве параметра a задать толщину стенок трубы. Вопрос оставался бы лишь в том, каково соответствующее значение безразмерного коэффициента k. Однако в данном случае роль трубы в целом, по-видимому, значительнее.

— Итак, $f = f_c$. Это означает, что имеет место резонанс, поэтому амплитуда колебаний давления воздуха внутри дома могла быть очень большой,— догадался Стайрон.— По этой же причине звучала елочная игрушка.

— И не только игрушка,— добавил Холмс.— В духовых музыкальных инструментах используется то же физическое явление, только для усиления звука применяют не резонатор Гельмгольца, а другие резонаторы — различного вида трубы, обычно достаточно длинные. Роль препятствия, создающего вихревую дорожку, здесь играют специальные пластинки или просто губы музыканта. Аналогичную функцию выполняют губы свистящего человека, резонатором при этом служит ротовая полость.

---

*) Вывод этой формулы вы можете найти, например, в статье «Домовой, колдун и... резонатор Гельмгольца» («Квант», 1979, № 8).

— Но почему же я не услышал оглушительного шума? — спросил Стайрон.

— Вы и не могли его слышать,— ответил знаменитый сыщик.— Человек способен воспринимать на слух звуковые колебания с частотой не ниже 16 Гц. Однако на человеческий организм могут воздействовать и звуки более низкой частоты (инфразвуки). Это воздействие может быть очень сильным и даже привести к печальному исходу. Человеческое тело и его отдельные органы имеют собственные частоты колебаний в основном в диапазоне от 3 до 12 Гц. Под действием давления инфразвука на одной из этих частот вибрация органов увеличивается, они могут сильно сместиться и даже деформироваться. Инфразвук влияет также на процессы, протекающие в мозгу, что угнетающе действует на психику (отсюда и чувство страха, потемнение в глазах и т. п.). Следует заметить, что многие животные (в частности, собаки) лучше, чем человек, чувствуют инфразвуковые волны, в чем вы сами убедились, наблюдая за поведением Джуди. Это можно использовать для прогноза землетрясений, поскольку установлено, что мощным подземным толчкам предшествует появление инфразвукового излучения в атмосфере опасного района. Хотелось бы отметить еще одно обстоятельство. Амплитуда колебаний звукового давления внутри резонатора пропорциональна амплитуде действующего на наружное отверстие резонатора внешнего переменного давления. Последняя же величина, как нетрудно понять из соображений размерности, $\sim \rho v^2$, где ρ — плотность воздуха. Ваш случай, молодой человек, можно еще назвать сравнительно безопасным; резонанс возникал при довольно слабой скорости ветра, поэтому инфразвук внутри дома не набрал смертельной силы. В деле, о котором я упоминал в начале беседы, резонанс наступил при почти штормовой скорости ветра...

— Благодарю, сэр,— склонил голову Стайрон.— Теперь я знаю, что делать дальше: можно, например, закрыть дом от ветра на время монтажа брезентовым шатром. После того как все щели будут загерметизированы, шатер можно убрать. Думаю, что уже через неделю состоится первое погружение...

Через неделю началась первая мировая война. Стайрон был призван в военный флот. Его корабль был торпедирован в одиночном плавании немецкой подводной лодкой. Стайрон уцелел один из всего экипажа и, теряя надежды и силы, плыл в безбрежном морском просторе. Вдруг он с ужасом увидел, что на него движется гигантское животное с мордой, похожей на тюленью и украшенной рогом. Зверь проплыл мимо и, нырнув, исчез в глубине... Еще через полчаса сильные руки английского матроса помогли Стайрону забраться в шлюпку.— Ну, и везучий же вы человек, сэр! — услышал он хрипловатый веселый голос.— Наш капитан не спал двое суток, вот ему и померещился сквозь бинокль какой-то огромный рогатый тюлень. Приказал изменить курс, чтобы рассмотреть поближе, и обнаружили вас. Да, если бы не тот мираж, так бы мы с вами, сэр, никогда и не встретились...

БОЛЬШОЙ ТОРТ НА МАЛЕНЬКИХ ТАРЕЛОЧКАХ

И. КОКОРЕВ, Л. КУРЛЯНДЧИК

На пятнадцатой Всесоюзной олимпиаде по математике десятиклассникам была предложена следующая задача: «В прямоугольнике 3×4 см расположены 6 точек. Докажите, что найдется пара точек, удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$ см».

В книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» (М., «Наука», 1988) ее решение уместилось на двух строчках: «Из любых шести данных точек по крайней мере две окажутся в одной из фигур, показанных на рисунке 1».

Однако эта задача является фрагментом весьма интересной и содержательной математической проблемы. О ней мы и расскажем в этой заметке.

Диаметр фигуры

Представьте себе праздничный стол, а на нем — большой торт. За столом сидит n гостей, и перед каждым — *маленькая тарелочка*. Поэтому вам, как хозяину, нужно постараться разрезать этот торт на n кусков так, чтобы их размеры были как можно меньше.

Попросив гостей немного подождать, подойдем к проблеме научно. Кусок торта имеет форму некоторой геометрической фигуры. Введем для нее понятие диаметра.

Что означают слова: «диаметр *круга равен* d»? *С одной стороны*, это значит, что расстояние между любыми двумя точками круга не превосходит d. С другой стороны, можно найти две такие его точки, что расстояние между ними в точности равно d.

По аналогии с кругом, диаметром произвольной фигуры F назовем такое число d, что расстояние между *любыми двумя точками фигуры* F не превосходит d, и найдутся две такие точки, что расстояние между ними равно d.

Легко понять, что диаметром многоугольника является наибольшее из расстояний между его вершинами (проверьте!).

Теперь вернемся к терпеливо ожидающим гостям. Итак, перед вами *стоит задача: разрезать торт на* n частей так, чтобы наибольший из их диаметров был как можно меньше.

Назовем такой диаметр n-й степенью той фигуры F, форму которой

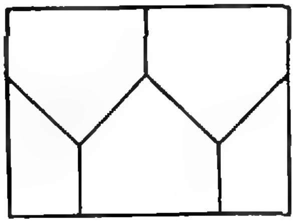
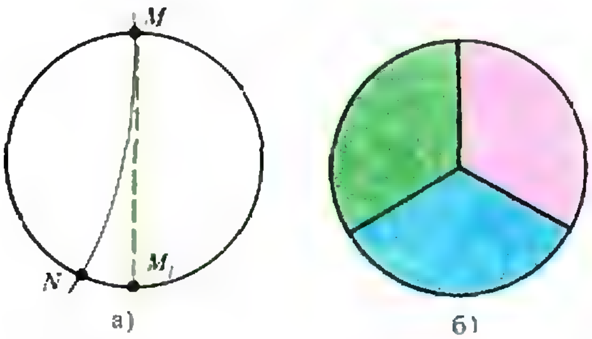


Рис. 1.



а)

б)

Рис. 2.

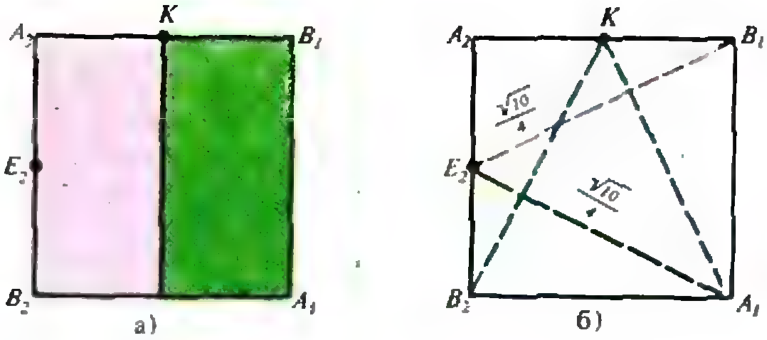


Рис. 3.

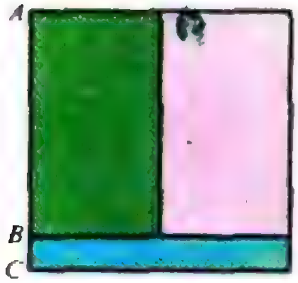


Рис. 4. $BC=\frac{1}{8}AC$.

имеет ваш торт. Обозначать ее будем F^n.

Предположим, что торт круглый. Легко понять, что вторая степень круга равна его диаметру. Действительно, если круг диаметра 1 разрезать некоторой линией MN на две части, то хотя бы одна из них будет иметь тот же диаметр. Посмотрите на рисунок 2, *а*. Точка M принадлежит обеим частям. Точка M_1, диаметрально противоположная точке M, должна принадлежать какой-нибудь из частей, и эта часть (содержащая и точку M, и точку M_1) будет иметь диаметр 1.

Нетрудно найти и третью степень круга диаметра 1. Она равна $\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}866...$ (рис. 2, *б*).

Упражнение 1. Найдите четвертую, пятую, шестую и седьмую степени круга диаметра 1.

Если вы справились с упражнением 1, то вам удастся накормить ваших гостей круглым тортом. Если гостей не более семи душ.

Упражнение 2. Пусть торт имеет форму правильного треугольника диаметра 1 (обозначим его Tp). Найдите Tp^2, Tp^3, Tp^4, Tp^5 *).

Разбиение квадрата на две, три и четыре части

Итак, как вы уже смогли убедиться, задача о вычислении F^n непроста, даже если фигура F такая «простая», как круг или правильный треугольник. Если же ваш торт имеет форму квадрата, гостям придется потерпеть еще, пока мы будем считать его степени.

Обозначим через $Кв$ квадрат диаметра 1 (значит, сторона его имеет длину $\sqrt{2}/2$). Заметим, что $Кв^2=\sqrt{10}/4=0{,}790...$ Действительно, на рисунке 3, *а* показано разбиение квадрата по средней линии на два прямоугольника. Диаметр каждого из них равен $\sqrt{10}/4$ (проверьте!). Докажем, что при любом другом разбиении квадрата на две части диаметр одной из них не меньше $\sqrt{10}/4$.

Предположим, что это не так, и квадрат разбит на две фигуры меньшего диаметра. Пусть вершина A_1 принадлежит первому из этих множеств (рис. 3, *б*). Тогда середина стороны A_2B_2 точка E_2 принадлежит второму множеству, т. к. $A_1E_2=\sqrt{10}/4$. Отсюда следует, что вершина B_1 принадлежит первому множеству, а поэтому вершина B_2 принадлежит второму. Но тогда середина стороны A_2B_1 точка K не может принадлежать ни первому, ни второму множеству.

Несколько сложнее найти $Кв^3$. На рисунке 4 приведен пример разбиения квадрата диаметра 1 на три части, диаметр каждой из которых равен $\sqrt{130}/16=0{,}712...$

Предположим, что квадрат можно разбить на три части меньшего диаметра. Покажем, что найдутся три вершины квадрата, принадлежащие разным множествам. Действительно, если вершины A_1 и B_1 (рис. 5) при-

---

*) В книге «Геометрические оценки и задачи комбинаторной геометрии» Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома (М., «Наука», 1974) приведены значения Tp^n при $n\leqslant 10$.

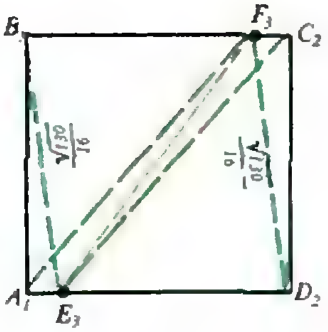


Рис. 5. $A_1E_3=\frac{1}{8}A_1D_2$,

$C_2F_3=\frac{1}{8}B_1C_2$.

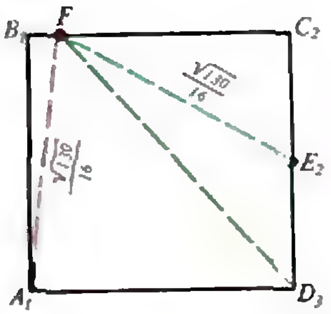


Рис. 6. $B_1F=\frac{1}{8}B_1C_2$.

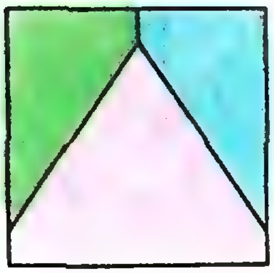


Рис. 7.

надлежат первому множеству, а вершины C_2 и D_2 — второму, то тогда точки E_3 и F_3 такие, что $A_1E_3=\frac{1}{8}A_1D_2$, а $C_2F_3=\frac{1}{8}B_1C_2$, принадлежат третьему множеству. Однако расстояние $E_3F_3>\sqrt{130}/16$.

Далее, так как две соседние вершины принадлежат одному множеству, то мы будем считать, что это A_1 и B_1 (рис. 6). Пусть вершина C_2 принадлежит второму множеству, а вершина D_3 — третьему. Середина стороны C_2D_3 точка E_2 принадлежит либо второму, либо третьему множеству, либо им обоим. Без ограничения общности можно считать, что точка E_2 принадлежит второму множеству. Но в таком случае точка F не может принадлежать ни одному из трех множеств. Тем самым доказано, что $Кв^3=\frac{\sqrt{130}}{16}$.

Конечно же, квадрат разбивается на три множества так, что наибольший из диаметров равен $\frac{\sqrt{130}}{16}$, не единственным образом. На рисунке 7 приведен *другой способ разбиения*. А вообще, нетрудно понять, что искомых способов разбиения бесконечно много.

Упражнение 3. Найдите $Кв^4$.

Таким образом, если ваших гостей двое, трое или четверо, можете начинать чаепитие. Задача нахождения $Кв^5$ куда сложнее. К ее решению мы сейчас и приступим.

Разбиение квадрата на пять частей

По аналогии с предыдущими случаями естественно попытаться разбить квадрат на пять прямоугольников (например, рис. 8). Однако такое разбиение оказывается недостаточно «мелким»: если квадрат разрезать так, как был разрезан прямоугольник на рисунке 1, получим меньшее значение максимального диаметра частей.

Итак, попробуем разбить квадрат на два четырехугольника и три пятиугольника, причем так, чтобы диаметры их оказались равными. Это *требование, естественное при поиске нужного разбиения*, выполняется при $AE=\frac{13}{3}AB$ (рис. 9). В этом случае все диаметры равны $\frac{5\sqrt{34}}{64}=0,455...$

Докажем, что при любом разбиении квадрата на пять частей диаметр одной из них не меньше этого числа.

Допустим, что квадрат удалось разбить на пять частей диаметра меньше $\frac{5\sqrt{34}}{64}$. Очевидно, что все вершины квадрата принадлежат четырем разным множествам разбиения. Ясно также, что точки пятого множества могут попасть не более чем на две (причем соседние) стороны квадрата. Конечно, может оказаться, что их нет ни на одной из его сторон или они есть ровно на одной его стороне.

Предположим, что если точки пятого множества есть на одной стороне квадрата, то это сторо-

Рис. 8. $AH=\frac{1}{2}AD$,
$BE_1=E_1E_2=E_2C$
$AF=\frac{31}{72}AB$.

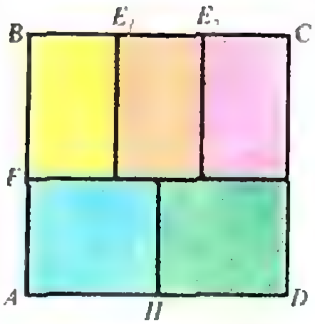
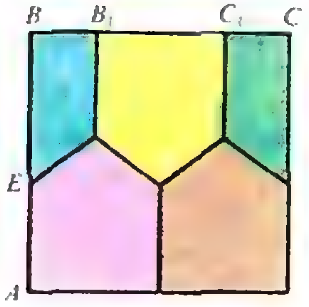


Рис. 9. $AE=\frac{13}{32}AB$,
$B_1B=\frac{1}{4}BC$.



на A_1A_2, если на двух соседних, то это A_1A_2 и A_1A_4 (рис. 10, *а, б*).

Рассмотрим теперь точку M_5 (рис. 10, *а*). Она принадлежит пятому множеству, ибо длины отрезков A_1M_5, A_2M_5, A_3M_5, A_4M_5 больше $\frac{5\sqrt{34}}{64}$ (проверьте!). Так как, по предположению, на стороне A_3A_4 нет точек пятого множества, то ее середина точка E принадлежит либо третьему, либо четвертому множеству.

Сначала допустим, что E — точка третьего множества. Тогда F_2 (рис. 10, *а*) — точка второго множества. Но в таком случае точка G не принадлежит ни одному из пяти множеств разбиения $\left(M_5G=F_2G>\frac{5\sqrt{34}}{64}\right)$.

Пусть теперь E — точка четвертого множества (рис. 10, *б*). Тогда точка H на стороне A_1A_4 не принадлежит четвертому множеству, значит, H — точка либо первого, либо пятого множества. Если H — точка первого множества, то точка L на A_1A_2 не принадлежит ни одному из множеств разбиения, как раньше это было с точкой G. Если же H — точка пятого множества, то на стороне A_1A_2 нет точек пятого множества (проверьте, почему).

Но в начале доказательства мы договорились, что если есть точки пятого множества на A_1A_4, то они есть и на A_1A_2. Пришли к противоречию.

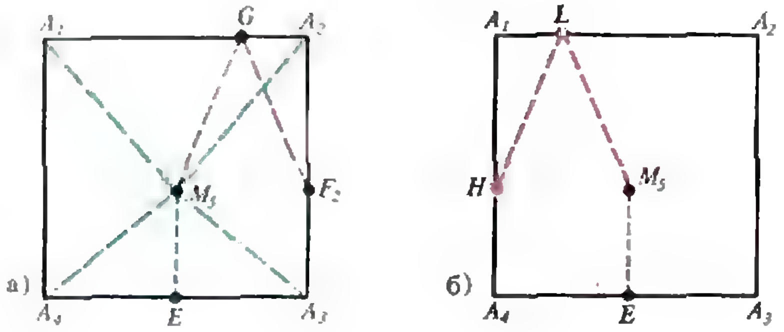
Тем самым доказано, что $K\textit{в}^5=\frac{5\sqrt{34}}{64}$.

Теперь вы сможете разложить большой квадратный торт по пяти маленьким тарелочкам. Попробуем теперь разделить

Квадратный торт на шестерых

Первое, что приходит в голову,— разбить квадрат на шесть прямоугольников (рис. 11). В этом случае все диаметры равны $\frac{\sqrt{26}}{12}=0{,}424...$ Однако по аналогии со случаем $n=5$ можно привести более «хоро-

Рис. 10. а) $M_5E=A_3F_2=\frac{13}{32}A_1A_2$,
$A_1G=\frac{1}{4}A_1A_2$.
б) $HA_4=M_5E=\frac{13}{32}A_1A_4$, $A_1L=\frac{1}{4}A_1A_2$.



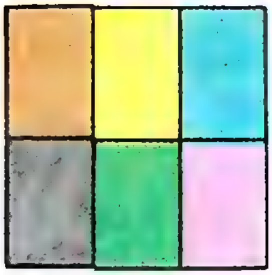


Рис. 11.

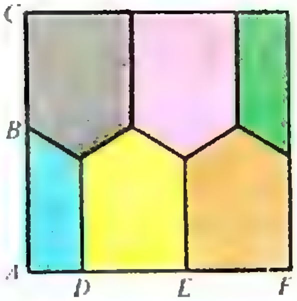


Рис. 12. $AB=\frac{14}{25}AC.$

$AD=\frac{1}{5}AF.$

$DE=EF=\frac{1}{5}AF.$

шее» разбиение (рис. 12). Здесь все диаметры равны $\frac{\sqrt{442}}{50}=0{,}4204\dots$

Впрочем, и этот пример можно улучшить.

Посмотрите на рисунок 13. Взяв нижнее основание шестиугольника равным 1/4 стороны, мы получим, что максимальный диаметр равен $\frac{\sqrt{11570}}{256}=0{,}4201\dots$ Попробуем теперь найти такое основание шестиугольника, чтобы максимальный диаметр был наименьшим среди разбиений такого вида. (Как и раньше, будем добиваться того, чтобы диаметры всех множеств разбиения были равны.)

Итак, пусть d — это наибольший диаметр. Для удобства вычислений примем здесь длину стороны за 1. Тогда $x^2+y^2=d^2=EF^2$, $(1-2x)^2+(1-y)^2=d^2=AG^2=HL^2$ (рис. 14). (Мы не будем принимать во внимание $b=(4x-1)$, ибо, как потом окажется, это расстояние в оптимальном случае меньше d.) Во-первых, имеем $y=\frac{3}{2}x^2-2x-1$. Поэтому $d^2=\frac{9}{4}x^4-6x^3+8x^2-4x+1$ (проверьте!). Найдем значение x, при котором d^2, а значит, и d, минимально. Приравняв к нулю производную и решив получившееся кубическое уравнение, найдем, что искомое значение x равно 0,384... Теперь, вспомнив, что на самом деле длина стороны квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим, что максимальный диаметр такого разбиения равен 0,4200...

Может быть, вам удастся разрезать квадратный торт на шесть более мелких кусков? Или доказать, что это невозможно?

Кроме того, неизвестно, чему равно Tp^n при $n\geqslant16$ и n-я степень круга при $n\geqslant8$. Это трудные задачи, но, возможно, вы решите их?

Иначе, приглашая гостей на чаепитие, вам придется ограничивать их число — в зависимости от формы припасенного торта...

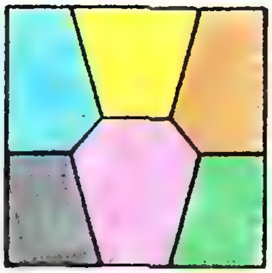


Рис. 13.

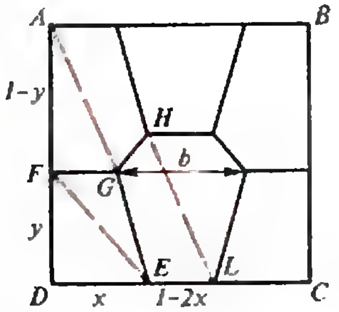
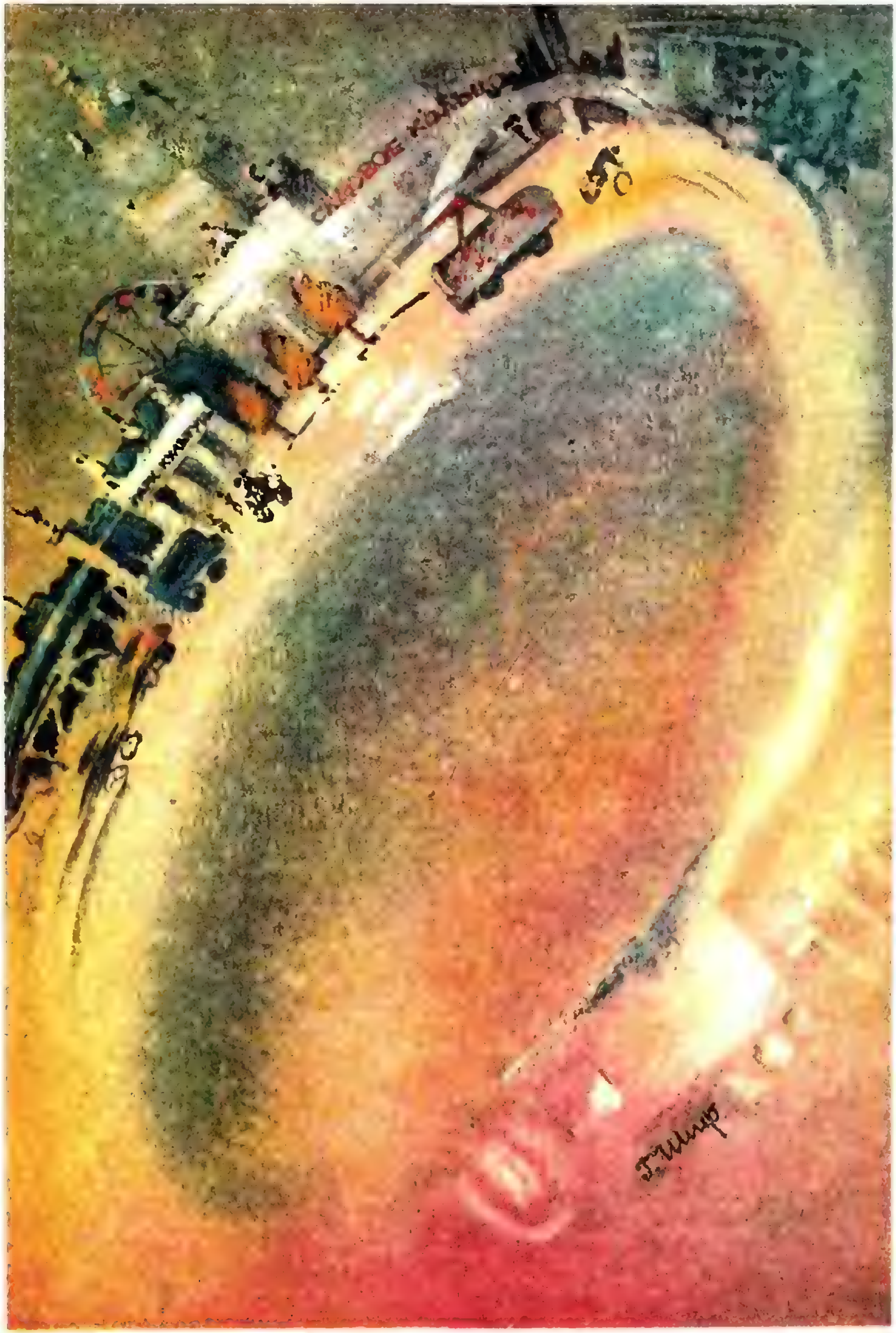


Рис. 14.


САДОВОЕ КОЛЬЦО

«НЕТ ЛИНИИ ПРЯМЕЙ КОЛЬЦА...»

В. ЧВАНОВ

Что такое аналогия?

В науке существует множество способов постановки и решения проблем. Некоторые из них имеют довольно узкую область применения — какой-либо раздел данной науки или даже тип задач. Другие — такие, как анализ, синтез, обобщение — универсальны и с равным успехом используются в самых разных областях науки.

Одним из таких общих методов познания является аналогия. Ее суть — в сопоставлении схожих свойств у объектов, различных по своей природе. Так, если известно, что объект A обладает набором некоторых свойств a, b, c, а объект B — набором схожих свойств a^* и b^*, то можно предположить, что B обладает также и свойством c^*.

Рассуждение по аналогии не обходится без догадки, интуиции. В этом — слабость данного метода исследования, но в этом и его сила. Именно благодаря этой особенности аналогия позволяет переносить идеи из одной области знаний в другие, казалось бы, совсем с ней не связанные. Часто это приводит к решению давних задач, до тех пор не желавших решаться, или к появлению новых.

В алгебре успех может принести переход к другой системе счисления, в геометрии — переход от плоскости к пространству. Менее очевидна аналогия между прямой и окружностью. Ее и иллюстрирует эта статья.

Кольцевая линейка

Самая интересная задача — еще никем не решенная. Она дает возможность по-настоящему испытать радость самостоятельного творчества. Поэтому многие математики составляют по своему вкусу коллекции нерешенных задач. Начало моей коллекции положила следующая

Задача 1. *При каких k окружность длины $n=k^2-k+1$ (n, k — целые числа) можно разбить k точками на k дуг так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ нашлась дуга длины m?*

Будем называть окружность, удовлетворяющую условию задачи, (n, k)-универсальным кольцом. Частный случай этой задачи был опубликован в «Кванте» № 4 за 1979 год (задача М558): «В круге расположены $k>1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180°/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга».

Простота формулировки, казалось бы, намекала на простоту решения. Однако, ознакомившись с известными результатами (некоторые из них изображены на рисунке 1), я понял, что задача не из легких.

Но вот, просматривая старые номера «Кванта», я наткнулся на задачу М399 («Квант» № 8, 1976):

Задача 2. *На отрезке длины 7 можно поставить пять точек так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, 7$ нашлись две из этих пяти точек на расстоянии m.*

Попробуйте выяснить, какое наименьшее число $k(n)$ точек нужно поставить на отрезке длины n, так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, n$ нашлись две из этих $k(n)$ точек на расстоянии m.

а) Решите эту задачу для нескольких первых значений n (нам известно $k(n)$ для $n\leq 13$).

Заголовок этой статьи — строчка из «Баллады истин наизнанку» Франсуа Вийона.

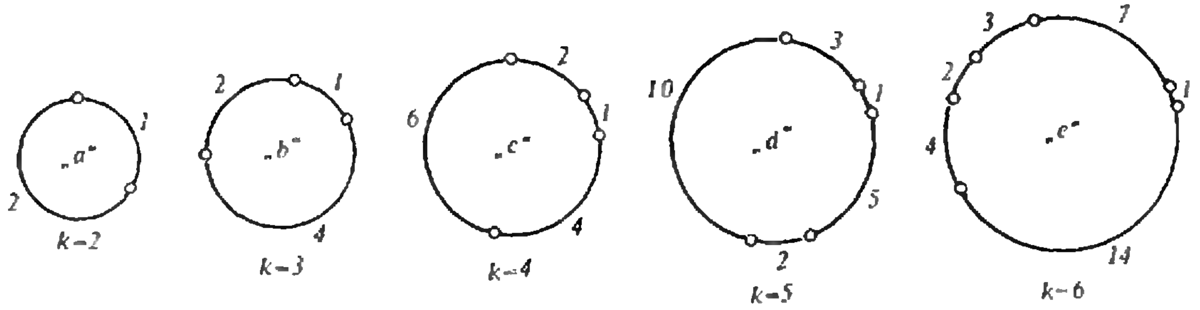


Рис. 1.

б) Получите оценки для $k(n)$ для любого n. Известны оценки $(\sqrt{8n+1}+1)/2 \leqslant k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-1$. Постарайтесь доказать эти неравенства и, если сможете, найдите более точные оценки.

Задачи 1 и 2 похожи, как близнецы. Разница лишь в том, что в одном случае рассматривается окружность, а в другом — отрезок. Сразу возникает идея перенести все, что известно о задаче 2, на задачу 1.

Для краткости будем называть отрезок длины n, размеченный так, как требуется в условии задачи 2, универсальной линейкой длины n.

В статье А. Савина «От школьной задачи — к проблеме» («Квант», № 12, 1976) излагалось решение этой задачи. Оценка сверху — $k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-1$ — получалась там из следующей конструкции универсальной линейки произвольной длины n:

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m\text{ раз}}, \underbrace{m+1, m+1, \dots, m+1}_{l\text{ раз}}.$$

Если $n < m+l(m+1)$, то последний отрезок берется соответственно короче, чем $(m+1)$, при этом линейка остается универсальной.

Вскоре мне удалось для некоторых n построить удачные конструкции линеек.

$$L_1 = \quad 1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 3,\ 1,\ 2 \qquad (8),$$

$$L_2 = 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 7,\ 7,\ 5,\ 5,\ 1,\ 2,\ 2 \qquad (12),$$

$$L_3 = 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 9,\ 9,\ 9,\ 7,\ 7,\ 7,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2 \qquad (16),$$

. . . .

$$L_l = 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(l+1)\text{ раз}}, \underbrace{2l+3, \dots, 2l+3}_{l\text{ раз}}, \ (4(l+1)),$$

$$\underbrace{2l+1, \dots, 2l+1}_{l\text{ раз}},\ 1,\ \underbrace{2, \dots, 2.}_{l\text{ раз}}$$

Отрезок, заключенный в скобки, можно повторять несколько раз подряд, и линейка новой длины будет по-прежнему универсальной.

Универсальная последовательность и универсальная линейка

Распространить полученные результаты на задачу 1 мне не удалось. Зато нашлась еще одна задача, оказавшаяся близкой к предыдущим двум:

Задача 3 (М400, «Квант» № 8, 1976): *Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$ назовем (n, k)-универсальной, если вычеркиванием части членов из нее можно получить любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ входит по одному разу. Для произвольного n укажите самую короткую (n, k)-универсальную последовательность.*

Примером (4,12)-универсальной последовательности является такая: 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3.

В решении, приведенном в журнале, предложен способ построения некоторой конструкции универсальной последовательности, дающей такие оценки числа $k(n)$:

$$(n\ (n+1))/2+n-2 \leqslant k(n) \leqslant n^2-2n+4. \tag{1}$$

Задача на исследование. Постарайтесь улучшить оценки (1).

Универсальную последовательность я счел своеобразной линейкой. Если универсальная линейка измеряла неповторяющиеся отрезки от 1 до n, то универсальная последовательность — все несовпадающие перестановки из чисел 1, 2, ..., n. Немедленно возникла парная к задаче 3

Задача 4 (новая). *k точек делят окружность на k дуг, длины которых — натуральные числа. Разбиение окружности назовем (n, k)-универсальным, если вычеркиванием части дуг из него можно получить любую последовательность из n дуг, в которую дуги с длинами 1, 2, ..., n входят по одному разу. Для произвольного числа n укажите минимальное k, для которого существует (n, k)-универсальное разбиение окружности.*

Оказалось, что предложенные в решении задачи М400 конструкция и оценки числа $k(n)$ годятся и для задачи 4.

Задача на исследование. Построение некоторых (n, k)-универсальных разбиений окружности позволило предположить, что $k(n)=k^2/2$, если n — четно, и $k(n)=(k^2-1)/2$, если n — нечетно. Докажите или опровергните это предположение.

Двоичные родственники универсальной линейки

Ими оказались два варианта задачи М574 («Квант», № 7, 1979):

Задача 5. *Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 1 до $n-1$ сумма $C(k)=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+$ $+a_{n-k}a_n$ является нечетным числом. Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n<1000$.*

Задача 6 (М574, кольцевой вариант). *Укажите значения n, для которых существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из расположенных по окружности чисел 0 и 1, у которой при любом $k (1\leqslant k\leqslant(n-1))$ сумма попарных произведений членов, отстоящих на k, т. е. $C(k)=a_1a_{k+1}+$ $+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$, нечетна.*

Задача 5 полностью решена. В ее решении («Квант» № 6, 1980) не только указываются все значения n, для которых существует искомая двоичная последовательность (назовем ее для краткости n-последовательностью), но и дается несколько способов ее построения.

Приведу (без доказательства) один из них.

Пусть $A=a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая последовательность, удовлетворяющая условию задачи (например, $A=$ $=1101$). Тогда и последовательность

$$B=A\ \underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{ раз}}\ A\ \underbrace{00\ldots0}_{(3n-2)\text{ раз}}\ A=b_1, \ldots, b_{7n-3},$$

состоящая из трех наборов A и двух наборов нулей между ними, также ему удовлетворяет. В нашем случае

$$B=1101\ 000\ 1101\ 0000000000\ 1101.$$

Решение задачи 6 неизвестно.

Мне удалось установить родство этих задач с первыми двумя, отыскав преобразование, переводящее (n, k)-универсальное кольцо — решение задачи 1 — в двоичное n-кольцо (решение задачи 6).

Прежде чем описывать это преобразование, следует устранить небольшое препятствие. В обеих задачах использованы буквы n и k. Чтобы избежать путаницы, обозначения, относящиеся к задаче 6, будем использовать в дальнейшем со штрихом. Как выяснится дальше, $n'=n$, но $k'\neq k$.

Теперь построим обещанное преобразование. Сперва возьмем окружность длины $n=k^2-k+1$, для которой существует решение задачи 1. На ней через равные интервалы нанесем n делений (на рисунке 2 $n=7$). Те k из них, которые дают решение задачи 1, отметим красным цветом, а остальные — синим. Затем против каждой красной точки напишем еди-

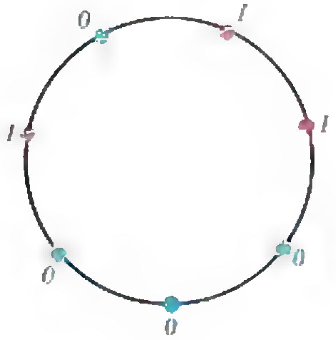


Рис. 2.

ницу, а против синей — нуль. Полученная таким образом замкнутая двоичная последовательность оказывается искомым n'-кольцом.

В самом деле, по условию задачи 1, найдется дуга каждой из длин $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ с концами в красных точках, причем каждая такая дуга встречается ровно 1 раз (в самом деле: всех возможных дуг $k(k-1)$ штук). Но именно в этих точках и только в них стоят единицы, в остальных же — нули. Для задачи 6 это означает, что для любого k' ($0<k'\leqslant(n-1)/2$, поскольку расстояние измеряется по кратчайшей дуге) только одно слагаемое суммы $C(k')$ будет иметь вид $1\times1=1$. Все же остальные слагаемые окажутся вида $0\times0=0$, $1\times0=0$ либо $0\times1=0$. Следовательно, при любом k' ($0<k'\leqslant(n-1)/2$) сумма $C(k')=1$, т. е. нечетна.

Итак, доказана следующая

Лемма. *Для любого $n=k^2-k+1$, для которого существует (n, k)-универсальное кольцо k-го порядка, существует и соответствующее двоичное n-кольцо той же длины n.*

Универсальные кольца на торе

Через некоторое время моя коллекция пополнилась еще одним любопытным экземпляром:

Задача 7. *В квадрате $n\times n$ клеток нужно отметить центры k клеток так, чтобы никакие четыре отмеченные точки не являлись вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем k это возможно? Решите задачу для квадратов 3×7 и 13×13 клеток.*

Я нашел ее в книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи Всесоюзных математических олимпиад» (М.: Наука, 1988). В решении этой задачи приведена следующая оценка числа $k(n)$:

$$k(n)\leqslant(n+n\sqrt{4n-3})/2,$$

а также способ построения примеров, для которых эта оценка точна. Вот он.

Строки и столбцы таблицы 7×7 занумеруем тройками из чисел 0 и 1, отличными от (0, 0, 0). Их как раз 7: (1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отметим, если $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ — четно. В квадрате 13×13 строки и столбцы нумеруются тройками из чисел 0, 1 и -1, отличными от (0, 0, 0), причем из двух троек, получающихся одна из другой умножением на -1, используется лишь одна. Их ровно 13. Клетку на пересечении строки (a_1, a_2, a_3) и столбца (x_1, x_2, x_3) отмечают, если $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ делится на три. Полученные таблицы изображены на рисунках 3 и 4.

Описанный способ построения не универсален, и это его главный недостаток.

Мне показалось, что задача 7 — двоюродная сестра предыдущих. Так и есть — повозившись с ней немного,

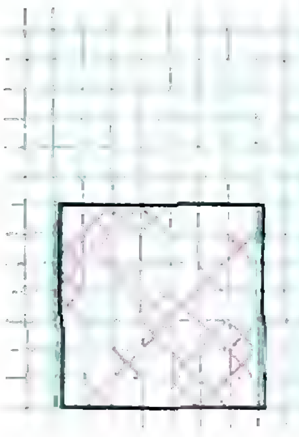


Рис. 3.

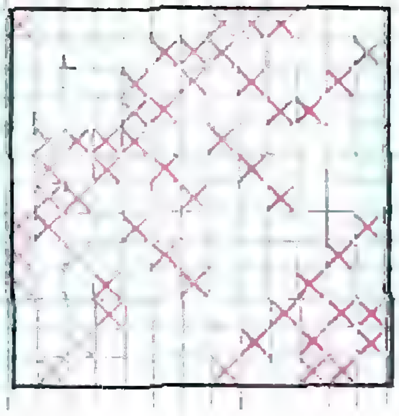


Рис. 4.

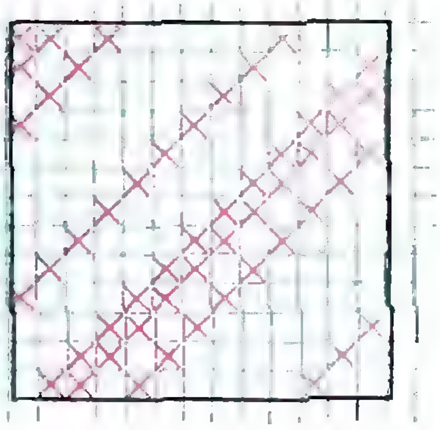


Рис. 5.

я догадался склеить верхнюю сторону квадрата с нижней, а правую — с левой. Из квадрата получился тор, а из столбцов и строк — кольца. Заменив пустые клетки нулями, а отмеченные — единицами, я обнаружил, что одна из кольцевых строк (и соответствующий столбец) оказалась n-кольцом (решением задачи 5).

Более того, существует и «n-тор», каждая строка и столбец которого — n-кольца. Чтобы получить его, достаточно в первой строке квадрата-развертки записать какую-либо n-последовательность, а в каждой следующей — сдвигать ее на одну клетку (рис. 5). Интересно, что некоторые диагональные строки при этом оказываются n-последовательностями. Так я нашел способ построения квадратов, удовлетворяющих условию задачи 7, для любого n, для которого существует n-кольцо.

Планиметрический аналог универсальной линейки

Я давно догадывался о его существовании. Если универсальная линейка измеряла неповторяющиеся длины, то ее планиметрический аналог должен измерять неповторяющиеся площади. Значит, это некий плоский шаблон с точечными отверстиями для вершин измеряемых квадратов. Итак,

Задача 8 (новая). *Какое минимальное число клеток $p(n)$ нужно отметить в квадрате $n\times n$ так, чтобы среди них нашлись все четверки клеток, центры которых бы лежали в вершинах квадратов 1×1, 2×2, ..., $(n-1)\times(n-1)$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата $n\times n$?*

Идея решения такова. Допустим, что в искомой разметке никакие два квадрата не имеют общих вершин. Тогда она содержит ровно $4(n-1)$ клеток (по 4 клетки на каждый квадрат). Но такую разметку легко улучшить, совмещая части квадратов так, чтобы некоторые из их вершин совпали. Если эти совмещения производить внутри исходного квадрата $n\times n$, то, очевидно, требование задачи по-прежнему будет выполнено.

Будем совмещать квадраты так, чтобы их диагонали легли на диагональ исходного квадрата. Тогда для общего числа клеток разметки $p(n)$ справедлива оценка

$$p(n)\leqslant 2(n-1)+\varphi(n),$$

где $\varphi(n)\leqslant 2(n-1)$ — число клеток, отмеченных на диагонали квадрата $n\times n$, а $(n-1)$ — число клеток, отмеченных симметрично по обе ее стороны.

Хотелось бы расположить квадраты так, чтобы $\varphi(n)$ было минимально. Но тогда диагональ большого квадрата превращается в универсальную линейку задачи 2 (рис. 6): она должна иметь минимальное число делений и измерять все отрезки (диагонали квадратов) от 1 до $(n-1)$.

При таком способе разметки $\varphi(n)\leqslant(n+2)/2$. *Ее анализ прост, и я оставляю его читателю.*

Итак, $p(n)\leqslant 2(n-1)+(n+2)/2=(5n-2)/2$, если n — четно, и $p(n)\leqslant(5n-1)/2$, если n — нечетно.

Более точную оценку $p(n)$ дает другой способ разметки диагонали большого квадрата (рис. 7). Сперва метим подряд m клеток. Затем отмечаем оставшиеся клетки диагонали с интервалом в $(n-1)$ клеток. Последняя клетка диагонали отмечается в любом случае (чтобы измерять квадрат $n\times n$). (Кроме того, отмечаются первые m клеток каждого столбца, у которого оказалась отмеченной диагональная клетка, и симметричные им m клеток в соответствующих строках. Но пока мы разметим только диагональ.) Выразим сторону квадрата n через m и $\varphi(n)$:

$$n=m+(\varphi(n)-m)\quad\text{или}$$
$$n=m(\varphi(n)+1)-m^2. \tag{2}$$

Используя формулу деления с остатком, нетрудно доказать, что при любом m в такой разметке клеток наша «линейка» будет измерять все квадраты со стороной 1, 2, ..., $(n-1)$.

Насколько большим можно сделать n, меняя m при фиксированном $\varphi(n)=k$? Запишем формулу (2) в виде

$$n=(k+1)^2/4-(m-(k+1)/2)^2.$$

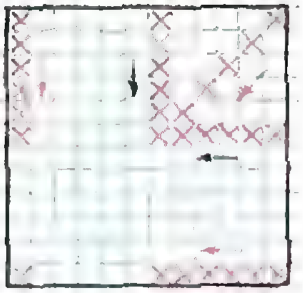


Рис. 6.

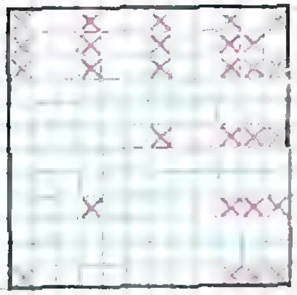


Рис. 7.

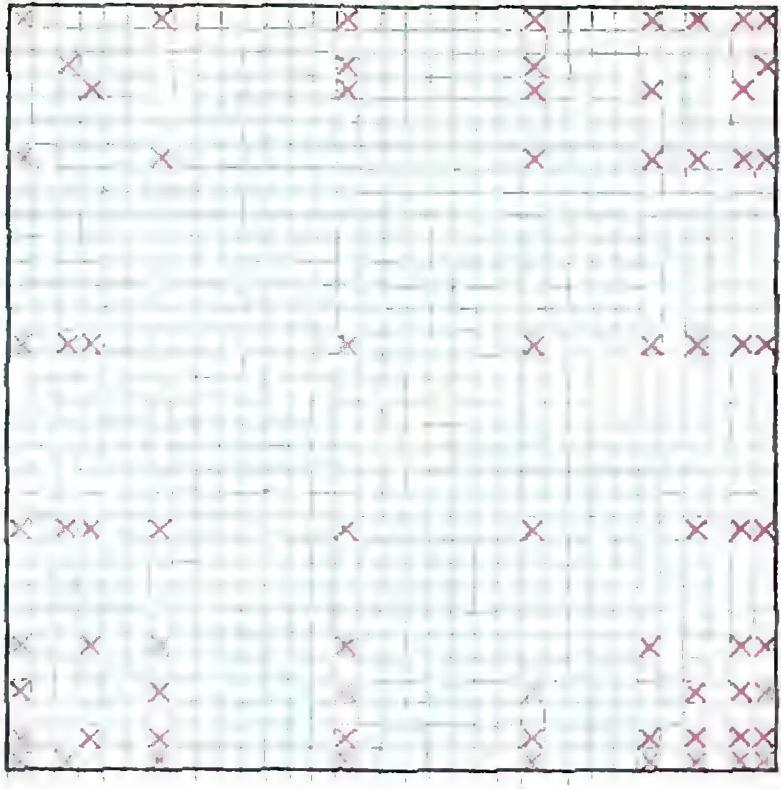


Рис. 8.

Видно, что n будет наибольшим при наименьшем $(m-(k+1)/2)^2$. Поэтому при нечетном k положим $m=(k+1)/2$, а при четном — $m=k/2$ или $m=(k+2)/2$. Итак, $n\geqslant(k+1)^2/4-1/4=(k^2+2k)/4$. Выразив k через n, получим

$$k\leqslant\sqrt{4n+1}-1.$$

Теперь разметим недиагональные клетки, остававшиеся пока без внимания. Их $2(n-1)$, поэтому

$$p(n)\leqslant 2(n-1)+\sqrt{4n+1}-1.$$

или

$$p(n)\leqslant 2n+\sqrt{4n+1}-3.$$

Для некоторых значений n эту оценку можно еще улучшить. Вспомните универсальную линейку задачи 2. Разметим главную диагональ большого квадрата с помощью конструкции, описанной на странице 20. Интервалы между клетками будем брать такими:

0,1,1,4,(7), 2,0,1
0,1,1,1,6,6,(11),4,4,0,1,1
0,1,1,1,1,8,8,8,(15),6,6,6,0,1,1,1
. . . .

При разметке главной диагонали квадрата с помощью этой таблицы число отмеченных клеток k на 2 больше числа запятых (с учетом повторов самого длинного интервала) в выбранной строке таблицы. На рисунке 8 $k=10$, число повторений максимального интервала $m=2$. Его длина $k-m-1$. Суммарная длина двух примыкающих к этой серии интервалов равна $k-m-2$ и повторяется $(k-m-4)/4$ раз. Затем идут единичные и нулевые (когда отмечены две соседние клетки) интервалы суммарной длиной $(k-m-2)/2$. Тогда длина диагонали

$$n=m(k-m-1)+(k-m-2)\times$$
$$\times(k-m-4)/4+(k-m-2)/2+k,$$

или

$$n=\frac{1}{4}(2mk-3m^2+k^2+4).$$

Проанализировав это выражение на максимум при фиксированном k, получим

$$k\leqslant\sqrt{(64n-64)/21}.$$

Тогда

$$p(n)\leqslant 2(n-1)+\sqrt{(64n-64)/21}. \qquad (3)$$

Для оценки числа $p(n)$ снизу используем решение задачи на торе. Склеенный из квадрата со стороной $n=k^2-k+1$, он будет состоять из k штук n-колец. Поэтому на диагональном кольце нашего тора можно отметить k клеток (на рисунке 9 $k=3$, $n=7$) так, что среди них найдутся все пары, лежащие на концах диагоналей квадратов 1×1, 2×2, ..., $(k^2-k)\times(k^2-k)$. Поскольку

$$k=(\sqrt{4n-3}+1)/2,$$

то

$$p(n)\geqslant k^2=2n+\sqrt{4n-3}-1)/2. \qquad (4)$$

Задача на исследование. Постарайтесь улучшить оценки (3) и (4).

Итак, получена планиметрическая универсальная «линейка». Естественным продолжением темы является

Задача 9 (новая). *Куб состоит из $n\times n\times n$ единичных кубиков. Какое минимальное их число нужно отметить, чтобы среди них нашлись все восьмерки кубиков, центры которых лежали бы в вершинах кубов $1\times1\times1$, $2\times2\times2$, ..., $(n-1)\times(n-1)\times(n-1)$ с ребрами, параллельными ребрам исходного куба $n\times n\times n$?*

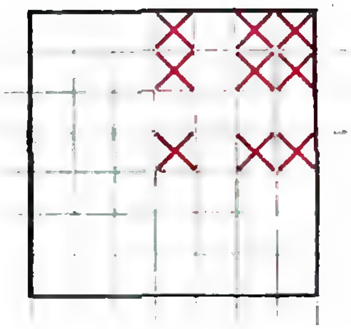


Рис. 9.

Думаю, что окончательное решение этой задачи — дело трудное. Но, может быть, кто-то из читателей получит приближенные оценки числа $p(n)$ для «кубической линейки»?

Как видите, рассуждения по аналогии помогли существенно продвинуться в решении задач, оказавшихся при внимательном рассмотрении близкими родственниками. Там же, где не удалось добиться ответа, мы смогли поставить правильные вопросы. А, как известно, правильная постановка задачи — уже половина решения.

(Начало см. на с. 2)

когда высокотемпературные сверхпроводники еще не были созданы. Но и сейчас вопрос остается очень актуальным, хотя в плане перспективы можно было бы упомянуть и проблему комнатно-температурной сверхпроводимости. В новом издании книги об этом, конечно, говорится, но названия темы 2 я изменять не стал. Добавлен, однако, вопрос о сверхдиамагнетиках, т. е. о веществах, не являющихся сверхпроводниками, но обладающих очень большой диамагнитной восприимчивостью.

Как я считаю, каждый физик должен иметь представление о проблематике, связанной со всеми перечисленными в списке вопросами. Имея в виду лишь общие сведения («без формул»), думаю, что такая цель легко достижима. Еще раз подчеркну условность моего списка, его догматизация противоречила бы самому духу науки.

Литература

1. В. Л. Гинзбург. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными? Успехи физических наук, 1971, т. 103, с. 87.

2. В. Л. Гинзбург. О физике и астрофизике. М.: Наука, 1985.

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1291» или «Ф1298». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1291 — М1295, Ф1298 — Ф1302

М1291. Докажите, что а) в правильном 12-угольнике, б) правильном 54-угольнике найдутся 4 диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке.

С. Токарев

М1292. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, так, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?

И. Сергеев

М1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

И. Шарыгин

М1294. Куб размером $10\times10\times10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times1\times10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

А. Спивак

М1295. На прямоугольном экране размером $m\times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

А. Часовских

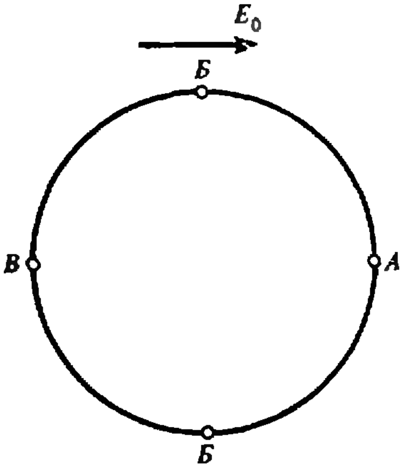
Ф1298. Тяжелый шарик подбросили вверх со скоростью v_0. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости шарика, найдите отрезок времени, через который шарик упадет в точку, откуда он был брошен. При скорости v_0 сила сопротивления $F=\alpha v_0\gg mg$ (здесь α — коэффициент пропорциональности, m — масса шарика).

А. Андрианов

Задачник „Кванта"

Ф1299. Черный шарик радиусом $r=1$ мм подвешен на тонкой нити длиной $l=1$ м. Вся система помещена в вакуумированную стеклянную трубку с аргоном при давлении $p_0=0{,}1$ Па. Шарик освещают горизонтальным пучком света, плотность потока энергии в котором равна $w_0=100$ Дж/м$^2\cdot$ с. Оцените величину отклонения шарика от положения равновесия под действием света. Теплопроводностью шарика пренебречь. Учесть, что абсолютно черное тело, нагретое до абсолютной температуры T, излучает с единицы поверхности за единицу времени энергию, равную σT^4, где $\sigma=5{,}67\cdot 10^{-8}$ Вт/м$^2\cdot$ К^4. Температура газа в трубке постоянна и равна $T_0=293$ К. Молярная масса аргона $M=0{,}04$ кг/моль, плотность шарика $\rho=1$ г/см^3.

А. Семенов



Ф1300. Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью E_0, напряженность поля вблизи точки A (см. рисунок) оказывается равной $3E_0$, а вблизи точки $Б$ — нулю. Определите напряженность поля вблизи точки $В$. Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере $БАБ$. Радиус сферы R.

В. Можаев

Ф1301. На тороидальном сердечнике симметрично расположены три одинаковые обмотки, образующие трансформатор. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр. Оказалось, что вольтметр в этом случае показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накоротко? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малыми, вольтметр и источник — идеальными, магнитную проницаемость сердечника — не изменяющейся при различных значениях магнитной индукции.

А. Андрианов

Ф1302. На прислоненное к стенке тело массой M перпендикулярно стенке действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F=F_0\cos \omega t$. Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы амплитуда силы, действующей на стенку, отличалась от F_0 в 3 раза?

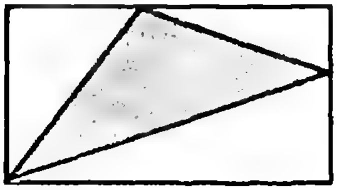
И. Воробьев

Решения задач

М1266 — М1270, Ф1278 — Ф1282

М1266. *Внутри круга радиусом 1990 с центром в начале координат отмечено 555 точек с целыми координатами, никакие три из которых не лежат*

Площадь треугольника с вершинами в целых точках — целое или полуцелое число (т. е. число вида $n/2$, где n — целое). Это легко увидеть, заключив треугольник в наименьший прямоугольник с вершинами в целых точках и сторонами, параллельными осям: на рисунке площадь розового треугольника равна разности целого *на одной прямой. Докажите, что найдутся два треугольника равной площади с вершинами в этих точках.*



числа — площади прямоугольника — и трех полуцелых чисел — площадей прямоугольных треугольников у его вершин. (Это сразу следует также из формулы Пика, см. «Калейдоскоп «Кванта» в этом номере журнала.) Поскольку площадь треугольника не больше площади круга $\pi 1990^2 < 12{,}6 \cdot 10^6$, она принимает не более $25{,}2 \cdot 10^6$ различных значений. С другой стороны, количество различных (неупорядоченных) троек из 555 точек равно $555 \cdot 554 \cdot 553/6 > 25{,}2 \cdot 10^6$; таким образом, найдутся два треугольника с равной площадью. Можно получить и более точную оценку. Можно показать, что площадь треугольника с вершинами внутри круга будет не больше площади равностороннего треугольника, вписанного в круг, т. е. не больше $3\sqrt{3}/4 \cdot 1990^2$, а эта величина меньше удвоенного числа троек $n(n-1)(n-2)/3$ уже при $n=397$, так что уже из 397 точек общего положения всегда можно выбрать два треугольника с равной площадью.

К. Кохась

М1267. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка из чисел 1, 2, ..., n; r_k — остаток от деления числа $a_1+a_2+\ldots+a_k$ на n ($k=1, 2, \ldots, n$). Докажите, что среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по крайней мере $\sqrt{n}$ различных (если $n>2$).*

Предположим, что среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ всего m различных. Заметим, что лишь для одного k может выполняться равенство $r_{k+1}=r_k$ (когда $a_{k+1}=n$). Для всех остальных k от 1 до $n-1$ разности $r_{k+1}-r_k$ — различные числа. Но из m разных чисел можно составить лишь $m(m-1)$ разных упорядоченных пар и тем самым не более $m(m-1)$ разных разностей. А их должно быть не меньше $n-2$. Таким образом, $m(m-1) \geqslant n-2$. Если бы m было меньше $\sqrt{n}$, то получилось бы (при $n \geqslant 4$) противоречие: $n-\sqrt{n} > n-2$. Для $n=3$ легко убедиться непосредственной проверкой, что среди трех остатков r_1, r_2, r_3 всегда не менее двух различных. Таким образом, утверждение доказано.

Л. Курляндчик

М1268. *Внутри треугольника ABC взята произвольная точка X. Прямые AX, BX, CX пересекают стороны BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1. Пусть $AB_1 \cdot AC_1 \cdot BC_1 \cdot BA_1 \times$ $\times CA_1 \cdot CB_1 = \Pi$. Докажите, что площадь S треугольника $A_1B_1C_1$ равна $S=\sqrt{\Pi}/2R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.*

Пусть точки C_1, A_1 и B_1 делят стороны $c=AB$, $a=BC$ и $b=CA$ соответственно на отрезки p и u, q и v, r и w (рис. 1). Поскольку площадь треугольника с данным углом пропорциональна произведению сторон, образующих этот угол, площадь S голубого треугольника равна площади всего треугольника S_{ABC}, умноженной на коэффициент

$$1-\frac{qu}{ca}-\frac{rv}{bc}-\frac{pw}{ab}=\frac{abc-bqu-arv-cpw}{abc}.$$

Подставив вместо a, b, c суммы $p+u$, $q+v$, $r+w$ и вспомнив известную формулу $S_{ABC}=abc/4R$, мы получим красивую формулу площади голубого треугольника

$$S=\frac{pqr+uvw}{4R},$$

но она отличается от той, которую требовалось доказать. Теперь воспользуемся теоремой Чевы, согласно которой при любом выборе точки X внутри треугольника

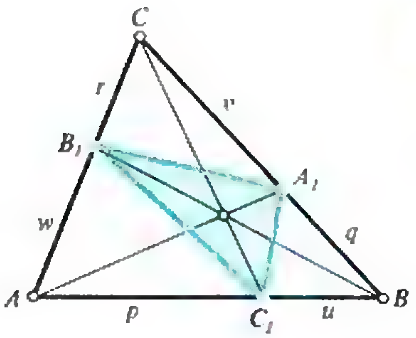


Рис. 1.

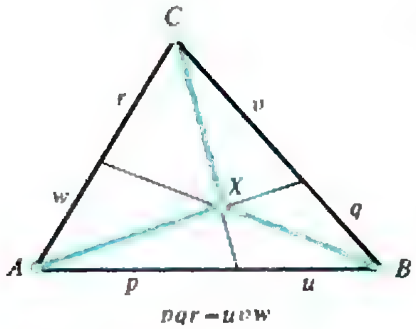


Рис. 2 (теорема Чевы).

ABC верно равенство

$$pqr = uvw. \qquad (*)$$

Из равенств (*) и $\Pi = pqruvw$ следует, что

$$\Pi = (pqr + uvw)^2/4,$$

а значит, и требуемая формула для S.

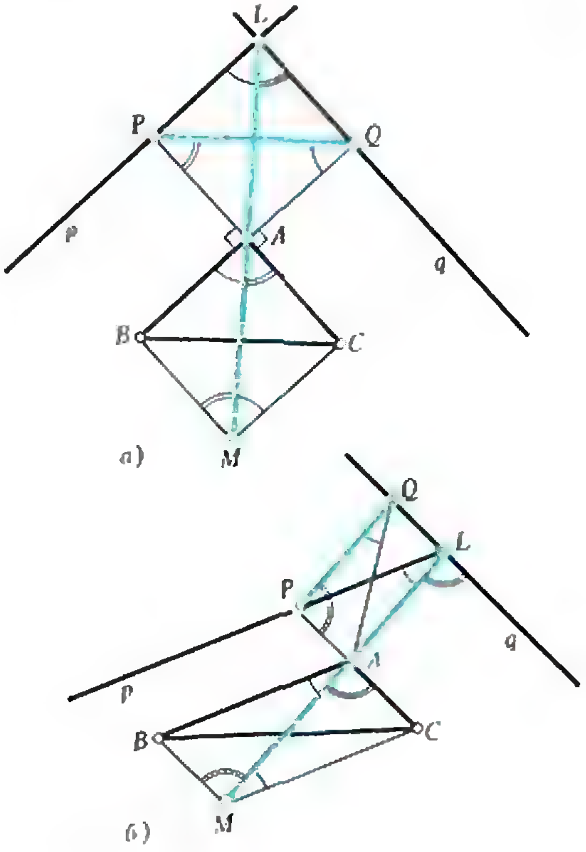
Для доказательства формулы (*) можно также использовать площади. Отношение площадей треугольников AXB и CXB с общим основанием XB равно отношению их высот, т. е. w/r (рис. 2). Перемножая три таких отношения, получим

$$\frac{p}{u}\cdot\frac{q}{v}\cdot\frac{r}{w} = \frac{S_{BXC}}{S_{CXA}}\cdot\frac{S_{CXA}}{S_{AXB}}\cdot\frac{S_{AXB}}{S_{BXC}} = 1.$$

Н. Васильев, В. Прасолов

М1269. *На плоскости дан треугольник ABC. Прямая p параллельна прямой AB и расположена на расстоянии AC от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (p и AB) нет внутренних точек треугольника ABC. Прямая q параллельна прямой AC и расположена на расстоянии AB от нее так, что внутри полосы, образованной этими двумя прямыми (q и AC), нет внутренних точек треугольника ABC. Прямые p и q пересекаются в точке L. Доказать, что прямая AL проходит через середину BC.*

Дополним треугольник *ABC* до параллелограмма *ABMC* (см. рисунок). Нужно доказать, что диагональ *AM* составляет продолжение отрезка *AL*. Опустим из точки *A* перпендикуляры *AP* и *AQ* на прямые p и q.



Треугольник APQ равен каждому из треугольников ACM и MBC (по двум сторонам и углу между ними — этот угол равен $180° - \angle BAC$). Точки A, P, L, Q лежат на одной окружности (с диаметром AL). Отсюда следует равенство углов, одинаково обозначенных на рисунке. (Достаточно выбрать один из углов BAM и MAC — удобнее выбрать меньший: если $\angle BAM = 180°$, то $\angle BAM = \angle PQA = \angle PLA$.) Тем самым, углы отрезка AL с прямыми p и q равны углам, образованным диагональю AM и сторонами AB и AC, что и требовалось доказать.

Я. Коваль

М1270. *Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то*

$$12^m + 9^m + 8^m + 6^m$$

делится на 1991.

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \ldots + b^{2k}).$$

Разложим данное число на два множителя: $(3^m + 4^m)(3^m + 2^m)$. При $m = 5(2k+1)$, где k — целое неотрицательное число, эти множители делятся (как видно из тождества, приведенного на полях) соответственно на $3^5 + 4^5 = 343 + 1024 = 1367 = 7 \cdot 181$ и на $3^5 + 2^5 = 243 + 32 = 275 = 5^2 \cdot 11$. Поэтому данное в условии число делится на $181 \cdot 11 = 1991$.

Н Васильев

Ф1278. *Летящий вертикально вверх снаряд взорвался на максимальной высоте. Осколки снаряда выпадают на землю в течение промежутка времени t. Найдите скорость осколков в момент взрыва.*

Скорость запущенного вверх снаряда в верхней точке равна нулю. Будем считать, что осколки летят во все стороны с одинаковыми по величине скоростями v. Тогда максимальное различие времен падения — оно соответствует времени выпадания осколков на землю t — будет для осколков, летящих по вертикали. Осколок, летящий после взрыва вверх со скоростью v, через время $2v/g$ окажется в точке взрыва, и его скорость будет равна v и направлена вниз. Значит, разность времен как раз равна $2v/g = t$, откуда

$$v = gt/2.$$

Заметим, что если скорости осколков различны, то ничего определенного сказать нельзя.

О. Савченко

Ф1279. *Прочный цилиндрический сосуд объемом $V = 10$ л, содержащий $m = 3$ г кислорода, разделяют тонкой перепонкой, которая выдерживает разность давлений $\Delta p = 1000$ Па. В левой части сосуда (она составляет 1/3 объема сосуда) включают нагреватель. Благодаря теплопроводности перепонки, тепло перетекает в правую часть сосуда. Из-*

Найдем условие, при котором разность давлений на перепонку равна предельному значению:

$$p_1V/3 = \nu RT_1/3, \; 2p_2V/3 = 2\nu RT_2/3,$$

откуда получаем

$$T_1 - T_2 = (p_1 - p_2)V/(\nu R).$$

При такой разности температур из левой части сосуда в правую перетекает мощность

$$N = \Delta Q(T_1 - T_2)/\Delta T.$$

Для того чтобы разность температур оставалась постоянной, приходящая в систему полная мощность должна быть больше в 1,5 раза — ведь полная масса как раз в *вестно, что при разности температур $\Delta T=1$ К за одну секунду перетекает количество теплоты $\Delta Q=0,2$ Дж. При какой максимальной мощности нагревателя перепонка останется целой в процессе длительного нагревания?*

1,5 раза больше массы правой части. Окончательно имеем

$$N_{\text{общ}}=1,5\Delta Q\Delta pV/(\nu R\Delta T)=3,85\ \text{Вт}.$$

Заметим, что в самом начале процесса мощность может быть выше — до выхода на стационарный режим.

Р. Александров

Ф1280. *В коробке с тремя выводами А, Б и В находится неизвестная схема, состоящая из резисторов. При помощи омметра измерены сопротивления между различными выводами: $R_{АБ}=10$ Ом, $R_{БВ}=20$ Ом, $R_{АВ}=30$ Ом. К точкам А и В подключают батарейку напряжением $U=1,5$ В, а между Б и В — амперметр, сопротивление которого $r=5$ Ом. Что он покажет?*

При данном в условии соотношении сопротивлений подходящей будет схема, изображенная на рисунке 1. Теперь подключим к схеме батарейку и амперметр — рисунок 2. Общее сопротивление цепи равно

$$R_{\text{общ}}=R_{АБ}+\frac{R_{БВ}r}{R_{БВ}+r}=14\ \text{Ом},$$

общий ток в цепи —

$$I_{\text{общ}}=\frac{U}{R_{\text{общ}}}\approx 0,11\ \text{А},$$

а амперметр показывает ток

$$I_{\text{А}}=I_{\text{общ}}\frac{R_{БВ}}{R_{БВ}+r}\approx 0,09\,\text{А}.$$

А. Сашин

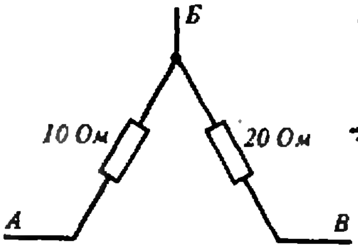


Рис. 1.

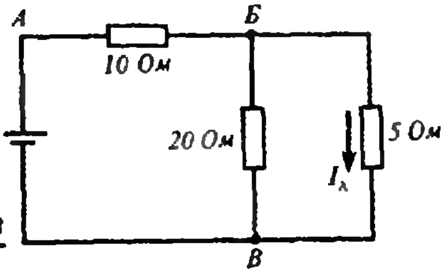


Рис. 2.

Ф1281. *Из пяти одинаковых конденсаторов и катушки собрана схема, показанная на рисунке. Найдите максимальный ток через катушку после подключения батарейки напряжением U_0. Найдите также максимальное напряжение на параллельно соединенных конденсаторах. Сопротивление проводов считать малым.*

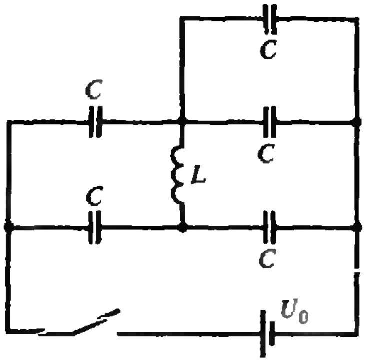
Сразу после включения конденсаторы будут заряжаться от батарейки так, как если бы катушки вовсе не было — ток через нее вначале пренебрежимо мал. (Это справедливо при идеальной батарейке и проводах с очень малым сопротивлением. Попробуйте сами сделать оценку, по сравнению с чем именно должно быть малым это сопротивление.)

Подсчитаем энергию получившейся (без катушки) системы конденсаторов:

$$C_1=C/2+2C/3=7C/6,\ W_1=C_1U_0^2/2=7CU_0^2/12.$$

Кстати сказать, в процессе быстрой зарядки будет выделяться тепло, но для нас это неважно — энергетический баланс мы будем рассчитывать начиная с того момента, когда выделение тепла уже закончится.

В тот момент, когда ток через катушку будет максимальным, ее ЭДС самоиндукции будет равна нулю. Тогда получается другое соединение конденсаторов — два



левых соединены параллельно, а последовательно к ним подключены параллельно соединенные друг с другом три правых конденсатора. Энергия этой системы будет равна

$$C_2=6C/5,\ W_2=3CU_0^2/5.$$

Батарейка «протолкнула» по цепи дополнительный заряд

$$q=C_2U_0-C_1U_0=CU_0/30.$$

Работа батарейки при этом равна

$$A=qU_0=CU_0^2/30.$$

Теперь можно записать баланс энергий:

$$W_1+A=W_2+LI_m^2/2,$$

$$LI_m^2/2=7CU_0^2/12-3CU_0^2/5+CU_0^2/30=CU_0^2/60,$$

$$I_m=U_0\sqrt{C/(30L)}\,.$$

Находить максимальное напряжение на соединенных параллельно конденсаторах «в лоб» довольно нудно — придется записывать несколько уравнений для зарядов, которые оказались на конденсаторах (с учетом того, что некоторый заряд протек по катушке), и еще уравнение баланса энергий; проще сообразить, что искомое напряжение меняется по гармоническому закону относительно некоторого среднего значения, которое соответствует нулевому току через катушку. При нулевом токе это напряжение равно (как и вначале) $U_0/3$, при максимальном токе через катушку оно составляет $2U_0/5$, т. е. оно увеличилось на $U_0/15$. Это означает, что за следующую четверть периода, когда ток катушки уменьшится от максимального значения до нуля, напряжение увеличится еще на столько же и составит $7U_0/15$.

А. Зильберман

Ф1282. *Куб с ребром $a=10$ см, имеющий массу $M=1$ кг, подвешен на пружине жесткостью $k=400$ Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток упругих шариков, обладающих скоростью $v_0=20$ м/с на высоте первоначального положения основания куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно. Найдите период этих колебаний. Оцените время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза.*

Масса куба велика по сравнению с массой шариков; значит, после абсолютно упругого удара скорость шарика относительно куба остается практически неизменной. Импульс, переданный кубу при ударе шарика (см. рисунок), равен

$$P=2m(v_0-v).$$

Число ударов за время Δt есть

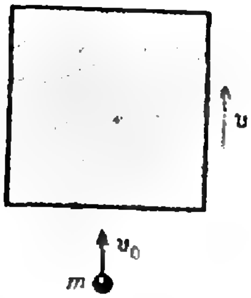
$$N=(v_0-v)a^2n\Delta t.$$

Сила, действующая на куб со стороны потока шариков, равна

$$F=\frac{NP}{\Delta t}=2m(v_0-v)^2a^2n\approx 2ma^2nv_0^2-4ma^2nv_0v.$$

Мы учли, что скорость куба много меньше скорости шарика ($v\ll v_0$); первое слагаемое — это постоянная добав-

Масса каждого шарика $m = 1$ г, концентрация шариков в потоке $n = 1000$ м$^{-3}$, столкновениями шариков между собой пренебречь.



ка, второе — сила сопротивления, пропорциональная скорости v. Еще на куб действует упругая сила со стороны пружины и сила тяжести. Для смещения x относительно положения равновесия получаем уравнение

$$Mx'' + 4x'v_0mna^2 + kx = 0.$$

Это — уравнение затухающих колебаний. Известны общие приемы решения таких уравнений, однако в нашем случае все довольно просто — затухание можно считать малым (мы так и сделаем, а потом проверим справедливость этого предположения). Итак, период колебаний равен

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \approx 0{,}31 \text{ с}.$$

За время одного периода можно считать (при небольшом затухании)

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right).$$

Работа сил сопротивления за один период в этом случае может быть рассчитана так. За малый промежуток времени Δt работа силы $F = \alpha v$ равна

$$\Delta A = F\Delta x = \alpha v v \Delta t = \alpha v^2 \Delta t.$$

Работу за период можно найти, зная зависимость квадрата скорости от времени:

$$\Delta A = \alpha(v_m \cos \omega t)^2\ \Delta t,$$

$$A = \alpha\left((v_m \cos \omega t)^2\right)_{\text{ср}} T = \alpha\frac{v_m^2}{2}T.$$

При этом максимальная энергия системы —

$$W = \frac{Mv_m^2}{2},$$

а ее относительное изменение —

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{A}{W} = \frac{\alpha v_m^2 T/2}{Mv_m^2/2} = \frac{\alpha T}{M} \approx 0{,}24.$$

При уменьшении амплитуды в 2 раза энергия уменьшается в 4 раза. Тогда искомое число периодов можно определить так:

$$\left(1 - \frac{\Delta W}{W}\right)^K = \frac{1}{4} \Rightarrow K = 5,$$

и время затухания оказывается равным

$$\tau \approx KT \approx 1{,}5 \text{ с}.$$

И. Мартин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1246—М1260, Ф1253—Ф1267, справились с задачами М1246, М1256. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

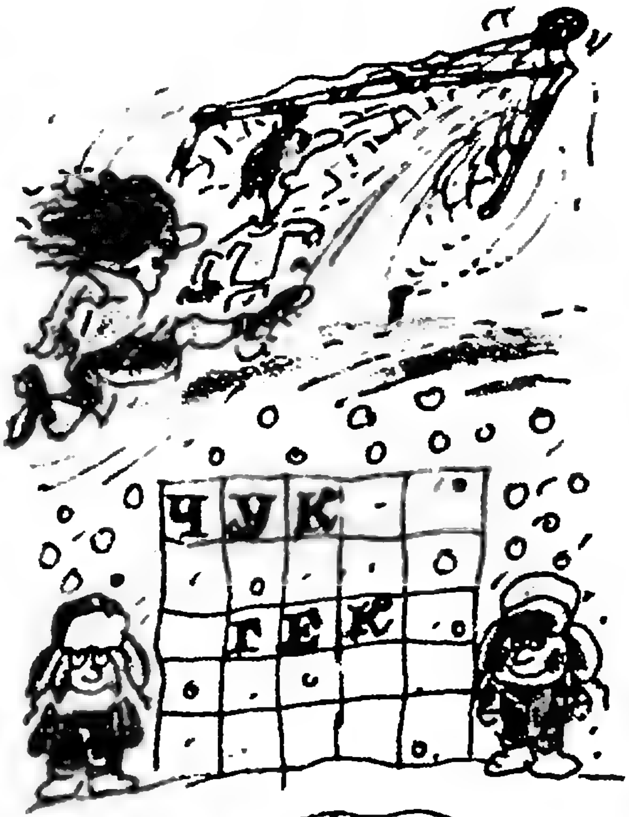
П. Андреева (п. Черноголовка Московской обл.) 47, 54; *Д. Андриенко* (Киев) 47, 51, 54, 55; *А. Ахмедов* (Баку) 47, 49, 57, 59, 60; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 47, 48; *Е. Беркович* (Киев) 47; *А. Бородин* (Донецк) 48; *В. Бринюк* (Донецк) 47—49, 51, 54; *М. Воронецкая* (Ижевск) 51, 52, 54; *О. Гайдай* (Львов) 54; *Ю. Гапон* (Прилуки) 60; *М. Гельбанд* (Одесса) 47; *А. Жеглов* (Москва) 48—51, 54, 55, 59, 60; *М. Завьялов* (Омск) 52; *В. Замятин* (Киров) 54; *К. Зарьков* (Минск) 48, 51, 54, 57, 59; *А. Зимин* (Иваново) 54; *М. Иванов* (Ужгород) 47, 54; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 47, 54; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 47, 48, 51, 54; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 47—49; *Т. Калита* (Киев) 51; *И. Кацман* (Киев) 51; *С. Ковaценко* (Винница) 47—49; *П. Кожевников* (Калуга) 47, 48, 54, 57, 59; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 48; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 47; *А. Кудрявцева* (Киев) 47, 48, 51, 54, 55; *Д. Ланин* (Омск) 51, 54, 59; *А. Лопушанский* (Львов) 47; *К. Мильштейн* (Киев) 47, 51, 53—55; *К. Мишачев* (Липецк) 47—49, 51—54, 59, 60; *А. Насыров* (Обнинск) 48; *Е. Перельман* (Ленинград) 47—49, 51, 54, 57, 59; *А. Петросян* (Ереван) 47, 51, 54; *В. Рычков* (Самара) 54; *А. Сарсембаев* (Аркалык) 47, 48; *Г. Сироткин* (Харьков) 47; *А. Сокляков* (Одесса) 51, 54; *А. Солодов* (Воронеж) 47, 48, 51, 52, 54; *А. Солодовников* (Одесса) 47, 51; *А. Солодушкин* (Томск) 47, 51; *М. Темкин* (Москва) 51, 54; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 47—49, 51, 53, 55; *М. Хасин* (Донецк) 47, 48, 51, 54; *А. Шиндлер* (Феодосия) 47, 51, 54.

Физика

М. Абдуллаев (Баку) 54, 59, 61; *С. Атанасян* (Ленинград) 53—55, 59, 63, 64, 67; *С. Ахметзянова* (Белорецк) 54; *Я. Бабкин* (Киев) 53, 54, 62, 63, 65, 67; *С. Базылько* (Северодвинск) 63, 64, 67; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 54, 55, 57; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 53, 54, 57; *Н. Баширов* (Ленкорань) 64, 67; *А. Бекмамбетов* (Москва) 53; *Д. Белобрагин* (Тула) 53, 55; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 54—56, 61, 63, 64, 66; *А. Борковский* (пгт Богородчаны Ивано-Франковской обл.) 58, 60, 63, 65, 67; *Л. Васильев* (Салават) 53, 54, 61, 63, 66, 67; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 53—55, 57; *О. Весельева* (Белгород) 64; *М. Волошина* (Москва) 53, 55; *П. Волынец* (Брест) 63, 64, 67; *И. Воскобойник* (Киев) 53, 55, 59, 62—67; *В. Глазков* (Коломна) 53, 55, 63, 64; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 53—56, 61, 63, 64, 66; *Т. Григорян* (Ереван) 53, 54; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 53—57, 59—67; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 53—55, 59, 61—64, 67; *И. Дайков* (Казанлык, Болгария) 53; *А. Деев* (Тула) 54; *А. Дементьев* (Чебоксары) 53—55, 57—59, 61; *А. Демяненко* (Горловка) 53, 54; *С. Джосюк* (Винница) 53—55, 57—62; *С. Дибров* (Киев) 53—55, 57, 59, 62—67; *И. Дискин* (Запорожье) 64; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 53—55, 57—62; *А. Дубовик* (Брест) 53—55, 57; *Д. Душамов* (Шават) 67; *О. Дымар* (Каменец) 55; *М. Дьяк* (Владимир) 54, 55, 59, 62—64, 66, 67; *М. Егоров* (Старый Оскол) 54, 64, 65, 67; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 54; *Н. Ефремов* (Свердловск) 53, 63, 64, 67; *А. Ечкало* (Запорожье) 53, 54, 57; *С. Жак* (Тернополь) 64, 67; *В. Жарина* (Воронеж) 55; *А. Жуков* (Воронеж) 63, 64; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 64, 67; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 53—55; *М. Заболотный* (Винница) 54; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 63—67; *А. Зайцев* (Железногорск) 53—55, 57, 58, 60—65, 67; *А. Засепский* (Брест) 64; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 64—67; *И. Зозуля* (Одесса) 53, 54, 64, 67; *М. Иванов* (Ужгород) 54; *М. А. Иванов* (Тула) 53—55, 57—67; *М. Г. Иванов* (Тула) 53—55, 57—60, 62—67; *Н. Ивченко* (Киев) 53—55, 58, 59, 61, 63, 64, 66, 67; *В. Каленский* (Ташкент) 54, 61, 67; *Т. Калита* (Киев) 54; *К. Калюжный* (Одесса) 53—55, 61, 62, 64, 67; *Н. Карелин* (Минск) 53—55, 64, 67; *И. Кацман* (Киев) 54, 59, 62; *А. Каширин* (Старый Оскол) 54, 64, 65, 67; *Д. Килин* (Минск) 64, 67; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 53—56, 61, 63, 64, 66, 67; *А. Ковальский* (Казань) 64; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 53—55, 58, 61, 62; *В. Козлов* (Старый Оскол) 53—55, 59, 63, 64, 67; *Г. Колесникова* (Вишневое) 54; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 53—55, 58, 61—64, 66, 67; *Д. Комиссаров* (Арзамас) 63, 67; *Т. Корж* (Киев) 64, 67; *А. Крампульс* (Тула) 53, 55, 58, 59, 63, 65, 67; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 54; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 53—55, 61, 62, 65—67; *Д. Кример* (Брест) 55, 63—67; *И. Кузнецова* (Краснодар) 53; *Ю. Кузьма* (Протва) 53—55, 57, 58, 60; *С. Кузьменко* (Киев) 53—55, 61—67; *П. Куприн* (Северодвинск) 55; *У. Курязов* (Шават) 53; *И. Кушниров* (Киев) 63; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 64—67; *Д. Ларьков* (Брест) 64; *В. Легостаев* (Кустанай) 64, 67; *Д. Леонов* (Меленки) 67; *Д. Логинов* (Тула) 53—55, 57—61, 63—67; *Д. Лунев* (п. Черноголовка Московской обл.) 53—55, 57; *К. Мазюкевич* (Кузнецовск) 64, 67; *В. Макаров* (Ки-

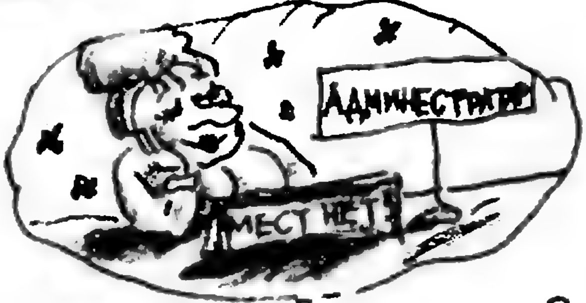
(Окончание см. на с. 39)

Задачи



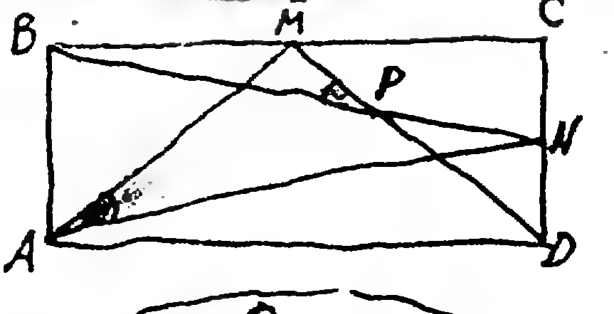
1. На прошлом чемпионате Европы по футболу Ван Бастен забил в два раза меньше мячей, чем Гуллит. Михайличенко забил на один мяч меньше, чем Ван Бастен. Фёллер забил на три мяча больше, чем Михайличенко. Скилаччи забил на три мяча больше, чем Фёллер. Известно, что двое из этих пяти футболистов забили одинаковое число мячей и никто не забил мячей больше, чем Гуллит. Сколько мячей забил каждый из них?

2. Закончите заполнение квадрата буквами Ч, У, К, Е, Г так, чтобы в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и на каждой диагонали присутствовали все эти буквы по одному разу.



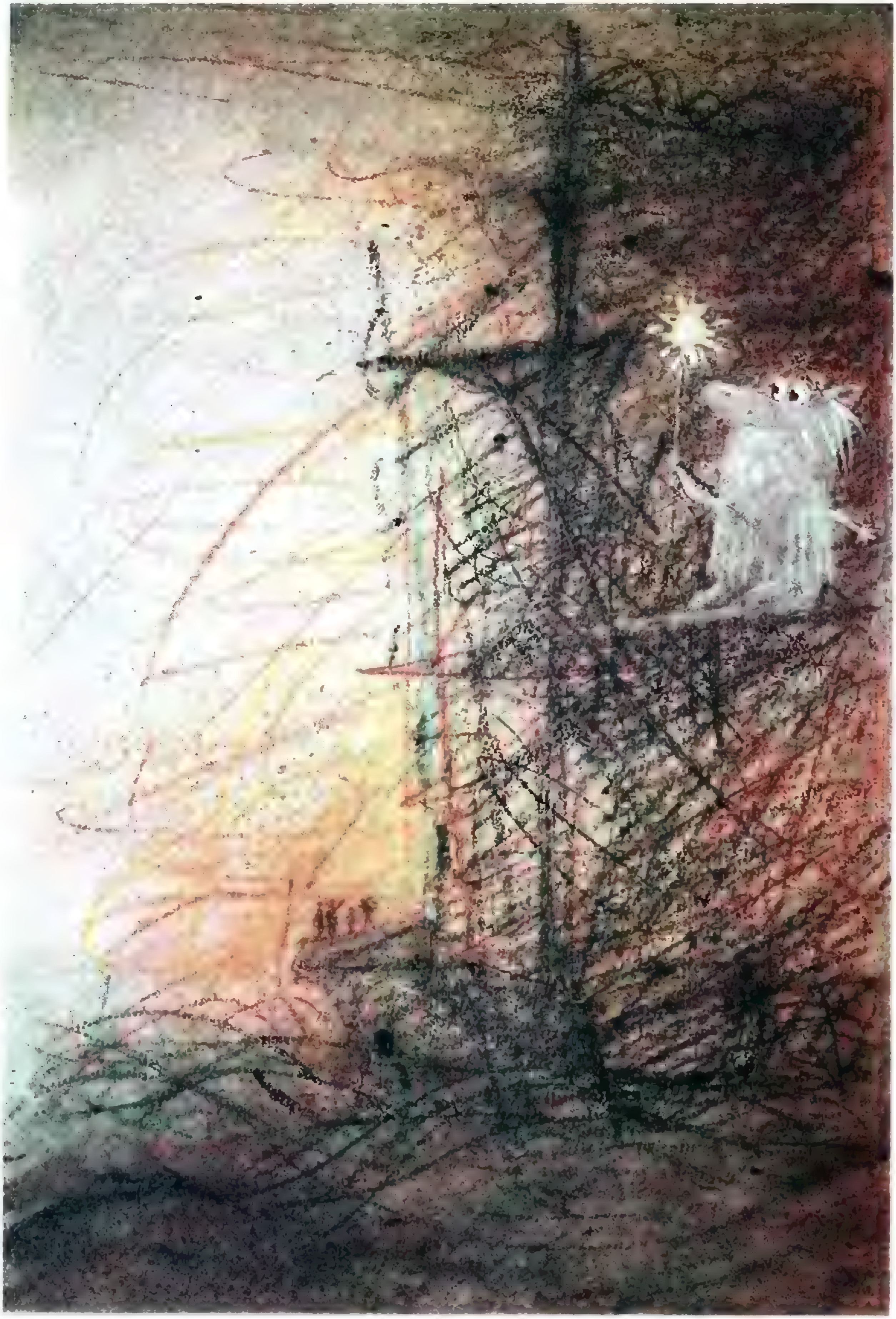
3. Администратор гостиницы работает либо с 8 утра до 8 вечера, либо с 8 вечера до 8 утра, либо сутки с 8 часов (утра или вечера). В первом случае он отдыхает не меньше суток, во втором — не меньше полутора суток, в третьем — не меньше двух с половиной суток. Какое наименьшее количество администраторов должно работать в гостинице?

4. В прямоугольнике $ABCD$ (см. рисунок) точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPN.



5. В кружке «Умелые руки» занимаются 40 школьников, у каждого в карманах лежат винтики, болтики и гвоздики. Ровно у 10 из них количество гвоздиков равно количеству винтиков, а ровно у 15 школьников количество гвоздиков не равно количеству болтиков. Докажите, что не менее чем у 15 кружковцев количество винтиков не равно количеству болтиков.

Эти задачи нам предложили А. Сарсембаев, Л. Никонов, И. Сергеев, В. Произволов и К. Кохась.



ОГНИ СВЯТОГО ЭЛЬМА У ВАС ДОМА

А. ПАНЦУЛАЯ

Если вы любите книги о морских путешествиях, приключениях, каравеллах, бригах и пиратах, то, наверное, вам доводилось читать о том, как иногда на корабельных реях, вантах, бушпритах и даже клотиках появляются странные светящиеся точки — огни святого Эльма. Издавна тайна окутывала эти огоньки. Никто даже толком не знал, сулят они горе или удачу. Один из последних конкистадоров Николай Гумилев украсил ими знаменитый корабль «Летучий Голландец»:

> «Но знак печали и несчастий,
> Огни святого Эльма светятся,
> Усеяв борт его и снасти».

Более оптимистично смотрел на знаменитые огни Франсуа Рабле, биограф веселых толстых великанов Гаргантюа и Пантагрюэля. Во время шторма корабль путешественников был близок к гибели, и лишь появление огней святого Эльма вселило уверенность в моряков и, в конечном счете, помогло спастись.

В наше время, время расцвета науки и техники, легко можно получить огни святого Эльма, не отправляясь в морское путешествие, не связывая свою судьбу с пиратами и великанами и даже не выходя из своей квартиры. Что же нужно для этого? Оказывается — пьезоэлектрическая зажигалка для газовой плиты. Зажигалки бывают разных моделей, но у всех них есть общие элементы — клавиша и изолированный от корпуса электрод (вторым электродом является корпус).

Но вот вы взяли в руки зажигалку и нажали на клавишу — между электродом и корпусом с характерным треском проскочила искра. Вы получили так называемый искровой разряд. Наверное, вам доводилось не раз наблюдать гигантскую природную искру — молнию, проскакивающую между двумя облаками или между облаком и землей. Вернемся, однако, к зажигалке.

Известно, что, для того чтобы в воздухе проскочила электрическая искра, напряжение между соответствующими электродами должно быть очень большим — порядка нескольких киловольт. Откуда же такое напряжение появляется в зажигалке? Ведь там нет батарейки и она не подсоединяется к электросети. Оказывается, все дело в интересном и важном физическом явлении — пьезоэффекте (помните — зажигалка-то пьезоэлектрическая). В чем же суть этого явления?

Давайте представим себе кристалл со структурой ячейки, изображенной на рисунке 1. Заштрихованные кружки — это его положительные ионы, светлые — отрицательные. Хотя на грани *A* выступают положительные заряды, а на грани *B* — отрицательные, в целом кристалл и его поверхность электронейтральны. Поместим наш кристалл между обкладками и сожмем их. Положительный ион *1* и отрицательный ион *2* вдавятся внутрь ячейки, отчего выступающие заряды (на плоскости *A* — положительные, а на плоскости *B* — отрицательные) уменьшатся. Иначе говоря, на плоскости *A* возникнет некий отрицательный заряд, а на плоскости *B* — такой же положительный, т. е. появится разность потенциалов. При растяжении кристалла вся картина изменится на противоположную — ионы *1* и *2* будут выталкиваться из ячейки, на пло-

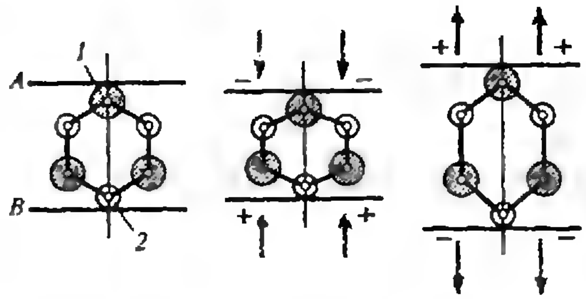


Рис. 1.

скости *A* возникнет дополнительный положительный заряд, а на плоскости *B* — отрицательный. Так вот, пьезоэффект и состоит в том, что при деформации некоторых кристаллов между их гранями возникает электростатическое напряжение.

Теперь, когда мы знаем принцип работы пьезозажигалки, легко превратить ее в источник высокого напряжения. Один из возможных способов показан на рисунке 2. На выступающий электрод надевается металлическая трубка (скажем, отслуживший свой век стержень шариковой ручки). Трубка надежно изолируется от корпуса, затем к ней и к корпусу подпаиваются провода — и источник напряжения готов. Имейте в виду, что 10 киловольт — это очень большое напряжение, так что будьте осторожны и ни в коем случае не беритесь за оба провода руками! Если вы обещаете соблюдать все меры предосторожности, можете провести ряд самостоятельных экспериментов.

Возьмите перегоревшую электрическую лампочку, подсоедините к цоколю провод *A*, а провод *B* прижмите к стеклянной колбе (рис. 3). Погасите в комнате свет, нажмите и отпустите клавишу зажигалки, и в лампочке возникнут искры между нитью накала и стеклом колбы. Потренировавшись, вы сможете получить разряды различных типов, в том числе и огни святого Эльма.

Поднесите магнит к стеклу колбы, и вы сможете увидеть, как светящиеся шнуры будут отклоняться к полюсу магнита. А что произойдет, если поднести два магнита?

Вы можете изготовить даже электронный двигатель — мечту всех писателей-фантастов. Помните, как работает сегнерово колесо (рис. 4, *a*)? Вода, вырываясь из трубок, обеспечивает всему колесу вращательное движение. А теперь представьте себе, что вместо воды из трубок летят электроны — если их достаточно много и летят они достаточно быстро, колесо тоже должно завертеться. Весь вопрос в том, как изготовить такой механизм. Но если вы аккуратны и терпеливы, для вас это не составит большого труда. Вырежьте из тонкой металлической фольги «пауч-

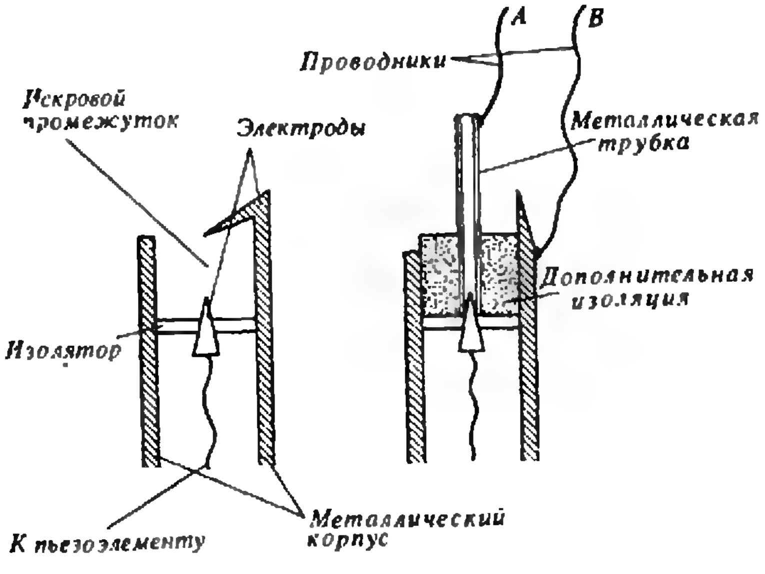


Рис. 2.

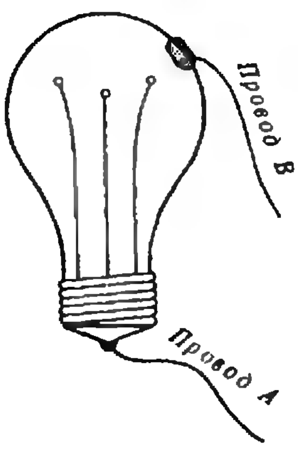


Рис. 3.

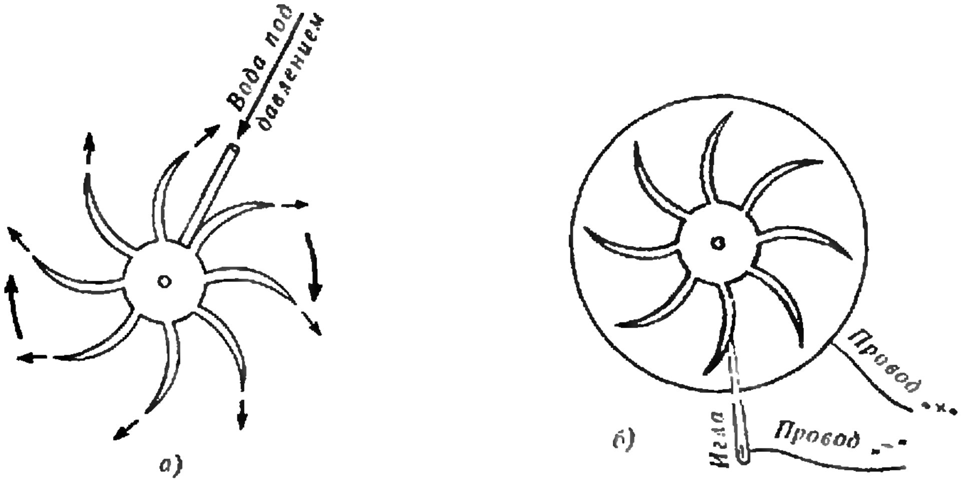


Рис. 4. а) б)

ка», похожего на того, что изображен на рисунке 4, *б*. Насадите его на тонкую иголку так, чтобы от легкого дуновения он мог вращаться, иглу соедините с проводом «—» от зажигалки (конечно, «+» или «—» зависит от того, нажимаете вы на клавишу или отпускаете ее, но, проведя опыты с лампой, вы уже знаете, когда можно получить «—»), а другой провод (предварительно сняв с него изоляцию) согните петлей и поместите внутрь нее «паучка». Теперь, если электрическое напряжение будет достаточным, с ножек «паучка» начнут стекать электроны, и «паучок» закрутится. Вам потребуется определенная сноровка и настойчивость в проведении этого эксперимента — «паучок» может перекашиваться и слетать с иглы, но зато в случае успеха в ваших руках окажется настоящий электронный двигатель.

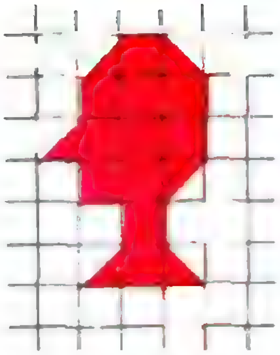
(Начало см. на с. 34)

ровское) 53, 54, 64, 66, 67; *Ю. Маравин* (Евпатория) 53, 55, 57—59, 63, 64, 67; *М. Махмудов* (Исфара) 53—55, 57, 62; *Р. Махмудов* (Бугульма) 63, 64; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 54, 63—65, 67; *В. Меркер* (Старый Оскол) 63, 64; *С. Мурик* (Брест) 53, 54, 57; *А. Нежуренко* (Киев) 53—55, 57—59, 61—67; *А. Немировский* (Одесса) 55, 63, 66, 67; *О. Никипорец* (Алма-Ата) 54, 55, 57, 59, 61; *И. Николаенко* (Армавир) 53—55; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 53—57, 59, 62; *А. Ольховец* (Киев) 63—67; *Д. Островский* (Ленинград) 53, 57, 63, 64, 66, 67; *Д. Пастухов* (Витебск) 53—55, 57, 63—66; *Р. Пашутин* (Тула) 53, 55; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 53—55; *Д. Петрайтис* (Вольск) 63, 67; *В. Писляков* (Тверь) 63, 64, 67; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 54, 63, 64, 67; *С. Польшин* (Харьков) 53—55, 58, 59, 61—63, 65—67; *В. Попов* (Жуковский) 64—67; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 55, 57—59, 64, 65; *В. Попова* (с. Котово) 64; *С. Попруженко* (Прохладный) 53; *Д. Потишко* (Харьков) 54; *Ю. Радченко* (Волжский) 55, 64; *А. Ручьев* (Северодвинск) 53, 54, 57, 59, 61, 62; *Д. Селиверстов* (Обнинск) 54; *В. Сергиенко* (Брест) 63, 64, 67; *Д. Скотников* (Владимир) 59, 62—64, 66, 67; *А. Смирнов* (Москва) 63, 67; *А. Снежко* (Киев) 53—55, 57; *А. Соклаков* (Брест) 55, 63—67; *В. Солдаткин* (Ростов-на-Дону) 55; *А. Стельмах* (Киев) 63, 65, 66; *Д. Степанов* (Брест) 67; *А. Столповская* (Днепрорудный) 53, 63, 64, 67; *Д. Супрун* (Минск) 53, 61, 63, 64, 66, 67; *В. Сусиков* (Брест) 67; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 53—57, 63—67; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 53, 55, 64, 67; *В. Толкачев* (Выборг) 64, 66, 67; *М. Томилко* (Брест) 53, 54, 57; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 53—55, 59, 61, 63, 64, 66, 67; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 53—55, 57, 59, 61—64, 66, 67; *А. Тумашевский* (Северодвинск) 63, 64, 67; *О. Уразаев* (Коломна) 54; *В. Усенко* (Киев) 64; *Д. Хаимов* (Баку) 54; *М. Хакимов* (Жуковский) 63, 64, 66, 67; *А. Харисов* (Уфа) 63, 64, 67; *А. Хмелев* (Свердловск) 53—55; *К. Ходжаев* (х/с Худайбердиева Наманганской обл.) 55; *Р. Храбров* (Северодвинск) 53—57, 59, 62; *А. Цветков* (Киев) 54; *А. Чарушин* (Новосибирск) 58, 60, 61, 63, 67; *Ц. Чешков* (София, Болгария) 53—55, 57—59, 61, 63—67; *А. Чистый* (Брест) 53—55, 57, 63—67; *С. Чупахин* (Москва) 63, 64, 66, 67; *Г. Шаповалов* (Киев) 53, 54, 57, 59, 62; *С. Шаракин* (Москва) 63, 66, 67; *А. Шпагин* (Мариуполь) 53—55, 63, 64; *О. Шпырко* (Киев) 53—55, 58—60, 62—67; *И. Шуляк* (Киев) 53—55, 59, 61, 62; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 53, 54, 57, 59—66; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 53—56, 58, 59, 61, 63, 64, 66; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 53—55, 61, 63, 64, 66.

Площадь

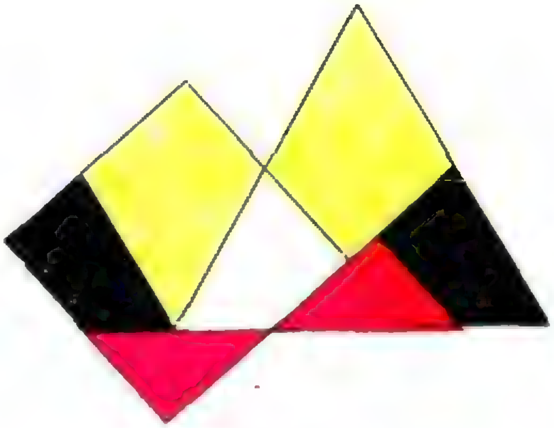
Мастер-плиточник — человек, который в процессе своей работы все время занимается измерением площадей. Покрыв стену плитками, он может легко определить площадь стены (в плитках), сосчитав количество уложенных плиток. Но на самом деле он *всегда* решает обратную задачу: сначала измеряет площадь стены, а потом вычисляет необходимое количество *плиток.*

«Способ плиточника» оказывается полезным и при вычислении площадей сложных фигур. Нанесем квадратную сетку на прозрачную бумагу и наложим ее на фигуру. Тогда ее площадь будет не меньше, чем количество квадратиков сетки, лежащих целиком внутри фигуры, и не больше, чем количество клеток, имеющих общие точки с этой фигурой. Такая сетка называется палеткой.

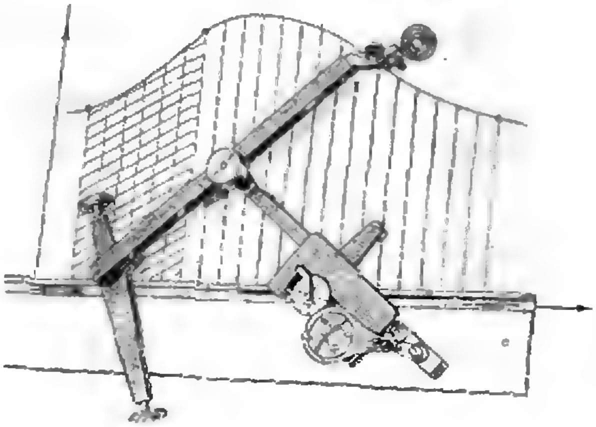


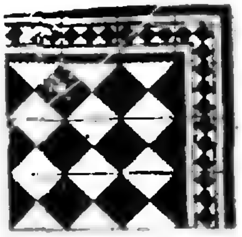
Любопытно, что площадь многоугольника, все вершины которого *лежат в узлах* квадратной сетки, выражается довольно простой формулой: $S=n+\frac{m}{2}-1$, где n — *количество узлов сетки*, лежащих внутри многоугольника, а m — количество узлов, лежащих на его границе (в частности, в вершинах). Она называется «формулой Пика».

Конечно же, при вычислении площадей простейших геометрических фигур — многоугольников — палетка явно ни к чему. Но верные способы их нахождения были придуманы далеко не сразу. Так, древние вавилоняне *считали*, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Отсюда следует такое нелепое утверждение: если у двух ромбов равны стороны, то равны и площади. Лишь после открытия верной формулы для площади треугольника (а неверных было предложено предостаточно) стало возможным легко считать площадь *любого многоугольника*, разделив его предварительно на треугольники.

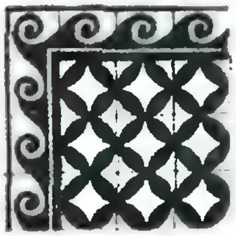


Конечно же, всякий многоугольник можно многими способами разрезать на треугольники. Ясно, что если два многоугольника так разрезаны на треугольники, что полученные наборы тре-

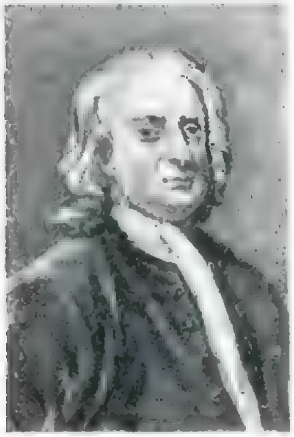


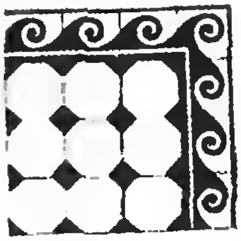


угольников одинаковы, то площади этих многоугольников равны. Как ни удивительно, но верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновелики, то они и равносоставлены, т. е. могут быть разрезаны на одинаковые наборы многоугольников (а значит, и треугольников). Получить такое разрезание не всегда просто. Попробуйте-ка разрезать на одинаковые части равносторонний треугольник и равновеликий ему квадрат! А для многогранников подобное утверждение уже неверно: нельзя, например, разрезать на одинаковые части *правильный тетраэдр* и равновеликий ему куб.



С развитием науки и техники возникла острая потребность вычислять площади не только многоугольников, но и произвольных фигур. Первые шаги здесь сделали Архимед и Б. Кавальери, а окончательно решили проблему И. Ньютон и Г. Лейбниц, создавшие интегральное исчисление, частью которого является и вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми.





На основе методов интегрирования были сконструированы разнообразные *планиметры* — приборы, с помощью которых можно измерять площадь фигуры, например, обводя границу фигуры специальным указателем.

А как быть с площадями криволинейных поверхностей? Что понимать под площадью такой поверхности? В этом случае естественно рассматривать многогранную поверхность с вершинами в точках этой поверхности. Если рассмотреть такие многогранники со все более мелкими гранями, то предельная величина этих многогранных поверхностей и принимается за площадь данной криволинейной поверхности. Конкретное вычисление площадей таких поверхностей также производится методами интегрального исчисления.

Многие из вас знают, что из всех фигур, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет круг. Задача о нахождении фигуры наибольшей *площади при заданном* периметре называется *изопериметрической задачей* или *задачей Дидоны* (по имени основательницы и первой царицы города Карфагена). Она была изгнана со своей родины и решила поселиться на африканском побережье Средиземного моря. Местные жители разрешили ей владеть участком земли, который «объемлет воловья шкура». Хитрая Дидона разрезала шкуру на тонкие ремешки, которыми окружила значительную площадь. В дальнейшем появилось множество подобных задач, общие методы их решения породили математическую науку *вариационное исчисление*.

Слово об учителе Волкове

Однажды «Пионерская правда» попросила читателей назвать свою любимую сказку. Большинство ребят ответило: «Волшебник Изумрудного города».

Эту сказочную повесть, как и ее продолжения — «Урфин Джюс и его деревянные солдаты», «Семь подземных королей», «Огненный бог марранов» и другие — любят не только дети, но и взрослые: папы и мамы, бабушки и дедушки. Однако не все помнят, кто написал их.

Автор этих знаменитых книг, Александр Мелентьевич Волков, родился 100 лет назад, 15 июня 1891 года. Много лет он был учителем в маленьком тогда городке Усть-Каменогорске (теперь — центре Восточно - Казахстанской области). Преподавать приходилось почти все предметы — русский язык и литературу, естествознание и географию, историю, математику и физику.

В своем «медвежьем углу» учитель Волков больше всего боялся отстать от новейших достижений науки. Совершались революции, гремели войны, жизнь была тяжелой и голодной. Учителю Волкову, как и всем, приходилось терпеть лишения, но в любых обстоятельствах он продолжал учиться — учился сам, чтобы иметь право учить других.

В 1931 году сорокалетний Волков, отец двоих детей, «на отлично» сдал все экзамены за пятилетний курс физико-математического факультета Московского университета и вскоре стал доцентом кафедры высшей математики столичного Института цветных металлов и золота.

Он создал интересные математические труды и, наверное, мог бы быть и профессором, и академиком. Но Александр Мелентьевич увлекся писанием книг для детей. Сочиняя их, он, вероятно, вновь чувствовал себя учителем, только теперь его уроки шли в огромном классе, вмещавшем тысячи и тысячи учеников — читателей. Среди его произведений — повести «Чудесный шар», «Царьградская пленница», исторические романы «Зодчие», «Скитания»; его герои — отважные и талантливые люди — изобретатели, мореплаватели, строители... Но мало кому известно, что Волков писал и научно-популярные книги («Земля и небо», «В поисках правды» и другие).

Книга «Великий счет» (очерки по истории математики) не была издана и сохранилась лишь в рукописи. Мы публикуем главу из нее, посвященную первому на Руси учебнику арифметики.

А. Розанов

АРИФМЕТИКА ЛЕОНТИЯ МАГНИЦКОГО

А. ВОЛКОВ

Что сказали бы вы, читатель, если бы вам пришлось ежедневно отправляться в школу с учебниками, весом каждый по два-три килограмма? Наверно, вы жаловались бы, что вам тяжело — и не в переносном, а в буквальном смысле слова. Так посочувствуйте же школьникам XVIII века, которым действительно приходилось таскать такие книги.

Учебник арифметики Магницкого представлял из себя огромный том, напечатанный славянским шрифтом, в прочном кожаном переплете, и весил он 6—7 фунтов! Вот сокращенное заглавие этой книги:

«Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык переведена, и во едино собрана, и на две книги разделена. Ныне же повелением благочестивейшего великого Государя нашего Петра Алексиевича в богоспасаемом царствующем граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков, и всякого чина и возраста людей в свет произведена, в лето от сотворения мира 7211».

Фамилия автора помещена мелкими буквами в рамочке, окружающей заглавный лист, и не всякий сразу ее увидит!

О жизни первого русского математика Леонтия Филипповича Магницкого сохранились скудные сведения. О происхождении его ничего не известно. Учился он в московской славяно-греко-латинской академии в промежутке от 1686 до 1694 года, впоследствии был преподавателем школы математических и навигационных наук в Москве. Знаменитый свой учебник Магницкий писал в самом конце XVII и начале XVIII века, а печаталась книга со 2 февраля 1701 года по 1 января 1702 года. За время печатания автор получал «кормовые деньги» по 5 алтын (1 алтын=3 копейки) в день (таковы были авторские гонорары в те времена!) и за все время получил 49 рублей 31 алтын и 4 деньги (49 руб. 95 коп.) Впоследствии, впрочем, Магницкий был награжден лучше за свои труды по просвещению: царь наградил его деревнями во Владимирской и Тамбовской губерниях, и ему был выстроен дом на Лубянке. Погребен был Магницкий в церкви Гребенской Богородицы у Никольских ворот; его могилу нашли во время постройки 1-ой очереди московского метро.

Труд Магницкого есть целая энциклопедия математических и естественно-исторических знаний той эпохи. Автор включил в свою книгу арифметику, алгебру, сведения по астрономии, навигации, физической географии, геодезии. Через всю книгу проходит основная мысль: изучение явлений природы при помощи числа и меры.

Сочинение Магницкого было, конечно, несамостоятельным, составленным по иностранным источникам; сам автор сообщает, что он пользовался греческими, латинскими, немецкими и итальянскими книгами. Но, приспособляя материал к интересам и пониманию русского читателя, он многое добавлял и от себя:

Елико же в них изобретохом,
В достойнех местех приплетохом.

Влияние иностранных составителей на русских составителей учебников ясно чувствуется даже в терминологии. Почти все математические действия и преобразования носили двойные названия — русские и итальянские: счет или нумерацио, сложение или аддицио, вычитание или субтракцио, умножение или мультипликацио, деление или дивизио и т. д.

Следуя обычаям того времени, Магницкий дает правила действий без объяснений и почти каждую главу снабжает нравоучительными стихами. Он уговаривает учащихся учить таблицу умножения:

Аще кто не твердит
Таблицы и гордит,
Не может познати
Числом что множати
И во всей науке
Не свобод от муки.
Колико не учит,
Туне ся удручит.

Закончив первую часть книги, Магницкий поздравляет учащихся такими стихами:

Первую часть окончивше
И вся в целых изучивше
Их в памяти твердо держим
И за та вся бога блажим,
Что даде нам без напасти
Зрети конец первой части.

Значит, арифметика была трудной наукой, если ученикам приходилось благодарить бога за то, что им удалось «без напасти» выучить целые числа. А напасти нередко случались с учениками в петровскую эпоху, когда царь издал указ: «Выбрать из гвардии отставных добрых солдат и быть им по человеку во всякой каморе и иметь хлыст в руках; и буде кто из учеников будет бесчинствовать, оным бить, несмотря какой бы виновный фамилии не был». Эти же солдаты следили за тем, чтобы ученики, великовозрастные дворянские недоросли, набранные в школы насильно, не разбегались от ученья по домам. Зато те, кто сумел дотянуть до конца, получали выгодные государственные должности. Вот когда оправдывалась пословица: корень учения горек, а плоды его сладки!

Чтобы приохотить учащихся к математике, Магницкий дает занимательные задачи. Вот образец таких задач:

«Некогда в Константине граде 20 человек мыяхуся в бане, в них же бяху христиане, турки же и евреи, а установлено имати за баню с турченина по полденге, а с христианина по денге, с евреина же по три денги. Но всех бывших в бане есть 20 человек, дали же бяху обще от всех 20 денег. И ведателно есть, колико бяху христиан, турок же и евреев».

В книге Магницкого чувствуется главная задача — помочь купцу и промышленнику, мореплавателю, военачальнику, так как именно такие люди играли громадную роль в России после реформ Петра Великого. Автор говорит:

В первой общая вся гражданства
Коего либо государства
Арифметика обычайная,
В купецких делах случайная
Цену товаров обретати
И достойно ю исчисляти.
А не точию тому чину
Но и всем людям требна выну
Ремесленникам и художным
Подданным всяким и вельможным.

Магницкий с трогательной любовью к родине пишет:

И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд.

В истории русского просвещения книга Магницкого сыграла крупную роль. Первый русский ученый Михайло Ломоносов самоучкой учился по ней, знал ее почти наизусть. До конца жизни Ломоносов сохранил любовь к этой книге, открывшей ему глаза на мир и увлекшей его с далекой северной окраины в Москву, и называл ее «вратами учености».

Качественные задачи по физике

Как дерево спасает от дождя?

...кажется, дождик собирается, кажется, дождик собирается...

А. Милн

Зададимся чрезвычайно простым вопросом: каким образом дерево укрывает от дождя? Конечно, о пальме, листом которой можно укрыть стадо слонов, речь не идет. Но ведь от дождя можно спрятаться и под елью, и под березой. Что же происходит при этом?

Не спешите с ответом, который напрашивается сам собой,— что капли задерживаются на листьях. Ведь больше двух-трех капелек на листе не удержится. Не думайте, что капли испаряются с листьев во время дождя,— влажность столь велика при дожде, что даже белье не сохнет.

Как же маленькие листья, а тем более еловые или сосновые иглы, спасают от дождя? Или мы обманули себя, спрятавшись под дерево, когда «... разыгралась непогода: молния так и сверкала, а дождь лил как из ведра» (Г. Х. Андерсен)?

А теперь

О «велосипедной» задаче

(См. «Квант» № 1)

Дело в том, что велосипедист не «стоит» на спицах, а... «висит» на них. Действительно, для того чтобы часть спиц согнулась, обод колеса должен вытянуться в эллипс. Но при этом другие спицы растянутся, а именно это со стальными прутами сделать невозможно. Попробуйте на досуге растянуть спицу. Как говорят (обычно басом) специалисты по сопротивлению материалов, спицы «работают» не на сжатие, а на растяжение. Поэтому сделать из круглого обода эллипс, а следовательно, и согнуть спицы — невозможно.

Подумайте, почему при ударе из колеса получается «восьмерка»? Как она выглядит?

Хотя изобретать велосипед уже не стóит, оказывается, усовершенствовать его можно, заменив спицы... нитками. В японских гоночных велосипедах, например, спиц нет, а ось с ободом соединены сплошным куском почти обычной*) ткани. Сделано это не для того, чтобы любопытные задумались. И не для того, чтобы задумавшиеся убедились в том, что спицы работают на растяжение. Замена спиц сплошным куском материала увеличивает прочность колеса, уменьшая его вес, и делает его более «обтекаемым».

И напоследок — маленький отрывок об одном невезучем, но упорном велосипедисте. Пусть этот отрывок еще раз заставит задуматься о прочности такой хрупкой и неустойчивой, на первый взгляд, конструкции, как велосипед.

«И велосипед его, он тоже очень состарился. Он был неизвестной марки, такой древней, что специалисты о ней никогда не слыхивали. Краска с него облупилась, и даже ржавчина не была видна под слоем грязи и пыли. В колесах почти не было спиц, но пяти-шести оставшихся было достаточно, чтобы выдержать Мартена. От колес остались одни ободья; когда он ехал, раздавался страшный лязг железа...» (Марсель Эме)

Е. Гурович

---

*) Разумеется, в японском смысле этого слова.

„Квант" улыбается

Мой анекдотарий

Известный теоретик и геофизик сэр Гарольд Джеффриз одно время был консультантом какой-то нефтяной компании. Однажды он присутствовал на проходившем в Лондоне совещании и тихо сидел в уголке, пока все были заняты обсуждением различных проблем. Часа через два обсуждение приостановилось и сэру Гарольду был задан вопрос: «А что вы думаете?» «Я думаю, что пора выпить кофе». После перерыва специалисты продолжили дискуссии. Через некоторое время снова был задан тот же вопрос. «Я думаю, что пора отправляться на обед»,— последовал ответ. Во второй половине дня произошло то же самое, только теперь было пора пить чай. Совещание подошло к концу и сэру Гарольду задали все тот же вопрос: «А теперь, сэр Гарольд, когда вы прослушали все до конца, что вы скажете по этому поводу?» «Я рад, что это ваша проблема, а не моя»,— ответил ученый.

* * *

Среди физиков есть и такие, которые обожают розыгрыши. К их числу принадлежал Роберт Вуд. Он увлекался фотографией и как-то захотел сфотографировать мост объективом «рыбий глаз». Но стоило ему установить аппаратуру, как вокруг него собиралась толпа зевак. Тогда он выкрасил аппарат в ярко-красный цвет, навел его и со всех ног бросился прочь, как будто тот вот-вот взорвется. Зеваки последовали его примеру, и аппарат запечатлел, наконец, мост без человеческих фигур. В другой истории фигурируют Вуд и Норберт Винер, которые якобы положили в чемодан очень тяжелый гироскоп. Этот гироскоп можно было раскрутить с помощью веревки, пропущенной через отверстие в крышке. Выходя из вагона, Вуд запустил гироскоп и дал чемодан носильщику. Все шло хорошо, пока Вуд резко не свернул за угол. Носильщик попытался следовать за ним, и чемодан встал на попа, вызвав среди присутствовавших большое замешательство.

* * *

Замечательную историю рассказывают о Кене Гранте из Аделаидского университета. С помощью электромагнита он привесил к потолку большой стальной шар. В ходе демонстрации опыта электромагнит отключали и шар падал в подставленное для этой цели ведро с песком. Естественно, как-то раз студенты чуть сдвинули ведро, и шар упал мимо, оставив в бетонном полу солидную трещину. На следующий год Грант тщательно пометил крестиком то место на полу, куда должен падать шар, и на него поставил ведро. На сей раз студенты не стали двигать ведро, они просто стерли старый крестик и нарисовали другой недалеко от первого. Грант вошел в аудиторию, увидел крестик, с торжествующей улыбкой переставил ведро и... выключил электромагнит.

Р. Эдж

Школа в „Кванте"

Математика 9 — 11

Комплексные числа

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Уже в древности при решении задач, записываемых на современном языке квадратными уравнениями, математики столкнулись с ситуациями, в которых было необходимо извлекать корни из отрицательных чисел. В таких случаях считали задачу неразрешимой. Однако решение в радикалах кубического уравнения, найденное итальянскими математиками в первой половине шестнадцатого века, приводило к выражению *действительных* корней уравнения через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков оперировать новыми числами, применяя для них те же правила действий, которым подчиняются действительные числа.

Рассмотрим задачу извлечения квадратного корня из отрицательного числа $\sqrt{-a}$. Так как квадрат действительного числа всегда положителен, то такая задача в области действительных чисел невозможна. Нужны какие-то новые числа:

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{a}\cdot i,$$

где $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$ — обозначение нового, не действительного числа, называемого мнимой единицей.

Числа вида

$$a+bi,$$

где a и b — действительные числа, носят название *комплексных чисел;* число a называется *действительной частью,* а число b — *мнимой частью.* При $a=0$ комплексное число обращается в *чисто мнимое число* bi; при $b=0$ получим число $a+0i$, которое рассматривается как *действительное число* a.

Комплексные числа вида $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются *сопряженными,* комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются *противоположными.* Множество комплексных чисел обычно обозначается через C.

Условимся считать комплексные числа $a+bi$ *и* $c+di$ *равными в том и только в том случае, когда* $a=c$ *и* $b=d$.

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$. В самом деле, действительное число 0 может быть представлено в виде комплексного числа как $0+0i$. На основании определения, равенство $a+bi=0+0i$ будет иметь место только лишь при условии $a=0$ и $b=0$.

Заметим, что относительно комплексных чисел не принято соглашения, какое из них считать больше другого.

Упражнения

1. Найдите x и y, для которых

$$(2x+3y)+(x-y)i=2+(2x+y)i.$$

2. Найдите комплексные числа, противоположные и сопряженные с числами

а) $2+i$; б) $1+i$.

3. Какие комплексные числа совпадают со своими сопряженными? Противоположными?

Действия над комплексными числами

Условимся производить над комплексными числами алгебраические действия и преобразования по тем же правилам, по которым они производятся над действительными числами, принимая всегда, что $i^2=-1$. Это соглашение служит основой для операций над комплексными числами. Чтобы выполнить какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a+bi$, надо выполнить соответствующее действие над двучленами такого вида по правилам, которые существуют для многочленов с действительными коэффициентами, и затем в результате заменить i^2 на -1.

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Из этого правила легко усмотреть, что сложение комплексных чисел обладает теми же свойствами, которыми обладает сложение действительных чисел, т. е. переместительным и сочетательным свойствами.

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Отметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным; например, сумма сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ равна $2a$.

Умножение

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Заметим, что произведение двух сопряженных, не равных нулю, чисел $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ равно положительному действительному числу a^2+b^2. В самом деле:

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+abi-abi-$$
$$-b^2i^2.$$

Но $i^2=-1$, следовательно,

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2-d^2i^2}=$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Возведение в степень

Прежде всего, выясним, что происходит при возведении в степень мнимой единицы i с учетом условия $i^2=-1$. Мы имеем:

$$\begin{array}{ll} i^1=i; & i^5=i^4\cdot i=i; \\ i^2=-1; & i^6=i^4\cdot i^2=-1; \\ i^3=-i; & i^7=i^4\cdot i^3=-i; \\ i^4=1; & i^8=i^4\cdot i^4=1\ldots \end{array}$$

Таким образом, получаются четыре чередующихся значения:

$$i;\ -1;\ -i;\ +1.$$

Заметим еще, что число i^0 принимается равным 1.

Теперь нетрудно найти результат возведения в степень комплексного числа $a+bi$;

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+b^2i^2=(a^2-b^2)+$$
$$+2abi;$$

$$(a+bi)^3=a^3+3a^2(bi)+3a(bi)^2+(bi)^3=$$
$$=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

Упражнения

4. Выполните действия

а) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

б) $\dfrac{2+i}{1+i}-\dfrac{2}{i}$;

в) $(1+i)^{100}$;

г) $(1+i\sqrt{3})^9$;

д) $(1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha)^3$.

5. Найдите все комплексные числа z, для которых

а) $iz+3=2i$;

б) $\dfrac{z+1}{z-i}=\dfrac{3-i}{3+i}$;

в) $2z+i\bar{z}=1+3i$.

Извлечение квадратного корня

Положим

$$\sqrt{a+bi}=x+yi.$$

Тогда

$$a+bi=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi,$$

т. е.

$$x^2-y^2=a,\quad 2xy=b.$$

Следовательно, задача сводится к нахождению действительных решений этой системы. Возведя оба уравнения в квадрат, а затем сложив их, получим

$$(x^2+y^2)^2=a^2+b^2;\quad x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},$$

(берется только положительный корень, поскольку $x^2+y^2>0$). Теперь из уравнений

$$x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2},\quad x^2-y^2=a$$

находим

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

Для x и y имеем по два значения, что дает четыре комбинации (x; y), однако из условия $xy=b/2$ вытекает, что знак у произведения xy должен совпадать со знаком числа b; это дает только две пары значений (x; y), т. е. два корня:

$$\sqrt{a+bi}=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\quad b>0,$$

$$\sqrt{a+bi}=$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\quad b<0.$$

Упражнение 6. Вычислите

а) $\sqrt{1+i}$; б) $\sqrt{3+4i}$;

в) $\sqrt{4-3i}$;

г) $\sqrt{\cos\alpha+i\sin\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$;

д) $\sqrt{\cos 2\alpha-i\sin 2\alpha}$.

Решение квадратного уравнения

Хорошо известно, что не любое квадратное уравнение может быть решено в действительных числах; условием разрешимости является неотрицательность его дискриминанта $D=b^2-4ac$. В комплексных числах это исключение исчезает. Если $D<0$, то решения квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|D|}\cdot i}{2a}.$$

Иными словами, каковы бы ни были коэффициенты a, b и c квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

его решения находятся по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Заметим также, что эта формула позволяет решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами a, b, c. Ведь мы уже умеем извлекать квадратные корни из любых комплексных чисел.

Упражнения

7. Решите квадратные уравнения

а) $x^2+2x+2=0$;

б) $x^2+(1+i)x+i=0$;

в) $ix^2-2x+1=0$.

8. Найдите все корни (комплексные) уравнений

а) $x^3=1$;

б) $x^4=-1$;

в) $x^4+x^2+1=0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Слово «комплексный» в переводе с латыни означает «составной», «сложный». Несмотря на то, что оперировать с комплексными числами ничуть не сложнее, чем с действительными, до начала девятнадцатого столетия комплексные числа рассматривались как очень сложный, темный, почти мистический объект. С упорством, достойным лучшего применения, велась длительная борьба между сторонниками и противниками «мнимых» чисел. Главное возражение противников заключалось в следующем: выражение вида $a+bi$ лишено смысла, поскольку i не является действительным числом, а значит, и вообще не является числом; поэтому i нельзя умножать на действительные числа.

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная их конструкция, лучше всего — геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел не отделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей ноль, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Впервые геометрическое изображение действий над комплексными числами было дано датским геодезистом К. Весселем в 1799 году и независимо от него французским математиком Ж. Арганом в 1806 году. Однако общее признание оно получило лишь в тридцатых годах прошлого столетия после работ немецкого математика Ф. Гаусса и английского математика У. Гамильтона. Идея геометрической интерпретации комплексных чисел заключается в том, что они изображаются не точками прямой, как действительные числа, а точками плоскости.

Итак, построим множество, элементы которого были бы точками плоскости, а сложение и умножение точек подчинялись бы всем правилам операций с действительными числами.

Выберем в плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс x и осью ординат y. Обозначим через $(a;\, b)$ точку с абсциссой a и ординатой b. Для точек $(a;\, b)$ и $(c;\, d)$ определим сумму и произведение по правилам:

$$(a;\, b)+(c;\, d)=(a+c;\, b+d), \tag{1}$$

$$(a;\, b)\cdot(c;\, d)=(ac-bd;\, ad+bc). \tag{2}$$

Прямой проверкой без труда устанавливается, что операции сложения и умножения точек обладают переместительным и сочетательным свойствами:

$$(a;\, b)+(c;\, d)=(c;\, d)+(a;\, b),$$

$$((a;\, b)+(c;\, d))+(e;\, f)=(a;\, b)+((c;\, d)+(e;\, f)),$$

$$(a;\, b)\cdot(c;\, d)=(c;\, d)\cdot(a;\, b),$$

$$((a;\, b)\cdot(c;\, d))\cdot(e;\, f)=(a;\, b)\cdot((c;\, d)\cdot(e;\, f)).$$

Выполняется и распределительный закон:

$$((a;\, b)+(c;\, d))\cdot(e;f)=(a;\, b)\cdot(e;\, f)+(c;\, d)\cdot(e;\, f).$$

Точка $(1;\, 0)$ служит единицей, т. е. для любой точки $(a;\, b)$

$$(a;\, b)\cdot(1;\, 0)=(1;\, 0)\cdot(a;\, b)=(a;\, b).$$

И наконец, для любой точки $(a;\, b)\neq(0;\, 0)$ существует единственная такая точка $(x;\, y)$, что

$$(a;\, b)\cdot(x;\, y)=(1;\, 0).$$

Докажем последнее свойство. Возьмем какую-нибудь ненулевую точку $(a;\, b)$ (это означает, в частности, что $a^2+b^2>0$). Нам нужно найти такую точку $(x;\, y)$, чтобы $(a;\, b)\cdot(x;\, y)=(1;\, 0)$. Но

$$(a;\, b)\cdot(x;\, y)=(ax-by;\, ay+bx).$$

Следовательно, мы получаем систему уравнений

$$ax-by=1,\quad ay+bx=0.$$

Решая эту систему уравнений относительно x и y, найдем

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Этим все доказано.

Итак, мы превратили точки на плоскости в числовое множество, т. е. множество с операциями сложения и умножения, для которых верны все свойства сложения и умножения обычных действительных чисел. Действительные числа содержатся в этом множестве — это точки вида $(a;\, 0)$. В самом деле, сложить и перемножить такие точки — это попросту сложить и перемножить действительные числа:

$$(a;\, 0)+(c;\, 0)=(a+c;\, 0),$$

$$(a;\, 0)\cdot(c;\, 0)=(ac;\, 0).$$

А теперь возьмем точку (0; 1). Посмотрим, что произойдет, если мы возведем ее в квадрат, т. е. умножим саму на себя:

$$(0;\,1)^2=(0;\,1)\cdot(0;\,1)=(-1;\,0).$$

Таким образом, $(0,1)^2$ — это действительное число -1. Значит, точку (0, 1) можно интерпретировать как мнимую единицу i, срывая, тем самым, с нее мистический покров. И наконец, любую точку $(a;\,b)$ можно представить в виде

$$(a;\,b)=(a;\,0)+(0;\,b)=(a;\,0)+\\+(b;\,0)\cdot(0;\,1).$$

Если $(a;\,0)$ и $(b;\,0)$ обозначить просто через a и b, а (0, 1) — через i, то мы получим

$$(a;\,b)=a+bi.$$

т. е. теперь формальное выражение $a+bi$ стало на твердую основу — это всего-навсего точка с координатами $(a;\,b)$ на плоскости с заданными выше операциями сложения (1) и умножения (2).

Кроме чисто теоретической ценности, геометрическая реализация комплексных чисел имеет важное практическое значение — с ее помощью комплексные числа можно представить в так называемой тригонометрической форме, весьма удобной в многочисленных приложениях.

Упражнения

9. Изобразите точками на плоскости комплексные числа $2+i$, $1+i$, $-1-i$, $-3-2i$.

10. Докажите, что сумма z_1+z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 изображается четвертой вершиной параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2 с точкой O.

11. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника на плоскости. Найдите число, изображающее центр тяжести этого треугольника.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат xOy. Пусть точка P изображает комплексное число $z=a+bi$ (рис. 1).

Обозначим расстояние OP от точки P до начала координат через r, а через φ — угол (см. рис. 1), образуемый лучом OP с положительным направлением оси Ox и отсчитываемый против часовой стрелки $(0<\varphi<2\pi)$. (На рисунке 1 показаны углы φ для различных случаев расположения точки P.)

Из определения тригонометрических функций следует, что

$$a=r\cos\varphi,\quad b=r\sin\varphi,$$

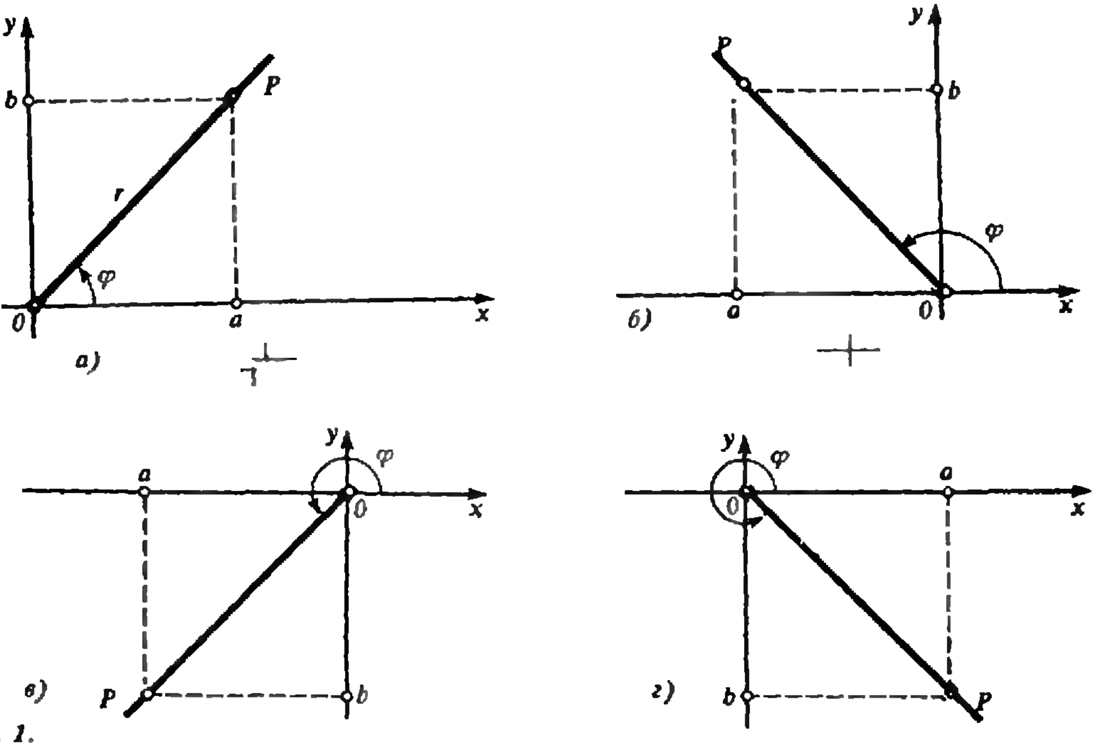


Рис. 1.

т. е.

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа. Величина $OP=r$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается через $|z|$, а величина угла φ — *главным аргументом числа* z и обозначается через $\arg z$.

Так как OP является гипотенузой прямоугольного треугольника OAP, то

$$|z|=r=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\arg z=\begin{cases}\arccos\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при } b\geqslant 0;\\[2ex] 2\pi-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{при } b<0.\end{cases}$$

Из этих формул вытекает, что $|z|$ определен однозначно и равен нулю тогда и только тогда, когда $z=0$.

Главный аргумент при $z=0$ не определен. Для $z\neq 0$ всякий угол, отличающийся от $\arg z$ на слагаемое, кратное 2π, называется *аргументом* числа z.

Например, так как $\arg i=\frac{\pi}{2}$, то все аргументы числа i имеют вид $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Аналогично, $\arg(-1)=\pi$, а все остальные аргументы — это числа $\pi(2k+1)$.

Упражнения.

12. Найдите $|z|$ и $\arg z$, если
а) $z=-2$; б) $z=1+i$; в) $z=-1-i$;
г) $z=-i$; д) $z=1-i\sqrt{3}$; е) $z=-3-4i$.

13. Запишите тригонометрическую форму чисел
а) 1; б) -1; в) $12+5i$; г) $12-5i$;
д) $-12-5i$; е) $\sin\alpha+i\cos\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$.

14. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1-z_2|$. Пользуясь этим, изобразите точки на плоскости, для которых
а) $|z-i|=1$; б) $|z-1|=|z+1|$;
в) $|z-i|=|iz-1|$;
г) $1\leqslant|z-i|\leqslant 2$.

15. Изобразите точки плоскости, для которых
а) $\arg iz=\pi/4$;
б) $\arg(iz-1)=\pi/3$.

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить — в тригонометрической форме.

Теорема 1. *При умножении любого конечного количества комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство. Ограничимся двумя сомножителями; общий случай без труда получается индукцией. Итак, мы должны доказать, что

$$(r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1))\cdot(r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2))=(r_1r_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \quad (3)$$

Но

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

откуда непосредственно вытекает равенство (3). Так как из $r_1\geqslant 0$, $r_2\geqslant 0$ следует, что $r_1r_2\geqslant 0$, то r_1r_2 — модуль, а $\varphi_1+\varphi_2$ — аргумент произведения двух данных чисел. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что произведение комплексного числа z на комплексное число a получается из точки z так: нужно повернуть луч Oz на угол $\alpha=\arg a$ против часовой стрелки и затем взять на полученном луче точку, удаленную от O на расстояние $|a|\cdot|z|$ (рис. 2). Иначе говоря, преобразование плоскости, переводящее всякую точку z в точку az есть

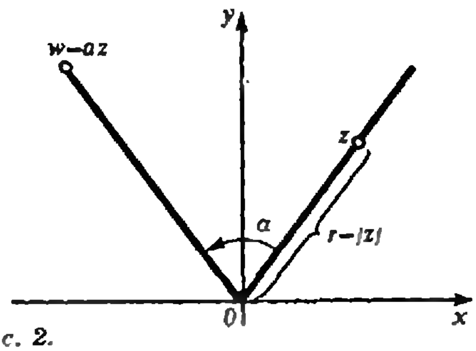


Рис. 2.

произведение поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром O.

Упражнение 16. Докажите следующие равенства

а) $|z|^2=z\bar{z}$; б) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$;

в) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$ (выясните, при каких z_1 и z_2 будет равенство);

г) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

Каков геометрический смысл этого тождества?

Теорема 2. *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Более подробно,

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

Доказательство. Преобразуем дробь

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)},$$

умножив ее числитель и знаменатель на $\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2$. В результате получим

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}.$$

Поскольку $i^2=-1$, знаменатель второй дроби равен $\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2=1$. Числитель же можно записать так:

$$(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+$$
$$+i\sin(-\varphi_2)).$$

Применив правило умножения, получим

$$\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

что и требовалось доказать.

При совпадении сомножителей из теоремы 1 получается так называемая *формула Муавра*

$$(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=$$
$$=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Теперь нетрудно решить вопрос об извлечении корня из комплексного числа.

Теорема 3. *Пусть z — комплексное и n — натуральное числа. В множестве комплексных чисел выражение $\sqrt[n]{z}$ при $z=0$ имеет единственное значение — 0, а при $z\neq 0$ — n различных значений. Если*

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то эти значения находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Доказательство. Поскольку $0^n=0$ и из $z^n=0$ следует, что $z=0$, то $z=0$.

Пусть теперь

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0.$$

Обозначив через ρ и α соответственно модуль и аргумент корня, будем иметь

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

Отсюда по формуле Муавра

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\rho^n=r,\ n\alpha=\varphi+2k\pi,$$

откуда

$$\rho=\sqrt[n]{r},\ \alpha=\frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

т. е.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).\tag{4}$$

Сколько различных значений мы получим? Легко убедиться, что пока мы будем подставлять в последнюю формулу значения $k=0,1,2,\ldots,n-1$, все получаемые значения корня будут различны, поскольку будут различны их аргументы. При $k=n$ получим

$$\frac{\varphi+2\pi n}{n}=\frac{\varphi}{n}+2\pi,$$

и корень будет равен

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

т. е. мы получим тот же корень, что и при $k=0$. Аналогично, при $k=n+1$, $n+2$ и т. д. мы будем получать те же корни, что и при $k=1, 2, \ldots$. Таким образом, целое число k в формуле (4) изменяется в пределах от 0 до $n-1$. Теорема доказана.

Следствие. *Корни n-й степени из единицы выражаются формулой*

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Упражнения

17. Вычислите корни и изобразите их на плоскости

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{i}$;
г) $\sqrt[6]{-i}$; д) $\sqrt[4]{3+4i}$.

18. Решите уравнения

а) $z^4=z$;
б) $(x+i)^4+(x-i)^4=0$;
в) $z^3=-z$.

19. Докажите, что все корни n-й степени из единицы являются степенями числа $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$. Вычислите затем сумму k-х степеней всех корней n-й степени из единицы.

Алгебраическая замкнутость множества комплексных чисел

Мы построили совокупность комплексных чисел C как расширение множества действительных чисел, в котором разрешимо любое квадратное уравнение. На первый взгляд может показаться, что для разрешимости уравнений более высоких степеней понадобится раз за разом расширять множество C. Оказывается, что больше никаких расширений не нужно. *Если мы возьмем уравнение*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad (5)$$

какой угодно степени, в котором все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть произвольные комплексные числа, то все его корни принадлежат множеству C, и значит, для решения уравнения (5) никаких новых чисел, не входящих в C, не требуется.

Это свойство называется *алгебраической замкнутостью* множества комплексных чисел. Впервые его сформулировал голландский математик Альберт Жирар еще в 1629 году, однако первое строгое доказательство было получено лишь в 1799 году Карлом Фридрихом Гауссом.

Упражнение 20*. Докажите, что если точки $z_1, z_2, \ldots, z_n$ являются вершинами выпуклого n-угольника, то все корни уравнения

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_n}=0$$

лежат внутри или на границе этого многоугольника.

Нам пишут

Здравствуй, «Квант»!

На днях, балуясь на своем микрокалькуляторе «Электронике МК-60», мне удалось составить удивительно красивую комбинацию чисел π и e:

$$e^6=\pi^5+\pi^4.$$

Надеюсь, что Вы откликнитесь на мою формулу.

Алексей Рыбак, 10 класс, член ВАКО «Союз», г. Дюртюли Башкирской АССР.

От редакции.

Сначала мы посчитали левую и правую часть равенства на микрокалькуляторе и получили 403,428775 и 403,428793. Затем посчитали тоже самое на компьютере IBM/AT и получили 403,42897 и 403,42893.

Лаборатория „Кванта“

Летающая тарелка, или Иллюстрация движения центра масс

В. МАЙЕР, В. ДИНЕРШТЕЙН

Наверное, правильнее было бы сказать: падающая тарелка. Но слово «падение» имеет какой-то негативный оттенок, а так хотелось бы, чтобы предлагаемый в этой статье опыт доставил вам только положительные эмоции.

Демонстрация. Вы берете диск, оклеенный с одной стороны черной тканью с белым кружком в центре, поднимаете его как можно выше перед собой и в вертикальном положении отпускаете. Диск падает по прямолинейной траектории в стоящий на полу ящик с поролоном или ватой (рис. 1, *а*). Вы повторяете опыт, и снова ничего необычного не происходит. Вы в третий раз поднимаете диск, отпускаете его, и... вдруг все видят, что он, падая, описывает затухающую синусоиду (рис. 1, *б*).

Такого не может быть! Ведь тело, отпущенное без начальной скорости, всегда падает вниз строго по прямой, не так ли? Нет, не так. Не тело, а его центр масс при свободном падении без начальной скорости движется по прямой. И вы, безусловно, знаете это.

О движении центра масс. Напомним, что координата центра масс (*с*) системы двух материальных точек с массами m_1, m_2 и координатами x_1, x_2 задается простым соотношением

$$x_c = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}. \qquad (*)$$

Отсюда можно найти положение центра масс любой системы. Для этой замечательной точки доказывается важная теорема о том, что центр масс движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы. Внутренние силы, т. е. силы взаимодействия между частями системы, не оказывают влияния на движение центра масс.

Если система из n частиц, массы которых m_1, m_2, ..., m_n, движется в гравитационном поле Земли, то на каждую частицу действует сила тяжести, которая по отношению к рассматриваемой системе является внешней. Поэтому сумма всех внешних сил, приложенных к центру масс системы, равна

$$\vec{F} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \ldots + m_n\vec{g} = m\vec{g},$$

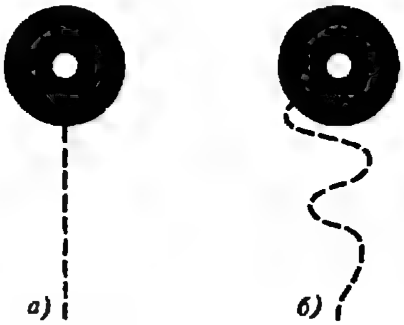


Рис. 1.

где m — масса системы и $\vec{g}$ — ускорение свободного падения. Согласно теореме о движении центра масс системы, его ускорение

$$\vec{a}_c = \vec{F}/m = \vec{g},$$

следовательно, в поле тяжести Земли центр масс системы движется с ускорением свободного падения.

Так, центр масс тела, брошенного под углом к горизонту, описывает параболу, а отпущенного с некоторой высоты,— прямую. Однако отдельные части системы (тела) могут двигаться и более сложным образом. Например, если они смещаются друг относительно друга.

Прибор для опыта. Теперь уже легко понять опыт, описанный в начале. Очевидно, видимый всем диск, совершающий колебания при падении,— это одна часть системы, а внутри обязательно должна быть другая часть, которая тоже колеблется, причем таким образом, что центр масс всей системы движется по прямой.

Действительно, повернув диск обратной стороной, мы увидим, как устроен прибор (рис. 2). Кольцо из пенопласта *1* с внешним диаметром 30 см, внутренним 25 см и толщиной 2 см сверху разрезано. В прорезь вставлены дюралевые накладки *2*, к которым прикреплена упругая полоска *3* из винипласта размером 2×15×150 мм. На конце полоски закреплен стальной или латунный груз *4* размером 25×25×50 мм. К грузу прикреплен фиксатор *5* из медной проволоки диаметром 2 мм. Пенопластовое кольцо плотно обмотано изолентой *6* — эта обмотка закрепляет на кольце дюралевые накладки и несколько повышает прочность кольца.

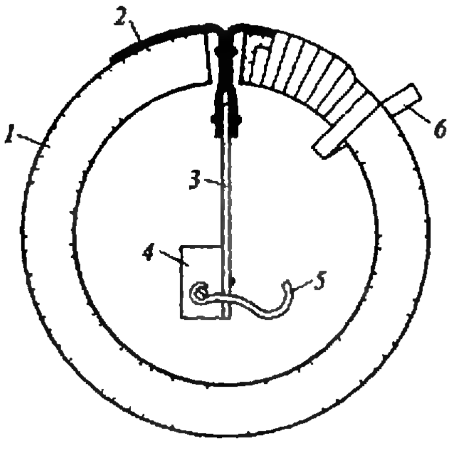


Рис. 2.

Сделать такой прибор вы сможете в течение получаса. Кольцо из листа пенопласта подходящей толщины вырежьте полотном от ножовки по металлу. Упругую полоску изготовьте из старой пластмассовой линейки. Груз, фиксатор и накладки закрепите на упругой полоске заклепками или болтами с гайками. А можно просто крепко связать их проволокой или изолентой.

При показе опыта груз отклоните вправо, возьмите кольцо в правую руку и большим пальцем прижмите фиксатор к кольцу. Этого никто не заметит, если передняя часть прибора оклеена непрозрачной тканью. Отпуская прибор, вы одновременно освободите и деформированную упругую полоску с грузом. При этом диск и груз будут падать, совершая колебания. Чтобы колебания сделать более заметными для зрителей, на темную ткань в центре диска липкой лентой приклейте небольшой круг из плотной белой бумаги.

Элементарная теория. Чтобы объяснить опыт, рассмотрим следующую упрощенную модель. Возьмем обруч массой M и по его горизонтальному диаметру натянем идеальную пружину жесткостью k. В центре обруча O закрепим на пружине груз массой m.

Будем считать сначала, что обруч зажат неподвижно и сила тяжести отсутствует. Поместим начало координат в точку O, а ось X направим по горизонтали вправо (рис. 3, *а*). Очевидно, центр масс системы, состоящей из обруча и груза, совпадает с началом координат O. Сместим груз из положения равновесия так, чтобы его координата стала x (рис. 3, *б*). В этом случае пружина деформируется на величину $\Delta l = x$ и возникнет упругая сила F, проекция которой на ось X равна $F_x = -kx$. (Говоря точнее, на груз действуют две силы упругости —

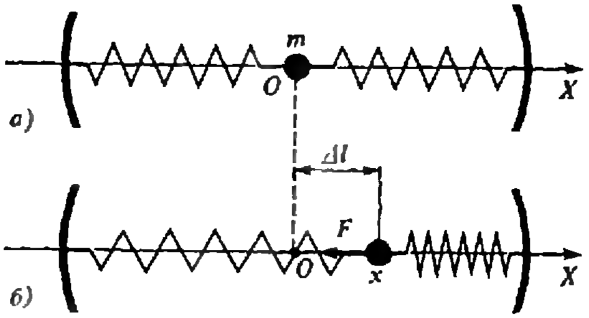


Рис. 3.

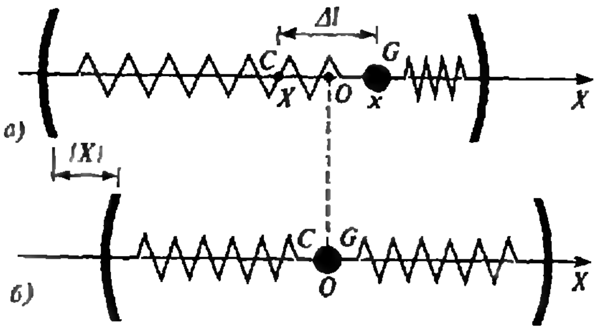


Рис. 4.

со стороны двух половин пружины, жесткость каждой из которых равна $k/2$. Так что суммарная упругая сила $F=2(k/2)x=kx$.) Согласно второму закону Ньютона, под действием этой силы груз приобретает ускорение

$$a_x=-\frac{k}{m}x.$$

Это уравнение, как известно, описывает гармоническое колебание, частота которого

$$\omega=\sqrt{k/m}$$

Понятно, что на самом деле колебания груза будут затухающими, так как трение, которым мы молчаливо пренебрегли, всегда есть. Поэтому последняя формула дает только приближенную оценку частоты колебаний.

Теперь освободим обруч и оттянем груз от положения равновесия, как показано на рисунке 4, *а*. Пусть центры масс обруча и груза находятся в точках C и G соответственно, а начало координат находится в центре масс системы — в точке O. В новой системе координат центр масс обруча имеет координату X, а груза — x.

Одновременно отпустим обруч и груз так, чтобы они стали свободно падать. Поскольку ускорение свободного падения не имеет составляющей по оси X, скорость центра масс рассматриваемой системы вдоль этой оси не изменится. А раз в начальный момент времени эта скорость была равна нулю, координата центра масс системы в течение всего времени свободного падения системы не изменится.

Что касается центров масс обруча и груза, то они станут двигаться навстречу друг другу и в некоторый момент совпадут с центром масс всей системы (рис. 4, *б*). Потом они поменяются местами и так далее, т. е. будут колебаться относительно падающего по вертикальной прямой центра масс системы.

Подставляя в формулу (*) значения $x_1=x$, $x_2=X$, $m_1=m$ и $m_2=M$ и учитывая, что $x_c=0$, получаем, что для любого момента времени справедливо равенство

$$\frac{mx+MX}{m+M}=0.$$

Отсюда следует, что координаты центров масс обруча и груза связаны соотношением

$$X=-\frac{m}{M}x.$$

При этом пружина деформирована на величину

$$\Delta l=x+|X|=x-X=(1+m/M)x,$$

на груз действует направленная к началу координат сила, проекция которой

$$F_x=-k\Delta l=-k(1+m/M)x,$$

и ускорение груза равно

$$a_x=-k\frac{m+M}{mM}x.$$

Сравнивая это выражение с выражением для ускорения груза в закрепленном обруче, приходим к выводу, что груз в свободно падающем обруче колеблется с частотой

$$\omega_1=\sqrt{k\frac{m+M}{mM}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1+\frac{m}{M}}=\omega\sqrt{1+\frac{m}{M}}.$$

С такой же частотой ω_1 колеблется и сам обруч, но его колебания происходят в противофазе с колебаниями груза.

Нетрудно также оценить амплитуду начальных колебаний обруча. Допустим, что внутренний радиус обруча равен R, т. е. максимальное смещение груза относительно центра обруча $\Delta l_{max}=R$. Тогда получаем, что максимальное значение амплитуды колебаний обруча есть

$$X_{max}=\frac{m}{M}x_{max}=\frac{m}{M}\frac{\Delta l_{max}}{1+m/M}=\frac{R}{1+M/m}.$$

Заключение. Описанный опыт будет впечатляющим в том случае, если обруч колеблется с достаточно большой амплитудой и достаточно высокой частотой. Последнее станет столь же очевидным, как и первое, если вспомнить, что свободно падающий обруч движется довольно быстро, и за малое время наблюдения надо успеть заметить хотя бы несколько колебаний. Полученные соответствующие формулы показывают, что повысить частоту и амплитуду колебаний можно только одним способом — уменьшением отношения масс обруча и груза M/m. Надеемся, что конкретные расчеты и эксперименты вы сумеете выполнить самостоятельно.

Вниманию
абитуриентов
и преподавателей математики!

Сборником «514 ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ» открывается серия «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КЛОНДАЙК»

Книга объемом в 160 страниц содержит 514 задач
по элементарной математике. Задачи распределены по 9 главам и
5 группам трудности. Ко всем задачам даются ответы, подробные
указания или решения.
Специальный сборник задач с параметрами такого
объема выходит в нашей стране впервые.
Он предназначен для абитуриентов,
готовящихся к вступительным экзаменам
в высшие учебные заведения.
Книга высылается наложенным платежом по вашим заказам.
Заказ присылайте на листе бумаги
размером с почтовую открытку с написанным на нем вашим адресо.
(этот лист наклеивается на бандероль).
Стоимость книги — 10 рублей, включая почтовые расходы.

Наш адрес: 400087 Волгоград-87, а/я 1942.

Нам пишут

Наш читатель Д. Гуринович из Москвы предлагает достаточно простое, по его мнению, физическое обоснование факта равноускоренного характера движения тела под действием постоянной силы. Вот его рассуждения.

Рассмотрим некоторое тело. Пусть вначале оно покоится. Приложите к нему постоянную силу, например с помощью динамометра. Через короткий промежуток времени Δt тело приобретет скорость Δv.

Перейдем в систему отсчета, в которой тело покоится. И здесь, в соответствии с первым законом Ньютона, за время Δt тело должно набрать ту же скорость Δv. Действительно, пружина динамометра растянута так же, как и прежде (сила постоянна), а законы во всех инерциальных системах отсчета должны быть одними и теми же.

Теперь снова вернемся в неподвижную систему отсчета. В силу закона сложения скоростей и абсолютности времени в классической механике, имеем, что за время $2\Delta t$ тело набирает скорость $2\Delta v$.

Рассуждая аналогично, заключаем, что за время $3\Delta t$ тело приобретет скорость $3\Delta v$, а за промежуток $N\Delta t$ — скорость $N\Delta v$. А это и означает, что тело движется равноускоренно.

Уважаемая редакция журнала «Квант»!

Во втором номере журнала за 1990 г. в рубрике «Игры и головоломки» был опубликован отрывок из книги М. Гарднера «Есть идея», в котором разбирались две задачи: *как с помощью одного взвешивания можно определить один из десяти флаконов с лекарством, если в нем пилюли весят на 10 мг больше, чем в остальных, и как определить все флаконы с бракованными пилюлями, если их количество неизвестно.*

При решении задачи говорится: «Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг или на 10 мг больше, чем следует». Заметим, что без этих данных приведенное решение несостоятельно. Однако можно решить эту задачу и не зная веса доброкачественной пилюли. Вот это решение.

Положим на одну чашку весов 1 пилюлю из первого флакона, 2 — из второго, 4 — из третьего, 8 — из четвертого и т. д. 256 — из девятого, и на другую чашку весов положим 511 пилюль из десятого флакона. Если первая чашка весов окажется тяжелее на $10\,n$ мг, то значит там лежит n бракованных пилюль. Представив число n в двоичной системе счисления, как это и делает М. Гарднер, мы получим номера бракованных флаконов. Если же тяжелее окажется вторая чашка весов на $10\,n$ мг, то бракованными будут пилюли из десятого флакона и из тех флаконов, которые определяются ранее указанным способом, исходя из веса $5110-10\,n$ мг.

В. Протченко

На близкую тему написал нам и И. Акулич

Задачи, подобные следующей, широко обсуждались в литературе (в том числе и на страницах «Кванта»).

Имеется 5 кучек по 5 монет. В одной из кучек (неизвестно какой) все монеты фальшивые. Известен вес настоящей монеты. А также то, что фальшивая монета на 1 г тяжелее настоящей. В нашем распоряжении есть точные аптечные весы с набором гирь, позволяющим определить любой необходимый вес. Как с помощью лишь одного взвешивания определить, в какой кучке находятся фальшивые монеты?

Решение этой задачи весьма остроумно. Надо взять из первой кучки 1 монету, из второй — 2, ..., из пятой — 5 и определить их общий вес. Известно, каков был бы этот вес, если бы все монеты были настоящими. В данном случае он будет больше на столько граммов, сколько фальшивых монет среди отобранных. Но это число как раз равно номеру соответствующей кучки.

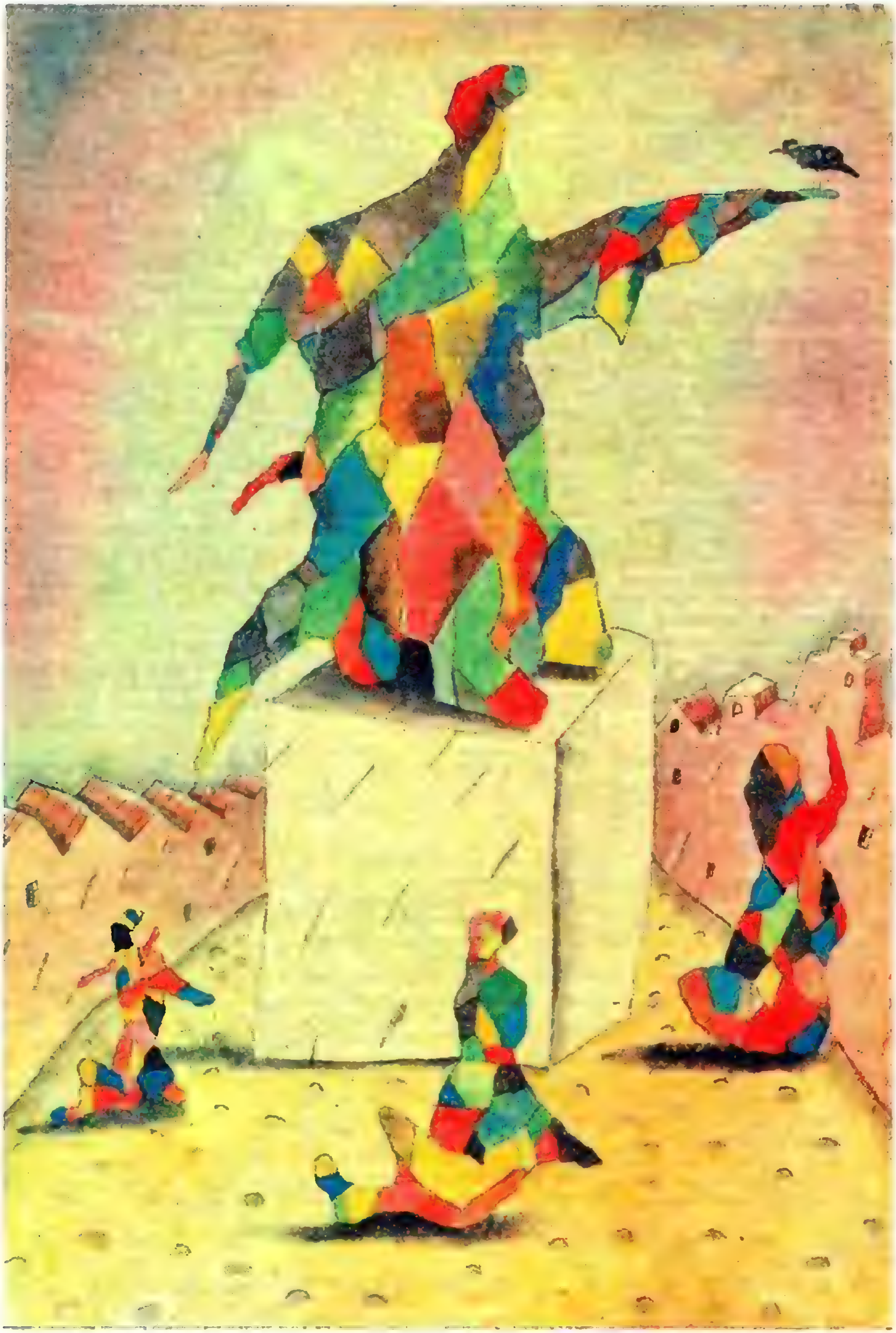
А теперь ответьте: можно ли обойтись одним взвешиванием, если в каждой кучке имеется всего лишь 4 монеты? 3 монеты? 2 монеты?

Ответ во всех случаях одинаков: можно!

Для случая четырех монет решение почти такое же: возьмем из первой кучки 1 монету, ..., из четвертой — 4, а из пятой — ни одной. Тогда избыток общего веса отобранных монет покажет номер кучки с фальшивыми монетами: если же избытка не будет, то фальшивые монеты лежат в пятой кучке.

При меньшем числе монет в кучках те, кто решил задачу для пяти и четырех монет, вполне могут забуксовать, т.к. подсознательно будут искать решение того же типа: выбрать определенное количество монет и взвесить их. Это пользы не принесет. Но решение все-таки имеется, если использовать те возможности условия, которые не были использованы прежде, а именно: наличие аптечных весов с гирями, т. е. рычажных. Следовательно, монеты можно класть на обе чашки весов вместе с гирями, что существенно расширяет наши возможности. Укажем решение сразу для случая двух монет в каждой кучке. На левую чашку весов положим монету из первой кучки и 2 монеты из второй кучки. А на правую — 1 монету из третьей кучки и 2 монеты из четвертой кучки. С помощью гирь определим разность d (в граммах) между весом левой и правой чашки. Тогда пяти возможным значениям d соответствуют пять возможных номеров кучки с фальшивыми монетами:

d	$+1$	$+2$	-1	-2	0
номер кучки	1	2	3	4	5



МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

— Выглядит так, словно я перерезал себе вены, да? Не волнуйся. Все в порядке. «Генетрон» берет меня обратно. Бернард только что позвонил.— Верджил указал на отводной аппарат с интеркомом, установленный в ванной.

Я сел на крышку унитаза и сразу обратил внимание, что у шкафа с полотенцами на самом краю полки над раковиной стоит отражатель для загара с многочисленными лампочками дневного света. Однако провод был выдернут из розетки.

— Ты в самом деле этого хочешь? — спросил я, опустив плечи.

— Пожалуй, да,— сказал Верджил.— Они смогут позаботиться обо мне лучше других. Так что я решил привести себя в порядок и сегодня вечером отправляюсь. Бернард заедет за мной на своем лимузине. Класс! Отныне у меня все будет по высшему классу.

Вода розоватого оттенка выглядела странно: это совсем не походило на растворенное мыло.

— Что это у тебя в воде — пенный шампунь? — спросил я, но спустя секунду догадался сам — и мне стало вдруг нехорошо: настолько очевидными и неизбежными были эти безумные события.

— Нет,— ответил Верджил.

Это я уже знал.

— Нет,— повторил он,— это выделения через кожу. Мне не все рассказывают, но я думаю, что теперь они начали высылать разведчиков, первопроходцев. Астронавтов.

Он внимательно посмотрел на меня, и в его взгляде я не заметил даже тени озабоченности, скорее просто любопытство: как, мол, я на это отреагирую. Подтверждение моей догадки, прозвучавшее в его словах, заставило меня внутренне сжаться, словно я готовился к удару. Прежде я совсем не думал о такой возможности, видимо, потому что был занят другими аспектами проблемы.

— Это первый раз случилось? — спросил я.

— Да,— ответил он и рассмеялся.— Я все думаю, не выпустить ли этих чертенят в канализационную систему. Пусть узнают, каков на самом деле наш мир.

— Они же распространятся тогда по всему свету!

— Это точно.

— Как ты себя сейчас чувствуешь?

— Сейчас очень даже неплохо... Их тут, должно быть, миллиарды.— Еще один всплеск рукой.— Как ты думаешь? Может, стоит их выпустить?

Быстро, почти не раздумывая, я опустился на колени у ванны. Мои пальцы сами нащупали провод от лампы для загара и воткнули вилку в розетку. Верджил как был мальчишкой, когда подводил ток к дверным ручкам, варил пунш, окрашивающий мочу в голубой цвет, и разыгрывал тысячи других дурацких шуток, так им и остался. Он не вырос, не созрел до понимания, что его гениальности вполне достаточно, чтобы действительно изменить мир, но при этом нужно обладать еще и огромным чувством ответственности.

Верджил протянул руку к пробке, затыкающей слив.

— Знаешь, Эдвард, я...

Он так и не договорил. Я схватил лампу, бросил ее в ванну и тут же отпрыгнул назад, потому что вода буквально взорвалась облаком пара и искр. Верджил закричал, судорожно дернулся — затем все замерло. Лишь продолжала шкворчать лампа, да от его волос поднималась тонкая струйка дыма.

Я поднял крышку унитаза, и меня тут же стошнило. Потом я зажал нос и прошел в гостиную. Ноги вдруг отказались держать меня — и я рухнул на диван.

Примерно через час, порывшись на кухне, я нашел коробку отбеливателя, нашатырь и бутылку виски. Вернулся в ванную и, старательно отворачивая взгляд от Верджила, налил в ванну сначала виски, потом нашатырный спирт, потом высыпал отбеливатель. Хлорка тут же забурлила в воде, и я вышел, плотно притворив за собой дверь.

Когда я вернулся домой, в квартире

Окончание. См. «Квант» № 5 и № 6.

звонил телефон, но я не стал снимать трубку. Вдруг это из больницы? Или Бернард? А может, полиция. Легко представлялось, как я буду с ними объясняться. «Генетрон» напрочь откажется подтвердить мой рассказ. Бернард вообще заявит, что ничего не знает.

Я ощущал невероятную усталость во всем теле, мускулы сжимались в тугой узел от напряжения и... Даже не знаю, как можно назвать такое чувство. Чувство, возникающее после...

Осуществления геноцида?

Совершенно дикая мысль. Я не мог поверить, что своими руками убил сотни триллионов разумных существ. Уничтожил целую галактику... Смехотворное обвинение. Но мне было совсем не смешно.

Гораздо легче верилось в то, что я убил человека, своего друга. Дым, оплавленный каркас лампы, растекшаяся лужицей пластика розетка, обгоревший провод...

Верджил!

Я бросил ему в ванну включенную лампу для загара. Меня по-прежнему мутило. Сны, города, насилующие Гэйл (что, интересно, с его прежней подружкой, Кандис?). Вода, утекающая в трубу. Галактики, рассеянные вокруг нас. Бесконечный ужас... Но одновременно — огромный потенциал красоты. Новая форма жизни, симбиоз, трансформация.

Убил ли я их всех? На мгновение меня охватила паника. Завтра, подумалось мне, я схожу туда и простерилизую квартиру. Что-нибудь придумаю. О Бернарде я даже не вспомнил.

Когда вернулась домой Гэйл, я спал на диване. Поднялся я, чувствуя себя очень скверно, и она тут же это заметила.

— Ты не заболел? — спросила Гэйл встревоженно, присаживаясь на край.

Я покачал головой.

Гэйл положила руку мне на лоб.

— Эдвард, у тебя температура. Очень высокая.

Я дотащился до ванной и взглянул на себя в зеркало. Гэйл остановилась позади меня.

— Что это? — спросила она.

Под воротничком рубашки вся шея у меня была исчерчена белыми линиями. Как на шоссе. Видимо, они проникли в мой организм уже давно, несколько дней назад.

— Влажные ладони...— проговорил я. Удивительно, что это не пришло мне в голову раньше.

Очевидно, мы чуть не умерли. Сначала я еще пытался бороться, но буквально через несколько минут ослабел настолько, что уже не мог пошевелиться. Гэйл оказалась в таком же состоянии спустя час.

Я лежал на ковре в гостиной весь мокрый от пота. Гэйл — на диване. Лицо ее стало белым, словно тальк, глаза закрылись — как труп в лаборатории бальзамировщика. Некоторое время мне казалось, что она действительно умерла. И даже в том беспомощном, болезненном состоянии меня не оставляла злость на себя и чувство вины за свою слабость, за неспособность вовремя подумать о всех возможных последствиях. Но вскоре и на это не осталось сил. Я не мог даже моргнуть; поэтому закрыл глаза и просто ждал.

В руках, в ногах явственно ощущался ритм какой-то деятельности. С каждым толчком крови внутри меня возникал некий звук, похожий на звучание оркестра в тысячу музыкантов, играющих вразнобой целые фрагменты нескольких симфоний. Музыка, звучащая в крови... Постепенно звук становился резче, но одновременно и слаженнее: нагромождение акустических волн стихало, разделяясь на отдельные гармонические сигналы.

Эти сигналы словно врастали в меня, в ритм моего собственного сердца.

Сначала они подчинили себе наши иммунные реакции. Война — а это действительно была война, какой на Земле никто никогда не знал, война с триллионами, участвующими в сражениях,— продолжалась около двух дней.

К тому времени, когда я нашел в себе силы, чтобы добраться до кухонного крана, они уже принялись за мой мозг, пытаясь расколоть коды и найти бога, скрывающегося в протоплазме. Я пил и пил, пока меня не замутило, затем попил еще, уже медленными глотками, и отнес стакан воды Гэйл. Она прижала его к потрескавшимся губам и принялась жадно пить. Глаза ее покраснели, вокруг присохли желтоватые грязные крошки. Но теперь коже вернулось некое подобие нормального оттенка. Через несколько минут мы уже сидели за кухонным столом и вяло пережевывали пищу.

— Что это за чертовщина с нами приключилась? — спросила она первым делом.

У меня не было сил объяснять, и я лишь покачал головой. Затем почистил апельсин и поделил его на двоих.

— Надо вызвать врача,— сказала она.

Но я знал, что мы этого не сделаем. Я уже начал получать от них сообщения, из которых становилось понятно, что возникшее у нас ощущение свободы иллюзорно.

Сначала эти сообщения были предельно

просты. В мыслях вдруг возникали даже не команды, а скорее воспоминания о командах. Нам запрещалось покидать квартиру: видимо, те, кто нами распоряжался, поняли нежелательность таких действий, хотя сама концепция наверняка казалась им совершенно абстрактной. Нам запрещалось вступать в контакт с другими себе подобными. По крайней мере какое-то время нам будут разрешать принимать пищу и пить воду из-под крана.

Когда спала температура, процесс трансформации пошел быстро и решительно. Почти одновременно нас с Гэйл заставили замереть. Она в тот момент сидела за столом, а я опустился на колени и едва видел ее краешком глаза.

На руке у Гэйл уже начали образовываться гребни.

Они многому научились, пока жили внутри Верджила, и теперь применяли совсем иную тактику. Часа два все мое тело невыносимо чесалось и зудело — два часа в аду, но потом они наконец прорвались к мозгу и нашли меня. Многовековые по их шкале времени попытки увенчались успехом, и теперь они получили возможность общаться с неповоротливым, медлительным разумом, который когда-то владел их вселенной.

Они отнюдь не были жестоки. Когда концепция вызванного их действиями неудобства и его нежелательности стала понятна этим маленьким существам, они сразу принялись за работу, чтобы устранить неприятные ощущения. И пожалуй, перестарались. Еще час я пребывал в состоянии абсолютного блаженства, лишив их всякой возможности контакта.

На следующее утро нам снова разрешили двигаться. Главным образом для отправления физиологических нужд: от кое-каких продуктов жизнедеятельности они не могли избавиться сами. Я послушался — моча оказалась фиолетовой, и Гэйл последовала моему примеру. Мы долго смотрели друг на друга пустыми глазами, потом она выдавила из себя улыбку.

— Они с тобой тоже разговаривают? — спросила Гэйл.

Я кивнул.

— Значит, я не сошла с ума.

В последующие двенадцать часов контроль ослаб, и мне удалось набросать значительную часть этой рукописи. Подозреваю, что в это время в моем организме шла еще одна война. Гэйл могла немного шевелиться, но не более того.

Когда они снова вернули себе всю полноту власти, нам было приказано обняться, и мы без колебаний подчинились.

— Эдди...— прошептала Гайл, и мое имя стало последним звуком, который донесся до меня снаружи.

В таком положении, стоя, мы и срослись. Через несколько часов наши ноги превратились в массивную опору, которая растеклась по полу во все стороны сразу. Отдельные отростки поползли к окну, к солнечному свету, и на кухню — к источнику питьевой воды. Вскоре филаменты добрались до всех концов комнаты, содрали краску и штукатурку со стен, затем обивку и наполнитель с мягкой мебели.

К следующему утру трансформация завершилась.

Я теперь не очень хорошо вижу, и мне трудно судить, на что мы похожи. Видимо, на две огромные плоские клетки, распустившие во все стороны отростки филаментов и растекшиеся по квартире. Великое имитирует малое.

Мне было приказано продолжать записывать свои впечатления, но скоро это будет невозможно. День ото дня, по мере того как нас поглощают находящиеся внутри мыслители, оба наших разума теряют устойчивость. С каждым днем наши личностные характеристики утрачиваются. Мы действительно огромные, неуклюжие динозавры. Теперь наши воспоминания хранятся в миллиардах маленьких существ, наши личности рассредоточены по объему преобразованной крови.

Скоро необходимость в централизации отпадет совсем.

Мне сообщили, что водопровод и канализация находятся в их власти. Многие люди на других этажах здания уже подверглись трансформации.

Через несколько недель по старой временной шкале мы доберемся до озер, рек и морей уже огромным числом.

Я даже не могу догадаться, каковы будут последствия. Каждый квадратный дюйм поверхности планеты забурлит разумом. А годы спустя — может быть, раньше — все люди сольются, отбросив личное.

Появятся новые существа, и их будущие мыслительные способности просто невозможно себе представить.

Ненависть и страх теперь полностью оставили меня. Меня — нас — волнует сейчас только один вопрос.

Сколько раз подобное случалось где-то еще? Землю никогда не посещали пришельцы из космоса. Да и зачем им это?

Ведь в каждой крупинке песка можно найти вселенную.

Перевод с английского А. Корженевского

Математические сюрпризы

Один старый факт и несколько новых

(Еще одно путешествие в мир фигурных чисел и числовых фигур: загадочные числа, которые могут вас околдовать)

Дж. КОНВЕЙ

Сложите первые n нечетных чисел, начиная с 1. Что получилось?

$$1=1,$$
$$1+3=4,$$
$$1+3+5=9,$$
$$1+3+5+7=16,$$
$$1+3+5+7+9=25.$$

Узнаете эти числа? Конечно! Это «квадратные» числа (из дальнейшего вы поймете, почему так называют квадраты целых чисел):

$$1=1\cdot1,\ 4=2\cdot2,\ 9=3\cdot3,\ 16=4\cdot4,\ 25=5\cdot5,\ldots$$

И в этом заключается наш старый факт. Можем ли мы его объяснить? Обобщить? Можно ли аналогичным образом получить «кубические» числа

$$1=1\cdot1\cdot1,\ 8=2\cdot2\cdot2,\ 27=3\cdot3\cdot3,\ 64=4\cdot4\cdot4,\ldots?$$

Ну что ж, имеется множество разных объяснений, и они ведут к множеству разных новых фактов. Попробуем сначала посмотреть

С точки зрения алгебры

Мы должны доказать, что разности между последовательными квадратами 0, 1, 4, 9, 16, 25,...— это в точности нечетные числа 1, 3, 5, 7, 9, 11,... Но это просто: очевидная алгебраическая выкладка показывает, что такая разность в общем виде равна

$$(n+1)^2-n^2=(n^2+2n+1)-n^2=2n+1,$$

Точно так же вы можете убедиться, что разности между последовательными значениями любого многочлена — это значения некоторого многочлена на единицу меньшей степени. Например, соседние кубы отличаются на числа вида $3n^2+3n+1$, т. е. на загадочные числа

$$1,\ 7,\ 19,\ 37,\ 61,\ldots$$

Кубы — это суммы нескольких первых чисел этой последовательности:

$$1=1,\quad 1+7=8,\quad 1+7+19=27,\ldots$$

Тоска!.. С какой стати кто-то должен интересоваться этими загадочными числами?

Попробуем еще раз.

С точки зрения арифметики

Сумма нескольких чисел равна произведению их количества на их среднее арифметическое. Так, например, сумма $1+3+5+7+9$ есть 5×5. Сред-

---

В третьем номере журнала мы начали публикацию переводов статей из советско-американского журнала «Квантум». Сегодня мы предлагаем вашему вниманию следующую статью из этой серии.

ние арифметические сумм

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7, \ldots$$

— это полусуммы первого и последнего слагаемых, и ясно, что они равны

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Вот это-то и подводит нас к красивому способу получения кубов. Вместо того, чтобы все время брать суммы первых n нечетных чисел, будем брать следующие n чисел, начиная с того места, где мы остановились.

Тогда вместо равенств

$$\begin{aligned} 1&=1^2, \\ 1+3&=2^2, \\ 1+3+5&=3^2, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

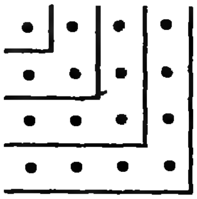
мы будем иметь

$$\begin{aligned} 1&=1^3, \\ 3+5&=2^3, \\ 7+9+11&=3^3, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

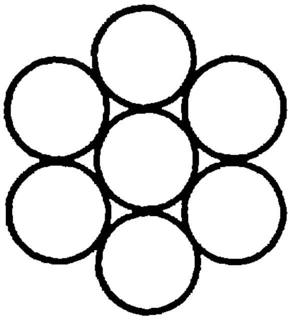
Это уже получше, но попробуем еще одну идею.

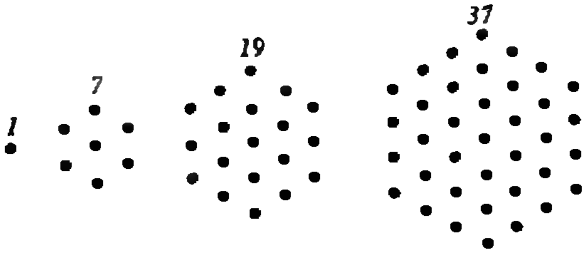
С точки зрения геометрии

Взгляните на этот узор:



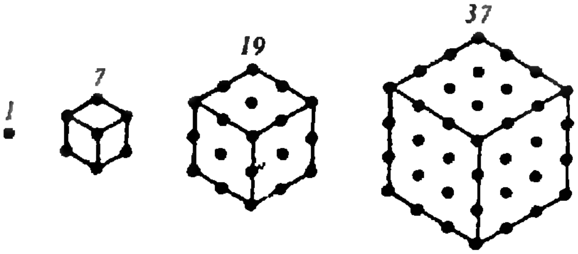
Он очень ясно показывает, как квадратное число разбивается на последовательные нечетные числа. Можно ли взглянуть на наши загадочные числа 1, 7, 9, 37, 61 как на узоры из точек? Семь монеток, естественно укладывающихся в аккуратную фигуру могут нам подсказать... Ну конечно! Наши загадочные числа





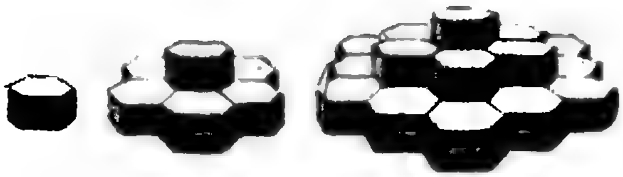
известны в комбинаторике как «гекс-числа» («шестерные» по-гречески; не путайте с термином «гексагональные» — шестиугольные числа, означающим нечто иное).

Верно ли, что сумма нескольких первых гекс-чисел действительно является кубическим числом? Верно! И чтобы увидеть это, достаточно просто провести несколько линий — и



узоры из точек превратятся в кубические ячейки, которые можно вложить друг в друга, составив куб, заполненный точками.

У моей дочки были шестиугольные «кубики» вроде показанных на рисунке, из которых она складывала шестиугольные пирамиды. Сколько кубиков нужно было ей для пирамиды с n этажами?



Похоже, что различных обобщений нашего основного факта действительно много, и это прекрасно, ибо это значит, что всегда есть надежда найти что-то новое. Одно из наиболее поразительных было обнаружено лишь недавно.

Чудеса Месснера

Начнем с квадратов. Запишем несколько первых натуральных чисел, обведем кружком каждое второе и сложим остальные:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \textcircled{2} & 3 & \textcircled{4} & 5 & \textcircled{6} & 7 & \textcircled{8} & 9\ldots \\ \textcircled{1} & & \textcircled{4} & & \textcircled{9} & & \textcircled{16} & & \textcircled{25}\ldots \end{array}$$

Разумеется, получатся квадраты.

Теперь изменим процедуру — обведем каждое третье число в верхнем ряду, образуем следующий ряд, как прежде, обведем в нем каждое второе число и сложим необведенные числа. Суммы составят третий ряд:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \textcircled{3} & 4 & 5 & \textcircled{6} & 7 & 8 & \textcircled{9} & \ldots \\ 1 & \textcircled{3} & & 7 & \textcircled{12} & & 19 & \textcircled{27} & & \ldots \\ \textcircled{1} & & & \textcircled{8} & & & \textcircled{27} & & & \ldots \end{array}$$

Сюрприз! Возникли кубы! Можете ли вы доказать, что так и будет продолжаться?

Похоже, что это проходит и со всеми другими степенями. Скажем, если обводить каждое пятое число в первом ряду, каждое четвертое — во втором и т. д., мы по крайней мере три первые пятые степени получим правильно.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \textcircled{5} & 6 & 7 & 8 & 9 & \textcircled{10} & 11 & \ldots \\ 1 & 3 & 6 & \textcircled{10} & & 16 & 23 & 31 & \textcircled{40} & & 51 & \ldots \\ 1 & 4 & \textcircled{10} & & & 26 & 49 & \textcircled{80} & & & 131 & \ldots \\ 1 & \textcircled{5} & & & & 31 & \textcircled{80} & & & & 211 & \ldots \\ \textcircled{1} & & & & & \textcircled{32} & & & & & \textcircled{243} & \ldots \end{array}$$

Можете ли вы проверить, что и эта закономерность будет выполняться всегда?

Вообще, можно обводить любой набор чисел в верхнем ряду, разбивая остальные числа на серии. В последующих рядах обводится последнее число каждой серии, образуя из сумм необведенных чисел новый ряд, и т. д.

Мы видели, что если в верхнем ряду обводить числа

$$1+1,\ 2+2,\ 3+3,\ 4+4,\ \ldots,$$

то возникают квадраты, т. е. числа

$$1\cdot1,\ 2\cdot2,\ 3\cdot3,\ 4\cdot4,\ldots$$

А обводя числа

$$1+1+1,\ 2+2+2,\ 3+3+3,\ \ldots,$$

мы получаем кубы

$$1\cdot1\cdot1,\ 2\cdot2\cdot2,\ 3\cdot3\cdot3,\ \ldots$$

Что произойдет, если обводить «треугольные» числа

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5,\ldots?$$

Ответы

Конечно, для 6-этажной пирамиды моей дочке потребовалось n^3 кубиков.

Да, при продолжении верхней строки мы получим все последовательные кубы в нижней (третьей) строке. Это совсем нетрудно доказать, записав последовательности чисел в общем виде:

$$\begin{array}{lllll} \ldots\ 3n-1 & & \textcircled{3n}\ 3n+1 & 3n+2 & 3n+3 \\ \quad 3n^2 & & 3n^2+3n+1 & \boxed{3(n+1)^2} & \\ n^3 & & \quad \boxed{(n+1)^3} & & \end{array}$$

Несколько сложнее доказать, что и правило для k-й степени работает при всех k. Мы опубликуем лучшее из присланных доказательств.

Треугольные числа

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5$$

волшебное преобразование Месснера превращает (конечно!) в факториалы:

$$1,\ 1\cdot2,\ 1\cdot2\cdot3,\ 1\cdot2\cdot3\cdot4,$$

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5,\ \ldots$$

Публикацию подготовил
В. Дубровский

Р-значит ракета

Итоги конкурса «KQ-91»

Осенью прошлого года журнал «Квант» стал инициатором проведения советско-американского конкурса юных любителей астрономии и космонавтики. Соучредителями конкурса стали Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз», журнал «Quantum» (СССР — США) и организация International Educational Network (США). Позднее к ним присоединилась газета «Пионерская правда».

Конкурс прошел в три тура, первые два из которых были заочными, а последний — очным. К сожалению, учредители не учли сегодняшний уровень работы подразделений связи: не только журнал поступал к читателям с 2—3-месячным опозданием, но и некоторые письма (даже из европейской части СССР), отправленные в срок, приходили в редакцию спустя два месяца после подведения итогов. Из-за этого многие ребята, правильно решившие задачи второго тура, не смогли принять участия в третьем, который проходил в апреле в Москве.

Сегодня мы публикуем список участников конкурса, показавших лучшие результаты во втором и третьем турах. Бо́льшая часть участников, указанных в списке, награждена путевками в международные космические школы, которые проводятся в июле под Туапсе и Нью-Йорком. Остальных редакция премирует подпиской на журнал «Квант» на 1992 год. В одном из ближайших номеров мы расскажем о решениях задач конкурса и о космических школах.

А. Акиншин (Новороссийск), А. Бакулев (Ленинград), Е. Бобонец (п. Зеленодольск Днепропетровской обл.), А. Бородин (Донецк), С. Борщев (Алма-Ата), А. Бочаров (Воронеж), С. Быстров (Кимры), А. Ведищев (Верхняя Солда), А. Войченко (Киев), Д. Волошко (Красноярск), С. Вурдов (Красноярск), В. Глазков (Коломна), Е. Ежкова (Балашиха), Р. Еникопопов (Москва), Д. Жалковский (Донецк), А. Ильин (Магнитогорск), Р. Капустий (Рава-Русская), И. Коробов (Москва), Л. Коф (Барнаул), И. Кувшинцева (п. Чудово Новгородской обл.), С. Любко (Киев), Е. Медведик (Пенза), М. Митина (Ленинград), К. Петухов (Старый Оскол), Г. Пушкарева (Москва), Т. Рашба (Махачкала), А. Савин (Карачев), П. Салтыков (Конотоп), А. Сипачев (Москва), А. Соболь (Москва), И. Сперанский (Донецк), И. Тараскин (Ужгород), А. Таланкина (Верхний Тагил), В. Федотов (Москва), В. Фомин (Таллинн), А. Шабашев (Самара), Е. Шевелева (Витебск), Н. Шпер (Москва), О. Шпырко (Киев), Т. Шутенко (Мариуполь), А. Щербаков (Казань), Р. Якупов (Кузнецовск).

И напоследок — о наших планах. Редакция намерена продолжить серию конкурсов и международных школ (ранее мы уже проводили советско-американские физико-математические школы). С каким уклоном они будут — космическим, физико-математическим или компьютерным — покажет жизнь. А может, все дисциплины будут представлены вместе. В любом случае, мы советуем нашим читателям наряду с изучением точных наук уделять внимание и иностранным языкам. Тем более, что в жизни это наверняка пригодится.

Итак, до следующего конкурса!

«Космическая» стипендия

В марте нынешнего года Президиумом Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества «Союз» принято постановление об учреждении стипендий ВАКО «Союз» для одаренных учащихся общеобразовательных и специализированных школ, ПТУ и лицеев.

Стипендия ВАКО «Союз» учреждена в целях морального и материального стимулирования учебного и творческого труда учащихся.

Стипендия (размером в 70 рублей) назначается решением Президиума ВАКО «Союз» по представлению региональных отделений или первичных организаций ВАКО либо других работающих с одаренной молодежью организаций.

На стипендию представляются кандидатуры учащихся, имеющих оценки «хорошо» и «отлично», активно участвующих в творческой технической деятельности в кружках, клубах или любых других аналогичных учреждениях, занимающихся пропагандой космической техники и исследований космоса среди подростков.

Стипендия устанавливается ВАКО на год, с первого апреля каждого года. Всего 100 стипендий.

Стипендиаты получают специальные дипломы и письма-рекомендации от ВАКО «Союз» для поступления в технические вузы.

Числовой тест

По многочисленным просьбам читателей публикуем числовой тест. Мы взяли его из книги английского психолога Г. Айзенка «Проверьте свои способности» (М.; Мир, 1972). Один из его тестов мы приводили в нашем журнале в девятом номере за 1989 год. Числовой тест позволяет вычислить ваш «коэффициент интеллектуальности» по следующему правилу: если верно выполнены 7 заданий, КИ=90, дальше за каждые 4 задания вы получаете еще по 10 очков. На решение теста дается 30 минут.

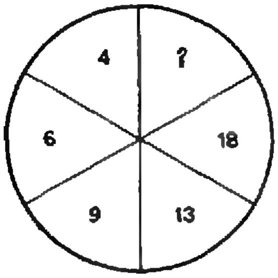
Не пугайтесь, если вы решили правильно лишь меньшую часть заданий: 100 очков — нормальный результат, 125 — хороший, а уж больше 130 — замечательно!

Желаем удачи!

1. Продолжите числовой ряд.

18 20 24 32 ?

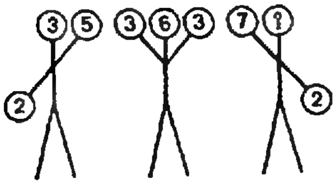
2. Вставьте недостающее число.



3. Продолжите числовой ряд.

212 179 146 113 ?

4. Вставьте недостающее число.



5. Продолжите числовой ряд.

6 8 10 11 14 14 ?

6. Вставьте пропущенное число.

17 (112) 39
28 ( ) 49

7. Вставьте недостающее число.

3 9 3
5 7 1
7 1 ?

8. Продолжите ряд чисел.

7 13 24 45 ?

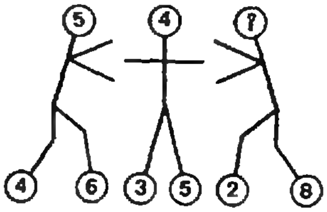
9. Вставьте пропущенное число.

234 (333) 567
345 ( ) 678

10. Вставьте пропущенное число.

4 5 7 11 19 ?

11. Вставьте недостающее число.



12. Продолжите числовой ряд.

6 7 9 13 21 ?

13. Вставьте недостающее число.

4 8 6
6 2 4
8 6 ?

14. Продолжите числовой ряд.

64 48 40 36 34

15. Вставьте недостающее число.

2	6
54	18

?	9
81	27

16. Вставьте пропущенное число.

718 (26) 582
474 ( ) 226

17. Продолжите числовой ряд.

15 13 12 11 9 9 ?

18. Вставьте недостающее число.

9 4 1
6 6 2
1 9 ?

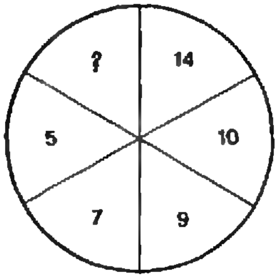
19. Вставьте пропущенное число.

11 12 14 ? 26 42

20. Вставьте недостающее число.

8 5 2
4 2 0
9 6 ?

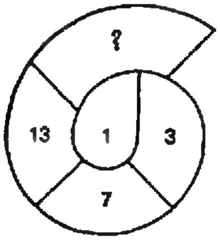
21. Вставьте пропущенное число.



22. Вставьте пропущенное число.

341 (250) 466
282 ( ) 398

23. Вставьте пропущенное число.



24. Вставьте пропущенное число.

12 (336) 14
15 ( ) 16

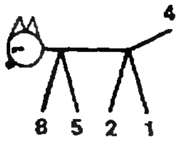
25. Вставьте недостающее число.

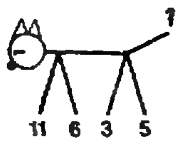
4 7 6
8 4 8
6 5 ?

26. Продолжите числовой ряд.

7 14 10 12 14 9 ?

27. Вставьте недостающее число.





28. Вставьте пропущенное число.

17 (102) 12
14 ( ) 11

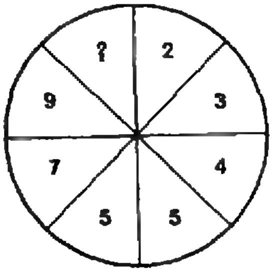
29. Продолжите числовой ряд.

172 84 40 18 ?

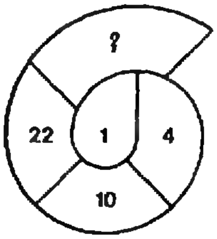
30. Продолжите числовой ряд.

1 5 13 29 ?

31. Вставьте недостающее число.



32. Вставьте недостающее число.



33. Продолжите числовой ряд.

0 3 8 15 ?

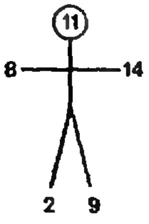
34. Вставьте пропущенное число.

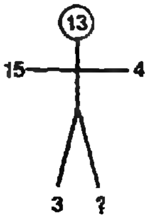
1 3 2 ? 3 7

35. Вставьте пропущенное число.

447 (366) 264
262 ( ) 521

36. Вставьте недостающее число.

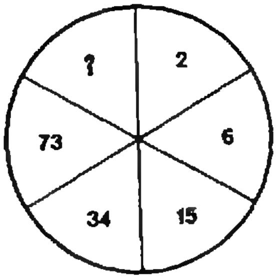




37. Продолжите числовой ряд.

4 7 9 11 14 15 19 ?

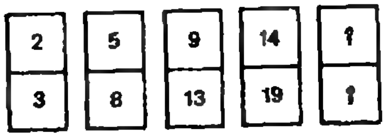
38. Вставьте недостающее число.



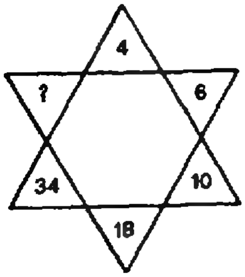
39. Вставьте недостающее число.

3 7 16
6 13 28
9 19 ?

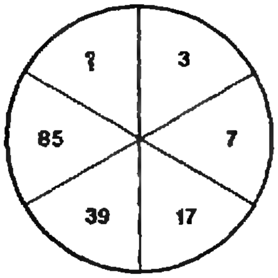
40. Вставьте недостающие числа.


2
3
5
8
9
13
14
19
?
?

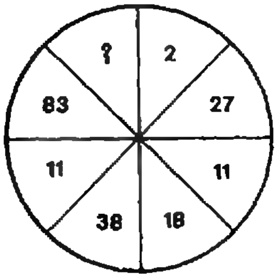
41. Вставьте пропущенное число.



42. Вставьте пропущенное число.



43. Вставьте недостающее число.


?
2
83
27
11
11
38
18

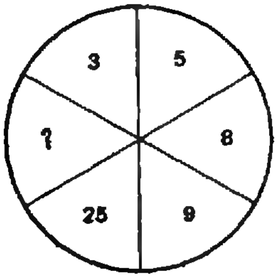
44. Вставьте пропущенное число.

643 (111) 421
269 ( ) 491

45. Продолжите числовой ряд.

857 969 745 1193 ?

46. Вставьте недостающее число.



47. Вставьте недостающие числа.

9 (45) 81
8 (36) 64
10 ( ) ?

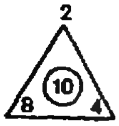
48. Продолжите числовой ряд.

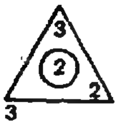
7 19 37 61 ?

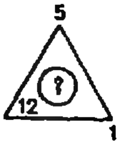
49. Продолжите числовой ряд.

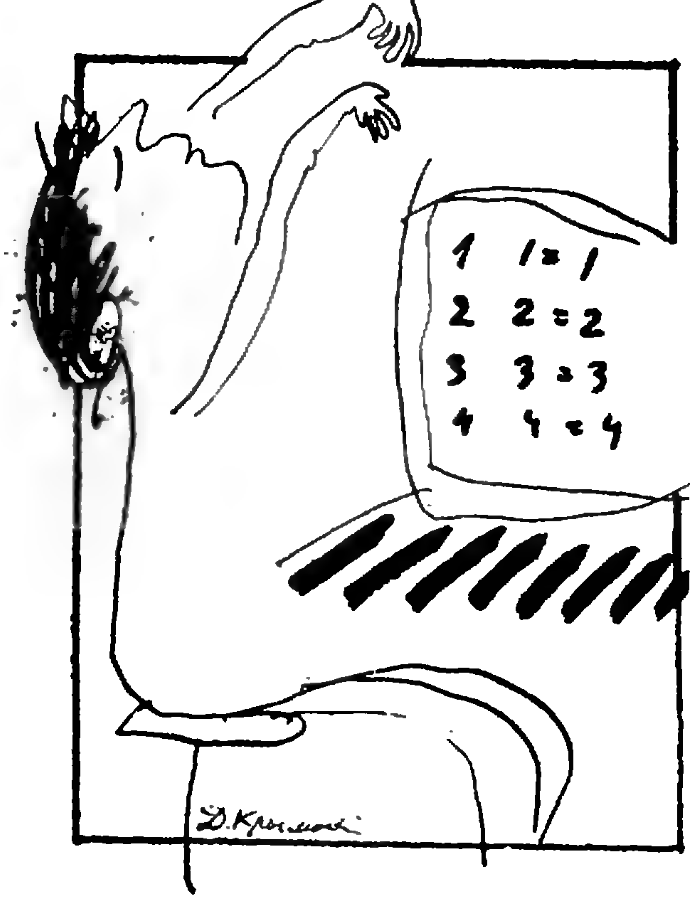
5 41 149 329 ?

50. Вставьте пропущенное число.









Информатика и программирование

Алгоритмика простоты

Числовые «атомы»

Б. ТАРАСЕНКО

> *Нелегкий вопрос-то,*
> *Но верь одному:*
> *Все сложно и просто,*
> *Считай, по уму!*

Простые числа можно назвать «атомами числовой Вселенной». Поэтому коль скоро кто-то начал «коллекционировать простые», столь же быстро он подходит к проблеме разложения натуральных чисел на простые. При наличии программы № 1 из предыдущего номера «Кванта» задача разрешается незамедлительно.

Если исследуемое число — четное, то сначала надо выделить из него максимальную степень двойки путем последовательного деления на два. Это легко сделать на калькуляторе любого типа. Теперь задача свелась к разложению на множители нечетного числа. Необходимый нам инструмент получится, если в программе-прототипе заменить команды 24—27 безусловным переходом на начало программы, а на шаге 16 заменить адресную часть команды условного перехода с 24 на 23.

Работая с полученной программой, при считывании очередного сомножителя каждый раз придется вручную выполнять три дополнительные клавишные команды. Это, безусловно, неудобно. Положительной стороной «медали» является почти предельная кратность основного текста новой программы, а также легкость ее получения из прототипа. У нас еще будут программные анализаторы простоты с улучшенным сервисом, но более объемные. Ничто даром не дается, в том числе и дополнительные удобства в работе.

Программа № 2, как и предыдущая, публикуется в таком виде, в каком ее, с нашей точки зрения, можно давать любому подготовленному пользователю без дополнительных пояснений.

Программа 2. Анализатор делителей нечетных чисел

Пригодны все ПМК от Б3-34 до МК-61. Переменные и используемые регистры: Д=Рг5 — текущий нечетный делитель; И=Рг6 — стартовое или очередное нечетное испытуемое число; ЧАСТН=Рг9=И/Д — частное от деления И на Д (сначала действительное число, а затем его целая часть).

Описание алгоритма

Задать начальное И. Для последовательных нечетных Д, начиная с Д=3 и пока ЧАСТН>Д, вычислять ЧАСТН=И/Д, затем К — целую часть И/Д и остаток ОСТ=И−К×Д. В случае ОСТ=0 считать Д (это очередной простой делитель исследуемого числа), задать новИ=И/Д и перейти к исследованию этого И.

Текст программы с пошаговыми комментариями

```
00     X→П    6   46   /+   Занесение в Рг6 стартового И из РгX
01     1          01   /+   Константа 1
02     X→П    5   45   /+   Занесение 1 в Рг5, подготовка счетчика Д
03   К П→X    5   Г5   /+   Д:=Д+1, начальная фаза работы счетчика Д
04   К П→X    5   Г5   /+   Д:=Д+1; результат: новД=старД+2
05     П→X    6   66   /+   Вызов И из Рг6 в РгX
06     П→X    5   65   /+   Вызов Д в РгX; И перемещается в РгY
07     ÷          13   /+   ЧАСТН = И/Д
08     X→П    9   49   /+   Засылка ЧАСТН в Рг9
09   К П→X    9   Г9   /+   К = целая часть от ЧАСТН
10     П→X    6   66   /+   Вызов И в РгX
11     П→X    9   69   /+   Вызов К в РгX; И перемещается в РгY
12     П→X    5   65   /+   Вызов Д в РгX; РгY = К; РгZ = И
13     ×          12   /+   Д × К
14     —          11   /+   ОСТ = И 8 К × Д, остаток от деления
15   F X≠0        57   /+   ОСТ ≠ 0?
16     23         23   /+   НЕТ (т. е. ОСТ = 0), переход на шаг 23
17     П→X    9   69   /+   ДА (т. е. ОСТ ≠ 0), вызов целого ЧАСТН
18     П→X    5   65   /+   Вызов Д из Рг5 в РгX
19     —          11   /+   РгX = ЧАСТ — Д
20   F X<0        5С   /+   ЧАСТН — Д < 0?
21     03         03   /+   НЕТ, переход на шаг 03 к новому значению Д
22     П→X    6   66   /+   ДА (множество Д исчерпано), вызов И
23     С/П        50   /+   Стоп-индикация И или ОСТ (если ОСТ = 0)
24     БП         51   /+   Безусловный переход
25     00         01   /+   на шаг 00
```

Если ОСТ≠0 для всех проверяемых Д, то само испытуемое число — простое, разложение закончено.

Оценка быстродействия программы: у числа 11111 делитель 47 обнаружен за 2 минуты, у числа 10001 делитель 73 — за 3 минуты 20 секунд.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать начальное нечетное целое И и нажать клавишу С/П, начнется счет; после останова счета если ПМК остановился при ненулевом числе на индикаторе, то последнее испытуемое число — простое, разложение закончено; если на индикаторе 0 (обнаружен простой делитель), то выполнить вручную

П→X 6

П→X 5

и считать число с индикатора (это очередной простой делитель исследуемого числа), затем нажать клавишу ÷ и если на индикаторе 3, то это — последний простой делитель; если на индикаторе не 3, то нажать клавишу С/П, после чего поиск простых делителей возобновится.

Новый инструмент обычно испытывают на достойном материале. Мы взяли степени двойки плюс и минус единица, числа Фибоначчи, репьюниты (числа, составленные только из единиц, см. «Квант» № 8 за 1989 год), а также числа, составленные из двух единиц и нескольких разделяющих их нулей. «Протоколы испытаний» приводятся ниже. Мы не будем их комментировать. Уверены, что читатели разберутся во всем сами.

2^n+1

n	разложение
1	3=3
2	5=5
3	9=3 × 3
4	17=17
5	33=3 × 11
6	65=5 × 13
7	129=3 × 43
8	257=257
9	513=3 × 3 × 3 × 19
10	1025=5 × 5 × 41
11	2049=3 × 683
12	4097=17× 241

2^n-1

n	разложение
1	1=1
2	3=3
3	7=7
4	15=3×5
5	31=31
6	63=3×3×7
7	127=127
8	255=3×5×17
9	511=7×73
10	1023=3×11×31
11	2047=23×89
12	4095=3×3×5×7×13

Числа Фибоначчи

n	разложение
1	1=1
2	1=1
3	2=2
4	3=3
5	5=5
6	8=2×2×2
7	13=13
8	21=3× 7
9	34=2×17
10	55=5×11
11	89=89
12	144=2×2×2×2×3×3

$(10^n-1):9$

n	разложение
1	1=1
2	11=11
3	111=3×37
4	1111=11×101
5	11111=41×271
6	3×7×11×13×37
7	239×4649
8	11×73×101×137
9	3×3×37×333667
10	11×41×271×9091
11	21649×513239
12	3×7×11×13×37×101×9901

$10^{n-1}+1 (n>1)$

n	разложение
	1=1
2	11=11
3	101=101
4	1001=7×11×13
5	73×137
6	11×9091
7	101×9901
8	11×909091
9	17×5882353
10	7×11×13×19×52579
11	101×3541×27961
12	11×11×23×4093×8779

Внутри каждой последовательности между порядковыми номерами и разложением чисел на простые сомножители просматриваются четкие связи, исследование которых мы предоставляем читателям и до следующего выпуска нашей серии снова оставляем всех любителей математики наедине с ручным персональным компьютером-калькулятором и этой программой.

Дорогой читатель!

Начинается подписка на 1992 год.
Несмотря на все увеличивающиеся трудности,
связанные с подготовкой журнала, а также с возрастающей стоимостью бумаги,
печати и распространения изданий,
редакция намерена сохранить лицо и объем журнала «Квант».
Журнал «Квант» не поступает в розницу,
поэтому советуем не откладывать подписку на него.
Стоимость одного номера 1 р. 10 к., периодичность журнала — 12 номеров в год.
Выписать его можно не обязательно на год,
а на любой срок и с любого месяца.
Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати»,
на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

„Квант" улыбается

Пространство

Однажды Вернер Гейзенберг сделал весьма характерное замечание. Как-то во время прогулки речь зашла о пространстве. Я только что прочитал книгу Вейля «Пространство, время, материя» и под ее влиянием гордо заявил, что пространство — это просто поле линейных операций.

— Чушь,— ответил Гейзенберг,— пространство голубое и по нему летают птицы.

Феликс Блох

(Physics Today, 1976, 29 (12) 27)

* * *

О Филиппе Франке рассказывают такую историю. Однажды на первой лекции по философии науки он обратился к присутствующим со следующими словами: «Первый вопрос, который мы рассмотрим, касается пространства и времени. В какой аудитории мы будем заниматься и по каким дням?».

Доказательство по индукции

Профессор Нернст любил пересыпать свои лекции забавными историями, анекдотами и шутками. Нам, студентам, это очень нравилось, и я помню, что даже его помощник, заменяя профессора на лекциях, говорил: «Здесь профессор Нернст рассказывает такую-то историю».

Обсуждая первый и второй законы термодинамики, Нернст обычно говорил: «Как вы помните, **первый** фундаментальный закон термодинамики был сформулирован и теоретически обоснован **тремя** физиками — Робертом Майером, Джеймсом Прескотом Джоулем и Германом фон Гельмгольцем; **второй** закон термодинамики был сформулирован **двумя** великими физиками — Рудольфом Клаузиусом и Вильямом Томсоном; **третий** закон я открыл самостоятельно. Это доказывает, что четвертого фундаментального закона термодинамики быть не может».

Эдгар В. Кучер

(Из книги "More Random Walks in Science", 1982, London, Institute of Physics)

Паули в раю

Вольфганг Паули славился способностью мгновенно проникать в суть теоретических построений своих коллег и находить в них ошибки и неясности. Неудивительно, что господь с нетерпением поджидал его в раю, куда Паули попал в 1958 г.

— Полагаю,— сказал господь,— в физике многое так и осталось непонятным для вас и вы непрочь узнать истину.

— Да, создатель,— ответил Паули.— Честно говоря, мне безумно надоели бесконечные заблуждения моих коллег. Меня, например, всю жизнь волновало, почему масса протона ровно в 1836,11 раз больше массы электрона, а заряды у них одинаковые. Откуда берется такое нелепое число? Наверняка этому есть какое-то объяснение. Однако, все теории, посвященные этой проблеме, не стоили и ломаного гроша.

— Ну что ж, вот объяснение, изложенное на привычном, вам языке квантовой механики XX века,— сказал господь и протянул Паули пачку исписанных листов.

Тот жадно пробежал написанное, заглянул на первую страницу, потом на четвертую, и со вздохом вернул пачку:

— О боже, опять не то!

(Из книги А. Азимова «Сокровищница юмора», London, Woburn Press, 1971)

* * *

Работать с В. Паули было одно удовольствие. Ему можно было задать любой вопрос, не опасаясь, что он покажется глупым, потому что с его точки зрения все вопросы были глупыми.

(В. Вайскопф, American Journal of Physics, 1977, 45, 422) Переводы *О. Мацарской*

Фразы

Студенту-альпинисту Н. покорилась высота ВС.

* * *

Многие потоки информации впадают в реки забвения.

* * *

Какие могут быть счеты между компьютерами?

* * *

Самое приятное в доказательстве было то, что оно от противного.

* * *

Чем мельче истина, тем больше желающих ее доказать.

* * *

Сколько заблуждений приходится на каждую аксиому!

Е. Лапин

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

В ЗШ 5 отделений: математическое физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 9—10 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно - исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Заявление необходимо оформить по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября.*

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Обучение в течение одного года на одном отделении стоит 5 рублей. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для школьников, обучающихся в школах-интернатах, для детей-сирот и детей из многодетных семей (пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Оплату следует производить почтовым переводом на р/счет № 000141013 Советского отделения Сибирского коммерческого банка г. Новосибирска. В графе «вид платежа» напишите: «за обучение в ЗШ при НГУ». Квитанцию об оплате *вклейте в тетрадь с первым заданием.* Тетради без квитанции проверяться и возвращаться не будут.

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

В задании имеются задачи различной трудности. Поэтому для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну-две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить.

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте величину отношения полезной энергии, пошедшей на доведение до кипения воды в электрическом чайнике или в кастрюле, нагреваемой на электроплитке, к израсходованной при этом электрической энергии. Электрические параметры чайника или плитки указаны на них, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг·К).

Теоретические задачи

9 класс

1. Имея в розетке напряжение 220 В, хотят использовать для освещения электрическую лампочку, рассчитанную на напряжение 110 В, впаяв последовательно с лампочкой резистор. Во сколько раз сопротивление этого резистора должно превышать сопротивление горящей лампочки, чтобы она светила своим нормальным накалом?

2. Подвижная вертикальная перегородка образует в прямоугольном сосуде два прямоугольных отсека, в которых находится вода. Перегородка не пропускает воду из отсека в отсек. В начальный момент объем воды в каждом отсеке V. Какой объем воды нужно долить в правый отсек, чтобы расстояние между перегородкой и левой стенкой уменьшилось в 2 раза?

3. Человек держит один край длинной доски, второй ее край лежит на круглой бочке (рис. 1). Толкая доску, человек идет к бочке. Какое расстояние он пройдет, прежде чем приблизится к ней вплотную? Доска параллельна полу. Проскальзывание между доской и бочкой, а также между бочкой и полом отсутствует. Длина доски l.

4. Шар лежит на дне бассейна. Когда вода в бассейне достигает уровня, на котором находится центр шара, он давит на дно в 1,5 раза слабее, чем в момент, когда воды в бассейне не было. Определите плотность шара.

10 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Поезд двигался от станции сначала с ускорением a, затем, после изменения тяги, он стал двигаться с отрицательным ускорением $-a$. Через время τ после начала движения поезд вернулся на станцию. Определите максимальное расстояние, на которое поезд удалялся от станции.

3. Вертикально взлетающий снаряд в момент остановки разрывается на множество осколков. Скорости осколков при взрыве равны u, ускорение свободного падения g. Определите промежуток времени, в течение которого осколки будут поражать землю. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

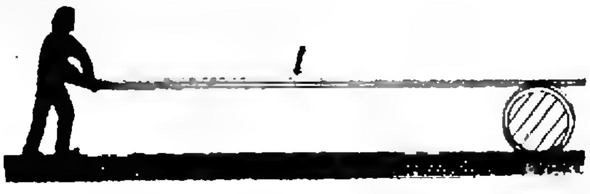


Рис. 1.

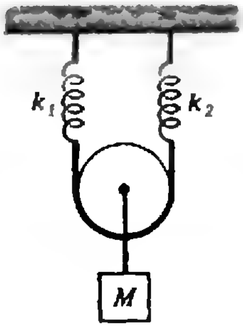


Рис. 2.

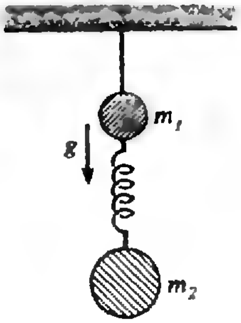


Рис. 3.

4. На неподвижный шар налетает другой шар. Найдите отношение масс шаров, если после абсолютно упругого удара они стали двигаться с одинаковыми по величине скоростями под углами α и β к направлению первоначального движения налетевшего шара.

5. Подвижный блок висит на нити, концы которой прикреплены к потолку с помощью двух невесомых пружин (рис. 2). Пружины параллельны друг другу, их жесткости равны k_1 и k_2. К блоку подвешивают тело массой M. Найдите величину смещения положения равновесия блока.

6. К потолку на невесомой нити подвешен шарик массой m_1 (рис. 3). К этому шарику на пружинке прикреплен другой шарик массой m_2. Найдите их ускорения в первый момент после того, как нить пережгут.

11 класс

1. Решите задачу 2 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. В трубке, один конец которой запаян, а другой закрыт поршнем, имеются два отсека объемом V каждый. Отсеки разделены закрепленной перегородкой с отверстием, закрытым пробкой, которая вылетает при перепаде давлений Δp. В обоих отсеках находится воздух под давлением p_0. Поршень медленно, не меняя температуру газа, выдвигают и сразу после вылета пробки останавливают. Найдите давление в трубке после вылета пробки, когда прекратится движение воздуха.

4. Тело с зарядом $-q$ и массой m располагают на расстоянии L от центра равномерно заряженной сферы, радиус которой R и заряд Q $(L>R)$, и отпускают. Определите время пролета тела через сферу, если оно не теряет энергии, пролетая сквозь стенки сферы.

5. Частица с электрическим зарядом e и массой m влетает через небольшое отверстие в пластине вертикально расположенного плоского конденсатора со скоростью v, перпендикулярной пластине. Электрическое поле конденсатора возвращает частицу на пластину, но из-за наличия ускорения свободного падения g она попадает на пластину ниже входного отверстия на величину l. Определите напряженность электрического поля конденсатора.

6. В озере очень медленно всплывает пузы-

рек воздуха. У дна он имел радиус $R_1=1{,}5$ мм, у поверхности воды — $R_2=1{,}8$ мм. Определите глубину озера, пренебрегая изменением температуры воды с глубиной. Все недостающие данные можно взять из школьного учебника по физике.

Первое задание по математике

9 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n число $n/3+n^2/2+n^3/6$ — натуральное.

2. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько надо взять частей каждого сплава, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

3. Решите неравенство

$$|x-1|+|x+1|<4.$$

4. Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — гипотенуза, h — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Докажите, что треугольник со сторонами h, $c+h$, $a+b$ является прямоугольным.

5. Докажите, что сумма расстояний от какой-либо точки, взятой внутри правильного треугольника, до сторон этого треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки.

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.
2. Решите задачу 2 для 9 класса.
3. Решите неравенство

$$\sqrt{x}\geqslant\sqrt{5}\left(x-\frac{2}{5}\right).$$

4. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Вычислите длину биссектрисы прямого угла.

5. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=3$ см, $BC=7$ см и длина медианы BM равна 4 см.

11 класс

1. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.
2. Решите задачу 3 для 10 класса.
3. Решите уравнение

$$3\cdot16^x+37\cdot36^x=26\cdot81^x.$$

4. Решите задачу 4 для 10 класса.
5. Решите задачу 5 для 10 класса.

Зимняя математико-физико-компьютерная школа в Нижнем Тагиле

Зима на Урале всегда холодная, а в этом году в конце января морозы были особенно сильны, да еще и с ветром. Но это не помешало сотне школьников Урала и их гостям из других городов Союза собраться в старинном русском мастеровом городе Нижнем Тагиле на первую межрегиональную математико-физико-компьютерную школу.

Ребята прослушали курсы лекций по математической лингвистике, проективной геометрии, топологии и другим современным математическим наукам, работали на персональных компьютерах, изучали физику с помощью новейших методик.

Конечно, жаль, что лыжникам не удалось посоревноваться в скорости бега по склонам Уральских гор, но математической олимпиаде и математическому бою между командами преподавателей и школьников мороз помешать был не в силах. На олимпиаде лучшие результаты показали Е. Брюхов, Н. Бродский (оба из Челябинска), С. Климов (Ижевск), С. Гетун (Киев). Математический бой с небольшим преимуществом выиграла команда преподавателей.

Успешному проведению школы организаторы во многом обязаны спонсорам: производственному объединению «Уралвагонзавод», пединституту, филиалу Уральского политехнического института, предоставившему компьютерные классы, и другим организациям.

Организаторы и участники школы разъезжались полные надежд, что эта первая школа не будет последней.

Б. Гельруд

Всесоюзная статистическая ассоциация

Положение со статистическими методами сейчас противоречивое. С одной стороны, в области теории статистических методов СССР всегда был на одном из первых мест в мире. С другой стороны, по масштабам внедрения статистических методов СССР отстает от США и Японии по крайней мере на один-два порядка, хотя примеров успешного применения этих методов на советских предприятиях достаточно.

Основная причина слабого внедрения статистических методов в СССР — отсутствие заинтересованности в них в условиях административно-командной системы. Почему в промышленно развитых странах применяют статистику? Вот мнение Каору Исикава: «Методы статистики — именно то средство, которое необходимо изучить, чтобы внедрить управление качеством. Они — наиболее важная составная часть комплексной системы всеобщего управления качеством на фирме. В японских корпорациях все от председателя Совета Директоров до рядового рабочего в цехе обязаны знать хотя бы основы статистических методов». В СССР о статистических методах знают пока лишь небольшие группы специалистов. Обычно со словом «статистика» ассоциируется Госкомстат, который на самом деле следовало бы назвать Госкомитетом по учету.

Но страна идет к рынку. Скоро потребность в применении современных статистических методов в СССР будет не меньше, чем в США и Японии. Значит, нужны широкая пропаганда, обучение в школах, вузах, институтах повышения квалификации, разработка и внедрение пакетов программ по современным статистическим методам.

Кому это делать? В стране имеется несколько тысяч специалистов, разбитых на мелкие группы, плохо связанных между собой, причем большая часть таких специалистов «скрывается» под другими названиями. В США специалистов по статистическим методам больше чем математиков, статистика как наука стоит в одном ряду с математикой, физикой, биологией. А у нас есть лишь дисциплина «статистика» в экономике и «математическая статистика» как часть математики. Статистические методы в промышленности, медицине используются, но как бы не существуют. Отсутствуют учебные курсы, в перечне ВАК нет «статистических наук», крайне мало журналов, трудно выпускать книги, находить финансирование для научно-исследовательских работ, отсутствует координация, система контроля за качеством работ по статистике, сертификация пакетов статистических программ и т. д.

Очевидно, необходимы специальные усилия по организации статистики и прежде всего статистических методов как единой области научной и практической деятельности, а для этого — объединение специалистов по статистике в рамках общественной организации. (Ясно, что еще одна бюрократическая структура типа Госкомитета по статистическим методам пользы не принесет.) Эту организацию предлагалось назвать Советским обществом статистиков, Статистической Федерацией СССР, Ассоциацией советских статистиков. Учредительный съезд, прошедший в октябре 1990 г. в Москве, принял название «Всесоюзная статистическая ассоциация».

В Уставе Ассоциации подчеркивается отказ от принуждения, рекомендательный характер решений органов Ассоциации, свобода формирования первичных и других организаций. Много внимания уделено обеспечению хозрасчетной деятельности, в частности, в рамках временных коллективов.

Кого объединила Ассоциация? Одна из двух основных групп — Центр статистических методов и информатики, неформальный коллектив, начавший свою деятельность как Рабочая группа по анализу стандартов по прикладной статистике и другим статистическим методам. В результате этого анализа 24 из 31 государственных стандартов по статистическим методам были отменены как содержащие грубые ошибки, устаревшие, излишне регламентирующие труд специалистов. С 1989 г. Центр разработал ряд диалоговых систем и пакетов по современным статистическим методам для персональных IBM-совместимых компьютеров: СРСМ, ЛИСАТИС, АРМ-АСПЕКТ, СПК, АТСТАТ-ПРП, КОМПЛАН, СТАТКОН, АВРОРА-РС, ЭКСПЛАН, ПАСЭК, ПЛАН, НАДИС, ДИСПИУС и другие.

С марта 1989 г. Центр статистических методов и информатики начал работу по созданию Всесоюзной статистической организации. В январе 1990 г. была учреждена Московская Статистическая Федерация.

Одновременно организационную работу вела группа преподавателей статистики в экономических вузах и сотрудников Госкомстата СССР по руководством доктора экономических наук В. М. Симчеры. При посредничестве Всесоюзного экономического общества в марте 1990 г. было достигнуто соглашение о создании единой организации при условии независимости входящих в нее секций.

На Учредительской конференции в Московском энергетическом институте в апреле 1990 г. была создана Всесоюзная организация по статистическим методам и их применениям. Она вошла как секция во Всесоюзную статистическую ассоциацию. В Ассоциации есть также секции работников Госкомстата, преподавателей статистики в экономических вузах, специальных статистических работ.

За более подробной информацией можно обращаться по адресу: 125252, Москва, ул. Зорге, 16, Всесоюзный центр статистических методов и информатики, ВСА. Тел.: 943-28-02, телекс: 411055 SNIO SU; факс: 120-13-20.

А. Орлов, вице-президент Всесоюзной статистической ассоциации

Ответы, указания, решения

ловой тест

1. 48. (Сначала прибавить 2, потом 4, затем 8 и наконец 16.)
2. 24. (Числа возрастают на 2, 3, 4, 5, 6 против часовой стрелки.)
3. 80. (Из каждого числа вычитаем 33.)
4. 5. (Числа на поднятых «руках» положительны, а на опущенных — отрицательны, на «голове» дана их алгебраическая сумма: $+7-2=5$.)
5. 18. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа возрастают на 4, в другом ряду — на 3.)
6. 154. (Удвоенная сумма чисел, стоящая вне скобок.)
7. 3. (Полуразность чисел второй и первой колонок.)
8. 86. (Числа удваиваются, а затем из них вычитаются 1, 2, 3, 4.)
9. 333. (Разность чисел, стоящих справа и слева от скобок.)
10. 35. (Числа в ряду возрастают на 1, 2, 4, 8, 16.)
11. 5. (Число на «голове» равно полусумме чисел на «ногах».)
12. 37. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 5.)
13. 7. (Числа в третьей колонке равны полусумме чисел первой и второй колонок.)
14. 33. (Числа в ряду убывают на 16, 8, 4, 2, 1.)
15. 3. (Если двигаться по часовой стрелке, то числа все время возрастают в 3 раза.)
16. 14. (Число в скобках равно сумме чисел вне скобок, деленной на 50.)
17. 6. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа уменьшаются на 3, в другом ряду — на 2.)
18. 4. (Сумма чисел в каждой строке равна 14.)
19. 18. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 10.)
20. 3. (Имеются 3 убывающих ряда чисел. В первой строке числа уменьшаются на 3, во второй строке — на 2, в третьей — на 3.)
21. 18. (Удвоенное число противоположного сектора.)
22. 232. (Удвоенная разность чисел, стоящих справа и слева от скобок.)
23. 21. (Числа возрастают на 2, 4, 6, 8.)
24. 480. (Число в скобках равно удвоенному произведению чисел, стоящих вне скобок.)
25. 2. (В каждой строке третье число равно удвоенной разности первых двух чисел.)
26. 19. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В первом ряду числа возрастают на 3, 4, 5. Во втором ряду числа убывают на 2 и 3.)
27. 3. (Вычесть сумму чисел на второй и четвертой лапах из суммы чисел на первой и третьей лапах. В результате получится число на кончике хвоста.)
28. 77. (Число в скобках равно половине произведения чисел, стоящих вне скобок.)
29. 7. (Каждое последующее число равно половине предыдущего минус 2.)
30. 61. (Каждое последующее число равно сумме предыдущего с удвоенной разностью двух предшествующих. Так, $5-1=4$; $4\cdot2=8$; $5+8=13$ и т. д.)
31. 11. (Удвоить число из противолежащего сектора и прибавить 1.)
32. 46. (Каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 2.)
33. 24. (Числа в ряду возрастают на 3, 5, 7, 9.)
34. 5. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В первом ряду числа увеличиваются на 2. Во втором ряду числа увеличиваются на 1.)
35. 518. (Число в скобках равно удвоенной разности чисел, стоящих вне скобок.)
36. 3. (Вычесть сумму чисел на «ногах» из суммы чисел на «руках». В результате получится число на «голове».)
37. 19. (Имеются два чередующихся ряда чисел. В одном ряду числа увеличиваются на 5; в другом ряду — на 4.)
38. 152. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 2, 3, 4, 6.)
39. 40. (Числа во второй колонке равны удвоенным числам первой колонки плюс 1. Числа в третьей колонке равны удвоенным числам второй колонки плюс 2: $2\cdot19+2=40$.)
40. $\frac{20}{26}$. (Числа в числителях увеличиваются на 3, 4, 5, 6. Числа в знаменателях увеличиваются на 4, 5, 6, 7.)
41. 66. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему минус 2.)
42. 179. (Если двигаться по часовой стрелке, то каждое последующее число равно удвоенному предыдущему плюс 1, 3, 5, 7, 9.)
43. 64. (Возвести в квадрат число из противолежащего сектора.)
44. 111. (Число в скобках равно полуразности чисел, стоящих вне скобок.)
45. 297. (Разность между числами каждый раз удваивается; ее нужно поочередно прибавлять и вычитать из чисел ряда:
$857+112=969$; $969-112\cdot2=745$; $745+112\times2\cdot2=1193$; $1193-112\cdot2\cdot2\cdot2=297$.)
46. 6. (Имеются два чередующихся ряда чисел. Оба представляют собой квадраты чисел плюс постоянная 2:

первый ряд:	0	3	9,
квадраты:	0	9	81,
плюс 2:	2	11	83,
второй ряд:	5	4	и, следовательно, 2,
квадраты:	25	16	и, следовательно, 4,
плюс 2:	27	18	и, следовательно, 6.)

47. 55 и 100. (Число, стоящее справа от скобок, равно квадрату числа, стоящего слева от скобок. Число в скобках равно полусумме чисел вне скобок.)
48. 91. (В приведенном ряду разность между каждым последующим числом и предыдущим

возрастает на 6 и составляет соответственно 12, 18, 24, 30.

49. 581.

(Начнем с ряда чисел:	0	2	4	6,	следовательно, 8
умножим на 3:	0	6	12	18,	следовательно, 24,
возведем в квадрат:	0	36	144	324,	следовательно, 576,
прибавим 5:	5	41	149	329,	следовательно, 581.)

50. 6. (Число внутри кружка равно сумме чисел внутри углов треугольника минус числа, стоящие вне треугольника.)

нт» для младших школьников
«Квант» № 6)

1. 10 ящиков яблок, 12 ящиков груш, 14 коробок вишен и 10 коробок слив.

2. Может, например, в такой позиции, как на рисунке 1.

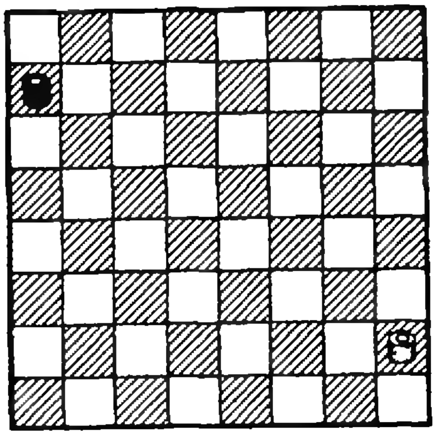


Рис. 1.

3. Имеется два решения (см. рис. 2).

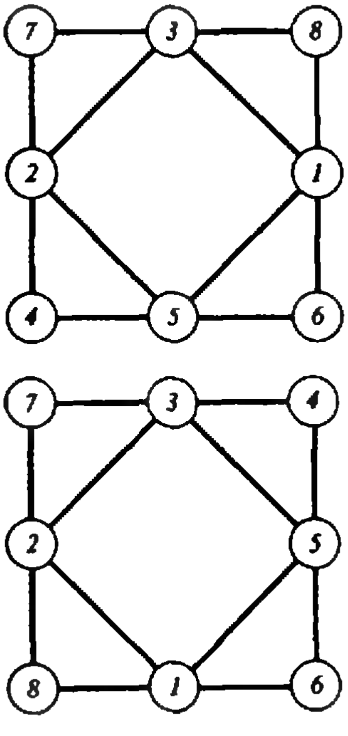


Рис. 2.

4. $14^4=196^2=38416$.

5. Вольтметр покажет 0, так как цепь незамкнута.

урс «Математика 6—8»
«Квант» № 4)

22. См. рис. 1.

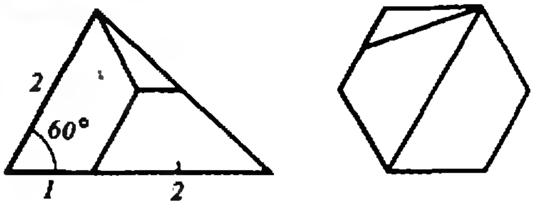


Рис. 1.

23. Выпишем факториалы первых 11 чисел: $1!=1$, $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, $7!=5040$, $8!=40\,320$, $9!=362\,880$, $10!=3\,628\,800$, $11!=39\,916\,800$. Очевидно, что сумма двух семизначных чисел может равняться лишь одному из написанных, а именно $10!=3\,628\,800$. Обозначим искомые числа через x и y, тогда $x+y=3\,628\,800$ и $x-y=k!$. Отсюда $x=(10!+k!)/2$, $y=(10!-k!)/2$. Выпишем значения для x, y и сумм их цифр S_x и S_y при возможных значениях k ($k<10$):

k	x	y	S_x	S_y
2	1814401	1814399	19	35
3	1814403	1814397	21	33
4	1814412	1814388	21	33
5	1814460	1814340	24	21
6	1814760	1814040	27	18
7	1816920	1794240	27	27
8	1834560	1794240	27	27
9	1995840	1632960	36	27

Замечаем, что из возможных значений S_x и S_y только S_x является факториалом, притом в единственном случае $k=5$. Получаем ответ: $x=1814460$, $y=1814340$.

24. Заметим следующий факт: сумма длин большего основания и одной из боковых сторон трапеции больше суммы длин меньшего основания и второй боковой стороны. Докажем этот факт. Обозначим длины оснований через a и b ($a>b$), а длины боковых сторон через c и d ($c\geqslant d$). Проведем отрезок BK параллельно стороне CD (рис. 2), тогда в треугольнике ABK стороны равны: $AB=d$, $BK=c$, $AK=a-b$. Из неравенства треугольника следует, что $AK>BK-AB$, т. е. $a-b>c-d$, или $a+d>b+c$. Так как $c\geqslant d$, то и $a+c>b+d$.

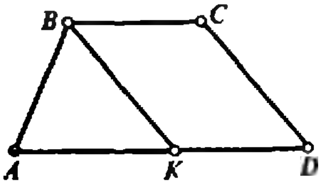


Рис. 2.

Пусть теперь $ABCD$ — трапеция с параллельными сторонами AB и CD и теми же длинами сторон. Тогда, в силу того, что это трапеция, мы имеем $c+a>b+d$ и $c+b>a+d$, но второе условие противоречит ранее выведенному условию $a+d>b+c$. Следовательно, предположение $a>b$ неверно и наша трапеция — параллелограмм.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»
«Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. $\Delta|m\vec{v}|=0$; $|\Delta(m\vec{v})|=2mv_0\sin\alpha$.
2. Изменение импульса воды при повороте объясняется действием силы со стороны трубы. С такой же по величине силой вода действует на трубу в сторону, противоположную изгибу трубы.
3. $v+2u$.
4. В первом случае лодка останется на месте, во втором — станет двигаться в направлении, обратном желаемому.
5. После соскальзывания тела B «горка» A с телом C поедет в противоположном направлении со скоростью, в два раза меньшей скорости тела B. После соскальзывания с движущейся «горки» тело C приобретает скорость бо́льшую, чем тело B. По закону сохранения импульса скорость «горки» должна быть направлена в сторону движения тела B.
6. Начальная скорость камня относительно воды будет меньше при бросании с лодки, поэтому камень полетит не так далеко, как если бы он был брошен с баржи.
7. Общий импульс частей ракеты до взрыва в высшей точке подъема и сразу после него остается постоянным и равным нулю. Векторы импульсов осколков могут в сумме дать нуль только тогда, когда они лежат в одной плоскости.
8. При упругом ударе.
9. Под прямым углом.
10. Аэростат станет опускаться.
11. Так как на стержень в горизонтальном направлении не действуют силы, то его центр тяжести будет двигаться вертикально, а нижний конец стержня сместится в сторону от этой вертикали.
12. Траектории жука и центра обруча будут представлять собой концентрические окружности с центром, совпадающим с неподвижным центром масс системы «жук — обруч».
13. Скорость ракеты будет увеличиваться. Если перейти к системе отсчета, относительно которой ракета в данный момент покоится, то будет ясно, что давление вытекающих газов по-прежнему толкает ракету вперед.
14. Да, если пол не абсолютно гладкий. Тогда, раскачиваясь на стуле, можно создать внешнюю силу за счет трения между стулом и полом.

Микроопыт

Шарик станет летать за счет «реактивного» истечения из него воздуха. При этом величина и направление скорости шарика будут меняться, так как истечение неравномерно.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин, Г. Шиф

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф
Художественный редактор Е. Потапенкова
Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор Л. Сомова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.04.91. Подписано к печати 11.06.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,98.
Тираж 85654 экз. Заказ 698. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

РЕКОРДЫ, РЕКОРДЫ...

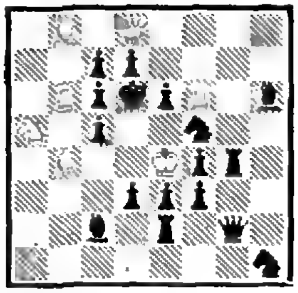
Шахматная почта «Кванта» велика, и всякий раз, когда начинаешь ее анализировать, находится масса интересных идей, предложений, рекордов... Рассмотрим очередную порцию рекордных позиций.

Самый быстрый мат при условии, что обе стороны к этому стремятся и притом совершают наидлиннейшие ходы, придумал Н. Жарков из Ростова. **1. Кf3 Кf6.** По теореме Пифагора ход конем длиннее, чем движение пешки на два поля вперед. **2. Кd4 Кd5 3. Кe6 Кf4 4. К:f8 Кg6 5. Кe6 Кf8 6. К:g7×.** Решение, конечно, допускает различные перестановки ходов.

Если запретить коням ставить мат, то придется проявить больше изобретательности. Вот что предложил Б. Зайцев из Морозовска. **1. Кf3 Кf6 2. Кg5 Кd5 3. К:h7 Кb6 4. К:f8 Л:h2 5. Кe6 Лh8 6. Л:h8×.**

И. Верещагин из Подмосковья тоже поставил самый быстрый мат, но уже при условии, что ходы — наикратчайшие. **1. e3 a6 2. e4 a5 3. Крe2 a4 4. Крe3 a3 5. Крf3 e6 6. Крf4 e5+ 7. Крf5 d6×.** Короли и пешки двигались на одно поле по прямой, короче ходов не бывает. Интересно, могут ли так же быстро получить мат черные?

И. Верещагин прислал нам еще одну занятную позицию.



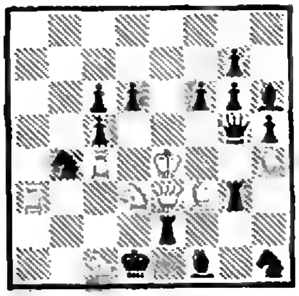
Кто дает больше матов?

Произведем расчет. Кажется, что у белых 4 способа поставить мат (С:c7×, Л:c6×, Кc4×, Кb7×), а у черных — 5 (Кfg3×, Кf2×, Кhg3×, d2×, f2×). Итак, перевес на стороне черных? Отнюдь нет. Если внимательно посмотреть на диаграмму, то можно заметить, что на доске девять черных пешек вместо 8, и стало быть, одну из них следует убрать. При этом какую бы пешку ни снять с доски, возникнет матовая позиция. В результате счет уже оказывается в пользу белых: 5 раз они дают мат и 4 — черные. Все маты легальные.

В. Хуторной из Твери — автор множества оригинальных задач, вот его новое изобретение. Расставьте на доске черные и белые фигуры, как будто бы вы собирались сыграть с кем-то партию. А теперь скажите, сколько существует различных позиций, которые могут предшествовать этой?

Ясно, что белые и черные кони свободно маневрируют по доске (некоторой свободой пользуются и ладьи), а затем благополучно возвращаются домой. Скрупулезный подсчет показывает, что всего существует 22709863 различных позиций, из которых может возникнуть исходное расположение фигур. Не верите — проверьте сами!

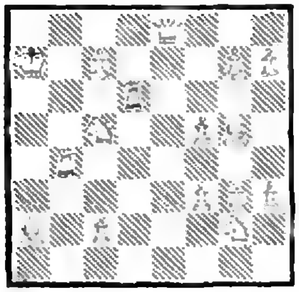
Довольно интересную задачу придумал П. Сотников из Бугульмы.



Обратный мат в 4 хода

Напомним, что такое задание означает, что белые заставляют черных дать мат, хотя те не стремятся к этому. **1. Кb2+ Крe1 2. Кcd3+ К:d3 3. Лa1+ Кc1 4. Сg2.** И что же мы теперь видим? У черных 7 ходов ферзем, 1 — ладьей, 1 — слоном, 1 — конем и 2 — пешками. Всего 12 ходов, и каждый из них матует! Редкий случай цугцванга в задаче на обратный мат.

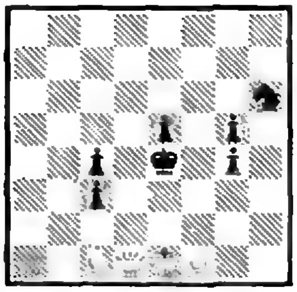
Специально для «Кванта» прислал свою головоломку известный шахматный композитор Р. Тавариани (Тбилиси). Расставить на доске 16 фигур одного цвета (полный комплект) таким образом, чтобы во-первых, они не защищали друг друга, и, во-вторых, 9 пустых полей не были атакованы фигурами.



Данная позиция удовлетворяет обоим требованиям. Не атакованы здесь поля a1, a3, a5, c3, f1, f2, g1, h1, h2. А вот еще одна позиция, придуманная автором: Крh4, Фc8, Лd3, Лe5, Сa4, Сb4, Кb1, Кg1, п. п. a2, b2, f2, f7, g2, g7, h2, h7. Не атакованы поля a1, a7, b6, f1, f4, f6, g6, h1, h6.

Может быть, читателям удастся побить этот рекорд, увеличив число неатакованных полей!?

В свое время мы публиковали на «шахматной страничке» множество задач на тему «все на местах» — в начальной позиции фигуры белых находятся на своих исходных полях. В. Александров из г. Иваново придумал позицию, в которой белые фигуры занимают исходные места не только в начале игры, но и в конце!



Мат в 4 хода

1. Фd7! Угрожает 2. Сg2×. **1...Крf3 2. Фd5+ e4** (2...Крg3 3. Фg2+ Крh4 4. Фh2×) **3. Фd4.** Теперь грозит 4. Фe3, Фf2×. **3...g3 4. Фd1×!**

Е. Гик

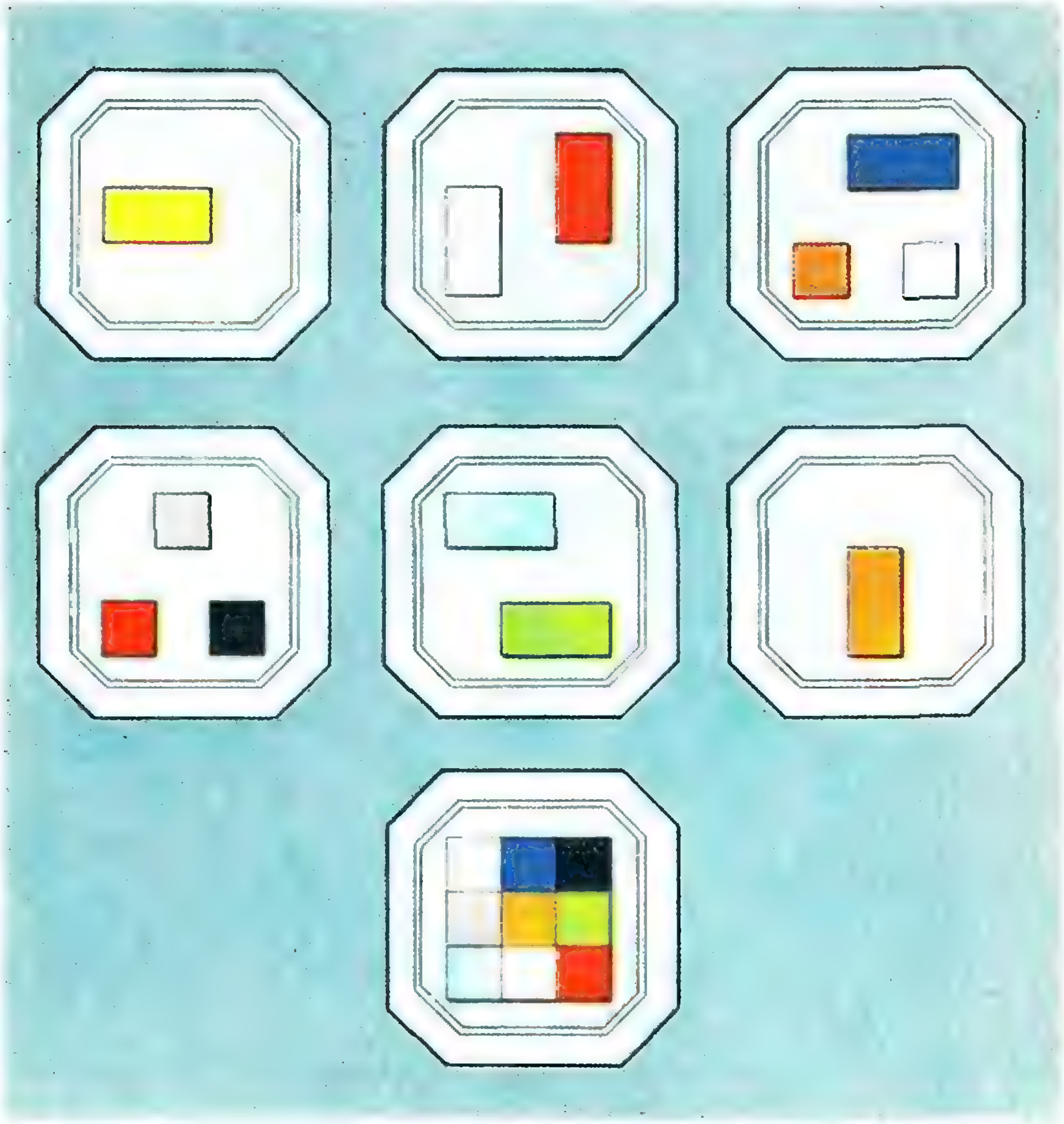
70 коп.
Индекс 70465

В Японии появилась еще одна головоломка. Она состоит из 6 прозрачных пластинок, на которых в разных местах нарисованы цветные полоски (в японском варианте это комплект из 6 розеток для варенья).

Требуется положить розетки друг на друга так, чтобы, посмотрев на стопку сверху, можно было увидеть квадрат, составленный из 9 разноцветных квадратиков.

Головоломка очень трудная, поэтому мы сразу приводим ее решение. Даже глядя на картинку и перекладывая пластинки, нелегко найти правильную последовательность их расположения.

Эту игрушку проще всего сделать из кусочков полиэтиленовой пленки, наклеив на нее в нужных местах полоски цветной бумаги.



НОМЕР
8

Квант

8 1991

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *А. Васильев.* ЭМАП — новое направление в радиоспектроскопии твердых тел
7 *И. Лалаянц, А. Милованова.* Физика против мошенников
14 *В. Матов, Е. Пекарь.* Освещение пространства, конусы и выпуклые множества

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1296—М1300, Ф1303—Ф1307
24 Решения задач М1271—М1275, Ф1283—Ф1287

Информация

31 Экономико-математическая школа при МГУ
48 Вечерняя физическая школа при МГУ

«Квант» для младших школьников

32 Задачи
33 *А. Волков.* Как появилась метрическая система мер
35 **Лаборатория «Кванта»**
Из старых опытов
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

42 *И. Шарыгин.* Откуда берутся задачи?

Р — значит ракета

50 *В. Бурдаков.* Озон, вулканы и... ракеты
54 «Вместе к Марсу!»: национальный этап

Практикум абитуриента

58 *В. Можаев.* Энергия электрического поля

Фантастика

64 *Л. Ташнет.* Практическое изобретение

Игры и головоломки

70 *С. Коновалов.* Игра шакур

Информатика и программирование

74 *Б. Тарасенко.* Алгоритмика простоты. Электронный плакат

Олимпиады

77 XIV Московская экономико-математическая олимпиада
79 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(21, 56, 76)*
Смесь *(49)*
Реклама *(69)*

Наша обложка

1 Компьютерная фотография, полученная из космоса,— космические аппараты позволяют контролировать состояние растительного и животного мира нашей планеты. Это — одна сторона медали. Ее другая сторона — отрицательное воздействие космической техники на природу — тема статьи «Озон, вулканы и... ракеты».
2 Знаменитая туринская плащаница. О том, как был определен ее возраст, читайте на с. 7.
3 Шахматная страничка.
4 Головоломка: двумерный кубик Рубика.

© «Квант», 1991

ЭМАП — НОВОЕ НАПРАВЛЕНИЕ В РАДИОСПЕКТРОСКОПИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Доктор физико-математических наук
А. ВАСИЛЬЕВ

В этой статье речь пойдет о новом подходе к изучению механических свойств веществ, основанном на явлении прямого преобразования электромагнитных волн в звуковые (и наоборот) на поверхности проводника. В рамках этого подхода чисто электромагнитные экспериментальные методы с успехом используются для определения твердости и пластичности металлов, скорости и затухания распространяющихся в них звуковых волн.

В научной литературе это явление во всех его разновидностях, а также связанные с ним измерительные методики получили общее название Электро-Магнитно-Акустического Преобразования, или, сокращенно, ЭМАП.

Электромагнитное возбуждение звука в металлах можно рассматривать в качестве одного из направлений радиоспектроскопии — раздела физики твердого тела, изучающего взаимодействие электромагнитного поля с веществом. В отличие, однако, от традиционных направлений радиоспектроскопии, исследующих поглощение электромагнитной энергии на фиксированных частотах, ЭМАП не связано условиями резонансного взаимодействия и происходит на всех частотах и при любых температурах.

Главная причина того, что прямое преобразование звуковой и электромагнитной энергии в течение долгого времени вообще не рассматривалось, заключается в заведомо низкой эффективности ЭМАП. Действительно, поскольку любое макроскопическое тело, и металл в том числе, электрически нейтрально, электромагнитная волна, на первый взгляд, вообще не может привести вещество в движение. Кроме того, известно, что электромагнитная волна практически полностью отражается от границы проводника (рис. 1). (Вспомните, что отражающим элементом зеркала служит просто металлическая пленка, нанесенная на поверхность стекла.) Наконец, в течение долгого времени не возникало и особой необходимости в разработке ЭМАП — проблему возбуждения звука удовлетворительным образом решали с помощью традиционных контактных преобразователей, и развитие техники эксперимента связывали в первую очередь с их совершенствованием.

Действие контактных преобразователей основано на пьезоэффекте или магнитострикции, т. е. на способности некоторых кристаллов изменять под воздействием электрического или магнитного поля свои размеры и форму. Для генерации звука в твердом теле оказывалось достаточным приклеить кристалл преобразователя к поверхности изучаемого объекта и подать на этот кристалл электромагнитную волну.

Схема стандартного эксперимента

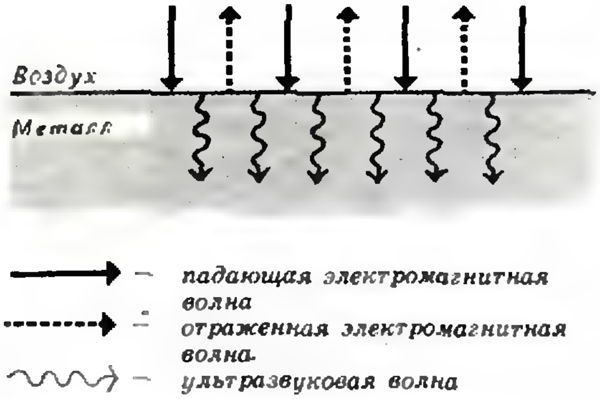

Воздух
Металл
— падающая электромагнитная волна
— отраженная электромагнитная волна
— ультразвуковая волна

Рис. 1. Схема эксперимента по электромагнитному возбуждению звука в металле.

по возбуждению звука в металле, показанная на рисунке 2, включает, таким образом, два дополнительных элемента по сравнению со схемой ЭМАП (см. рис. 1): преобразователь и склейку. Именно в этих дополнительных элементах и заключаются все ограничения контактных методик. Первое из ограничений связано с самими преобразователями. Дело в том, что пьезоэлектрическими или магнитострикционными свойствами обладает ограниченное число материалов, и сохраняют они эти свойства лишь в ограниченном интервале температур. Кроме того, такие преобразователи работают лишь на фиксированных частотах, что резко ограничивает возможности эксперимента. Второе ограничение связано с необходимостью использования склеек. Акустический контакт между преобразователем и образцом создается обычно при комнатной температуре. С изменением температуры на границах образец — склейка и склейка — преобразователь возникают гигантские термические напряжения, обусловленные различиями в коэффициентах теплового расширения всех этих веществ. При измерениях в широких температурных интервалах эти напряжения не только приводят к деформации поверхности образца, но и могут завершиться разрушением самого акустического контакта.

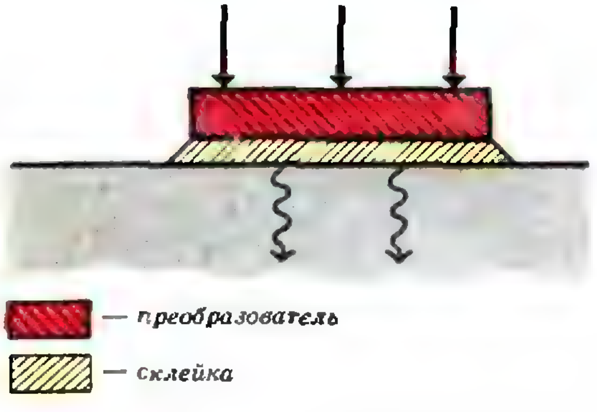


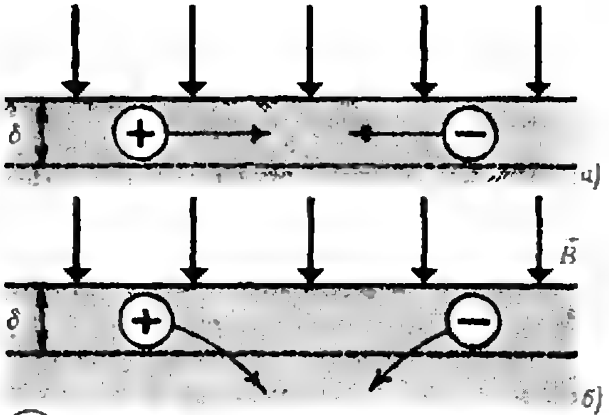
Рис. 2. Схема эксперимента по возбуждению звука в металле с использованием контактного преобразователя.

Все эти, а также многие другие ограничения традиционных методик стимулировали разработку и внедрение бесконтактных методов. Новые методы открыли и новые возможности в проведении акустических измерений.

Однако прежде чем переходить к их описанию, рассмотрим на качественном уровне некоторые из основных взаимодействий, ответственных за ЭМАП.

Индукционное взаимодействие

Как бы хорошо металл не отражал электромагнитную волну, всегда какая-то, пусть даже очень малая, часть энергии волны проникает в его поверхностный слой. Именно на этом и основаны все механизмы бесконтактного возбуждения звука. Простейший из этих механизмов, получивший название индукционного взаимодействия, срабатывает, когда изучаемое вещество находится в сильном магнитном поле. В отсутствие магнитного поля электроны и ионы в приповерхностном слое металла под действием поля электромагнитной волны движутся, как показано на рисунке 3, *а*, в противоположных направлениях, теряя время от времени свою избыточную кинетическую энергию при столкновениях. Проникающая при этом в проводник часть энергии электромагнитной волны превращается в тепло, и никакой генерации звука не происходит. Если, однако, проводник находится в постоянном магнитном поле, то и электроны, и ионы откло-



⊕ – *ион*

⊖ – *электрон*

δ — *глубина проникновения электромагнитного поля в металл*

$\vec{B}$ — *индукция постоянного магнитного поля*

Рис. 3. Принцип действия индукционного механизма ЭМАП.

няются от первоначального направления движения под действием силы Лоренца. Поскольку знаки зарядов этих частиц противоположны, а движутся они навстречу друг другу, то сила Лоренца отклоняет их, как показано на рисунке 3, *б*, в одну и ту же сторону. Сталкиваясь с ионами, электроны передают им свою избыточную энергию, вызывая тем самым колебания решетки проводника на частоте падающей волны. В этом, собственно, и заключается ЭМАП. Упругие колебания решетки могут быть зарегистрированы обычными акустическими методами, например пьезоэлектрическими или магнитострикционными преобразователями. Возможна также и бесконтактная регистрация звука, поскольку падение звуковой волны на границу проводника сопровождается электромагнитным излучением — этот эффект носит название обратного ЭМАП.

Для того чтобы представить масштаб описываемого явления, приведем выражение для эффективности трансформации, определяемой как отношение потоков энергии в падающей на металл электромагнитной волне и в уходящей от его поверхности звуковой волне:

$$K=(S/c)(B^2/8\pi\varrho S^2)/(1+\beta^2).$$

В этой формуле c — скорость света, B — индукция постоянного магнитного поля, ϱ — плотность металла, S — скорость звука в металле. Важный для всех механизмов ЭМАП параметр

$$\beta=2\pi^2\delta^2\lambda^2$$

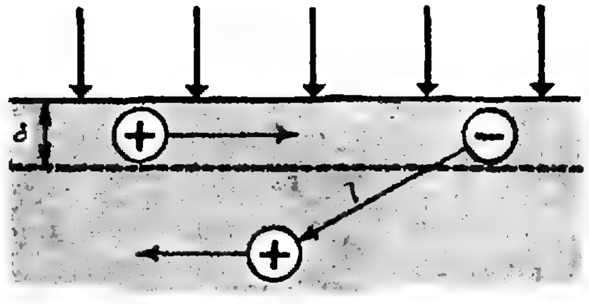
описывает пространственное распределение возбуждающей силы, выражая его через отношение глубины проникновения электромагнитной волны в проводник δ к длине упругой волны в нем λ.

Видно, что эффективность преобразования определяется, во-первых, отношением скоростей звука и света — для всех твердых тел эта величина составляет $\sim10^{-5}$, во-вторых, отношением энергии, запасаемой в постоянном магнитном поле $B^2/8\pi$, к величине ϱS^2, равной модулю упругости вещества E, и, наконец, распределением возбуждающей силы. Сразу же оговоримся, что параметр β мал лишь в хорошо проводящих средах, для которых глубина проникновения электромагнитной волны мала по сравнению с длиной упругой волны. Это обстоятельство выделяет металлы в качестве лучших объектов для реализации различных механизмов ЭМАП. В хороших металлах — алюминий, медь, серебро — при комнатной температуре в магнитном поле $B=1$ Тл на частоте $f=1$ МГц эффективность ЭМАП $K\sim10^{-10}$. Столь же малая доля энергии трансформируется и при обратном преобразовании. Таким образом, если эксперимент проводится с использованием ЭМАП как для возбуждения, так и для приема звука, то эффективность двойного преобразования составляет $K^2\sim10^{-20}$.

Деформационное взаимодействие

Рассмотренный выше механизм трансформации универсален. Если предположить, что $\beta\leqslant1$, то окажется, что эффективность преобразования вообще не зависит от электрических параметров твердого тела. Это действительно так, однако, как мы уже отмечали, такое предположение ограничивает нас только хорошо проводящими средами — полупроводниками при высоких температурах и металлами. При низких температурах в таких веществах ЭМАП оказывается возможным и без магнитного поля. Суть этого — деформационного — механизма преобразования заключается в следующем.

В особо чистых металлах при низких температурах расстояние, которое пробегает электрон, не сталкиваясь с ионами, оказывается большим по сравнению с глубиной проникновения электромагнитной волны. В этом случае электроны, приобретая избыточную энергию вблизи поверхности, уносят ее вглубь металла, и, как показано на рисунке 4, прямое воздействие электрического поля волны на ионы оказывается нескомпенсированным. Генерации звука, таким образом, способствует то обстоятельство, что электроны отдают решетке свою избыточную энергию не там, где они ее получили, а совсем в другом месте. Свое название этот механизм ЭМАП получил вследствие того, что решетка кристалла всегда подстраивается (деформируется) под распределение электронов по энергиям. Эффективность деформационного взаимодействия невелика, она даже на порядок ниже приведенной оценки для индукционного взаимодействия, однако именно этот механизм представляет наибольший интерес в физике из-за своей тесной связи с характеристиками движения электронов по кристаллу.



l — длина свободного пробега электронов

Рис. 4. Принцип действия деформационного механизма ЭМАП.

Магнитоупругое взаимодействие

Важное место среди металлов занимают такие, которые обладают магнитными свойствами. В них, так же как и в обычных металлах, работают индукционное и деформационное взаимодействия. Дело осложняется, однако, тем, что в магнетиках, помимо реакции электронов и ионов на электрическое поле электромагнитной волны, необходимо также учитывать действие магнитного поля на элементарные атомные токи. В результате взаимодействия электронов, ионов и элементарных токов с электромагнитной волной и друг с другом в магнетиках реализуется довольно много различных механизмов ЭМАП. К ним относятся, например, механизмы генерации звука, связанные со смещением доменных границ и с вращением вектора намагниченности в доменах. Оказалось также, что переход металла из одного магнитного состояния в другое сопровождается гигантским (на два-три порядка по сравнению с индукционным взаимодействием!) возрастанием эффективности ЭМАП. Качественно эффект гигантской трансформации можно объяснить тем, что положение элементарных атомных токов при переходах металла из одного устойчивого состояния в другое никак не определено, и поэтому электромагнитная волна оказывается в состоянии сильно раскачать эти токи, а те, в свою очередь, заставляют колебаться ионы.

Принципы проведения эксперимента

Численные оценки эффективности ЭМАП, естественно, никак не стимулировали разработку бесконтактных методик генерации и приема звуковых волн. Следует помнить, однако, что в экспериментальной физике главным является вопрос не о величине эффекта, а о его «наблюдаемости». Оказалось, что ЭМАП не только на-

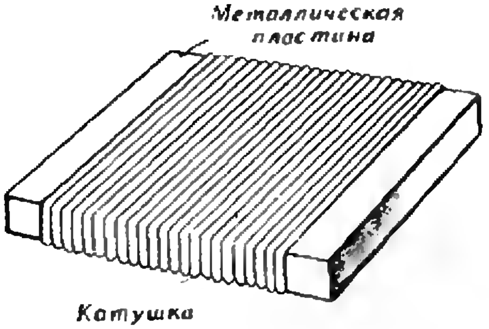


Рис. 5. Электромагнитное поле на поверхности образца создается катушкой индуктивности, охватывающей его.

дежно регистрируется, но и с успехом может использоваться для проведения акустических измерений. Стимулом явилось, как ни странно, быстрое развитие исследований еще в одной области — физике низких температур.

Изучение проводников при низких температурах показало, что под действием магнитного поля многие их свойства изменяются немонотонно, или, как говорят, обнаруживают квантовые осцилляции. Описание природы этого явления выходит за рамки статьи, для нас важно лишь то обстоятельство, что наблюдать квантовые осцилляции можно только в совершенных кристаллах, полностью лишенных механических напряжений.

Возник вопрос и о существовании квантовых осцилляций скорости звука в металлах. Именно здесь традиционные контактные методики вступили в противоречие с требованиями эксперимента. Термические напряжения в контакте опасны даже при малых изменениях температуры, тем более они велики при охлаждении образца от комнатной (300 К) до гелиевой (4 К) температуры.

Для иллюстрации экспериментальных возможностей нового подхода, используемого, в частности, и для изучения квантовых осцилляций скорости звука, рассмотрим один из вариантов проведения эксперимента по бесконтактному возбуждению звуковых волн в металлах.

Образец, имеющий форму тонкой пластины, помещается, как показано на рисунке 5, в катушку индуктивности, которая создает электромагнитное поле на его поверхности. Если подобрать частоту этого поля таким образом, чтобы она сравнялась с частотой собственных колебаний пластины, амплитуда возбуждаемого звука в ней многократно возрастет.

Экспериментально такое резонансное возбуждение можно наблюдать, измеряя частотную зависимость поглощения электромагнитной энергии в образце в присутствии постоянного магнитного поля. Положение акустического резонанса позволяет с высокой точностью определить скорость звука. Если теперь изменять индукцию магнитного поля и следить за положением акустического резонанса по частоте, то окажется, что резонансная частота последовательно увеличивается и уменьшается, что и соответствует квантовым осцилляциям скорости звука.

Мы привели только один пример конкретной реализации методики ЭМАП и только один пример экспериментального исследования. Однако низкотемпературными измерениями не исчерпываются возможности нового подхода.

Прогресс в этой области оказался удивительно быстрым. Бесконтактное возбуждение звука представляет собой в настоящее время не только одно из направлений радиоспектроскопии, но и один из методов неразрушающих испытаний материалов, нашедший себе применение в различных областях промышленности.

Вся история развития исследований по ЭМАП показывает, насколько плодотворным оказывается взаимодействие идей и методов, разрабатываемых в различных физических дисциплинах.

ФИЗИКА ПРОТИВ МОШЕННИКОВ

Кандидат биологических наук
И. ЛАЛАЯНЦ,
кандидат биологических наук
А. МИЛОВАНОВА

Знаменитая туринская плащаница оказалась подделкой! Плащаница, погребальный покров, в который, как утверждали, было завернуто тело Иисуса Христа, более чем на тысячелетие «моложе» самого Христа.

В 1989 г. несовпадение во времени было доказано строго научно. Поэтому папа Иоанн Павел II, которому доложили результаты исследования, сказал: «Публикуйте». И через две недели сей прискорбный для церкви факт был опубликован в ведущем международном научном журнале «Nature» («Природа»).

Прежде всего напомним, в чем суть дела. Известно, что в Турине, на севере Италии, на протяжении вот уже многих веков хранится в особом серебряном ковчеге некая холстина длиной 4,3 метра и шириной 1,1 метра. На холстине имеется «отпечаток» тела бородатого человека, в котором видят изображение Христа. В свое время было осуществлено компьютерное моделирование, что позволило «выявить» трехмерные очертания лица и тела человека, лежащего с вытянутыми вдоль тела руками. Фотографии этого изображения в «негативе» обошли весь мир.

Надо сказать, что сам Ватикан начиная с XIV века подвергал сомнению аутентичность (подлинность) плащаницы (от слова «плащ»). Впервые она появилась около 1350 г. в поместье некоего Жофрея де Шарни, французского рыцаря-крестоносца, графское поместье которого было недалеко от Парижа. Легенда гласит, что в 1203 г. крестоносцы перед самым взятием Константинополя видели плащаницу в его окрестностях. Но граф унес с собой в могилу секрет обретения плащаницы.

В церковь поместья де Шарни, где хранилась холстина, хлынул поток верующих и паломников, желавших причаститься реликвии. Их не смущал вопрос: где же находилась святыня в течение чуть ли не полутора тысячелетий и почему она не истрепалась за столь долгое время.

Несколько позже — уже во времена Возрождения — многие люди (особенно художники) стали обращать внимание на то, что на плащанице Христос с бородой. Дело в том, что все древнеримские источники показывают нам его... безбородым! Таким он изображен на стенах катакомб Рима, на мозаике Равеннского собора конца V века, на картине распятия, вырезанной из слоновой кости около 420 г.

Но наиболее интересна римская мозаика, случайно открытая при раскопках в английском поместье Хинтон Сент-Мэри в 1963 г. Это поместье находится в графстве Дорсет, лежащем к западу от Лондона: Безбородый Христос изображен в центре напольной мозаики в окружении четырех евангелистов — Матфея, Луки, Марка и Иоанна. Чтобы Христа не спутали с кем-нибудь другим, над его головой художник выложил знаменитое греческое «Хи Ро» — начальные буквы слова «Христос».

В 1389 г. епископ французского города Труа, что к востоку от Парижа, в верховьях Сены, писал папе Клименту IV, что плащаница является фальшивкой. Папа с ним полностью согласился. Тем не менее к 1578 г., благодаря стараниям герцога Савойского, плащаница оказывается в городе Турине (столице Савойи). Примерно в это время один итальянский художник написал картину, изображающую снятие Иисуса со креста, над которым ангел несет плащаницу с отпечатками его тела...

В настоящее время плащаница является собственностью Ватикана (с условием ее вечного хранения в Туринском соборе). С 1931 г., когда была сделана первая «негативная» фотография, началось научное исследование плащаницы. После войны, в 1951 г., была даже организована специальная Гильдия святой плащаницы, по инициативе которой в 1978 г. было проведено исследование холстины группой международных экспертов. Компьютер показал, что в нее был завернут мужчина ростом около 180 см, причем весьма худой. Американский судебный эксперт Р. Баклин определил, что человек весил около 77 кг. Спектроскописты исследовали краску, с помощью которой на холст были нанесены отпечатки. Но проверить аутентичность ткани всеми этими методами оказалось невозможно. Необходима была точная датировка холстины.

Почему же ее не провели тогда? Ведь в распоряжении ученых уже был метод радиоуглеродного анализа, созданный американским химиком У. Либби, за что он был удостоен Нобелевской премии по химии за 1960 г. Метод, как и все гениальное, прост по своей идее и исполнению. Но в те годы для проведения анализа по этому методу требовалось сжечь довольно большой кусок холста, на что Ватикан сказал категорическое «нет» (для одного опыта тогда нужен был лоскут не меньше носового платка). В чем же суть метода?

Всем хорошо известно, что наша атмосфера постоянно бомбардируется частицами весьма высоких энергий. Попадая в ядра атомов, они выбивают из ядер нейтроны — частицы, не несущие заряда и по массе равные протонам, имеющим заряд $+1$.

Число протонов в атомном ядре равно порядковому номеру элемента в таблице Менделеева. Так, в ядре азота, стоящего в таблице на 7-м месте, содержится 7 протонов и 7 нейтронов (ядро $^{14}_{7}N$: 7 — порядковый номер, 14 — массовое число, т. е. общее число протонов и нейтронов).

Как уже говорилось, космические лучи выбивают из ядер нейтроны, обладающие достаточно высокой энергией. Поскольку нейтрон не имеет заряда, он довольно легко проникает в ядро азота, выбивая из него протон. Так получается новое ядро, в котором оказывается 8 нейтронов и всего 6 протонов.

Новое ядро имеет заряд 6 и массовое число 14, т. е. оно находится в клетке углерода.

Из-за несбалансированного количества протонов и нейтронов ядро изотопа углерода $^{14}_{6}C$ оказывается нестабильным (радиоактивным): в результате β-распада (испускания электрона и антинейтрино) оно снова превращается в $^{14}_{7}N$.

Радиоактивный углерод распадается очень медленно: половина ядер распадается примерно за время $T_{1/2}=$ $=5600$ лет (это время называют периодом полураспада). Можно было бы подумать, что за время $2T_{1/2}=$ $=11\,200$ лет распадутся все радиоактивные ядра. Но это, конечно, не так.

За последующие $T_{1/2}=5600$ лет распадется половина оставшихся ядер (т. е. останется четверть начального их количества), за последующие — половина этой четверти, и т. д. В компактном виде можно записать закон убывания числа радиоактивных ядер так (закон радиоактивного распада):

$$N(t)=N_0\cdot 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Радиоактивный углерод — как и обычный стабильный изотоп — окисляется кислородом воздуха до двуокиси CO_2, которая поглощается растениями в процессе фотосинтеза*). Количество потребляемого растениями радиоактивного углерода чрезвычайно мало — не больше одного атома ${}^{14}_{6}C$ на триллион (10^{12}) обычных атомов, поэтому не стоит бояться за наше здоровье.

Усвоенный в ходе фотосинтеза углерод идет на строительство огромных биомолекул целлюлозы, или клетчатки, входящей в состав травы, древесины, льна, хлопка и т. д. Травой питаются жвачные животные, от которых получают рога и копыта, кожу, из которой в древности чего только не делали. А кости и бивни слонов издревле ценились косторезами как прекрасный материал для поделок. И если вы определите количество оставшегося ${}^{14}_{6}C$, то тем самым вы — с определенной мерой погрешности — определите, когда был изготовлен тот или иной предмет.

Легко сказать «определите», когда мы не знаем, сколько ${}^{14}_{6}C$ было в древнем образце. Да, это в большинстве случаев ученым не известно, но есть некоторые «опорные» точки. Тот же Либби определил количество радиоактивного углерода в древнеегипетских предметах, время изготовления которых было точно известно по историческим документам и другим источникам (что позволило рассчитать первоначальное количество ${}^{14}_{6}C$). Кроме того, археологи и антропологи умеют примерно определять возраст по глубине залегания. Естественно, что чем древнее стоянка, тем глубже приходится копать. Так постепенно стало ясно, сколько примерно может содержаться радиоактивного углерода в образце того или иного времени. Недаром ученые говорят о дате с точностью $\pm(30-80)$ лет.

Одной из крупнейших побед нового метода физической датировки было разрешение загадки знаменитого «пилтдаунского человека». Он был назван по местечку Пилтдаун к югу от Лондона, где в 1912 году археолог-любитель Ч. Доусон нашел череп человека, умершего — как потом выяснилось — в середине XV века во время эпидемии чумы. Хитроумный А. Кейт приделал к черепу нижнюю челюсть орангутана с острова Борнео и объявил подделку «находкой века», «недостающим звеном» между человеком и обезьяной.

Радиоуглеродный анализ помог определить возраст этого мусульманского коврика — VII век н. э.

Уже в 1913 г., сравнив на рентгене плотность костей черепа и челюсти, ученые подвергли сомнению справедливость этого заявления, но их никто не послушал (т. е. уже в самом начале с помощью физического метода можно было бы разоблачить подделку, а вместе с нею и главного подделывателя, который в 1939 г. открыл «памятник» на месте находки). Когда в 1953 г. Кейту сказали, что пилтдаунский человек подделка, он ответил, что знает. К сожалению, все подумали, что он имел в виду отчет о раскрытии подделки, опубликованный в лондонской «Таймс»...

Очень часто изделия, открытые археологами, настолько ценны, что никто не осмеливается подвергать их радиоуглеродному анализу, а попросту говоря сжигать. Но не менее часто на месте находок удается обнаружить угли костров, по которым и определяют возраст захоронения, очага жилищ и т. д. Совсем недавно так было датировано первое групповое захоронение кроманьонцев в чешской области Моравии. Возраст находки оказался равным 28 тысячам лет! А неподалеку от Моравии в австрийском Гальгенберге ученые раскопали фигурку женщины, которую древний художник вырезал из стеатита, или мыльного камня. Возраст фигурки — 27 тысяч лет.

---

*) Об этом рассказывается в статье «Зеленая, зеленая трава...», опубликованной в «Кванте» № 7 за 1989 год.

Сегодня разрешающая способность радиоуглеродного анализа резко возросла благодаря применению компьютеров и «кооперированию» его с другими более тонкими и точными физическими методами. Речь идет о масс-спектрометрии, которая позволяет «напрямую» подсчитывать количество атомов $^{14}_{6}C$. Помимо повышения точности анализа, новый метод позволяет резко уменьшить объем и массу образца, по которому определяют возраст.

Метод заключается в отделении атома $^{14}_{6}C$ от остальной массы углерода в образце. Для этого все атомы углерода — как стабильного природного, так и радиоактивного — подвергаются ионизации, после чего они разгоняются в ускорителе до энергии примерно 10 МэВ (10 миллионов электронвольт). Далее все атомы «прогоняют» сквозь магнитное поле, в котором более легкие атомы $^{12}_{6}C$ и $^{13}_{6}C$ отклоняются в большей степени, нежели тяжелые $^{14}_{6}C$. Остается только подсчитать количество атомов $^{14}_{6}C$ на финише (на нем окажутся только эти атомы).

Метод масс-спектрометрии позволил не только в 1000 раз уменьшить необходимую для анализа массу образца, но и отодвинуть датировку в более далекое прошлое. Дело в том, что число радиоактивных распадов $^{14}_{6}C$ при старом методе определялось как число сцинтилляций, или вспышек молекул флюоресцирующего вещества, которые усиливались фотоумножителями и подсчитывались компьютером. При таком довольно грубом методе требовалось не меньше 10 тысяч атомов $^{14}_{6}C$, содержащихся в 1—5 г чистого углерода (соответственно в 25—1000 г образца). Для масс-спектрометра же требуется всего 0,5—5 мг углерода!

Резко снизились требования и к радиоактивности углерода. В образцах старше 37—40 тысяч лет радиоактивность не отличалась от фоновой, которая существует благодаря космическому излучению и современному радиоактивному загрязнению. Сегодня, как уже говорилось, определяется не радиоактивность как таковая, а всего лишь число атомов $^{14}_{6}C$, что гораздо легче и точнее. Неудивительно поэтому, что когда в Ватикане изложили все эти соображения, было получено разрешение на проведение анализа ткани плащаницы.

Анализ проводился в трех лабораториях: Цюриха, Оксфорда и Аризонского университета в г. Туксоне. Для контроля были взяты кусочки тканей, возраст которых известен. Это ткань священных одеяний, хранящихся ныне в часовне Жана Базилика во французском городке Вар, а также ткань, в которую обернуты мощи одного из исламских пророков.

Результаты анализов, проведенных в этих трех лабораториях, определили время изготовления одеяний: начало XIII века и XI—XII века́, что соответствует историческим данным. Затем ученые приступили к датировке ткани плащаницы и определили ее возраст: между 1262 и 1384 гг. Таким образом, плащаница оказалась более чем на тысячу лет «моложе», нежели предполагалось. По этому поводу представитель Ватикана кардинал Анастасио Баллестреро заявил: «Я не вижу причин, по которым церковь могла бы оспаривать результаты исследования и подвергать их сомнению». А американский физик Д. Донахью добавил, что ткань плащаницы могла быть соткана намного позже того, когда для нее был выращен лен, из которого она сделана, но это позже, а не раньше, поэтому плащаница может быть только еще моложе, но никак не старше.

М. Тайт, который со стороны Британского музея координировал усилия всех трех лабораторий, сказал, что «поражает удивительное совпадение

Стол рыцарей Круглого стола легендарного короля Артура, оказавшийся на полтысячелетия «моложе» самих рыцарей.

результатов разных групп». Таким образом, король умер! Но у этой фразы есть и продолжение: да здравствует король! Средства массовой информации с удивлением отметили, что количество паломников после опубликования результатов ученых резко возросло! Нескончаемые очереди в кафедральный собор Джованни Баттиста — так итальянцы на свой лад называют *Иоанна Крестителя, крестившего в* святых водах Иордана самого Христа,— поражают воображение, поскольку «там» от очередей давно отвыкли. Люди отстаивают долгие часы к ковчегу, чтобы лишний раз убедиться, что плащаница на месте и ей не нанесено никакого ущерба.

Ну а что же теперь ученые говорят об изображении некоего тела, подлинность которого на холстике никем не отрицается? В 1979 г. У. Макрон из Чикагского университета провел анализ частицы краски, с помощью которой сделан этот «рисунок». Оказалось, что она ничем не отличается от самой обычной... ржавчины! которая химически представляет собой, как известно, окись железа, широко применявшуюся средневековыми художниками.

Талантливость изображения, его стиль, а также прекрасное знание анатомии позволяют предположить, *что автор его — сам великий Леонардо* из города Винчи, умерший в 1519 г., т. е. в самом начале XVI века. Хочется надеяться, что будущие поколения ученых сумеют раскрыть окончательно тайну туринской плащаницы. Как — трудно пока сказать. Но так же трудно было всего лишь несколько лет тому назад предполагать, что сегодня мы будем знать точный ее возраст.

Подделкам в мире искусств нет числа. Совсем недавно Британский музей провел очередную (!) выставку знаменитых подделок произведений искусства самых разных времен и цивилизаций. На ней была представлена вавилонская клинописная табличка II тысячелетия до н. э., сделанная под третье тысячелетие! Забавно, что на этой поддельной табличке имеется древнешумерская надпись, которая гласит: «Подделывателю сего документа Энки забьет все каналы слизью!» Если учесть, что Энки был великим божеством, то проклятье действительно было грозным.

Сегодня в распоряжении искусствоведов и музейных работников имеется множество физических методов для определения подделок, не соответствующих тому времени, на которое они «рассчитаны». При освещении, например, поверхности художественного изделия ультрафиолетовыми лучами она начинает флюоресцировать. Съемка такой светящейся поверхности, особенно с помощью микроскопа, позволяет выявить множество деталей, которые не видны невооруженным глазом. А инфракрасные лучи позволяют «видеть» и то, что скрыто под красочным слоем. То же можно сказать и о съемке в рентгеновских лучах. Рентген позволил увидеть под «Юдифью» Тициана портрет испанского короля Карла V.

Есть в распоряжении ученых и так называемый активационный анализ. Он заключается в активации ядер атомов металла с помощью быстрых нейтронов. Отдавая затем полученную энергию, ядра формируют специфический спектр, по которому можно отличить, например, свинец от титана. Оказывается, в старину художники грунтовали холст свинцовыми белилами, сегодня же они для этого используют титан. Известно, что титановые белила стали выпускаться в 20-х годах нашего столетия.

А вот знаменитая краска «берлинская лазурь» появилась в конце XVIII в. На упоминавшейся уже выставке в Британском музее висел один из «Боттичелли», созданный после первой мировой войны. Настоящий Сандро Боттичелли, живший в 1445—1510 гг., никак не мог рисовать с помощью берлинской лазури, обнаруженной при исследовании хламиды Богородицы на «его» картине.

Сейчас крупнейшие музеи мира, в том числе Британский, Лувр, нью-йоркский Метрополитен, а также музей Пибоди в Гарварде, что неподалеку от Бостона в США, обзаводятся компактными ускорителями протонов и ионов. В подземелье Лувра установлен ускоритель, построенный в США и обошедшийся министерству культуры Франции в 1,6 млн. долларов. Он используется для идентификации произведений искусства, а также в решении проблемы их сохранности.

Так в музее Пибоди выявили «современную» костяную пластинку, резьба на которой изображала мамонта. Эта пластинка появилась в музее в 1889 г. и произвела в свое время самую настоящую сенсацию, поскольку «свидетельствовала» о том, что на территории нынешних США некогда водились эти мохнатые родственники слонов. Теперь все встало на свое место: мамонты в Новом Свете не водились, что давно утверждали зоологи и палеонтологи.

Не надо думать, что физические методы используются в искусствоведении только для разоблачения подделок. Нет, с их помощью осуществляются и «реабилитации». Речь, в частности, идет о новом методе ПИРЭ, или протон-индуцированной рентгеновской эмиссии.

В чем суть этого метода?

Если разогнанные в ускорителе протоны сфокусировать в тонкий пучок диаметром 0,5—1 мм (энергия пучка до 4,5 МэВ) и направить на поверхность, например, рукописи, то протоны начинают возбуждать атомы металлов, входящих в состав краски или чернил. За сохранность древних документов можно не волноваться: энергия облучения не превышает энергию 100-ваттной лампочки, освещающей книгу с расстояния полуметра!

Возбужденные атомы испускают рентгеновские лучи, которые регистрируются чувствительными детекторами. Затем сигналы от детекторов подаются в компьютер для анализа.

С помощью метода ПИРЭ была не так давно «прочитана» 42-строчная Библия, отпечатанная в типографии Гутенберга, находящаяся в библиотеке Гарвардского университета.

Выяснилось, что Гутенберг использовал для своей типографской краски большие количества свинца и меди. Помощники Гутенберга по типографии смешивали новые порции краски буквально каждый день. Библия состояла из нескольких тетрадей. Ежедневно печаталось до шести тетрадей одновременно. Поначалу Библию печатали в 40 строк, но затем перешли на 42 строки. Переносы не допускались — на весь текст было допущено всего два переноса слов! После того как первый лист отпечатывали с обеих сторон, начинали печатать 2-й и 120-й и т. д. Это и позволяло вести работу над шестью тетрадями одновременно, хотя и требовало очень точного соблюдения «технологии», раскрытой с помощью метода ПИРЭ. В лаборатории, где проводилась экспертиза Библии Гутенберга, проходил практику и специалист из Лувра. Музей хочет исследовать 36-строчную Библию Гутенберга, которая отпечатана раньше 42-строчной и хранится в Национальной библиотеке Франции.

С помощью ПИРЭ удалось «реабилитировать» и известную «карту Винланда». Винландом — «Страной винограда» — норманны называли в своих сагах некую далекую землю, лежавшую за Гренландией, богатую диким виноградом. Ее будто бы открыл легендарный Эрик Рыжий, считающийся сегодня первооткрывателем Америки.

Карта Винланда вошла в научный обиход в начале 60-х годов нашего столетия. Ученых поразило удивительно точное изображение Гренландии, мало чем отличающееся от современного. Считалось, что подобной точности картографии просто было невозможно добиться во времена отважных викингов.

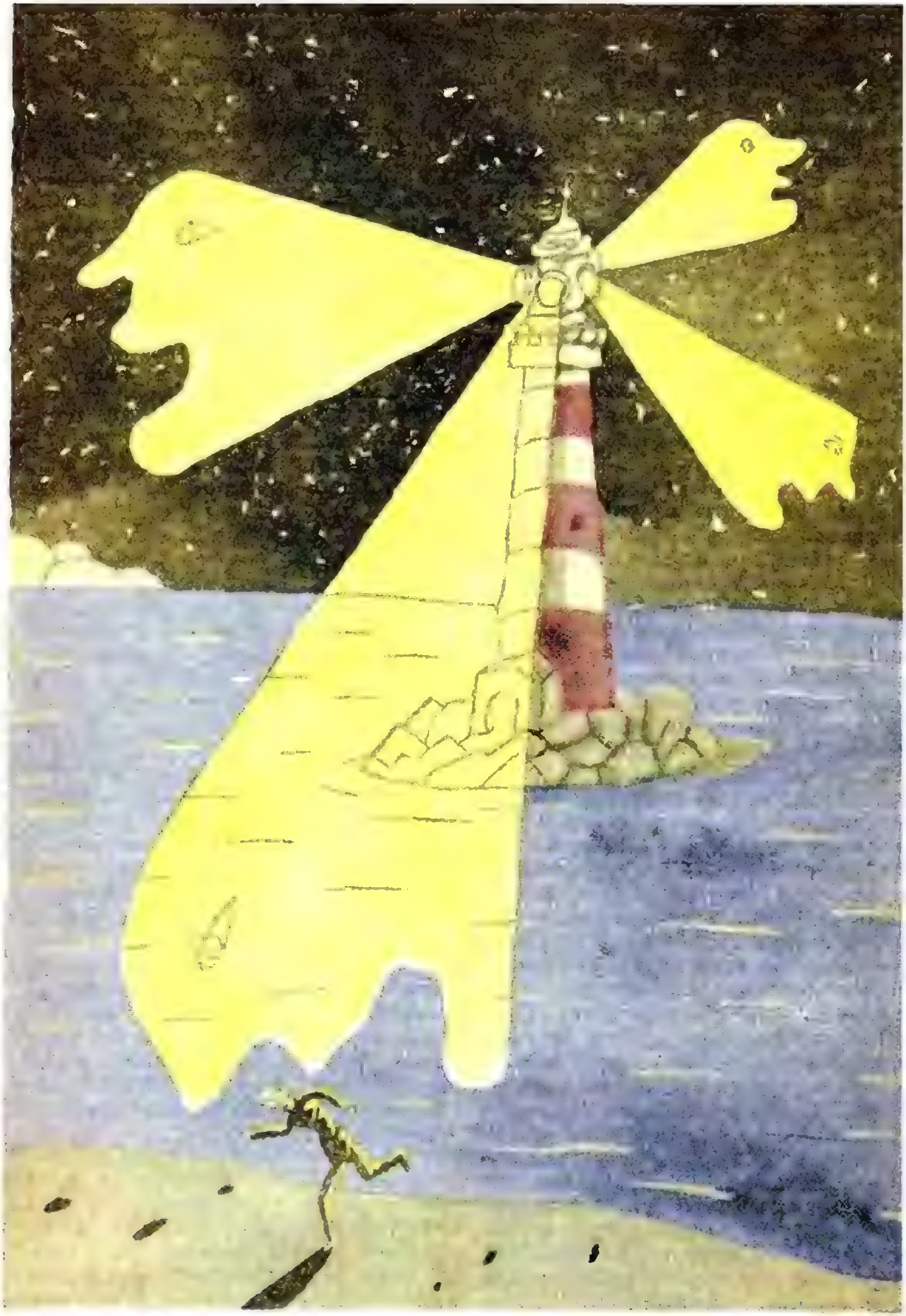
В 1974 г. карта была объявлена подделкой на основании анализов, проведенных группой ученых Чикагского университета. Анализы показали высокое содержание окислов титана в чернилах, которые использовались для нанесения линий на карте.

И вот ПИРЭ доказал, что по крайней мере треть линий, а то и больше нанесена на карте чернилами, содержание титана в которых не превышает «норму», т. е. тот минимум, который можно считать естественной примесью. В других линиях титан и вовсе отсутствовал!

Значит ли это, что была доказана подлинность карты? Да нет, просто было показано, что для чернил не использовали окислов титана, т. е. чернила не современные. Но ведь кто-то мог изготовить чернила и по средневековым рецептам. Пока физика доказать полную аутентичность карты не может. Вот если бы она позволила построить машину времени...

Все, конечно, помнят великолепную книгу Марка Твена «Янки при дворе короля Артура» и рыцарей Круглого стола. Много лет в большом холле кафедрального собора в английском городе Винчестер на стене висит огромный — больше шести метров в диаметре — круглый стол, вернее его столешница. Туристы из разных стран восхищались ее разноцветными секторами и большим красно-желтым цветком в самом центре. К сожалению, сегодня почитателей старины и благородных рыцарей ждет разочарование: радиоуглеродный анализ показал, что дерево, из которого была сделана столешница, росло в Англии всего лишь на полтысячи лет позже того времени, когда жил и творил легендарный король Артур...

Так вот физика помогает нам сегодня разгадывать вечные загадки волнующего искусства. Жизнь коротка, искусство вечно, говорили древние.



ОСВЕЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА, КОНУСЫ И ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

В. МАТОВ, Е. ПЕКАРЬ

Как мы решили написать статью

Все началось с того, что один из авторов придумал задачу:

В точке пространства расположены 4 прожектора. Каждый из них освещает часть пространства, испуская бесконечный выпуклый световой конус. При этом ни один конус не содержит противоположно направленных лучей, любые три из них имеют общий луч, а все четыре — нет. Докажите, что тогда любая точка пространства освещена.

— Задачка интересная,— сказал другой автор,— но, по-моему, школьники не знают, ни что такое «бесконечный конус», ни что такое «выпуклый».

— Зато какая перспектива! — настаивал первый,— осветить все пространство и всего-то четырьмя прожекторами. Кроме того, школьники, выписывающие «Квант», могут знать определение выпуклости и некоторые свойства выпуклых множеств по статьям А. Савина «Кое-что о выпуклости» и О. Ижболдина и Л. Курляндчика «Неравенство Иенсена» («Квант» № 1, 1979 и № 4, 1990).

— Да,— сказали оба автора, придется рассказать кое-что еще о выпуклости.

Так и появилась эта статья, в которой обсуждаются свойства выпуклых фигур, рассматриваются принципы захвата территорий, освещается пространство, доказывается знаменитая теорема Хелли, а также... Впрочем, читайте.

Выпуклость

Слово «выпуклый» довольно часто употребляется в жизни, так же, как и слово «вогнутый». Например, бывают плоские, выпуклые и вогнутые зеркала. Однако житейское и математическое понимание выпуклости несколько различны. В математике все (без исключения!) геометрические фигуры делятся на два класса: выпуклые и невыпуклые. Математическое понятие выпуклости на житейском языке можно выразить так: выпуклые фигуры — это фигуры, не имеющие вогнутостей. Вот точное определение:

Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками A и B оно содержит и соединяющий их отрезок. Пустое множество также считается выпуклым.

Если множество имеет вогнутость («ямку»), то отрезок, соединяющий ее края, принадлежит множеству не полностью, так что такое множество невыпукло.

Теперь вы можете легко доказать, что точка, отрезок, плоскость, полуплоскость, круг, шар, куб и многие другие фигуры выпуклы, а множества на рисунке 1 — нет. А будет ли выпуклым пересечение*) круга и квадрата? Будет, причем безразлично, как они расположены друг относительно друга. Выпуклые множества обладают замечательным свойством: пересечение любого их числа — выпуклое множество. В самом деле, если A и B — две точки из пересечения,

---

*) Пересечением двух множеств называется их «общая часть», т. е. множество, состоящее из всех точек, принадлежащих одновременно обоим множествам. Обозначение: $A \cap B$ — пересечение множеств A и B. Объединением двух множеств называется множество всех точек, принадлежащих или первому, или второму множеству. Обозначение: $A \cup B$ — объединение множеств A и B.

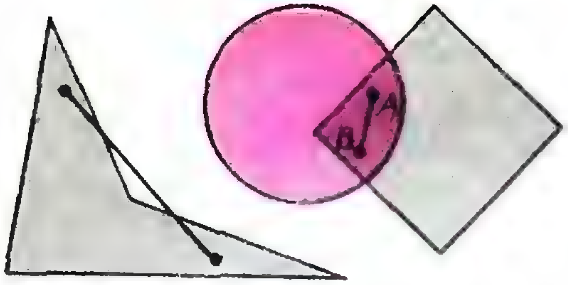


Рис. 1. Рис. 2.

то они принадлежат каждому из множеств. А в силу выпуклости каждое из множеств содержит отрезок AB, следовательно, и он принадлежит пересечению (рис. 2).

— Однако,— скажет въедливый школьник,— в учебнике уже даны определения выпуклого многоугольника и выпуклого многогранника. *Это многоугольник (многогранник), лежащий по одну сторону от каждой прямой (плоскости), проходящей через его сторону (грань).* Эквивалентны ли «школьное» и «общее» определение, то есть все ли многоугольники и многогранники, выпуклые по одному из определений, выпуклы и по другому?

Конечно же, эти определения эквивалентны. Самые въедливые школьники могут провести строгое доказательство самостоятельно.

Любой школьник сразу же заметит, что «общее» определение проще и универсальнее «школьного»: оно относится к самой фигуре, а «школьное» требует, чтобы многоугольник обязательно находился на плоскости (это нужно для понятия «по одну сторону от прямой»). Например, для грани многогранника сначала надо «провести» содержащую ее плоскость и только потом можно определить, выпукла ли грань.

Выпуклая оболочка

Даже если множество невыпуклое, для него еще не все потеряно: его можно естественным образом дополнить до выпуклого множества. Последнее называется его выпуклой оболочкой.

Способ получения выпуклой оболочки ограниченной плоской фигуры очень прост: следует растянуть замкнутую резинку так, чтобы она охватывала фигуру, и отпустить. Если резинка при этом не порвется, то часть плоскости, ограниченная ею, и есть выпуклая оболочка фигуры.

Для пространственного тела следует поступать аналогично: засунуть это тело внутрь воздушного шарика и осторожно натянуть шарик, давая выйти воздуху.

Вот точное определение: *выпуклой оболочкой множества M называется минимальное выпуклое множество, содержащее M,* т. е. выпуклое множество, содержащее M и не содержащее других выпуклых множеств, содержащих M. Выпуклую оболочку множества M теоретически можно построить, взяв пересечение всех выпуклых множеств, содержащих M. Действительно, это пересечение выпукло и, кроме того, любое выпуклое множество, содержащее M, содержит и пересечение.

Как и во многих других случаях, чтобы не писать словосочетания «выпуклая оболочка множества M», придумано обозначение conv (M) (от слова *convex* — выпуклый).

Упражнение 1. Докажите, что:
а) M лежит в conv (M);
б) если M лежит в N, то conv (M) лежит в conv (N);
в) $\mathrm{conv}\,(M \cup N) = \mathrm{conv}\,(\mathrm{conv}\,(M) \cup N)$.

Однако, как практически найти conv (M), зная M? Рецепт достаточно прост и противоположен рецепту О. Родена получения скульптуры из глыбы мрамора постепенным отсечением всего лишнего: надо постепенно добавить все недостающее. А именно: рассмотрим множество M_1, состоящее из точек всех отрезков с концами в

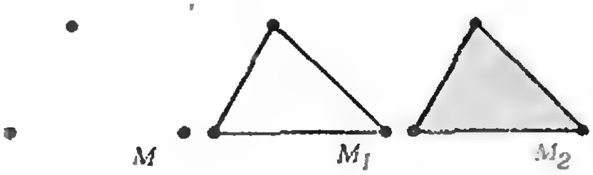


Рис. 3.

M, затем множество M_2, полученное подобным же образом из M_1, и т. д. (рис. 3). К счастью, *оказывается*, что этот процесс не очень долог: можно доказать, что для плоских фигур уже $M_2 = \mathrm{conv}\,(M)$, а для пространственных — $M_3 = \mathrm{conv}\,(M)$.

Упражнение 2 Постройте выпуклые оболочки следующих множеств: а) 4 точки на плоскости; б) 4 точки, не лежащие в одной плоскости; в) 5 точек в пространстве. Рассмотрите все возможные случаи!

Разделяй и властвуй

Недоверчивый школьник уже, конечно, засомневался: «Если отсекать лишнее от глыбы мрамора *имеет прямой смысл* (особенно если это делает Роден), то зачем, собственно, нужно трудиться, дополняя невыпуклое множество до его выпуклой оболочки?»

Дело в том, что дополнение множества до его выпуклой оболочки — процесс естественный. Это, например, подтверждает жизнь в стране Флатландии (впрочем, и в стране Спейсландии жизнь не лучше). Жители Флатландии, а проще — плоскости, одержимы манией к захвату территорий. Стоит нескольким жителям окружить какую-нибудь территорию, как *они* считают ее своей. Считается, что точка окружена, если нельзя провести прямую, относительно которой эта точка и точки $A_1, A_2, \ldots, A_k$, в которых *находятся* захватчики, лежат строго в разных полуплоскостях. Можно доказать, что окруженная территория — это выпуклая оболочка точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (рис. 4). Теперь знакомый с историей школьник понимает, что в точности означает выражение «находиться в кольце врагов»...

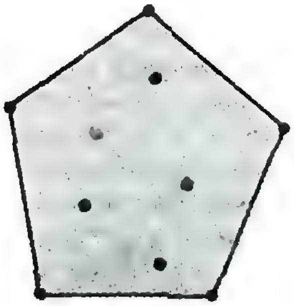


Рис. 4. Красная точка в кольце черных врагов.

Жизнь во Флатландии была бы просто ужасной, если бы все захватчики действовали заодно. В самом деле, стоит трем *захватчикам* A_1, A_2, A_3 (мы будем отождествлять захватчиков с точками, в которых они находятся) двигаться так, чтобы все высоты треугольника $A_1A_2A_3$ *неограниченно* росли, как рано или поздно любая точка плоскости окажется захваченной.

Верный способ избежать превращения Флатландии в *империю* — поссорить захватчиков. Они разделятся на враждующие группировки и забудут про захват территорий. Этот древний принцип называется «разделяй и властвуй». Из-за чего могут поссориться захватчики? Ну, конечно, из-за территорий: если две группировки претендуют на одну и ту же территорию, ссоры не избежать. Школьник наших дней не ощущает недостатка в примерах.

Итак, принцип «разделяй и властвуй» состоит в том, что нужно разбить множество точек $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на два подмножества так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались. (Тогда захватчики из обоих подмножеств будут претендовать на точки из пересечения.) Осуществимость принципа «разделяй и властвуй» первым доказал математик Радон, вот теорема его имени:

Каждое множество на плоскости (в пространстве), если оно содержит не менее четырех (пяти) точек, можно разбить на два непересекающихся множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Проницательный школьник, конечно, заметил справедливость теоремы Радона, выполняя упражнение 1. Доказательство достаточно провести для четырех (пяти) точек, а остальные точки присоединить к любому из двух полученных множеств. Для четырех точек на плоскости доказательство видно из рисунка 5. Флатландия спасена.

Займемся пространством. Рассмотрим в нем точки $A_1, \ldots, A_5$. Если какие-

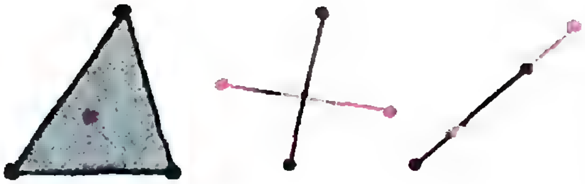


Рис. 5.

то четыре из них лежат в одной плоскости, то задача сводится к теореме Радона для плоскости, поэтому допустим, что $A_1, \dots, A_4$ в одной плоскости не лежат. Тогда $\operatorname{conv}(A_1, \dots, A_4)$ — тетраэдр с вершинами в них. Если он содержит A_5, то $\{A_1, \dots, A_4\}$ и $\{A_5\}$ — нужное разбиение (рис. 6, *а*). Предположим теперь, что A_5 не принадлежит тетраэдру. Плоскость, проходящая через три вершины тетраэдра, делит пространство на два полупространства, одно из которых содержит тетраэдр. Тетраэдр — пересечение четырех таких полупространств, следовательно, A_5 не принадлежит какому-то из них — например, определяемому точками A_1, A_2 и A_3. Тогда отрезок A_4A_5 пересекает эту плоскость в некоторой точке B (рис. 6, *б*). Применив к точкам A_1, A_2, A_3, B теорему Радона для плоскости, получим два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются. Заменив точку B в одном из них на пару точек A_4 и A_5, получим требуемое разбиение.

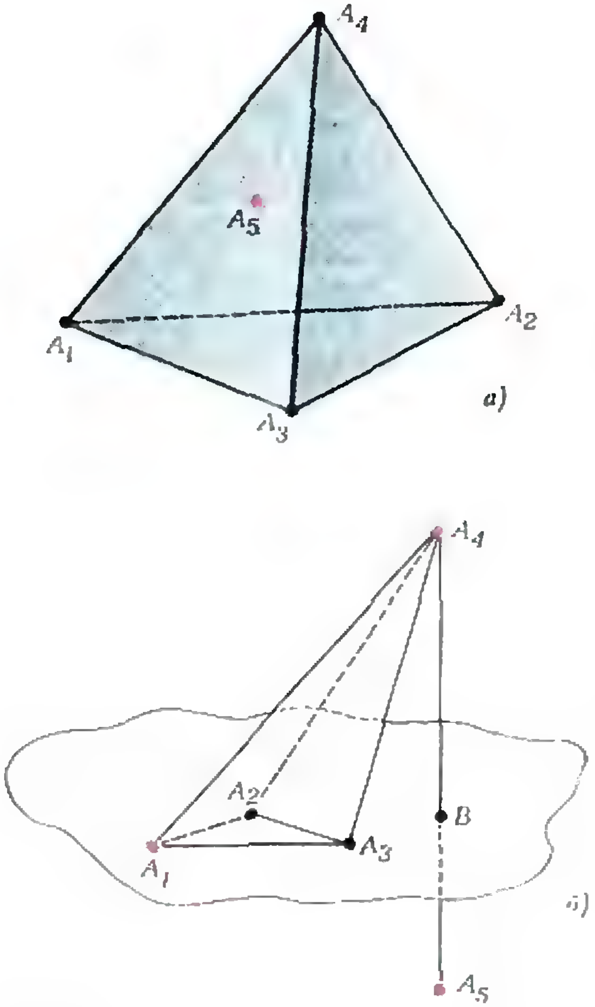


Рис. 6.

Принцип «разделяй и властвуй» скоро нам понадобится, а тем временем мы узнали о выпуклости достаточно, чтобы заняться освещением пространства. Осталось только разобраться с тем, что такое конус.

Конус — это шаг от малого к большому

Бывалый школьник не раз видел пучок света от отдаленного прожектора. Поэтому он уже догадался, что математическое определение конуса таково:

Конусом (бесконечным) называется множество, состоящее из точек лучей, выходящих из одной и той же точки, называемой вершиной конуса.

Само определение подсказывает, как построить примеры конусов: нужно взять лучи, выходящие из точки O и проходящие через какое-либо множество M. (Говорят, что такой конус порожден множеством M.) Если в качестве M взять круг в пространстве, не содержащий O, то получится круговой конус, а если многоугольник — то многогранный. Если лучи заменить отрезками, то получатся соответственно «школьный» круговой конус и пирамида. А что получится, если O лежит внутри круга? А если на его граничной окружности?

«Маленькое» множество может породить «большой» конус. Вот важный пример: если точка O лежит строго внутри тетраэдра T (т. е. не на его границе), то все пространство — это конус, порожденный границей тетраэдра T. «Маленький» тетраэдр породил бесконечное пространство.

Можно сконструировать несметное количество конусов, воспользовавшись следующими свойствами конусов с общей вершиной: непустое пересечение таких конусов — конус, объединение — тоже конус.

Дочитавший до этого места школьник знает, что выпуклый конус — это конус, являющийся выпуклым множеством. Например, если конус порожден выпуклым множеством, то он тоже выпуклый. Заметим при этом, что если у выпуклого конуса, не содержащего противоположно направленных лучей, удалить его вершину, то оставшееся множество будет по-прежнему выпукло.

Освещение пространства

Пора наконец осветить пространство. «Математическая суть» нашей задачи такова: в пространстве имеются четыре выпуклых конуса K_1, K_2, K_3, K_4 с общей вершиной O, ни один из которых не содержит противоположно направленных лучей. Кроме того, любые три из них имеют общий луч, а пересечение всех четырех — это точка O. Нужно доказать, что объединение K конусов K_1, K_2, K_3, K_4 — это все пространство.

Упражнение 3. Сформулируйте и докажите аналогичный результат для освещения плоскости.

Внимательный школьник помнит, что, собственно говоря, мы уже сделали первый шаг к освещению пространства: мы заметили, что достаточно построить тетраэдр T, граница которого содержится в K, так, чтобы точка O лежала внутри T.

Сейчас мы такой тетраэдр построим. Выберем в пространстве четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 следующим образом: A_i — это какая-либо отличная от O точка из пересечения трех конусов K_j с номерами j, не равными i. Пусть T — выпуклая оболочка conv (A_1, A_2, A_3, A_4). Теперь надо только показать, что T — тетраэдр, граница которого содержится в K, и что O лежит внутри T (см. рис. 7 для случая плоскости).

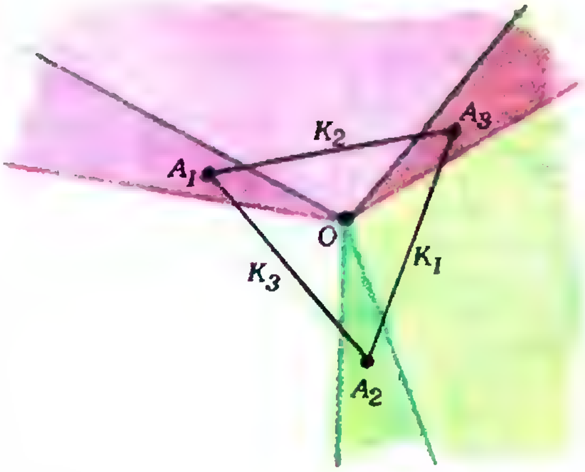


Рис. 7.

Надеемся, что школьник еще не забыл принцип «разделяй и властвуй». Настало время его применить. Итак, по теореме Радона множество $\{O, A_1, A_2, A_3, A_4\}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества M и N таких, что conv (M) пересекает conv (N). Для определенности будем считать, что точка O содержится в M.

Разделение произошло. Пора властвовать. Обозначим через I множество индексов i, таких, что A_i содержится в M, а через J множество индексов j, таких, что A_j содержится в N (заметим, что I может быть пустым, а J — нет). Тогда в силу выпуклости K_j множество conv (M) лежит в K_j для всех j из J, а conv (N) — в K_i для всех i из I. Так как любой номер 1, ..., 4 содержится либо в I, либо в J, то пересечение conv (M) и conv (N) содержится в пересечении K_1, K_2, K_3, K_4, а следовательно, состоит только из точки O. Значит, O содержится в conv (M), и тем самым в T.

Итак, O лежит в T. Следующий шаг состоит в том, чтобы убить сразу двух зайцев. Если мы докажем, что O не принадлежит выпуклой оболочке никаких трех точек из числа A_1, ..., A_4, то тогда, во-первых, точки A_1, ..., A_4 не лежат в одной плоскости и, тем самым, T — тетраэдр, а во-вторых, O лежит строго внутри T.

Спокойно! Переходим к убийству зайцев. Предположим, что O содержится в conv (A_1, A_2, A_3), т. е. O лежит в треугольнике с вершинами A_1, A_2 A_3 (или на его границе). Так как O не совпадает ни с одной из точек A_i, то O лежит на некотором отрезке с концами B и C на сторонах треугольника, который, в свою очередь, в силу выпуклости принадлежит K_4. Тем самым K_4 содержит противоположно направленные лучи OB и OC, что противоречит условию.

Остался последний шаг: доказать, что граница T содержится в K. Ну, это просто: граница состоит из четырех треугольников, каждый из которых содержится в одном из конусов K_j (действительно K_j — выпуклый конус, содержащий все A_i при i, не равном j). Следовательно, граница T принадлежит K.

Цель достигнута, пространство освещено.

Экономить стоит

Щедрый школьник наверняка уже задался вопросом: «Если уж речь идет о такой грандиозной задаче, как освещение всего пространства, то стоит ли экономить на прожекторах. Можно ли, например, осветить все пространство, имея пять выпуклых световых конусов с общей вершиной O, каждые четыре из которых имеют общий луч?» Ответ на этот вопрос об экономии дает знаменитая теорема Хелли:

Если в пространстве даны n выпуклых множеств, где $n > 4$, каждые четыре из которых пересекаются, то все n множеств также имеют общую точку.

Конечно же, пять выпуклых множеств, получающиеся удалением вершины O из каждого конуса, удовлетворяют условию теоремы Хелли, и тем самым, имеют общую точку, скажем A. Но тогда луч противоположно направленный по отношению к лучу OA, не содержится ни в одном из конусов. Пространство не удалось осветить полностью пятью прожекторами. Экономить на прожекторах стоит.

Итак, уважаемый школьник, теорема Хелли спасла нас от лишних и бесполезных затрат. Она выручает и во многих других случаях. А кроме того, она — яркое воплощение принципа «разделяй и властвуй». Сейчас мы это увидим.

Теорема Хелли доказывается индукцией по числу множеств n. Пусть X_1 $X_2, \ldots$ X_n — выпуклые множества, удовлетворяющие условию теоремы. Если $n=4$, то все множества имеют общую точку по условию. Предположим, что утверждение теоремы справедливо для $n=k$, и докажем его для $n=k+1$.

Рассмотрим все множества $X_1, \ldots$ $\ldots, X_{k+1}$, кроме X_i. По условию каждые 4 из них пересекаются, а значит по предположению индукции эти k множеств имеют непустое пересечение. Пусть A_i — какая-либо точка из этого пересечения.

Разделяй! По теореме Радона множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ можно разбить на два непересекающихся подмножества M и N такие, что conv (M) и conv (N) имеют непустое пересечение.

Властвуй! Обозначим через I множество индексов i, таких что A_i содержится в M, а через J множество индексов j, таких, что A_j содержится в N. Вспомним, что при i, не равном j, точка A_i содержится в X_j. Следовательно, все точки A_i из M содержатся в каждом из множеств X_j, где j из J. И наоборот, все точки A_j из N содержатся в каждом из множеств X_i, где i из I. В силу выпуклости conv (M) лежит в каждом X_j при j из J, а conv (N) лежит в каждом X_i при i из I. Таким образом, пересечение conv (M) и conv (N) содержится во всех множествах $X_1, \ldots, X_{k+1}$, что и доказывает теорему.

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите теорему Хелли для случая плоскости. (В справедливости теоремы Хелли для плоскости можно убедиться, наблюдая за выпуклыми пятнами света на сцене театра или арене цирка.)

Еще кое-что о выпуклости

Все, о чем мы здесь рассказали, относится к комбинаторной геометрии выпуклых множеств. Заинтересовавшемуся школьнику рекомендуем найти и прочитать книгу И. Яглома и В. Болтянского «Выпуклые фигуры». Главы, посвященные выпуклым множествам, имеются также в 5 томе «Энциклопедии элементарной математики» и книге Д. Шклярского, Н. Ченцова и И. Яглома «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии».

Везде, где решаются задачи на максимум (минимум), естественным образом «возникают» выпуклые множества (даже если их и не было в условии задачи), а также тесно связанные с ними выпуклые функции. Подробнее об этом любознательный школьник может прочесть в книге В. Тихомирова «Рассказы о максимумах и минимумах», вышедшей в «Библиотечке «Кванта».

Выпуклые множества возникают и в задачах, связанных с преследованиями. Вот одна из них:

На плоскости таракан убегает от пауков-телепатов, которые в любой момент знают, в каком направлении и с какой скоростью он намерен ползти, и могут мгновенно менять свои скорости. Максимальные скорости всех насекомых одинаковы. При каких начальных условиях таракан сможет убежать, а при каких — нет?

Справившись с этой задачей, можете решить аналогичную про муху и ос в пространстве.

„Квант" улыбается

Прямая речь
(физико-математическая)

Абсолютный ноль — «И в мыслях нет».

Аксиома — «Будут требовать доказательства — уйду в теоремы».

Биссектриса — «Всю жизнь приходится делить поровну».

Вакуум — «Прошу не путать с пустотой».

Вибрация — «А меня колотит и трясет».

Влажность — «Всегда из-за гигрометров моя репутация оказывается подмоченной».

Выпрямитель — «Веду борьбу с искривлениями».

Высота — «Все дело в основании».

Гипотенуза — «Ну и что с того, что я длинней, катетов-то все равно больше».

Гистерезис — «Что наша жизнь — петля!»

Градус — «Трудно всегда быть под градусом».

Диэлектрик — «Ничего никуда проводить не буду!»

Закон Архимеда — «Да не утонет знающий меня!»

Знак умножения — «Нас иногда путают со знаком сложения, но ведь мы на все смотрим под своим углом».

Инерция — «Движение — это сила...»

Квадрат — «Я за равенство».

Константа — «Не могу поступиться принципом».

Окружность — «Вот что время делает с квадратом».

Параллельная прямая — «Легче встретиться с Лобачевским, чем с подругой».

Периметр — «Приходится держать площадь в рамках».

Пирамида — «Могу похвастаться родословной. Еще в Древнем Египте...»

Погрешность — «Все могу простить, кроме ошибок».

Развернутый угол — «Прямые считают меня углом, а углы — прямой линией».

Рентген — «Я вас насквозь вижу».

Свет — «Тьма тоже распространяется со скоростью света».

Скорость — «Помогаю распространяться».

Смесь — «С кем поведешься, от того и наберешься».

Теорема — «Все время приходится кому-то доказывать».

Ток — «За электронами нужен глаз да глаз».

Турбулентность — «Не могу без завихрений».

Уравнение — «Мое дело приравнять, а там...»

Цепь — «Если бы не было звеньев, то не было бы и меня».

Шум — «Чтобы со мной бороться, тоже нужно шуметь».

Эталон — «На меня все равняются».

Е. Лапин

Задачник „Кванта“

Задачи

М1296 — М1300, Ф1303 — Ф1307

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 октября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1296» или «Ф1303». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1296—М1300 и Ф1303—Ф1307 предлагались на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1296. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

И. Воронович

М1297. Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,$$
$$\beta-3\beta^2+5\beta=5.$$

Найдите $\alpha+\beta$.

Б. Кукушкин

М1298. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

А. Берзиньш

М1299. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньшее, чем $1/n$.

Б. Берлов

М1300. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса.

Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный ответ (но может быть, что все ответы верные).

Примечание: если у вас получаются только планы с более чем 105 вопросам, напишите лучший из них.

А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский

Задачник „Кванта"

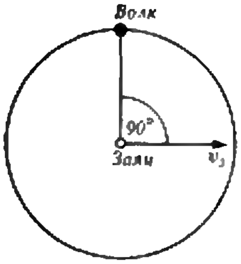


Рис. 1.

Ф1303. На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R=10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк — как вы уже догадались — на окружности. Заяц может двигаться по прямой с постоянной скоростью $v_0=2$ м/с, как показано на рисунке 1. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения на льду $k=0{,}05$. Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая.

А. Зильберман

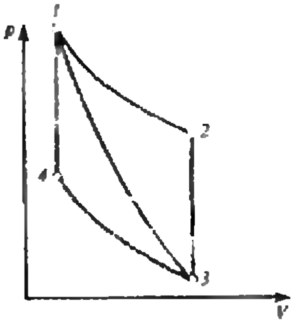


Рис. 2.

Ф1304. КПД тепловой машины в цикле $1-2-3-1$ (рис. 2), состоящем из изотермы $1-2$, изохоры $2-3$ и адиабаты $3-1$, равен η_1. В цикле $1-3-4-1$, состоящем из адиабаты $1-3$, изотермы $3-4$ и изохоры $4-1$, КПД равен η_2. Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу $1-2-3-4-1$? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

А. Шеронов

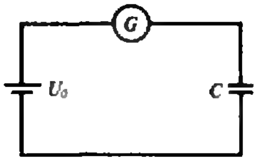


Рис. 3.

Ф1305. В схеме на рисунке 3 напряжение батарейки $U_0=10$ В, емкость конденсатора $C=1$ мкФ, сопротивление гальванометра $R=1$ кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до 1000 мкФ? При такой частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.

З. Рафаилов

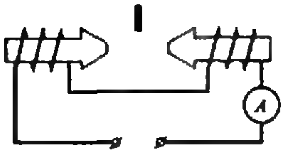


Рис. 4.

Ф1306. Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита практически без ускорения (рис. 4).

В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью v при токе в обмотке $I_1=0{,}41$ А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в обмотке $I_2=1{,}39$ А.

При каком токе диск из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого материала сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе $I_3=0{,}29$ А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из прилагаемой таблицы (см. с. 24).

С. Кожел

Таблица

Материал	ρ, Ом мм^2/м (при 20 °С)	α, град$^{-1}$ (при 20 °С)	Плотность, г/см^3	Температура плавления, °С
Алюминий	0,032	0,038	2,6—2,8	660
Бронза	0,12	0,004	7,4—8,8	1000
Вольфрам	0,055	0,0051	19,0	3387
Золото	0,024	0,0039	19,3	1063
Кобальт	0,097	0,0033	8,8	1490
Латунь	0,06—0,09	0,001—0,007	8,4—8,7	900
Медь	0,017	0,0043	8,6—9,0	1083
Молибден	0,048	0,0050	10,2	2622
Никель	0,11	0,0027	8,8	1452
Олово	0,11	0,0044	7,3	232
Платина	0,09	0,0038	21,4	1773
Свинец	0,21	0,0042	11,3	327
Серебро	0,016	0,0040	10,5	961
Сталь	0,199	0,0016—0,0042	7,5—7,9	1500
Хром	0,027	0,0042	6,7	1700
Цинк	0,060	0,0039	6,8—7,1	419

Ф1307. Квант электромагнитного излучения испытывает рассеяние на покоящемся электроне (так называемый Комптон-эффект). При этом рассеянный квант изменяет частоту, а электрон получает импульс отдачи p. Определите, под какими углами по отношению к направлению падающего излучения может двигаться электрон с данным импульсом. Считайте, что скорость электрона существенно меньше, чем скорость света.

Ю Самарский

Решения задач

М1271—М1275, Ф1283—Ф1287

М1271. Дана полуокружность с диаметром AB. Постройте хорду MN, параллельную AB, так чтобы трапеция AMNB была описанной.

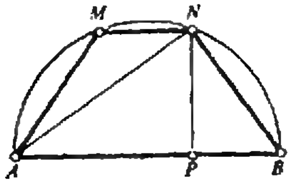


Рис. 1.

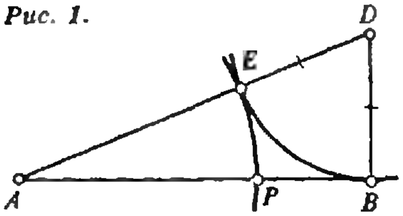


Рис. 2.

Пусть $AMNB$ — искомая трапеция и NP — ее высота. Так как трапеция вписана в окружность, то ее боковые стороны равны. Но трапеция является и описанной, поэтому каждая из ее боковых сторон равняется полусумме оснований, т. е. отрезку AP. Из подобия треугольников ANB и NPB (рис. 1) следует равенство

$$AP^2=NB^2=AB\cdot BP, \qquad (*)$$

т. е. точка P делит отрезок AB, как говорят, «в крайнем и среднем отношении». Построение такой точки можно выполнить следующим образом: восставим к AB перпендикуляр $BD=\frac{1}{2}AB$ (рис. 2), отложим на отрезке AD отрезок $DE=DB$, а на AB отрезок $AP=AE$. Если $AB=2$, то, как легко проверить, $AP=\sqrt{5}-1$ и для точки P выполнено соотношение (*).

Затем можно, восставив перпендикуляр PN в точке P к отрезку AB до пересечения с полуокружностью, построить искомую равнобочную трапецию $AMNB$ и доказать (используя подобие треугольников), что ее боковая сторона равна AP, т. е. полусумме оснований, следовательно, она описанная.

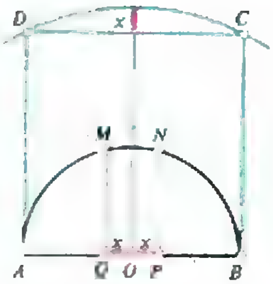


Рис. 3.

Еще один из многих возможных способов построения трапеции основан на идее, изложенной в статье «Правильные многогранники и повороты» («Квант» № 10, 1989). Строим квадрат $ABCD$, проводим через его вершины C и D дугу окружности с центром в точке O — середине стороны AB (рис. 3). Восставим из точки O перпендикуляр к AB, его отрезок x (он равен $\sqrt{5}-2$) между квадратом и построенной дугой окружности отложим от точки O влево и вправо по отрезку AB. Полученные точки Q и P — проекции вершин M и N трапеции на основание AB.

В. Сендеров

М1272. *Докажите, что для любых n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство*

$$(1/a_1^2-1)(1/a_2^2-1)\ldots$$
$$\ldots(1/a_n^2-1)\geqslant(n^2-1)^n.$$

Если сближать два числа u, v $(0<u<v<1)$ так, чтобы их сумма оставалась постоянной, то произведение $uv=(u+v)^2/4-(u-v)^2/4$ увеличивается, а произведение $(1/u^2-1)(1/v^2-1)=(1-u^2-v^2+u^2v^2)/u^2v^2=(1-(u+v^2)/u^2v^2+2uv+1$ уменьшается. Из n чисел с суммой 1, среди которых не все равны $1/n$, найдется число u, меньшее $1/n$, и число v, большее $1/n$ (подобное соображение играло ключевую роль в «самом коротком доказательстве теоремы Коши», см. статью Ю. П. Соловьева в «Кванте» № 3 за этот год). Будем сближать u и v, сохраняя сумму, до тех пор, пока одно из них не станет равным $1/n$; при этом произведение $P=(1/a_1^2-1)\times\ldots\times(1/a_n^2-1)$ будет уменьшаться. Если в полученном наборе еще не все числа равны $1/n$, можно повторить эту процедуру с другой парой чисел и поступать так до тех пор, пока все числа не станут равны $1/n$; при этом P станет равным $(n^2-1)^n$. Тем самым, первоначально произведение P было не меньше этой величины.

Л. Курляндчик

М1273. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC как на основаниях вне его построены подобные равнобедренные треугольники ABC_1, CBA_1 и CAB_1, у каждого из которых отношение высоты к основанию равно k. Такие же треугольники ABC_2, CBA_2 и CAB_2 построены и по другую (внутреннюю) сторону от оснований. Докажите, что площади S, S_1 и S_2 треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ связаны соотношением*

$$S_1\pm S_2=S(1/2+6k^2)$$

(знак «+» или «—» зависит от ориентации тре-

Вершины треугольников с площадями S_1 и S_2 лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника ABC, проходящих через центр O его описанной окружности. Если R — радиус этой окружности, α, β, γ — углы треугольника ABC, то (см. рис. 1) $2S_1$ равно

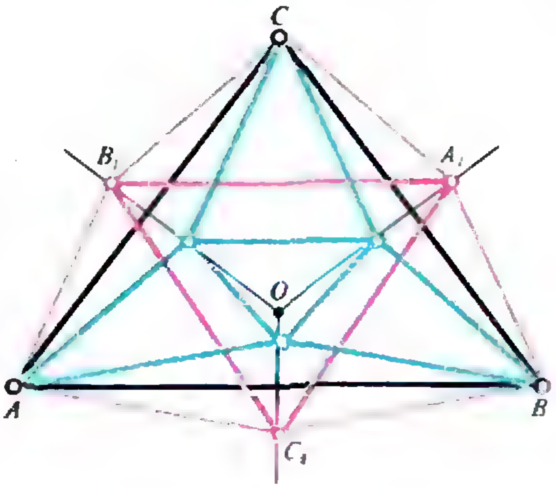


Рис. 1.

угольника $A_2B_2C_2$ по отношению к ABC).

сумме

$$OA_1OB_1\sin\gamma+OB_1OC_1\sin\alpha+OC_1OA_1\sin\beta,$$

поскольку синусы углов между перпендикулярами равны синусам углов между соответствующими сторонами. Пусть t — тангенс угла наклона стороны равнобедренного треугольника к основанию ($t=2k$), тогда отрезки от O до вершин легко выразить через радиус R и получить:

$$\begin{aligned}\frac{2S_1}{R^2}=&(\cos\alpha+t\sin\alpha)(\cos\beta+t\sin\beta)\sin\gamma+\\&+(\cos\beta+t\sin\beta)(\cos\gamma+t\sin\gamma)\sin\alpha+\\&+(\cos\gamma+t\sin\gamma)(\cos\alpha+t\sin\alpha)\sin\beta.\end{aligned}\tag{1}$$

А отношение $2S_2/R^2$ (для случая, изображенного на рисунке 1) равно аналогичному выражению, где вместо t стоит $-t$. Сложив оба эти выражения и раскрыв скобки, мы увидим, что коэффициент при t в первой степени равен 0, коэффициент при t^2 равен $6\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, а свободный член (здесь нужно использовать равенство $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1$) равен $2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. По известной формуле $S=abc/(4R)$, выражающей площадь S через стороны a, b, c и R,

$$2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=2abc/(8R^3)=S/R^2$$

Отсюда получаем нужную формулу

$$S_1+S_2=\frac{1+3t^2}{2}S=S\left(\frac{1}{2}+6k^2\right).\tag{2}$$

Эти рассуждения необходимо несколько уточнить, чтобы они оказались применимы не только для случая, изображенного на рисунке 1, но и для тупоугольного треугольника ABC, и для случая, когда внутренние треугольники налегают друг на друга, в частности, когда $A_2B_2C_2$ имеет противоположную ориентацию. Вместо этого мы посмотрим на наши вычисления с более общей точки зрения.

Верен такой общий факт: если три точки K, L и M с постоянными скоростями движутся по трем прямым, то площадь ориентированного треугольника KLM как функция времени t выражается квадратным трехчленом от t: $S=F(t)$. Легко доказать это, например, с помощью метода координат. (Формула ориентированной площади треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) выглядит так:

$$S=(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)/2.$$

Ясно, что если каждая координата выражается линейной функцией от t, то S — квадратный трехчлен от t).

Будем считать, что при $t=0$ наши точки совпадают с серединами сторон треугольника ABC и двигаются по серединным перпендикулярам (при $t>0$ во внешнюю сторону) со скоростями, пропорциональными длинам a, b, c соответствующих сторон треугольника: при не-

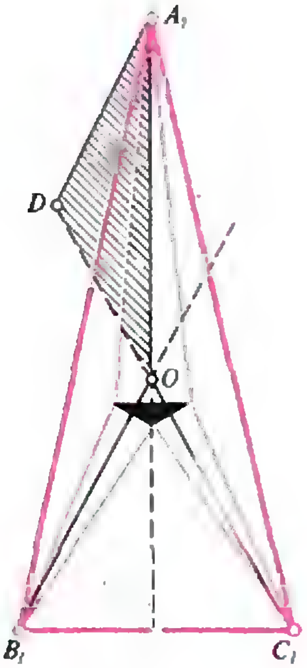


Рис. 2.

котором t они занимают положения A_1, B_1, C_1, а при противоположном значении $(-t)$ — положения A_2, B_2, C_2. Нас интересует сумма $F(t)+F(-t)$, то есть свободный и старший (содержащий t^2) члены $F(t)$, которые по существу мы и вычисляли выше (1).

Интересно заметить, однако, что они имеют геометрический смысл, так что можно найти их без вычислений. Свободный член $F(0)$ — это $S/4$ (площадь треугольника из средних линий ABC). Чтобы найти старший коэффициент,— он определяется как отношение площади S_1 к t^2 в пределе при t стремящемся к бесконечности,— заметим, что при очень большом t треугольник ABC можно считать «почти точкой» O. При этом векторы OA_1, OB_1, OC_1 перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника и им пропорциональны (с коэффициентом $t/2=k$). Сумма этих векторов OA_1, OB_1 и OC_1 равна нулю (как и векторов, образующих стороны треугольника), то есть они служат отрезками медиан треугольника $A_1B_1C_1$, причем последний по площади в 3 раза больше треугольника A_1OD (рис. 2), подобного ABC с коэффициентом k. Отсюда ясно, что старший член $F(t)$ имеет вид $3k^2S=3t^2S/4$.

Итак, $F(t)=S(1+\ldots+3t^2)/4$, откуда следует нужная формула (2) для $S_1 \pm S_2=F(t)+F(-t)$.

Отметим интересные частные случаи нашей формулы: если на сторонах строятся правильные треугольники, то $t=\sqrt{3}$, так что $S_1 \pm S_2=5S$; если равнобедренные прямоугольные, —$t=1$ и $S_1 \pm S_2=2S$, а если $t=\sqrt{3}/6$ (при этом новые точки — центры правильных треугольников, построенных на сторонах), то $S_1 \pm S_2=S$.

А. Елизаров, Р. Сарбаш, Н. Васильев

M1274. *Докажите, что разность между числами*

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}}$$

и

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}}$$

по модулю не превосходит $\frac{1}{(n-1)!n!}$.

Пусть $a_k=k+\cfrac{1}{k+1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1}}}$, $b_k=k+\cfrac{1}{k+1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{n-1+\cfrac{1}{n}}}}$

— «хвосты» двух данных цепных дробей, начинающиеся с k, и h_k — абсолютная величина разности между ними. Тогда

$$a_{k-1}-b_{k-1}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{b_k}=\frac{b_k-a_k}{a_kb_k},$$

так что $h_{k-1}<h_k/k^2$ при $k=2, 3, \ldots, n-1$ (поскольку $a_k>k$ и $b_k>k$); $h_{n-1}=1/n$. Отсюда интересующая нас разность оценивается так:

$$h_1<\frac{h_2}{2^2}<\frac{h_3}{2^23^2}<\ldots<\frac{h_{n-1}}{2^23^2\ldots(n-1)^2}=\frac{1}{(n-1)!n!}.$$

Г. Гальперин

М1275*. *Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ такова, что при любом $k \geqslant 1$*

$$a_{k+2}=a_k a_{k+1}+1.$$

Докажите, что при $k \geqslant 9$ число a_k-22 — составное.

Пусть $k>8$. Будем рассматривать остатки от деления чисел a_i, $i>k-6$, на $m=a_{k-6}$. Мы используем запись $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ для обозначения того, что числа a и b дают одинаковый остаток при делении на m, и пользуемся тем, что остаток суммы (и произведения) равен остатку суммы (соответственно произведения) остатков этих чисел (см. статью А. Егорова в «Кванте» № 6, 1991).

Поскольку $a_{k-5}=a_{k-6}a_{k-7}+1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$

и $a_{k-4}=a_{k-5}a_{k-6}+1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$,

то $a_{k-3}=a_{k-4}a_{k-5}+1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, m)$,

$$a_{k-2}=a_{k-3}a_{k-4}+1 \equiv 3 (\mathrm{mod}\, m),$$
$$a_{k-1}=a_{k-2}a_{k-3}+1 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, m),$$
$$a_k=a_{k-1}a_{k-2}+1 \equiv 22 (\mathrm{mod}\, m).$$

Откуда следует, что a_k-22 делится на a_k. Конечно, точно так же можно доказать, что (начиная с некоторого k) будут составными и числа a_k-b, где b — любое другое число последовательности 1, 1, 2, 3, 7, 22, ..., определяемой тем же рекуррентным соотношением: каждое число на 1 больше произведения двух предыдущих.

С. Генкин

Ф1283. *Перед закрытым шлагбаумом стоит человек с тяжелой тележкой. Ему нужно как можно быстрее попасть в магазин, находящийся на расстоянии 300 м от шлагбаума. Максимальная сила, с которой человек может действовать на тележку, 500 Н, наибольшая скорость тележки 5 м/с, масса нагруженной тележки 2000 кг. Известно, что шлагбаум откроется ровно через 30 с. За какое минимальное время человек сможет доставить груз в магазин?*

Понятно, что к тому моменту, когда откроется шлагбаум, скорость тележки должна быть как можно большей. Значит, за $t_0=30$ с тележку нужно откатить назад, затормозить и начать разгон вперед.

Пусть время на движение назад равно t, причем $t/2$ уходит на разгон с максимальным ускорением и еще столько же — на торможение. Тогда на разгон вперед остается время t_0-t. Найдем, какую же скорость получит тележка перед открывающимся шлагбаумом:

$$a=\frac{F}{M}=\frac{500\ \text{Н}}{2000\ \text{кг}}=0{,}25\ \text{м/с}^2,$$

$$\frac{a(t_0-t)^2}{2}=\frac{a(t/2)^2}{2}+\frac{a(t/2)^2}{2} \Rightarrow t_0-t=t_0(\sqrt{2}-1),$$

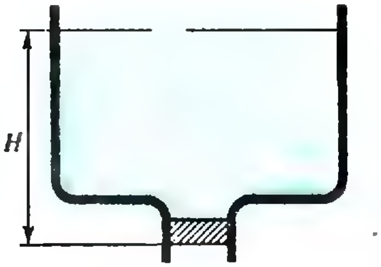
$$v=a(t_0-t)=at_0(\sqrt{2}-1) \approx 3\ \text{м/с} < v_m=5\ \text{м/с}.$$

Итак, к шлагбауму тележка подъезжает со скоростью v, затем разгоняется до скорости v_m, потом движется равномерно и, наконец, тормозится до остановки (вообще говоря, в условии задачи о погашении скорости тележки перед магазином прямо не говорится). Окончательно, время движения тележки до магазина после открытия шлагбаума будет равно

$$t_x=\frac{v_m-v}{a}+\frac{l-(v_m^2-v^2)/(2a)-v_m^2/(2a)}{v_m}+\frac{v_m}{a} \approx 72\ \text{с}.$$

А. Коршков, Н. Коршкова

Ф1284. Большой сосуд массой m заполняют водой через небольшое отверстие в дне сосуда (см. рисунок). Для того чтобы закачать в сосуд воду массой M, пришлось совершить работу A. Отверстие открывают, и вода начинает вытекать. Одновременно поднимают сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли. Какую работу придется совершить до того момента, когда сосуд опустеет?



Если отверстие в дне сосуда мало́, скорость понижения уровня воды h в сосуде тоже мала, а из отверстия вода вытекает со скоростью $v=\sqrt{2gh}$. Действительно, пусть за небольшое время Δt из сосуда вытек небольшой объем воды ΔV. Состояния воды в начале и в конце промежутка Δt отличаются тем, что потенциальная энергия слоя массой $\rho\Delta V$, находящегося раньше на высоте h, перешла в кинетическую энергию вытекшей воды тоже массой $\rho\Delta V$:

$$\rho\Delta Vgh=\rho\Delta V\frac{v^2}{2} \Rightarrow v=\sqrt{2gh}.$$

(Как известно, с такой скоростью движется тело, упавшее с высоты h.)

Когда мы поднимаем сосуд так, чтобы верхняя граница воды в нем оставалась на одной высоте относительно земли, мы перемещаем сосуд с очень малой скоростью, так что скорость вытекания воды относительно земли можно считать равной скорости ее вытекания относительно сосуда.

Рассмотрим весь процесс, описанный в условии задачи, в целом. В самом начале вся вода находилась на уровне отверстия в дне сосуда. При закачивании в сосуд воды была совершена работа A. Затем вода снова попала на прежний уровень, причем так, как будто она свободно падала с высоты H. При этом вода потеряла энергию, равную MgH. Значит, поднимая воду, мы совершаем работу MgH. Плюс еще на поднятие самого сосуда мы израсходовали энергию mgh.

Итак, окончательно, нам придется совершить работу

$$A'=(M+m)gh-A.$$

Н. Кузьма

Ф1285. На квадратном деревянном плоту размером 2×2×0,3 м, сделанном из дерева плотностью 800 кг/м³, стоит физик массой 80 кг. На какое расстояние от центра плота он должен отойти, чтобы край плота окунулся в воду?

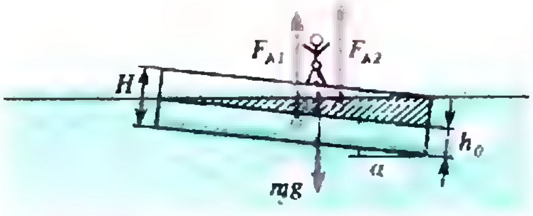
Пусть в начальный момент человек находится в центре плота. Запишем условие равновесия системы «человек — плот» в виде

$$Mg+mg=\rho_{в}gSh,$$

где m — масса человека, $M=\rho V$ — масса плота, $\rho_{в}$ — плотность воды, S — площадь плота, h — глубина погружения его в воду. Отсюда находим

$$h=0{,}26\ \text{м}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда человек отошел от центра на расстояние l, и край плота окунулся в воду (см. рисунок). Поскольку система по-прежнему



находится в равновесии, объем погруженной части плота измениться не должен:

$$Sh = SH - \frac{S(H-h_0)}{2},$$

откуда находим

$$h_0 = 0{,}22 \text{ м}.$$

Нам осталось записать уравнение моментов сил относительно центра масс плота. Моменты создают следующие силы (только они и изображены на рисунке): сила тяжести человека $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_{A1}$, действующая на погруженную незаштрихованную на рисунке часть плота, и архимедова сила $\vec{F}_{A2}$, действующая на заштрихованный участок, причем точка ее приложения лежит в точке пересечения медиан выделенного треугольника (т. е. плечо этой силы равно $L/2 - L/3 = L/6$, где $L = 2$ м — длина плота). Поэтому получаем равенство

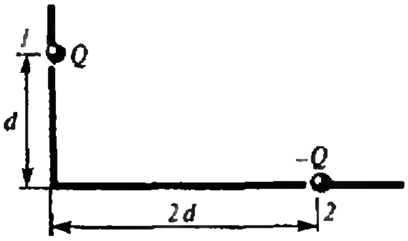
$$mgl\cos\alpha + \rho_в L^2 h_0 g\frac{H-h_0}{2}\sin\alpha = \rho_в L^2\frac{H-h_0}{2}g\frac{L}{6},$$

из которого, учитывая малость угла α, находим искомую величину l:

$$l \approx \frac{\rho_в L^3(H-h_0)}{12m} \approx 0{,}67 \text{ м}.$$

А. Коршков

***Ф1286.** На непроводящий стержень, изогнутый под прямым углом, насажены две бусинки равной массы M, несущие заряды противоположных знаков Q и —Q (см. рисунок). В начальный момент бусинки неподвижны и находятся на расстояниях d и 2d от вершины угла. Отпустим их. Где окажется «дальняя» бусинка в тот момент, когда «ближняя» доедет до вершины угла? Найдите скорости бусинок в тот момент, когда расстояние между ними составит d.*



Поскольку массы бусинок одинаковы, их ускорения — они определяются соответствующими проекциями силы электрического взаимодействия — оказываются пропорциональными расстояниям до вершины угла. Это означает, что и скорости, и перемещения бусинок тоже пропорциональны этим расстояниям. Тогда на первый вопрос можно ответить сразу — бусинки доедут до вершины угла одновременно.

Теперь — второй вопрос. Пусть в тот момент, когда расстояние между бусинками составляет d, скорость первой бусинки равна v_1, а второй — v_2. Сразу же заметим, что $v_2 = 2v_1$, и запишем закон сохранения энергии замкнутой системы:

$$-\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{d^2+4d^2}} = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Mv_1^2}{2} + \frac{M(2v_1)^2}{2}.$$

Отсюда получаем

$$v_1 = Q\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 dM}}, \quad v_2 = 2Q\sqrt{\frac{1-1\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 dM}}.$$

К. Зуев

Ф1287. Неподалеку от включенного в сеть трансформатора поместили замкнутый виток из медной проволоки. Ток в нем оказался сдвинутым по фазе на $\pi/4$ относительно тока в обмотке трансформатора. Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая в витке, если сделать его не из меди, а из нихрома, сохранив все размеры неизменными? У нихрома удельное сопротивление в 65 раз выше, чем у меди. Амплитуду тока в обмотке трансформатора считать одинаковой в обоих случаях.

ЭДС индукции $\mathcal{E}$, возбуждаемая в витке, одинакова в обоих случаях. Для расчета тока в витке нужно учитывать как активное сопротивление, так и индуктивное:

$$X_{\text{общ}}=\sqrt{R^2+X_L^2}\,.$$

В первом случае сдвиг фаз равен $\pi/4$, следовательно, активное и индуктивное сопротивления медного витка равны друг другу. Во втором случае активное сопротивление много больше индуктивного (в 65 раз). Это означает, что сдвиг по фазе тока в нихромовом витке относительно тока в обмотке трансформатора практически равен нулю, а общее сопротивление витка равно его активному сопротивлению.

Теперь найдем отношение мощностей, рассеиваемых в витках:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\mathcal{E}^2/(65R)}{\left(\mathcal{E}/\sqrt{R^2+R^2}\right)^2R}=\frac{2}{65}=\frac{1}{32{,}5}\,.$$

А. Зильберман

Информация

Экономико-математическая школа при МГУ

Экономико-математическая школа при МГУ существует с 1968 года. Занятия проходят в вечернее время 2 раза в неделю. В школе обучаются ученики 9—11 классов. Обучение бесплатное.

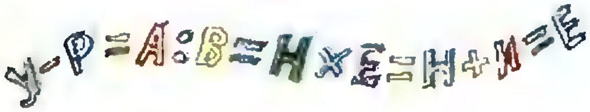
Бо́льшее внимание уделяется изучению теоретических закономерностей экономики (элементы маркетинга и менеджмента, финансов и делопроизводства присутствуют в ЭМШ лишь как второстепенные курсы). В программу школы входят как чисто математические курсы, дополняющие программу средней школы, так и экономико-математические, дающие слушателю представление об использовании математических методов и моделей в экономическом анализе.

Учебная программа строится как система спецкурсов, т. е. нет жестко заданных программ и предметов, повторяющихся из года в год. Каждый слушатель посещает два спецкурса: с экономической и математической ориентацией. Школьники имеют возможность выбирать предметы на свой вкус.

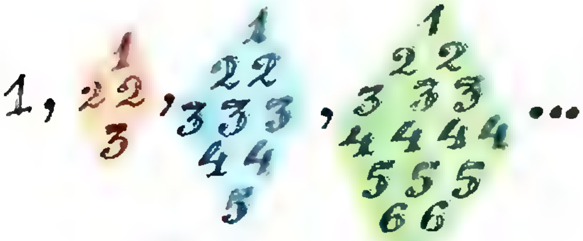
Если вас заинтересовала ЭМШ, приходите на экономический факультет МГУ (Москва, Ленинские горы, ул. Лебедева, 2 учебный корпус, ЭВШ). Вступительные экзамены — в третье воскресенье сентября, в 10 часов.

Задачи

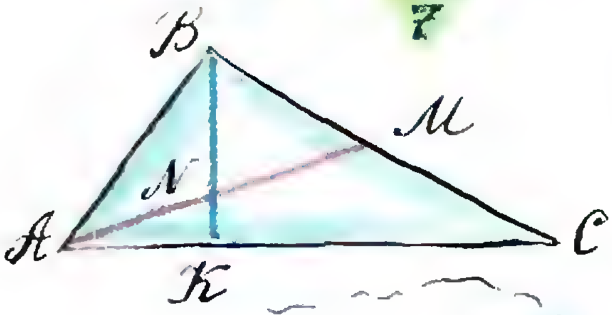
1. В мешке лежит 101 конфета. Малыш и Карлсон играют в такую игру: по очереди — первым Малыш, а вторым Карлсон — они берут из мешка от 1 до 10 конфет. Когда все конфеты разобраны, игроки подсчитывают взятое количество конфет. Если эти числа взаимно просты — выигрывает Малыш, если нет — Карлсон. Кто выиграет в этой игре и как ему нужно играть?



2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. Суммы чисел в ромбах подчиняются некоторой закономерности. Найдите ее и докажите справедливость вашей гипотезы.



4. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана, точка N — ее середина, прямая BN пересекает основание AC в точке K. В каком отношении точка K делит основание треугольника?

5. За десять дней пират Ерема
Способен выпить бочку рома,
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

Ерёма, мне оставь хоть каплю рома!

Первые четыре задачи нам предложили К. Кохась, Л. Мочалов, В. Произволов и В. Чичин. Стихотворение Сергея Сатина мы взяли из журнала «Крокодил» (№ 34, 1990 г.).

Мы продолжаем публикацию научно-популярных статей известного советского писателя Александра Волкова. Рассказ об этом писателе вы можете прочесть в предыдущем номере журнала.

Как появилась метрическая система мер

А. ВОЛКОВ

С древнейших времен люди стремились связать меры с неизменными величинами природы. С глубокой древности были известны такие меры длины, как фут, локоть, шаг. Все эти меры были весьма изменчивы, как изменчива хотя бы длина шага у разных людей. Впоследствии появились образцовые узаконенные меры длины, веса. Но в случае утраты точных образцов мер (эталонов) восстановить их было бы невозможно. Деление крупных мер на более мелкие было совершенно произвольным, и приходилось много времени тратить на заучивание таблиц мер и еще больше — на действия с именованными числами. Достаточно привести хотя бы русские дореволюционные меры длины: географическая миля — 7 верст, верста — 500 сажен, сажень — 3 аршина, аршин — 16 вершков, или: сажень — 7 футов, фут — 12 дюймов, дюйм — 10 линий.

Неудобства прежних систем мер и весов давно были замечены, и научная мысль работала над созданием простой, удобной системы мер и весов, которая была бы заимствована из природы и благодаря своим достоинствам получила бы всеобщее распространение. Такой международной системой является сейчас метрическая система мер, созданная во время Великой французской революции.

В те времена во Франции применялось больше 50 различных мер длины, объема и веса. Такое разнообразие мер приносило большой вред как внутренней, так и внешней торговле. Парижская Академия наук предложила в 1788 году принять за основную единицу длины десятимиллионную часть четверти земного меридиана. Измерения меридианов до того времени производились неоднократно, но были недостаточно точными. Решено было измерить дугу меридиана между городами Дюнкерком и Барселоной, около 9°30′, больше тысячи километров длиной.

Точные измерения таких больших расстояний весьма трудны; измерить их непосредственно нельзя, и приходится применять триангуляцию. Триангуляция состоит в том, что где-нибудь на ровном месте измеряется с большой точностью прямая линия в несколько километров длиной, так называемый базис. От этого базиса на местности последовательно строится ряд треугольников, стороны которых находятся вычислением. Одна из сторон последнего треугольника триангуляционной сети, уже определенная вычислением, измеряется. Разница между вычисленной длиной и длиной, полученной в результате измерения, показывает точность всей работы. За вершины треугольников берутся предметы, видимые издалека: колокольни, башни, высокие деревья и т. п. Астрономы направляют на эти предметы угломерные инструменты и измеряют углы треугольников, необходимые для вычисления сторон.

На протяжении тысячи километров от Дюнкерка до Барселоны надо было построить десятки треугольников и для определения их сторон произвести множество сложнейших вычислений. Эту работу Академия наук поручила двум талантливым астрономам — Мешену и Деламбру.

Им сразу же пришлось столкнуться с чрезвычайными трудностями. Король Людовик XVI издал указ, в котором местным властям предписывалось оказывать экспедиции всяческое содействие. Но королевская власть во Франции доживала последние дни. Революционные настроения в народе усиливались с каждым днем. На людей, являвшихся с королевским указом в руках, смотрели подозрительно. Уже на третьей станции от Парижа направлявшийся на юг Мешен был задержан гражданами, которые приняли его за контрреволюционного заговорщика. Только с помощью полиции ему удалось доказать свою невиновность и спастись от гибели.

Мешен начал свою работу в Испании, с самого южного пункта измеряемой дуги — Барселоны. Девять месяцев Мешен проработал очень успешно, а потом чуть не погиб. Производя наблюдения с водокачки, он сорвался, попал в передачу и получил несколько опасных переломов костей. Хотя через два месяца он снова принялся за работу, но от повреждений не оправился до самой смерти.

Работу Мешена осложнила война, которая вскоре началась между Францией и Испанией. Астроном оказался пленником, и лишь в 1794 году ему удалось добраться до родины.

Деламбру, измерявшему северную часть дуги, тоже пришлось столкнуться с большими трудностями. Он должен был проверить результаты прежних измерений, сделанных еще в 1740 году. Но многие сооружения, которые были использованы за пятьдесят лет до того, оказались разрушенными. Деламбру приходилось, часто с риском для жизни, взбираться на ветхие колокольни, поминутно грозившие падением. На некоторых старинных строениях можно было работать только в тихую погоду, а при ветре приходилось немедленно спускаться.

Пользование сигналами, особенно ночными, вызывало подозрительность народа. Хотя после свержения короля астрономы получили рекомендательные письма к местным республиканским властям от Национального Собрания, этого все же оказалось недостаточно. По ночам на высоких башнях загорались яркие фонари, свет которых был виден за десятки километров. Народ считал, что эти сигналы подаются иностранными шпионами: ведь Франция была окружена вражескими армиями, шедшими задавить революцию. Деламбру и его помощникам не раз приходилось попадать под арест; они вынуждены были читать гражданам популярные лекции для объяснения задач своей экспедиции.

Когда началась зима, возникли новые трудности. Астрономам приходилось целые дни проводить на узеньких площадках высоких колоколен, где наблюдатели ничем не были защищены от ветра, дождя и снега. Коченеющими от холода руками они должны были производить точнейшие измерения углов. Туманы делали отдаленные сигналы невидимыми. Деламбр напрасно старался увидеть одну колокольню в продолжение целых шести дней; чтобы сделать наблюдение, ему пришлось вернуться через несколько месяцев.

Так работали астрономы, борясь со стихиями и с вполне законной недоверчивостью революционного народа. И тем не менее все измерения производились с такой точностью, какая только была возможна при тогдашнем состоянии науки. Впоследствии оказалось, что измерения Мешена и Деламбра дали длину метра, отличающуюся от истинной длины сорокамиллионной части меридиана на 0,2 мм!

Работа Мешена и Деламбра позволила определить основную единицу длины — метр. С помощью греческих и латинских приставок (кило, гекто, дека, деци и т. д.) были образованы крупные и мелкие меры. Таблица мер упростилась до крайности, так как в основу ее легло число 10. Меры веса, жидкостей, сыпучих тел, денежные единицы — все было поставлено в зависимость от метра.

Благодаря своим крупнейшим достоинствам, метрическая система мер распространилась по многим странам Европы. У нас в Советском Союзе она была узаконена в 1926 году.

Лаборатория „Кванта“

«Париж, 1 января 1890 г.

Моему сыну Жану

Дорогой мой маленький Жан!

Среди опытов, описанных в этой книге, есть простые затеи, которые будут развлечением для родителей и детей, собравшихся вечером за столом...

Все эти опыты, и простые и сложные, не требуют никаких приборов: наша лаборатория, как ты знаешь, состоит из кухонной утвари, из пробок, спичек и всяких других вещей, которые у нас всегда под рукой...»

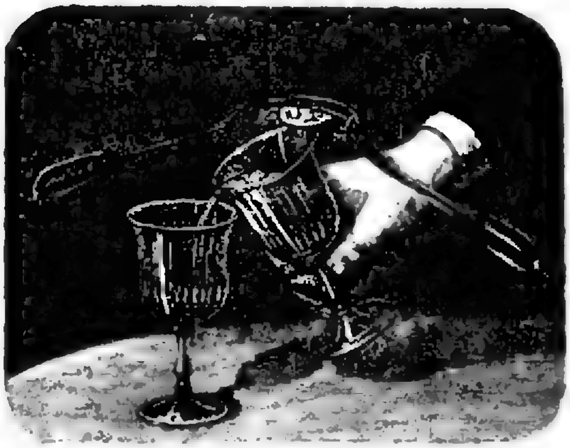
Так начинается книга Тома Тита «Научные развлечения» (перевод с французского М. Гершензона, М.— Л., Издательство детской литературы, 1937), отрывки из которой мы сегодня предлагаем вашему вниманию.

Из старых опытов

ИНТЕРЕСНЫЕ СЛУЧАИ РАВНОВЕСИЯ

Две вилки и пятак

Сложи две вилки так, чтобы зубья одной легли на зубья другой; просунь пятачок в прорезь между средними зубьями вилок. Теперь после нескольких неудачных попыток тебе удастся, конечно, положить это коромысло краешком пятачка на краешек стакана, да так, чтобы пятачок прикасался только к наружной стороне стакана. Вот коромысло наше уравновешено.

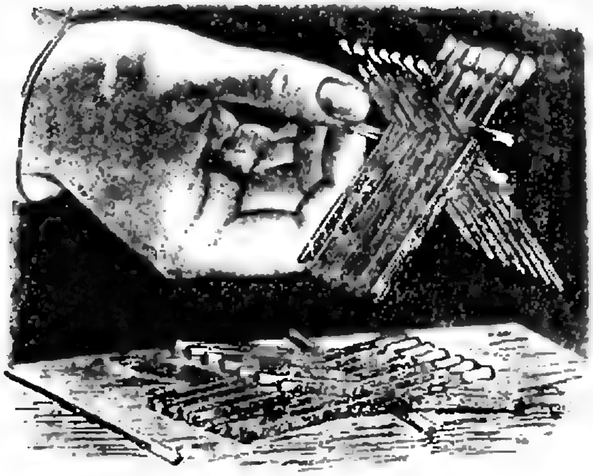


Предложи теперь приятелю перелить воду из этого стакана в другой, не сбросив вилок и пятачка! Вряд ли он возьмется сделать это.

Между тем задача не так уж трудна.

Пятнадцать спичек на одной

Положи одну спичку на стол, а на нее поперек еще 14 спичек так, чтобы головки их торчали кверху, а концы без головок касались стола, как показано у нас на рисунке внизу. Как поднять первую спичку, держа ее за один конец, и вместе с нею все остальные спички?

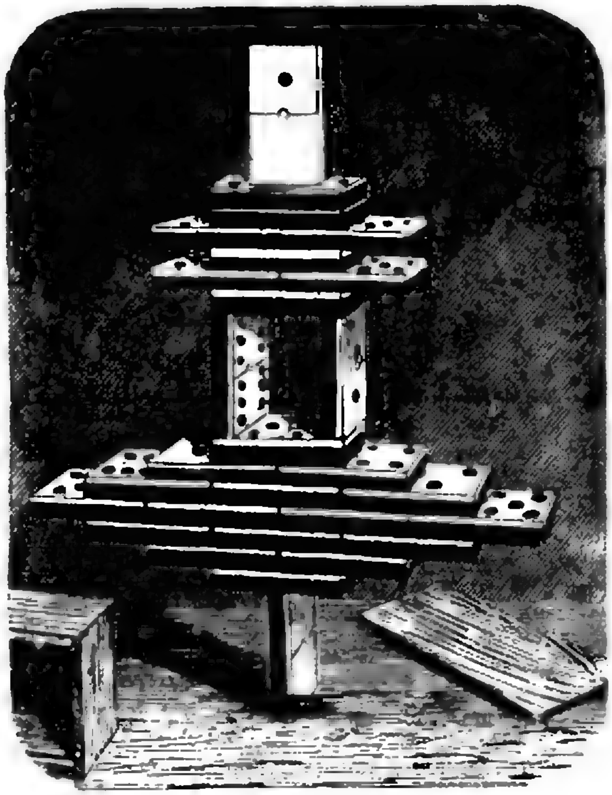


Для этого нужно только поверх всех спичек, в ложбинку между ними, положить еще одну, пятнадцатую, спичку.

Все 28!

Если стол совершенно горизонтален и прочно стоит на полу, ты сможешь выстроить все двадцать восемь костей домино так, как здесь на рисунке.

Сперва поставь стоймя три косточки домино — на них возвести такую хрупкую постройку легче, чем на одной кости. Потом, когда все будет построено, ты осторожно уберешь две крайние косточки, которые служили подпорками, и поставишь их на вершину своего непрочного здания. Равновесие здесь вполне возможно; нужно только, чтобы перпендикуляр, опу-



щенный из центра тяжести всей конструкции, прошел через основание нижней косточки домино.

Стеариновый мотор

Чтобы сделать этот мотор, нам не нужно ни пара, ни электричества, ни сжатого воздуха, ни бензина. Нам нужна для этого только... свеча.

Раскали две булавки и воткни их головками в свечу с двух сторон, посредине, перпендикулярно фитилю. Это будет ось нашего двигателя; положи свечу концами булавок на края двух стаканов и получше уравновесь. Если теперь зажечь свечу с обоих концов, капля стеарина упадет в одну из тарелок, подставленных под концы свечи. Равновесие нарушится, другой конец свечи перетянет и опустится; при этом с него стечет несколько капель стеарина, и он станет легче первого конца; он поднимется кверху, первый конец опустится, уронит каплю, станет легче, и... наш мотор начнет работать вовсю; постепенно колебания свечи будут увеличиваться все больше и больше.

МЫЛЬНЫЕ ПУЗЫРИ И ПЛЕНКИ

Свеча, погасни!

Очень большие и красивые пузыри можно выдувать из стеклянной или жестяной воронки.

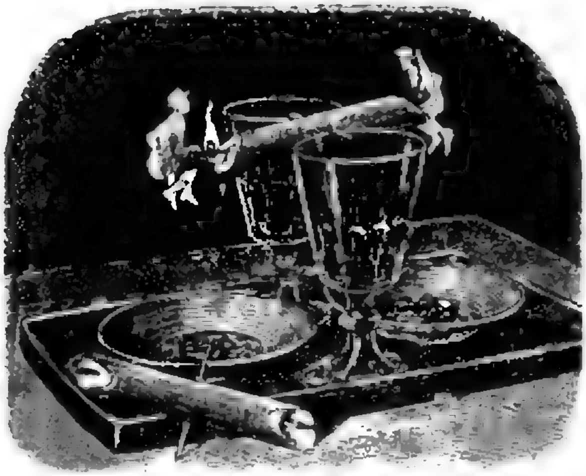
Огромные пузыри, до 30 см в диаметре!

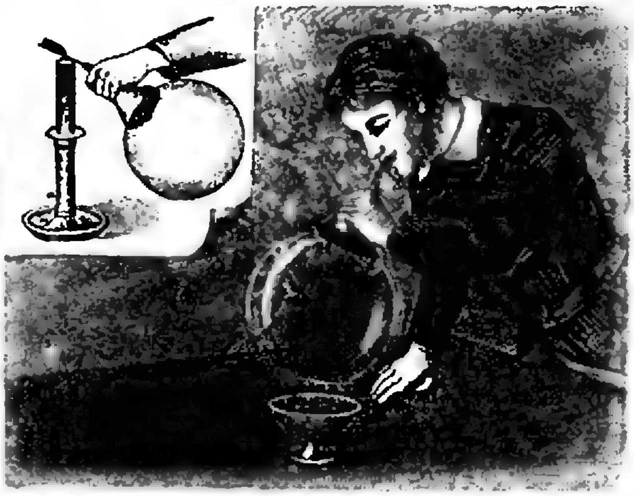
Воронку опускать нужно в широкий сосуд, чтобы хорошо смочить в мыльном растворе ее края.

Осторожно, держа воронку вертикально, подними ее и дуй, с передышками, каждый раз зажимая пальцем узкий конец воронки. Иначе сила натяжения мыльной пленки выгонит воздух из шара. А пленка сжимает этот воздух с изрядной силой. В этом очень легко убедиться. Поднеси узкий конец воронки к горячей свече и скажи:

— Свеча, погасни!

Пламя станет меркнуть, меркнуть, потом потухнет.





Пленки вперегонки

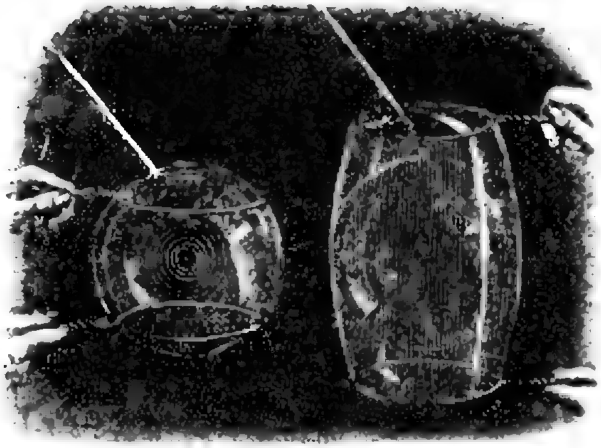
Мыльная пленка всегда стремится занять такую форму, чтобы поверхность ее была возможно меньше.

Постарайся добыть ламповое стекло конической формы, такое, у которого один конец у́же другого. Смочи мыльным раствором всю внутреннюю сторону стекла и дай воде стечь. Теперь широким концом опусти стекло в воду, держа его вертикально. Осторожно вынь стекло из раствора. Мыльная пленка затянула отверстие. Держи теперь стекло горизонтально и ты увидишь, что пленка твоя сдвинется с места и побежит к узкому концу стекла.

Если ты будешь окунать стекло в раствор раз за разом, пленки побегут одна за другой, будто стараясь догнать друг дружку.

Шар в бочке

Свей на бутылке кольцо из проволоки и скрути концы проволоки, чтобы получилась ручка. Еще одно кольцо сделай такого же диаметра; смочи кольца мыльным раствором, которым мы пользовались для предыдущих опытов. Потом выдуй между этими двумя кольцами пузырь (как у нас на левой части рисунка). Осторожно раздвигая кольца, растяни этот шар в цилиндр; остановись, как только поверхность цилиндра начнет принимать вогнутую форму.



Попроси теперь кого-нибудь смочить в мыльном растворе трубку и ввести ее конец в цилиндр сквозь пленку, которой затянуто верхнее кольцо. Пусть товарищ твой очень-очень осторожно выдует внутри первого пузыря второй.

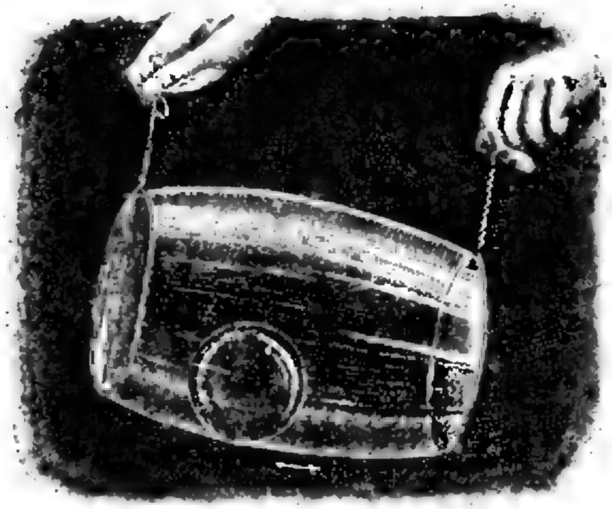
Наш цилиндр понемножку раздастся в стороны и превратится в бочку.

Когда же второй пузырь приблизится к стенкам «бочки», легким толчком нужно отделить его от трубки, затем осторожно вытащить трубку из «бочки».

Вот и повис наш шар между крышкой и донышком. Если раздвинуть теперь кольца, наш шар превратится в яйцо. А сблизить кольца — «бочка» раздастся в стороны, шар коснется донышка, и оба пузыря в тот же миг лопнут.

Шар-недотрога

Только что я рассказал, как выдуть мыльный пузырь — шар в пузыре-цилиндре. Когда смотришь на этот маленький шар, тебе кажется, что он прикасается к пленке цилиндра. Но в действительности этого нет! Шар не прикасается к цилиндру! Вот опыт, который поможет нам в этом убедиться. Попроси товарища держать проволочные кольца так, чтобы цилиндрический мыльный пузырь занял горизонтальное положение. Если расстояние между кольцами не превышает утроенного их диаметра, наш цилиндр и в таком положении сохранит свою форму.



Введем теперь в цилиндр трубку и выдуем внутри него маленький шар; стряхнем его с трубки легким толчком. Он опустится, не лопнув, на пленку цилиндра.

Пусть твой товарищ теперь слегка наклонит цилиндр, как показано у нас на рисунке. И ты увидишь, что маленький шар катится внутри цилиндра. Он катится совершенно свободно, потому что ни в одной точке не прикасается к цилиндру и между пленками наших двух пузырей все время есть тончайшая прослойка воздуха!

ОПЫТЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСТВОМ И МАГНЕТИЗМОМ

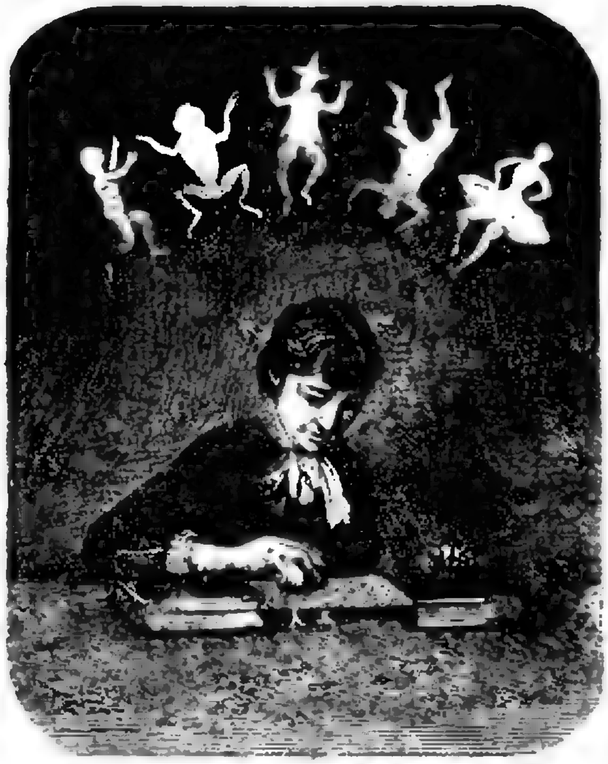
Бумажные танцоры

Сейчас мы устроим театр, в котором будут плясать наэлектризованные бумажные танцоры.

Возьми кусок стекла длиной 35—40 см и шириной 25 см. Просуши стекло хорошенько у печки — оно должно быть совершенно сухим. Положи его между страницами двух толстых книг, как показано у нас на рисунке, так, чтобы стекло лежало над столом примерно на высоте 3 см. Из тонкой папиросной бумаги вырежь фигурки такой величины, какие нарисованы у нас в верхней части рисунка. Вырежь кого хочешь: человечков, собачек, лягушек. Эти фигурки должны быть не больше 2 см высоты. Чтобы пляски были еще веселее, можешь вырезать их из бумаги разных цветов. Положи эти фигурки на стол под стекло.

Если теперь ты начнешь натирать стекло — хорошенько, не жалея сил,— шерстяной или шелковой тряпкой (тоже совершенно сухой), твои фигурки, притянутые электричеством, начнут привставать, подпрыгивать к стеклянному потолку «танцевального зала». Они будут плясать все время, пока ты будешь натирать стекло шерстью или шелком.

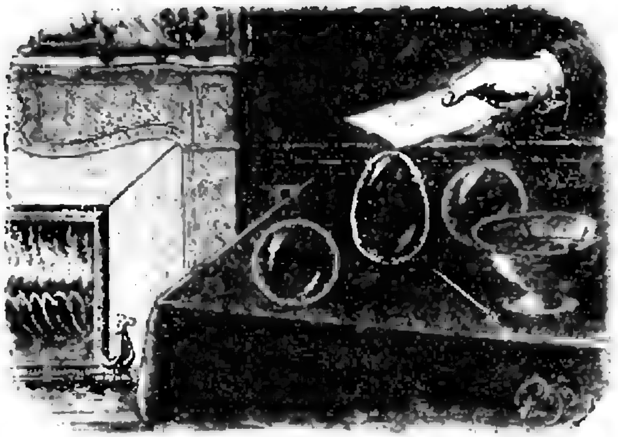
Не унывай, если опыт не удастся сразу; просуши еще раз стекло и тряпку. Тряпка из натурального шелка для этого опыта лучше, чем шерстяная.



Электрический танец

Если мыльный пузырь посадить на сухую шерстяную материю, он не лопнет.

Вот на суконной скатерти у нас сидит несколько пузырей. Высушим у печки кусок плотной бумаги, натрем его щеткой, чтобы наэлектризовать.



Поднесем эту бумагу к одному из пузырей. Смотрите! Он вытягивается и превращается из шара в яйцо.

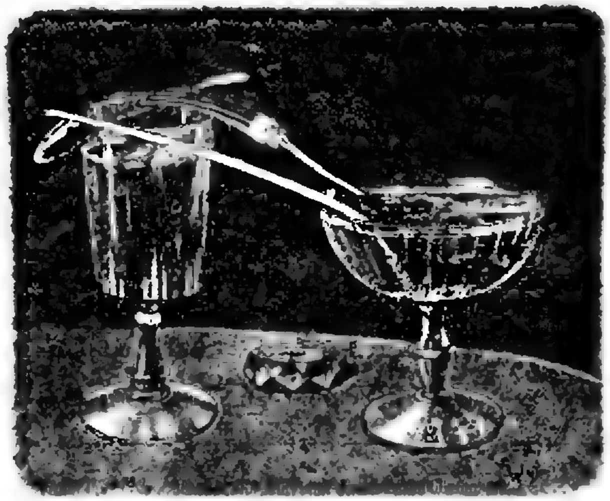
Если мы поднесем бумагу еще ближе, наш пузырь снимется со стола и полетит кверху, как воздушный шар.

Теперь, поднося бумагу поочередно то к одному, то к другому пузырю, заставим их танцевать смешной электрический танец.

Опыты Эрстеда

Во всех физических кабинетах, при помощи дорогих и сложных приборов, повторяют знаменитые опыты датского ученого Эрстеда, который открыл зависимость между электричеством и магнетизмом. Эти приборы — гальваноскоп и электрический элемент.

Попытаемся и мы доказать, что проволока, по которой проходит электрический ток, будучи приближена к намагниченной игле, заставляет эту иглу выйти из положения равновесия. Наши приборы мы соорудим из большого стакана, полного воды, и вазочки для варенья, налитой до половины водой, подсоленной щепоткой поваренной соли; из чайной ложки, вилки, куска кокса, разбитого на кусочки величиной с горошину, иголки, маленького магнита и полоски цинка 20 см длины и 2 см ширины.



Начнем с компаса. Натрем иголку магнитом, водя им по игле все время в одном направлении. Пустим иголку плавать в большой стакан, то ли смазав ее жиром, то ли воткнув ее в кусочек бумаги, вырезанный наподобие человеческой фигурки. Мы знаем, что один из концов иголки, скажем, тот, что ближе к ногам фигурки, тотчас же повернется к северу.

Затем займемся устройством гальваноскопа. Это прибор, который должен нам сообщить о появлении тока. Положим на края стакана чайную ложку, прямо над намагниченной иглой, в том же направлении. Компас и чайная ложка — вот и весь наш гальваноскоп. Не правда ли, пока все очень просто?

Остается устроить электрический элемент. Завернем кусочки кокса в тряпку и завяжем ниткой, предварительно воткнув в кокс ручку вилки. Этот коксовый пирожок погрузим в соленую воду и получим положительный полюс элемента. Зубья вилки положим на один из концов нашей ложки. На другой конец ложки положим один конец цинковой пластинки, погрузив другой ее конец в соленую воду так, чтобы он не прикасался к коксовому пирожку. Этот конец будет отрицательным полюсом нашего элемента.

Тотчас же выработается электрический ток, и игла выйдет из своего положения равновесия; она вернется в это положение, как только мы вытащим из соленой воды цинковую пластинку.

А так ли хорошо знаком вам
момент
?

Любопытно, что...

...кошка, брошенная вверх ногами, способна приземлиться на лапы, хотя момент импульса кошки остается постоянным во время падения. Происходит это за счет поворота какой-то части тела кошки в одну сторону, а лап — в противоположную, что позволяет ей изменить ориентацию.

...забавы с игрушками могут повлечь серьезные исследования. Например, известные ученые Клейн и Зоммерфельд посвятили целых четыре тома только движению волчков. Полученные, в том числе и с помощью закона сохранения момента импульса, результаты объясняют движения таких твердых тел, как гироскоп или Земля.

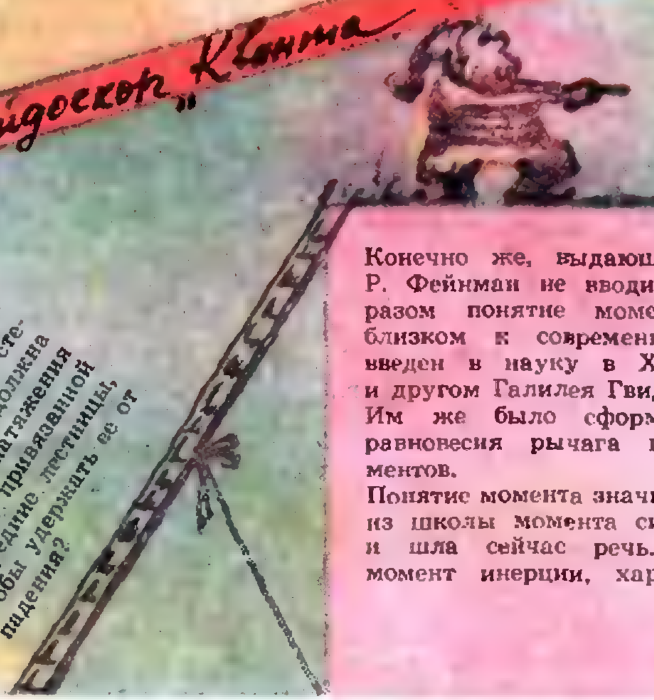
...геометрическое следствие сохранения момента импульса было установлено по наблюдениям еще в 1609 году Кеплером и сформулировано им в одном из трех знаменитых законов, гласящим, что радиус-вектор, проведенный из Солнца к планете, «заметает» равные площади за равные времена.

...фотоны можно отсортировать так, что направление момента импульса — и фотоны им обладают — у всех у них будет одинаковым. Это удалось показать в искусном эксперименте, когда освещением диска поляризованным светом, падающим вдоль оси диска, было вызвано его вращение.

Микроопыт

Свяжите книгу резинкой, чтобы она не раскрывалась. Подбросьте ее несколько раз вверх так, чтобы она вращалась последовательно вокруг различных осей. Что вы наблюдаете? Почему?

Калейдоскоп „Кванта"



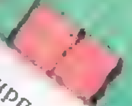
13. Лестница, центр тяжести которой находится посередине, опирается на абсолютно гладкие пол и стену. Какой должна быть сила натяжения веревки, привязанной к середине лестницы, чтобы удержать ее от падения?

Конечно же, выдающийся физик XX века Р. Фейнман не вводил таким странным образом понятие момента. Этот термин, в близком к современному понимании, был введен в науку в XVI веке покровителем и другом Галилея Гвидо Убальдо дель Монте. Им же было сформулировано и условие равновесия рычага в виде равенства моментов.

Понятие момента значительно шире известного из школы момента силы, о котором именно и шла сейчас речь. Не менее важен и момент инерции, характеризующий распре-

Вопросы и задачи

1. Как отличить сырое яйцо от вареного?



2. Кирпич лежит на наклонной плоскости, прилегая к ней всем основанием. Какая половина кирпича — правая или левая — с большей силой давит на наклонную плоскость?

3. Как легче сдвинуть с места груженую телегу: прилагая силу к корпусу телеги или к верхней части обода колеса?

4. Почему, прижимая руки к телу, фигуристка на льду вращается быстрее?

5. Почему прямоугольный проволочный виток с током стремится устанавливаться в магнитном поле так, чтобы плоскость витка была перпендикулярна к полю?

6. Отчего присохшую пробку с резьбой легче отвернуть, если плотно обмотать ее несколькими слоями ткани?

7. Длинный стержень легче удерживать в горизонтальном положении за середину, чем за конец. Почему?

8. Что труднее переломить — целую спичку или ее половинку?

9. На некоторых гоночных автомобилях двигатель стоит не спереди и не сзади, а посередине. Какое преимущество имеет такое расположение?

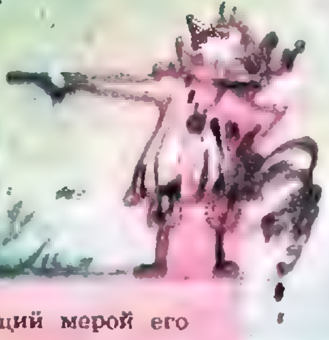
10. Почему при стрельбе из пистолета выбирают стойки, указанные на рисунке?

11. Почему мяч не остается в покое на наклонной плоскости?

12. Почему конькобежцы, разгоняясь, размахивают руками?

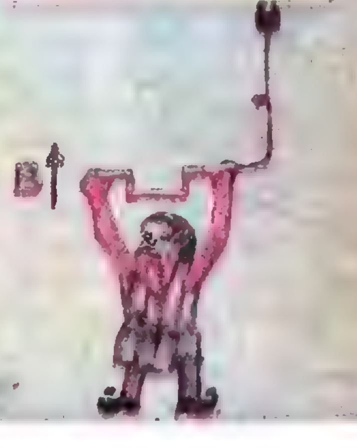
Что читать о моменте в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Магнитный момент тока» — 1986, № 3, с. 22;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1988, № 4, с. 40;
4. «Равнодействующая — как ее найти?» — 1988, № 11—12, с. 50;
5. «Статика» — 1989, № 2, с. 62.



> ... работа, которую мы проделали, равна углу, на который было повернуто тело, умноженному на какую-то странную комбинацию сил и расстояний. Эта «странная комбинация» и есть момент.
>
> *Р. Фейнман*

14. Провод, согнутый как показано на рисунке, может вращаться вокруг горизонтальной оси и расположен в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Что произойдет с проводом, если по нему потечет ток?



деление масс в теле и служащий мерой его инертности при вращении, и момент импульса, закон сохранения которого — того же ранга, что и законы сохранения импульса и энергии. При дальнейшем изучении физики вы познакомитесь также со спиновым и магнитным моментами элементарных частиц, с моментами импульса атомных ядер, атомов и молекул, и даже с моментами инерции и импульса планетных систем, звезд и звездных скоплений — без этих понятий невозможно представить современное состояние науки.

Математический кружок

Откуда берутся задачи?

И. ШАРЫГИН

После некоторого размышления я решил начать эту статью с двух противоречащих друг другу высказываний, которыми следовало бы ее завершить. Во-первых, не хотелось бы, чтобы каждый школьник, прочитавший эту статью, а таковые, надеюсь, найдутся, сразу кинулся сочинять собственные задачи. А во-вторых, я приглашаю всех желающих принять участие в конкурсе по составлению задач (в первую очередь, геометрических). Свои произведения присылайте в «Квант» на имя автора статьи. Лучшие творческие достижения (критерии субъективные) будут опубликованы и даже премированы (хотя, конечно, не так щедро, как в телепрограмме «Капитал-шоу»).

Теперь к делу. Я хочу поделиться своим довольно большим опытом в деле составления различных геометрических задач, раскрыть некоторые секреты своей кухни, сформулировать эстетические и даже этические принципы. Начну с того, что задачи удобно разделить на три группы: учебные, конкурсные и олимпиадные. Можно говорить еще и о творческих задачах, но это скорее подтекст, нежели формальный признак, характеристика «творческая» более относится не к самой задаче, а к процессу ее решения. Впрочем, стоит все же выделить в отдельную группу задачи «проблемного» типа.

Существует определенный набор характерных технических приемов, достаточно часто используемых при составлении тех или иных видов задач.

Перефразировка

Начну с примера.

Задача 1. *Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной около него окружности, перпендикулярного одной стороне этого треугольника, на другую его сторону равна третьей стороне.*

Решение. За этой изящной словесностью скрывается широкоизвестный факт, сопутствующий теореме синусов: $a=2R\sin A$ (Здесь и далее a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — его углы, R — радиус описанной окружности). Формулировка этой задачи литературно настолько привлекательна, что перед ее чарами не устояли даже видавшие виды руководители «Задачника «Кванта», включившие ее в свой задачник. Задача эта скорее учебная, чем олимпиадная. Ее смысл — показать известный факт с новой неожиданной точки зрения.

Весьма распространенным является прием, который можно назвать «замена опорной фигуры». Я, как ведущий раздела «Задачи» в журнале «Математика в школе», нередко прибегаю к нему, если мне не хватает для этого раздела какой-либо не очень трудной задачи (подобные задачи обычно даются без авторской подписи.) Такие задачи встречаются довольно часто. Вот пример из XXIV Всесоюзной олимпиады по математике (1990 г.).

Широко и давно известна следующая теорема:

Теорема. *Если на прямых AB, BC и CA взяты произвольно точки C′, A′ и B′ соответственно, отличные от вершин треугольника ABC, то окружности, проходящие через A, B′, C′; A′, B, C′ и A′, B′, C имеют общую точку.*

(Иногда эту теорему называют теоремой Микеля, а общую точку пересечения окружностей обозначают через M и называют точкой Микеля.)

Доказывается эта теорема в общем-то несложно. Единственная трудность, если не прибегать к ориентированным углам, состоит в необходимости перебора различных случаев взаимного расположения точек C', A' и B'. В ситуации, изображенной на рисунке 1, *а*, обозначив через M точку пересечения окружностей A, B', C' и A', B, C', легко покажем, что точки A', B', C, M лежат на одной окружности.

А вот задача Всесоюзной олимпиады:

Задача 2. *На стороне AB выпуклого четырехугольника ABCD взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.*

Решение. Присмотревшись к рисунку 1, *б* и вдумавшись в условие, мы без труда заметим, что задача 2 совпадает с теоремой, если указанную в ней конфигурацию привязать к треугольнику AEF (переобозначив при этом буквы $E \to B$, $B \to C'$, $F \to C$, $C \to B'$, $D \to A'$). Конечно, формулировка задачи 2 менее естественна, а следовательно, менее эстетична, чем теоремы. Возможно, что я и ошибся в своих предположениях и неверно «вычислил» происхождение этой задачи 2. Ну, что ж, тем хуже для организаторов олимпиады.

Очень красивые и эффектные задачи могут возникать при переводе геометрической задачи с геометрического языка на алгебраический. Например, возьмем известную задачу на построение треугольника по трем высотам (можете ли вы решить эту задачу?). Идея состоит в том, что треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$ по третьему признаку подобия треугольников.

Пусть теперь высоты треугольника равны a, b, c, а его стороны x, y, z. Если этот треугольник остроугольный,

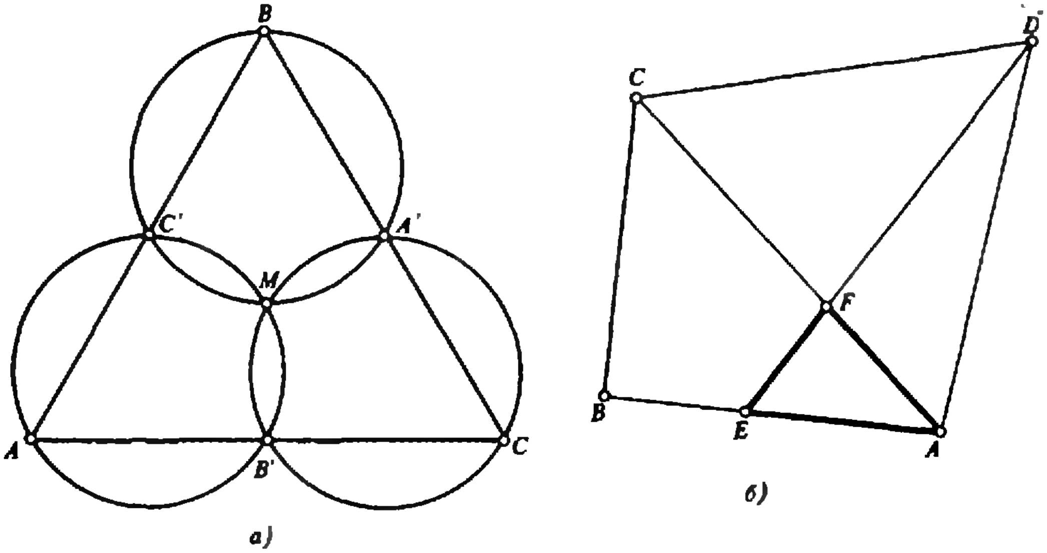


Рис. 1.

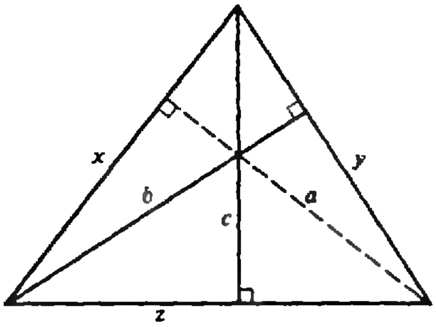


Рис. 2.

легко получаем систему уравнений для x, y, z.

Итак, имеем задачу (рис. 2):

Задача 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}=z,\\ \sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}=x,\\ \sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}=y.\end{cases}$$

Зная происхождение этой системы, мы без труда найдем условие, при котором она совместна (остроугольность треугольника со сторонами $1/a$, $1/b$, $1/c$), а затем и решим саму систему. (Докажите при этом, что система, как и задача на построение, не может иметь более одного решения.)

К этому же разделу, хотя и с некоторой натяжкой, можно отнести изменение формулировки, связанное с переходом от прямого утверждения к обратному. (Стоит заметить, что границы между типами задач весьма размыты, условны. Одна и та же задача часто может служить иллюстрацией различных приемов, тем более, что во многих случаях итоговая задача получается за счет комбинации различных приемов.) Здесь возможен широкий спектр различных случаев и разновидностей, поэтому я ограничусь одним примером, показывающим, как из тривиального по сути прямого утверждения получается вполне богатая геометрическим содержанием задача. Совершенно очевидно, что точка пересечения высот (точка H) остроугольного треугольника ABC обладает следующим свойством:

$$\angle HAB=\angle HCB,\quad \angle HBA=\angle HCA,$$
$$\angle HAC=\angle HBC.$$

В связи с этим возникает вполне естественно задача:

Задача 4. *Найдите геометрическое место таких точек M, для которых имеют место равенства $\angle MAB=\angle MCB$, $\angle MBA=\angle MCA$, где ABC — данный остроугольный треугольник.*

Решение. Понятно, что искомому месту точек внутри треугольника принадлежит его точка пересечения высот. Кстати, здесь возникает отнюдь не тривиальная задача: единственна ли такая точка внутри треугольника? Мы докажем ее единственность. Для этого продолжим AM, BM и CM до пересечения со сторонами треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 (рис. 3). Точки A, C, A_1 и C_1 лежат на одной окружности. Значит, $\angle MA_1C_1=\angle MCA=\angle MBC_1$ и $\angle MAC=\angle MC_1A_1$. Таким образом, M, B, A_1 и C_1 также лежат на одной окружности и $\angle MBA_1=\angle MC_1A_1=\angle MAC$. Обозначив теперь углы через α, β и φ, как на рисунке 3, найдем, что $\alpha+\beta+\varphi=\pi/2$, из чего следует, что AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты нашего треугольника. Однако наше геометрическое место не исчерпывается одной точкой пересечения высот. В него входит также дуга AB описанной около ABC окружности, а также середины дуг BC и CA (докажите это).

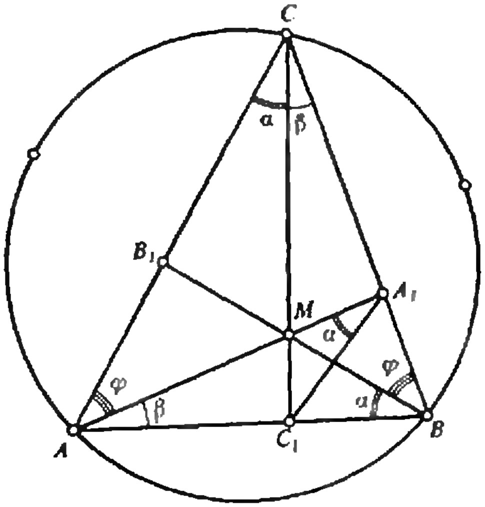


Рис. 3.

Чаще всего в задачах этого типа «сооружается» некая геометрическая конструкция, в качестве деталей которой берутся некие фигуры и их элементы.

Иллюстрацией здесь могут служить стереометрические задачи-«монстры», встречающиеся на экзаменах в такие вузы, как МФТИ, мехмат и ВМК МГУ и некоторые другие. Я не буду приводить примеры подобных задач, тем более, что за ними не надо далеко ходить. Достаточно вспомнить стереометрические задачи из вариантов 1990 г., опубликованные в журнале «Квант», №№ 1 и 2 за 1990 и 1991 годы.

Усложнение геометрической конструкции почти наверняка приводит к многоходовости задачи, превращает ее в своего рода задачу-«этажерку» (много полочек и на каждой своя задачка) или задачу-«матрешку» (несколько задач, одна в другой).

Впрочем, такого рода задачи не обязательно должны иметь в основе сложную геометрическую конструкцию. Вот простой пример, составленный из двух (или из трех) задач-«полочек»:

Задача 5. *Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других треугольников.*

Задача 6. *Докажите, что из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.*

Решите задачи 5 и 6 самостоятельно, а мы из них сконструируем следующую задачу.

Задача 7. *В единичную окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Найдите площадь этого четырехугольника, если известно, что произведение площадей треугольников ABM и CDM равно $1/4$.*

Решение. Чтобы ее решить, достаточно заметить (рис. 4), что

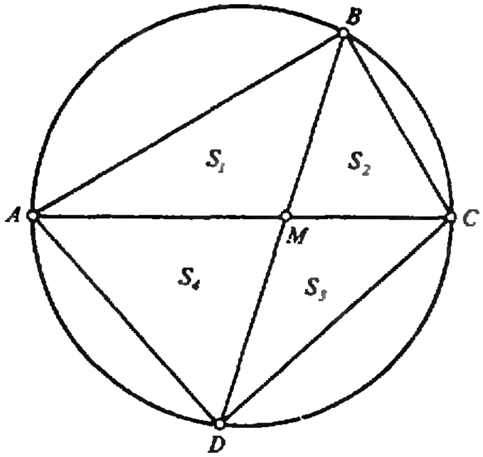


Рис. 4.

$S_1S_3=S_2S_4=1/4$ (задача 5), а также, что $S=S_1+S_3+S_2+S_4\geqslant 2\sqrt{S_1S_3}+2\sqrt{S_2S_4}=2$ (неравенство о среднем арифметическом).

Кроме того (задача 6) $S_{ABCD}\leqslant 2$, так как площадь квадрата, вписанного в единичную окружность, равна 2. Из всего этого следует, что $ABCD$ — квадрат и его площадь 2.

Иногда целью конструкции является маскировка основной идеи, или говоря шахматным языком, добавление вступительной игры. Обычно это приводит к появлению в условии лишних деталей, мало и даже вовсе не работающих в решении, что, конечно же, снижает эстетический уровень задачи («Каждое ружье должно стрелять!»). В качестве примера, возможно не очень убедительного, поскольку мой анализ основывается на личных домыслах, вновь возьму задачу с XXIV Всесоюзной олимпиады.

Задача 8. *На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$-угольника $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ взяты точки K и N соответственно так, что $\angle KA_{n+2}N=\pi/(2n)$. Докажите, что NA_{n+2} — биссектриса угла KNA_3.*

Решение. Вся суть задачи в следующем. Возьмем произвольный треугольник ABC и проведем в нем биссектрису угла B и биссектрисы углов, смежных с углами A и C (рис. 5). Эти три прямые, как известно, пересекаются в одной точке —

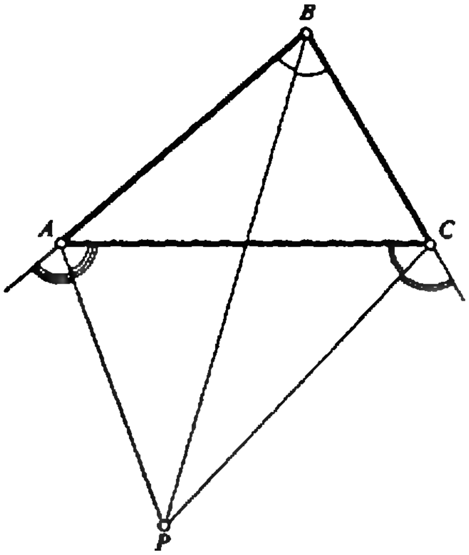


Рис. 5.

центре вневписанной окружности треугольника ABC. (Если вы этого не знаете, докажите самостоятельно. Рассуждение полностью аналогично доказательству того, что биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.) Обозначим эту точку через P. Нетрудно доказать, что угол APC равен $90° - \frac{1}{2}B$. Верно и обратное утверждение: если на биссектрисе угла B вне треугольника ABC взята точка P такая, что $\angle APC = 90° - \frac{1}{2}B$, то AP и CP будут являться биссектрисами внешних углов этого треугольника. (Докажите.) Вот и все. Именно в этом суть ситуации, описанной в условии задачи 8. (Роль треугольника ABC играет треугольник KA_2N вместо точки P — вершина A_{n+2}.) Весь антураж в виде правильного n-угольника нужен лишь для того, «чтобы вы не догадались».

Многие задачи конструируются авторами под понравившуюся им идею решения. Правда, довольно часто «решатели» находят другие, отличные от авторского, иногда более простые решения.

В связи с задачей 8 хочу в качестве примера взять одну из «своих» задач. Мне захотелось сконструировать задачу, в которой рассуждение о том, что три биссектрисы пересекаются в одной точке, а вернее, что через точку пересечения двух биссектрис углов некоего треугольника (не обязательно внутренних, см. рисунок 5) проходит третья, повторялось бы дважды, причем второй этап существенно опирался бы на первый. Получившуюся задачу нельзя назвать очень удачной, поскольку идея была реализована на известной конструкции, но все же...

Задача 9. *В треугольнике ABC угол B равен $120°$. На стороне AC взята точка M, а на прямой AB точка K так, что BM — биссектриса угла ABC, а CK — биссектриса угла, смежного с ACB. Отрезок MK пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle APM = 30°$.*

Решение. Вот это двухходовое рассуждение. Для треугольника BMC отрезки BK и CK — биссектрисы внешних углов B и C (рис. 6). Следовательно, MP — биссектриса угла BMC, а P — точка пересечения биссектрис углов, внешних к углам B и M треугольника ABM. Значит, AP — биссектриса угла BAC. Окончательно получаем

$$\angle APM = \angle PMC - \angle PAM =$$
$$= \frac{1}{2}(\angle BMC - \angle BAM) = 30°.$$

Ну, и наконец, задачу можно конструировать «под ответ» (так часто поступают в учебных задачах) или, более широко, «под результат». Хочу в качестве примера привести одну задачу-ловушку (весьма редко встре-

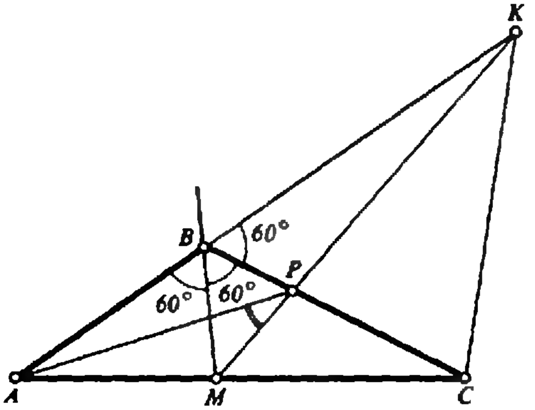


Рис. 6.

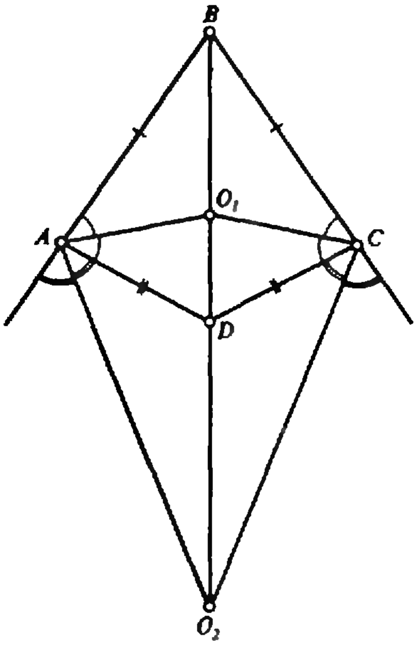


Рис. 7.

чающийся тип задач), в которой специально подобранные числовые данные задают непривычную геометрическую ситуацию. Несмотря на определенные недостатки (пришлось прибегнуть к маленькой хитрости в формулировке условия), задача эта мне весьма дорога. Правда, ее нельзя отнести ни к олимпиадным — не принято давать на олимпиадах задачи с числовыми данными, ни к конкурсным задачам — попасться в ловушку могут даже самые сильные, а это не соответствует идее конкурса. Скорее, это все же учебная задача с воспитательным оттенком.

Задача 10. *В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 6, а две оставшиеся 10, высота пирамиды равна 7, боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.*

Решение. По условию, двугранные углы при основании равны или 60° или 120° (но не обязательно только 60°. Именно в этом небольшая тонкость в формулировке!), а вершина пирамиды проектируется в точку, равноудаленную от сторон, а вернее, от прямых, образующих четырехугольник. Из последнего следует, что четырехугольник в основании не может быть параллелограммом. Две соседние его стороны равны 6, две другие, также соседние, равны 10. Но если у четырехугольника $ABCD$ имеет место $AB=BC(=10)$, $AD=DC(=6)$, то для него есть две точки O_1 и O_2, равноудаленные от его сторон (рис. 7). Из условия следует, что расстояния от проекции вершины пирамиды до ее сторон равны $7/\sqrt{3}$. Если вершина проектируется в точку O_1 — центр вписанной в $ABCD$ окружности, то площадь $ABCD$ должна быть равной $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}$. Но площадь $ABCD$ не превосходит 60 (она равна 60, если углы A и C прямые), а $16\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}>60$. Значит, вершина проектируется в точку O_2, расстояния от которой до сторон четырехугольника $ABCD$ равны $\frac{7}{\sqrt{3}}$. Теперь легко найдем площадь $ABCD$, $(10-6)\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{28}{\sqrt{3}}$, а затем и объем пирамиды $\frac{64}{\sqrt{3}}$.

Частный случай

Многие общие теоремы, вооружающие нас мощным средством решения задач, такие как теорема Чевы в геометрии или неравенства о средних в алгебре, могут выступать и в качестве инструмента составления задач. Например, возьмем теорему Паскаля: *если A, B, C, D, E и F — шесть точек, расположенных на окружности, то три точки, в которых пересекаются попарно прямые AB и DE, BC и EF, FA и CD, расположены на одной прямой.* Рассмотрим также задачу:

Задача 11. *Пусть стороны AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а стороны BC и AD — в точке K. Докажите, что касательные к окружности в точках B и D пересекаются на прямой KM.*

Не надо обладать большой наблюдательностью, чтобы заметить, что эта задача является частным, а вернее предельным случаем теоремы Паскаля.

Профессиональные математики, занимающиеся также и организацией математических олимпиад, нередко черпают красивые и интересные задачи из своей научной деятельности, перенося на школьную почву частные случаи серьезных математических теорем, приспосабливая к ней те или иные леммы, в большом числе возникающие при доказательстве почти любой серьезной математической теоремы. Правда, в геометрии такие примеры не слишком часты, серьезная математика все же очень далека от школьной геометрии. (Эту фразу ни в коем случае нельзя рассматривать как упрек геометрии.) Поэтому я ограничусь одним примером, возможно, не очень ярким и характерным.

Есть такая теорема «о зигзаге». Даны две окружности (возможно, в пространстве). Известно, что существует набор из $2n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ таких, что точки с нечетными номерами расположены на одной окружности, точки с четными номерами — на другой и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{2n}A_1$. Тогда таких наборов из $2n$ точек существует бесконечно много, причем в качестве точки A можно взять любую точку первой окружности, а расстояние между последовательными точками будет таким же, как у исходного набора точек.

Я не знаю элементарного доказательства этой теоремы. Однако ее частные случаи вполне можно использовать в качестве элементарных задач. Например:

Задача 12. *На плоскости даны две окружности с радиусами R и r и расстоянием между центрами a. Найдите сторону ромба, две противоположные вершины которого лежат на одной окружности, а две оставшиеся — на другой.*

Задача эта достаточно проста, поэтому я ограничусь лишь указанием ответа: $\sqrt{R^2+r^2-a^2}$.

(Окончание в следующем номере)

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в дне недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики.

Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Вниманию наших читателей

Московский магазин № 3 «Академкнига» (книга-почтой) высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Бронштейн М. П. *Солнечное вещество. Лучи икс. Изобретатели радиотелеграфа.* (Библиотечка «Квант», вып. 80). 1990. 40 к.

Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. *Раз задача, два задача...* (Библиотечка «Квант», вып. 81). 1990. 1 р.

Дирак П. А. М. *Воспоминания о необычайной эпохе.* 1990. 1 р. 10 к.

Дьяконов В. П. *Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.* 1989. 1 р. 80 к.

Математика для техникумов. Геометрия. 1989. 75 к.

Паркер Б. *Мечта Эйнштейна: В поисках единой теории строения Вселенной.* Пер. с англ. 1991. 1 р. 50 к.

Поль Дирак и физика XX века. 1990. 2 р. 80 к.

Сборник задач по физике. Учебное пособие. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр. 1990. 90 к.

Сена Л. А. *Единицы физических величин и их размерности.* Учебно-справочное руководство. Изд. 3-е, перераб. и доп. 1989. 1 р.

Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики.* Пер. с нем. Изд. 5-е, испр. 1990. 2 р.

Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.* (Библиотечка «Квант», вып. 48). 1990. 60 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга-почтой» «Академкнига».

Ленинградский магазин «Академкнига» (книга-почтой) высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Аленицын А. Г., Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. *Краткий физико-математический справочник.* 1990. 1 р. 70 к.

Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Квантовая электродинамика.* (Теоретическая физика в 10 т., т. IV). Изд. 3-е, испр. 1989. 1 р. 80 к.

Бугров Я. С., Никольский С. М. *Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* 1989. 1 р.

Вавилов С. И. *Исаак Ньютон.* 1989. 1 р. 20 к.

Горский Ю. М. *Системно-информационный анализ процессов управления.* 1988. 4 р. 30 к.

Задачи по математике. Начала анализа. Справочное пособие. 1990. 2 р. 40 к.

Заочные математические олимпиады. 1986. 30 к.

Козлов Б. И. *Возникновение и развитие технических наук. Опыт историко-теоретического исследования.* 1988. 1 р. 80 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). 1989. 80 к.

Кудрявцев Л. Д. *Краткий курс математического анализа.* 1989. 1 р. 90 к.

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. *Краткий курс высшей математики.* Для университетов. Изд. 7-е, испр. 1989. 1 р. 40 к.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* (Теоретическая физика в 10 т., т. III). 1989. 1 р. 90 к.

Меледин Г. В. *Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями.* 1989. 50 к.

Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра. Пособие для самообразования.* Изд. 2-е, перераб. и доп. 1990. 1 р. 10 к.

Пайс А. *Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна.* Пер. с англ. 1989. 3 р. 30 к.

Пярнпуу А. А. *Программирование на современных алгоритмических языках.* Изд. 3-е, перераб. и доп. 1990. 1 р. 30 к.

Сборник задач по физике. Учебное пособие. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр. 1990. 90 к.

Стройк Д. Я. *Краткий очерк истории математики.* Изд. 5-е, испр. 1990. 2 р.

Физики о себе. Сборник документов. 1990. 2 р.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.* 1988. 70 к.

Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. *Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и для самообразования.* 1989. 1 р. 90 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7, «Книга-почтой».

Харьковский магазин «Академкнига» высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Арнольд В. И. *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф от эвольвент до квазикристаллов.* (Современная математика для студентов). 1989. 35 к.

Белонучкин В. Е. *Кеплер, Ньютон и все-все-все.* (Библиотечка «Квант», вып. 78). 1990. 30 к.

Брусенцов Н. П. *Микрокомпьютерная система обучения «Наставник».* (Библиотечка программиста). 1990. 3 р.

Воробьев И. И. *Теория относительности в задачах.* 1989. 40 к.

Гальперин Г. А., Земляков А. Н. *Математические бильярды.* (Библиотечка «Квант», вып. 77). 1990. 65 к.

Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. *Физика в мире полимеров.* (Библиотечка «Квант», вып. 74). 1989. 55 к.

Майер В. В. *Кумулятивный эффект в простых опытах.* 1989. 50 к.

Полищук В. Р. *Как исследуют вещества.* (Библиотечка «Квант», вып. 72). 1989. 50 к.

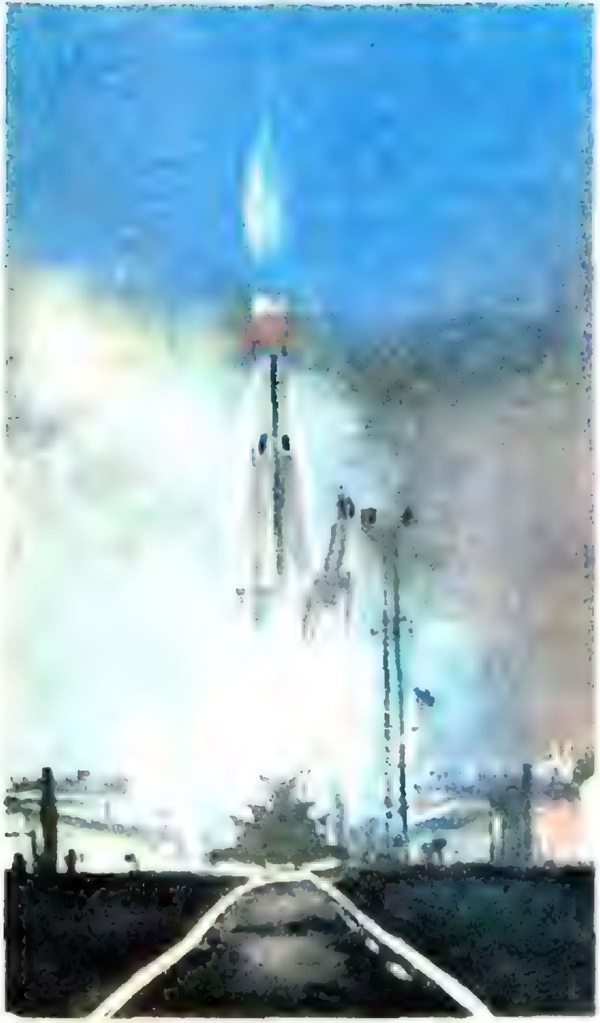
Пономарев Л. И. *Под знаком кванта.* Изд. 2-е, испр. и доп. 1990. 1 р. 70 к.

Сборник качественных вопросов и задач по общей физике. Учебное пособие для втузов. 1990. 1 р. 20 к.

Силин А. А. *Трение и мы.* (Библиотечка «Квант», вып. 57). 1987. 35 к.

Физики о себе. Сборник документов. 1990. 2 р.

Заказы на книги направляйте по адресу: 310078 Харьков, ул. Чернышевского, 87, «Академкнига».



Ф-значит ракета

В этой рубрике мы обычно печатаем материалы о ракетно-космической технике и ее возможностях. Нынешняя статья посвящена издержкам этой техники, т. е. тому отрицательному воздействию, которое она оказывает на природу.

Озон, вулканы и... ракеты

Доктор технических наук
В. БУРДАКОВ

Среди многих привычных в наше время экологических бед озонная проблема занимает особое место. Если в земной атмосфере не будет озона, то солнечное жесткое УФ излучение (длина волны $\lambda < 300$ нм) погубит фитопланктон океанов и морей, возвращающий в нашу земную атмосферу до 70 % кислорода из углекислоты, во все большей мере вырабатываемой живыми организмами, промышленностью и транспортом. Леса и растения, возвращающие в атмосферу до 30 % кислорода, также боятся ультрафиолетового излучения. Наконец, люди, которых сейчас на Земле более 5,3 млрд. и большинство из которых так любят греться на солнышке, все в большей мере подвергают себя опасности. Загар обеспечивает мягкое УФ излучение ($\lambda > 300$ нм), называемое эритемным. Оно очень полезно, т. к. вырабатывает в организме витамин Д. В сочетании же с жестким (бактерицидным) излучением эритемные лучи могут вызвать не только болезненные ожоги, но и более опасные последствия. Медики и биологи считают, что уменьшение концентрации стратосферного озона всего на 1 % приводит к увеличению раковых заболеваний кожи на 6 %, увеличивает восприимчивость к другим болезням, особенно кожным, легочным и аллергическим.

Самые разные методы измерения показывают — количество стратосферного озона в земной атмосфере имеет тенденцию (тренд) к постепенному уменьшению! Хорошо еще, что существуют компенсирующие процессы — озон, исчезая на привычных для него высотах, начинает вырабатываться ближе к тропосфере (рис. 1), где плотность воздуха значитель-

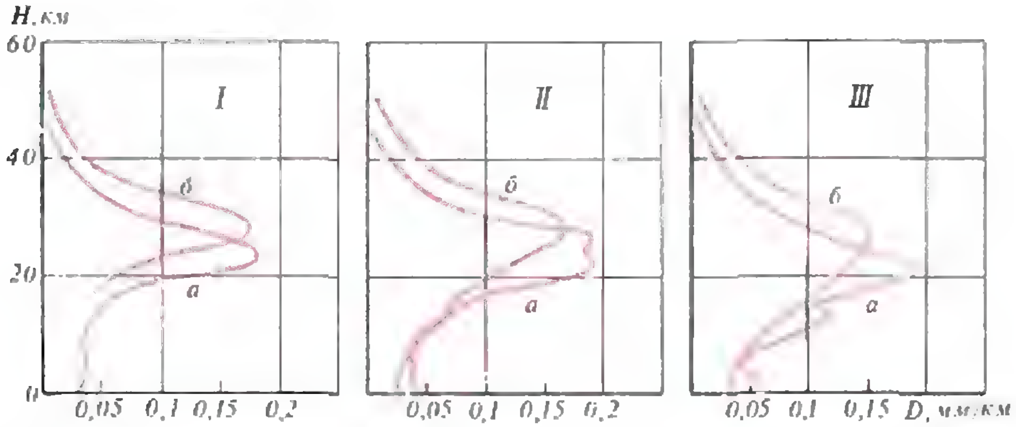


Рис. 1. Зависимость концентрации озона от высоты сегодня (а) и в конце 1960 года (б) для экваториальных (I), средних (II) и полярных (III) широт.

но выше. Казалось бы, ничего страшного — «озонный щит» продолжает действовать! Но специалисты-экологи забили тревогу — над Антарктидой после полярной ночи (т. е. в октябре) стала появляться «озонная дыра» — резкое уменьшение концентрации озона во всем атмосферном столбе. Более того, признаки «озонных дыр» стали обнаруживаться и в Северном полушарии, но не на полюсе, а примерно на широте Ленинграда.

Новое явление, как всегда, рождает массу гипотез. Не было в них недостатка и на этот раз. Чему только не приписывали вину за «озонные дыры»: и земному магнитному полю, и фреонам (хлорированным углеводородам, используемым как теплоноситель в холодильниках), и даже межпланетному «эфиру», обтекающему Землю с ее Северного полюса.

Наиболее реальной представляется версия, связывающая явление с существованием в земной атмосфере устойчивых вихрей: одного большого в районе Антарктиды и трех поменьше — в районе Северного полюса. Пока озон существовал на «своих» высотах — все было нормально, но когда максимум его концентрации опустился в зону более интенсивных ветров (рис. 2), атмосферные полярные вихри стали преграждать озону дорогу к полюсам Земли.

Есть и другие не менее опасные причины исчезновения озона, например, вулканы и... ракеты. Вулканы доставляют озоноразрушающие вещества на высоту до 12 км, откуда они поднимаются в стратосферу за счет турбулентности воздуха. Ракеты же — непосредственно в озонный слой.

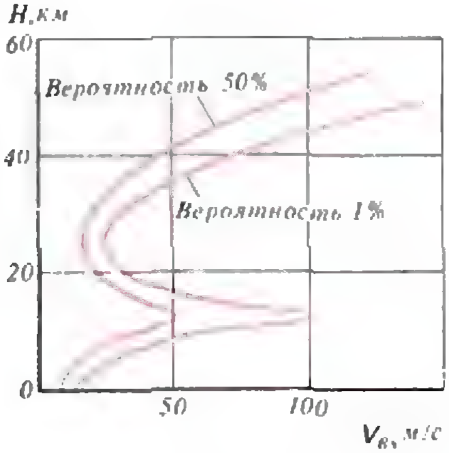


Рис. 2. Изменение скорости ветра с высотой над поверхностью Земли.

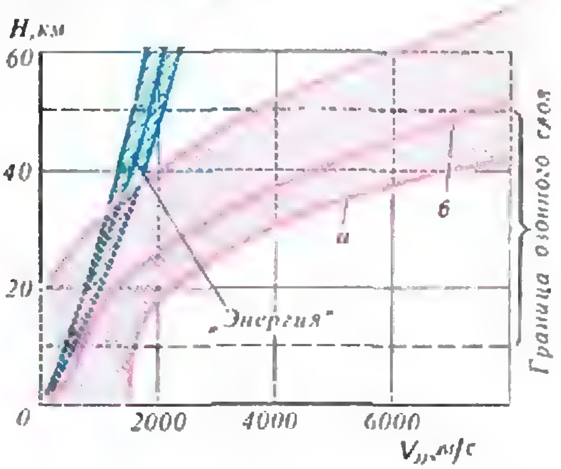


Рис. 3. Характерные траектории взлета баллистических ракет-носителей, в том числе «Энергии», (синие) и перспективных носителей самолетной схемы (красные) с горизонтальным (а) и вертикальным (б) стартом.

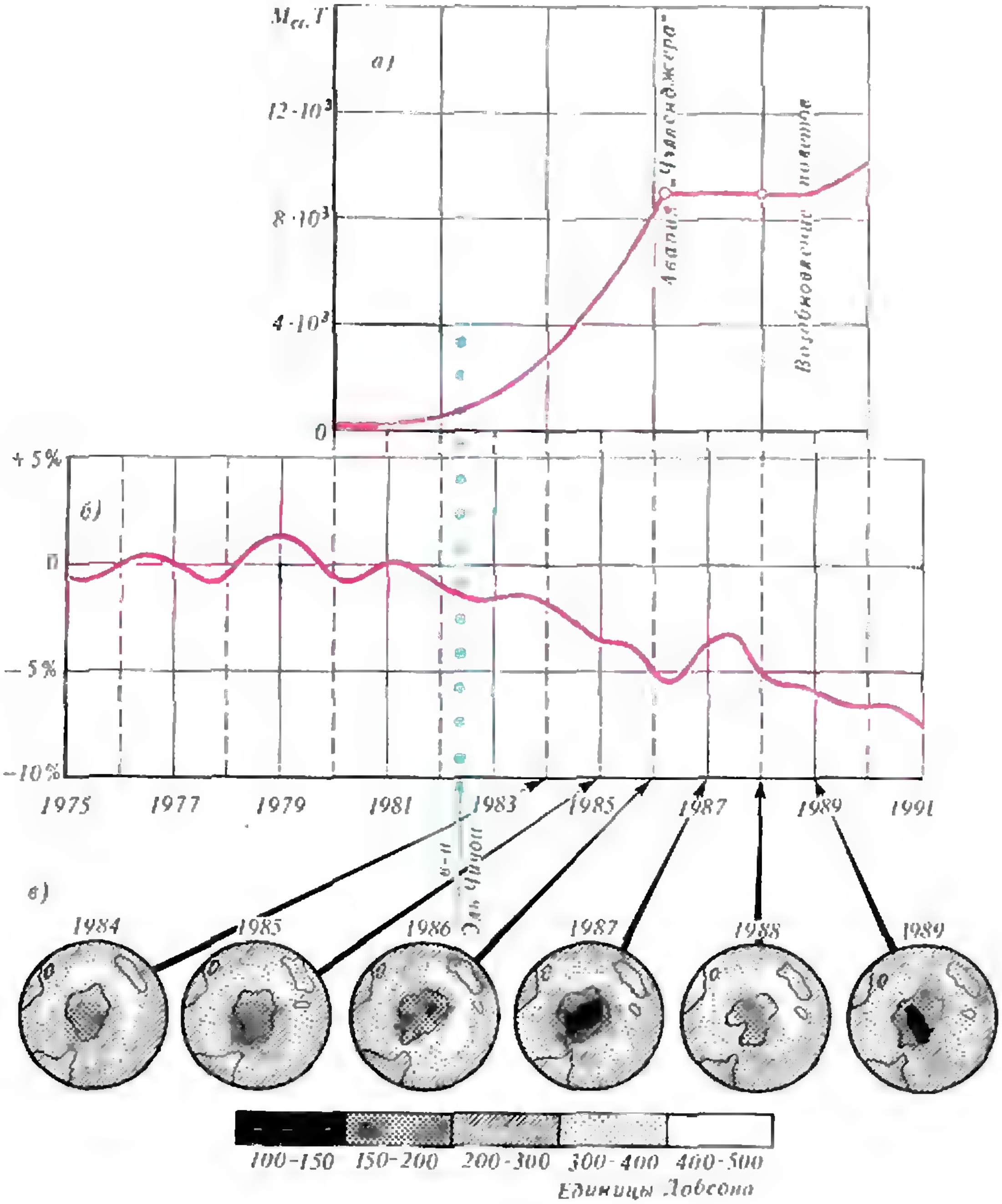


Рис. 4. Корреляционная зависимость массы выбрасываемого в атмосферу транспортной системой «Спейс Шаттл» хлора в тоннах (а) и наметившегося тренда уменьшения концентрации стратосферного озона в северном полушарии (б). Синие точки отмечают начало извержения вулкана Эль-Чичон — другую возможную причину появления озонных дыр в южном полушарии в центре Антарктиды в 1986, 1987 и 1989 годах (в). Одна единица Добсона соответствует 0,01 мм толщины озонного слоя в атмосферном столбе при нормальных условиях. Полная осредненная толщина озонного слоя для Земли не превышает 3,5 мм, или 350 единиц Добсона.

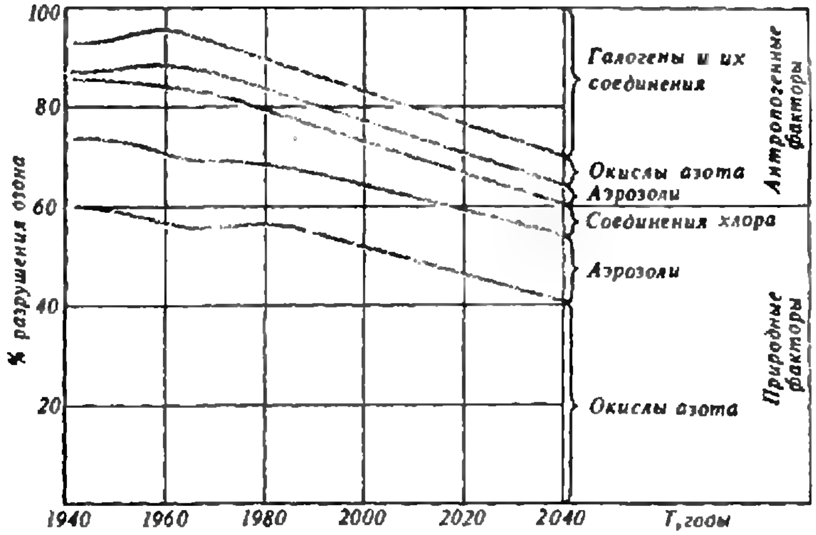


Рис. 5. Прогноз возрастания антропогенных факторов разрушения стратосферного озона по сравнению с природными факторами.

В настоящее время наибольшее количество запусков ракет осуществляют военные. Боевые ракеты малого и среднего радиусов действия, а также многие стратегические ракеты имеют твердотопливные двигательные установки, продукты выброса которых в большом количестве содержат аэрозоли, хлор и его соединения, а также окислы азота, т. е.— основные разрушители озона. К сожалению, твердотопливные ускорители все шире применяют и в космонавтике (США, Китай, Франция, Япония). Это совершенно недопустимо, особенно учитывая тенденцию к росту объемов космических транспортировок и повышению мощности ракет-носителей. Даже перспективные космические транспортные средства, которые не имеют твердотопливных ускорителей и работают на самых чистых топливных парах: водород с кислородом и углеводородное горючее с кислородом, также требует самого тщательного экологического анализа, т. к. продолжительность их пребывания в озонном слое существенно больше, чем у баллистических носителей (рис. 3).

На рисунке 4 приведена зависимость общего количества доставленных в озоносферу соединений хлора всего лишь одной космической транспортной системой — «Спейс Шаттл»*). Здесь учтен и перерыв в запусках из-за аварии «Чэлленджера» (*а*). На этом же рисунке приведен график периодических и систематических отклонений концентрации озона в северном полушарии (*б*). Периодические отклонения вызваны солнечной активностью, а систематические отклонения — причиной, которая, скорее всего, имеет антропогенную природу. Из сопоставления двух графиков видно, что уменьшение концентрации озона коррелирует с регулярными пусками «Шаттла». Вместе с тем, в апреле 1982 г. произошло мощное извержение мексиканского вулкана Эль-Чичон, выбросившего в земную атмосферу большое количество аэрозоля, хлоридов и окислов азота. Это природное событие некоторые специалисты и положили в основу объяснения причины возникновения «озонных дыр» в Антарктиде (*в*). Но «озонная дыра» постепенно исчезла, а затем появилась снова — после возобновления запусков «Шаттла», когда крупных вулканических извержений уже не было. Не доказывает ли это причастность «Шаттла» к «озонным дырам?» Как бы то ни было, ясно одно: природные и антропогенные процессы должны изучаться совместно, т. к. только в этом случае появится возможность правильно согласовывать мероприятия по защите окружающей среды. И чем раньше это будет сделано международным сообществом, тем эффективнее окажутся защитные меры.

Антропогенная доля в нашем экологическом бедствии неуклонно возрастает. Это видно хотя бы на примере разрушения озонного слоя (рис. 5). Даже многочисленные испытания ядерного оружия в атмосфере, которые проводились в 60-х годах, с точки зрения разрушения озонного слоя — ничто по сравнению с ситуацией нынешней. Еще более тяжелая картина ожидает людей в будущем веке, если научно-технический прогресс не будет поставлен под контроль информационных и природоохранных служб.

---

*) Имеющей (в отличие от системы «Энергия» — «Буран») в своем составе твердотопливные блоки — ускорители.

«Вместе к Марсу!»: национальный этап

Национальный этап международного конкурса «Вместе к Марсу!» завершен.*) С 17 по 21 июня в Москве состоялся финал, определены победители состязания и вручены награды. Прежде чем сообщить о наиболее интересных работах, расскажем, как проходил конкурсный отбор.

Всего в Оргкомитет поступило около 350 работ (не так много, как мы ожидали!). В зависимости от тематики они прошли экспертизу в МАИ, МГТУ им. Н. Э. Баумана, в Государственном астрономическом институте им. П. К. Штернберга. К каждой переданной на рассмотрение работе была приложена учетная карточка, в которую три специалиста заносили свои оценки. В итоге в Оргкомитет были представлены списки авторов, рекомендованных для участия в финальной части конкурса. После обсуждения всех кандидатур на совместном заседании жюри и Оргкомитета, которое проходило под председательством члена-корреспондента АН СССР М. Я. Марова с участием экспертов, был утвержден список участников финала.

Финалисты собрались под Москвой в Центре международного сотрудничества «Олимпиец». Здесь их ожидали новые испытания. В первый день все участники финала защищали свои проекты по секциям. Были выявлены 19 лучших, которые на следующий день выступили с докладами перед экспертами в МАИ и МГТУ. На третий день вечером общее жюри во главе с председателем Научно-технического совета Федерации космонавтики СССР профессором В. П. Сенкевичем провело собеседование с авторами наиболее интересных работ. Здесь и были определены 3 финалиста национального этапа: Ира Литвякова из Витебска, Сергей Стенюк из Донецка и Максим Штангеев из Харькова. Их работы отосланы в Планетное общество США. Теперь международному жюри предстоит на основе анализа всех присланных работ определить 20 участников заключительного этапа в Вашингтоне.

Участники финала в Москве награждены дипломами, авторам девяти лучших работ вручены ценные подарки и почетные дипломы Федерации космонавтики СССР. Финалисты встретились с учеными и конструкторами космической техники, посмотрели тематические видеофильмы, побывали в Звездном городке и в Научно-производственном объединении им. С. А. Лавочкина, где создаются межпланетные станции. В последний вечер они долго беседовали с президентом Всесоюзного аэрокосмического молодежного общества «Союз» космонавтом Александром Серебровым.

Во время работы в «Олимпийце» участники финала, руководители кружков, члены жюри и Оргкомитета обсуждали возможность дальнейшего сотрудничества. В ходе этих бесед родилась идея продолжить совместную работу, вовлекая в нее всех заинтересованных. Мы хотели бы, чтобы сложился коллектив ребят и взрослых, объединенных призывом пионера космонавтики Ф. А. Цандера — «Вперед на Марс!». Члены такого своеобразного очно-заочного конструкторского бюро могли бы заниматься самообразованием, продолжать разработку старого проекта или начинать новый, обмениваться информацией с коллегами, работать по заданиям и рекомендациям специалистов, встречаться для совместной работы. Итогом такой деятельности может стать многовариантный поэтапный проект исследования и освоения Марса.

Несколько слов о работах, получивших призовые места.

Простую и ясную модель предложила Ира Литвякова. При полете к Марсу может возникнуть ситуация, когда неподалеку от корабля пролетает комета, представляющая интерес для научных исследований. На такой случай надо иметь на борту корабля автоматический аппарат, способный осуществить сближение с кометой и посадку на поверхность ее ядра. По подсчетам Иры для взлета с поверхности ядра небольшой кометы нужна очень маленькая скорость. Такую скорость может сообщить аппарату сжатая пружина. В работе приведен список комет, проходящих перигелий в 1994—2000 гг., и проанализирована вероятность встречи с кометой. Для продолжения этой работы необходим более строгий анализ траекторий комет и возможности сближения с ними зонда, посланного с борта межпланетного корабля.

Работа Павла Зайчука (Красноярск) показала, что приближенный расчет траекторий может провести не только специалист. Павел приводит расчеты различных вариантов полета к Марсу и приходит к выводу, что сборку марсианского экспедиционного комплекса лучше осуществлять на высокой околоземной орби-

---

*) Об этом конкурсе «Квант» рассказывал в номерах 7, 10—12 за 1990 год. (*Примеч. ред.*)

те. При таком выборе точки старта и возвращения уменьшается необходимое количество горючего на межпланетном корабле. Все трудности при этом переносятся на системы, обеспечивающие сборку и обслуживание корабля на орбите.

Одной из серьезных трудностей при работе на высокой околоземной орбите является необходимость защиты от излучения радиационных поясов. При полете по межпланетной траектории радиация меньше, но и она создает серьезную проблему из-за большой длительности полета.

Противорадиационной защите корабля посвятил свою работу Максим Штангеев из Харькова. Он предлагает создать вокруг корабля магнитное поле, аналогичное магнитному полю Земли, которое надежно защищает нас от космической радиации. Магнитную катушку, создающую поле, предлагается изготовить из высокотемпературного сверхпроводника. Поскольку магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем заряженной частицей, расход энергии на поддержание тока в катушке теоретически равен нулю. Достаточно создать в катушке мощный ток при старте корабля. Чтобы получить нужный ток, Максим предлагает использовать «по совместительству» ракетный двигатель в качестве магнитогидродинамического (МГД) генератора. Такой МГД-генератор способен кратковременно генерировать огромный постоянный ток. Нескольких секунд, в течение которых работают современные МГД-генераторы, вполне достаточно для запуска сверхпроводящего контура. В работе приведены два варианта радиационной защиты для конкретных проектов космических кораблей, предлагаемых для полета на Марс. Первый вариант — для космического корабля в форме тора. На поверхность корпуса-тора необходимо нанести специальный слой со сверхпроводящим материалом. После запуска тока в контуре вокруг корабля возникает магнитное поле, по форме напоминающее яблоко. Вторым, более экономичным, вариантом защиты является противорадиационный магнитный зонт. Он представляет собой плоскую тороидальную катушку достаточно большой площади и пригоден для защиты корабля цилиндрической формы.

Александр Костыря (Днепропетровская область) выбрал в качестве возможной базы для старта и возвращения межпланетного корабля на околоземную орбиту, а Луну. Он не задерживается на вопросах баллистики и технических проблемах. Его тема — обеспечение экспедиции продуктами питания. Подробно рассмотрены проблемы космического растениеводства и птицеводства. Высказана, между прочим, мысль, что выращенные на Луне растения и животные должны лучше переносить условия межпланетного полета, чем выращенные на Земле. Особенно подробно рассмотрен вопрос о выращивании в космосе японских перепелов (эта неприхотливая домашняя птица давно уже является объектом экспериментов на орбите). Описана действующая установка для их выращивания, созданная товарищами Александра по кружку — членами клуба «Ровесник» СПТУ № 76 Межевского района Днепропетровской области.

Модели предлагаемых устройств представили многие участники конкурса. Хотя шел конкурс идей, а не моделей, такие «объемные иллюстрации» вызывали неизменный интерес. К числу идей, удачно проиллюстрированных моделями, относится работа Григория Шифрина (Днепропетровск). Шифрин предлагает выполнить взлетно-посадочный модуль марсианского корабля в виде дисколета с большой площадью киля и аэродинамических рулей. Дисколет за счет малых моментов инерции легко управляем, имеет критический угол атаки около 45° и даже при таких наклонах не сваливается в штопор, а может безопасно планировать без участия двигателей на заранее выбранную площадку.

Бóльшая часть работ, представленных на конкурс, была посвящена комплексному описанию марсианской экспедиции в целом. Среди них заметно выделяется детальностью проработки проект Сергея Стенюка (Донецк). Экипаж — 4 человека, продолжительность экспедиции — 520 суток с 20-суточным пребыванием на поверхности Марса, двигатель — электрореактивный. Для этих исходных условий детально описаны в пятидесятистраничном отчете все основные узлы корабля.

В целом совокупность конкурсных работ позволяет увидеть черты будущей марсианской экспедиции, что дает возможность надеяться на создание общего, тщательно проработанного проекта в нескольких вариантах.

Конкурс завершен, подарки вручены, но работа может быть продолжена. Оргкомитету и жюри интересно узнать, есть ли среди читателей «Кванта» желающие принять в ней участие. Ждем ваших писем. Направляйте их по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «КВМ»).

Заместитель председателя национального комитета Б. Пшеничнер,
член жюри конкурса С. Яценко

„Квант" улыбается

Мы продолжаем публикацию отрывков из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала». Короткий рассказ о книге и фрагменты из авторского предисловия к ней вы можете найти в июньском номере нашего журнала за 1989 год в заметке «Спасительная безликость».

Дома на воде

Д. ДЖОУНС

Долгая история архитектурных поисков и нерационального городского планирования наводит Дедала на мысль, что дома следует делать подвижными, чтобы в случае перепланировки не нужно было разрушать старые здания. Для перемещения домов удобнее всего было бы использовать принцип воздушной подушки, но, поскольку давление, оказываемое зданиями на опорную поверхность, составляет 0,02—2 атм, воздушная подушка вряд ли обеспечит требуемую подъемную силу. К тому же передвижение зданий сопровождалось бы невообразимым шумом. Поэтому Дедал намеревается использовать вместо воздуха воду, плотность которой в 1000 раз выше. Платформа на водяной подушке могла бы создавать значительную подъемную силу при относительно небольшом расходе воды. К сожалению, при этом вода затопит всю улицу, если только каким-то образом не отводить поток. Дедал предлагает окружить платформу водоотсасывающим кольцом, собирающим воду и возвращающим ее в систему. Дедал проектирует здания, оснащенные цистернами, насосами и всем необходимым для того, чтобы в считанные минуты превратить их в самоходные сооружения. Такой системой можно оснастить и многие существующие здания, возведенные на неглубоких или «плавающих» фундаментах.

Громко хлюпая, эти урбанистические суперводомерки будут скользить с места на место, подчиняясь прихотям архитектурной моды: высотный дом уступит место многорядному виадуку, а у подножия гигантов будут копошиться коттеджи и павильончики. Заводы будут ездить по стране в поисках квалифицированных рабочих или правительственных субсидий; пустеющие многоэтажные офисы приползут в центр Лондона, где спрос на них огромен, а старые конторы со своим персоналом покинут насиженные места, уступая требованиям комиссии по перепланировке. Трущобы гетто и загородные виллы будут располагаться обособленно или вперемежку, сообразуясь с текущей правительственной политикой (если же их просто оставить в покое, то со временем они естественным путем придут к равновесию). Проектировщики городов смогут не только учиться на своих ошибках, но и исправлять их. Только составители городских карт и работники коммунального хозяйства, наверное, проклянут новую Утопию.

(New Scientist, February 3, 1972)

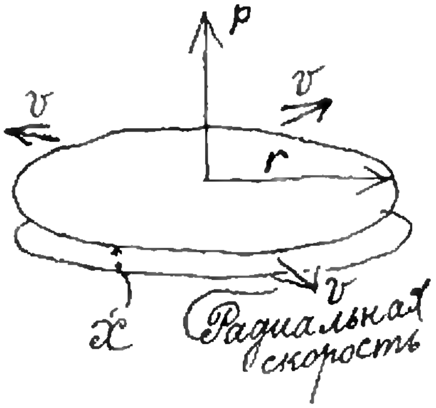
Из записной книжки Дедала

Рассмотрим платформу радиусом r, под которой в радиальных направлениях прокачивается жидкость через зазор размером x. Общая площадь щели $A=2\pi rx$, так что секундный массовый расход жидкости равен $m'(t)=2\pi rxv\varrho$.

Давление p, создаваемое в жидкости перед щелью, должно равняться потоку импульса через единицу площади щели, т. е.

$$p=2\pi rxv^2\varrho/2\pi rx=v^2\varrho.$$

Это давление одинаково всюду под платформой и действует на всю нижнюю ее поверхность. Тогда полная подъемная сила F равна произведению давления на площадь поверхности: $F=\pi r^2v^2\varrho$. Ясно, что вода, плотность которой в тысячу раз больше, чем у воздуха, создает в тысячу раз большую подъемную силу.



Принимая разумные размеры платформы на водяной подушке: $r=10$ м, $v=10$ м/с, $\rho=1000$ кг/м^3, находим

$$p=10^2\times1000\ \text{Н/м}^2=1\ \text{атм};$$

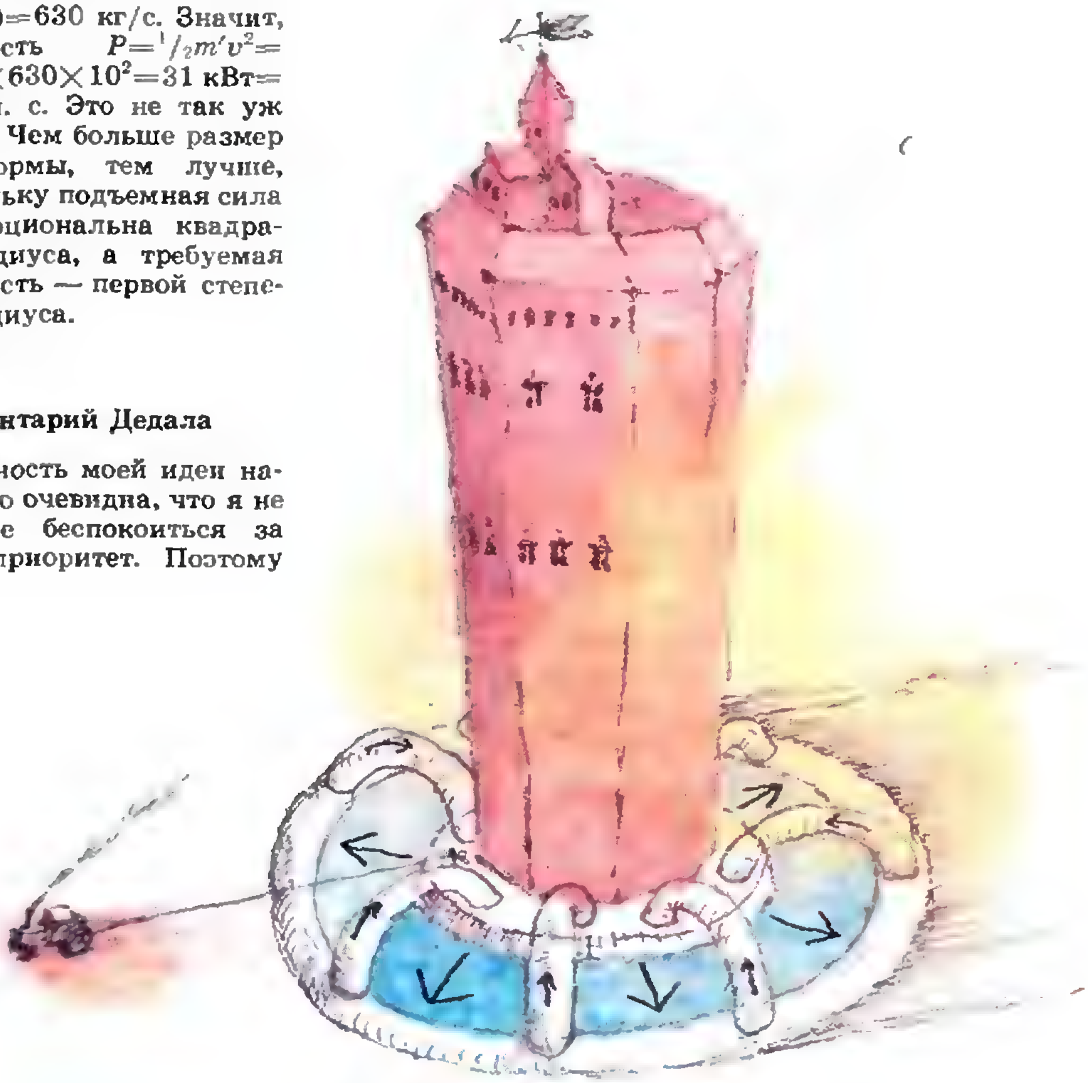
$$F=\pi\times10^2\times10^2\times1000=3{,}1\times10^7\ \text{Н}.$$

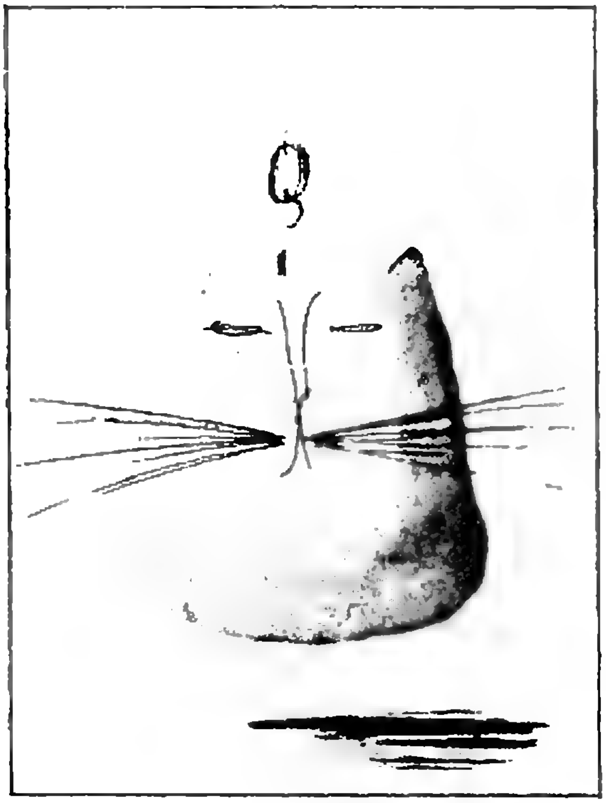
Прекрасно!

Какая мощность потребуется для создания нужного потока жидкости? Окружив здание прочной эластичной «юбкой», мы можем уменьшить зазор между ним и землей до 1 мм. Тогда массовый расход воды составит $m'=2\pi\times10\times10^{-3}\times10\times1000=630$ кг/с. Значит, мощность $P={}^1/_2 m'v^2=0{,}5\times630\times10^2=31$ кВт $=40$ л. с. Это не так уж много. Чем больше размер платформы, тем лучше, поскольку подъемная сила пропорциональна квадрату радиуса, а требуемая мощность — первой степени радиуса.

Комментарий Дедала

Разумность моей идеи настолько очевидна, что я не мог не беспокоиться за свой приоритет. Поэтому я не очень удивился, узнав, что другие организации «наступают на пятки» фирме КОШМАР. Шесть месяцев спустя (*New Scientist*, Aug. 17, 1972, p. 340) было опубликовано сообщение о том, что Национальная инженерная лаборатория в Ист-Килбриде использует платформы на водяной подушке для перемещения тяжелых грузов в доках. Патенты на эти платформы принадлежат Национальной научно-исследовательской корпорации. (Интересно, не потеряли ли они силу из-за того, что я опубликовал свой проект раньше?) Предполагалось, что такие платформы будут в основном использоваться для точной установки тяжелых деталей при сборочных работах. Никто, однако, не додумался пока применять их для перемещения зданий.





Практикум абитуриента

Энергия электрического поля

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

Когда мы говорим, что заряженный конденсатор обладает энергией, возникает ряд вопросов: откуда взялась эта энергия? где она сосредоточена? в каком виде? Убедиться в том, что в конденсаторе действительно запасена энергия, можно очень просто. Если, например, его разрядить через резистор, то резистор нагреется. И, наверное, всем известно, какая громадная энергия выделяется при разряде молнии (в гигантском конденсаторе «облако — земля»).

Чтобы ответить на поставленные выше вопросы, рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Имеется изолированный сферический воздушный конденсатор, у которого радиусы обкладок R_1 (внутренняя обкладка) и R_2 (внешняя), а заряд Q. Найдите плотность энергии электрического поля между обкладками конденсатора в случае, когда $R_2-R_1 \ll R_1$.*

Очевидно, что энергия, запасенная в конденсаторе, не зависит от способа зарядки. Проведем зарядку, например, таким способом. Будем небольшими порциями переносить заряд из бесконечности и помещать на обкладки. Сначала зарядим внутреннюю сферу. Пусть в некоторый момент на ней уже находится заряд q (мы его уже перенесли), и мы переносим очередную порцию заряда Δq. При этом нами будет совершена работа

$$\Delta A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta q}{R_1}.$$

Это выражение можно написать сразу, зная, что потенциал заряженной сферы равен $q/(4\pi\varepsilon_0 R_1)$. А можно исходить только из закона Кулона, записать выражение для работы на элементарном участке пути и проинтегрировать это выражение вдоль всего пути перемещения нашего заряда:

$$\Delta A=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\infty}^{R_1}\frac{q\Delta q}{r^2}\,dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\Delta q}{R_1}.$$

Понятно, что полная работа по перемещению заряда Q на внутреннюю сферу равна

$$A_1=\int\limits_0^Q\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1}\,dq=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Теперь начнем заряжать внешнюю сферу. Пусть, для определенности, на внутренней сфере находится положительный заряд, а на внешнюю будем переносить отрицательный заряд, который в некоторый момент будет равен $-q$. В этом случае при переносе очередной порции заряда этот заряд будет находиться в двух полях: в поле заряда $+Q$ (на внутренней сфере) и в поле заряда $-q$ (на внешней). Поэтому элементарная работа по переносу заряда $-\Delta q$ на сферу радиусом R_2 будет равна

$$\Delta A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\Delta q}{R_2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\Delta q}{R_2},$$

а полная работа —

$$A_2 = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Итак, наш конденсатор полностью заряжен, и запасенная в нем энергия

$$W=A_1+A_2=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Вся эта энергия сосредоточена между сферическими обкладками конденсатора в виде энегии электрического поля. Поскольку $R_2-R_1 \ll R_1$, поле можно считать однородным, а его напряженность равной

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2}.$$

Выразим полную энергию электрического поля через напряженность:

$$W=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta R}{R_1^2}= =2\pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2\Delta R.$$

Для нахождения объемной плотности энергии w поделим это выражение на объем $V=4\pi R_1^2\Delta R$, занимаемый полем, и получим

$$w=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Мы с вами рассмотрели воздушный конденсатор, и полученное выражение для объемной плотности энергии, строго говоря, соответствует случаю электрического поля в вакууме. Попробуем подправить наше выражение для среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \neq 1$. В этом случае, если мы будем помещать на сферы тот же заряд, то работа, совершенная нами, будет в ε раз меньше. В ε раз уменьшится и напряженность электрического поля, а выражение для объемной плотности энергии будет иметь вид

$$w=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Заметим, что полученный результат вовсе не означает, что плотность энергии после заполнения конденсатора диэлектриком (при сохранении зарядов) увеличилась в ε раз. Как раз все наоборот — энергия конденсатора уменьшилась в ε раз, поскольку напряженность поля уменьшилась в ε раз и произведение εE^2 также уменьшилось в ε раз. А вот если бы мы поддерживали постоянной разность потенциалов между обкладками конденсатора, то после заполнения конденсатора диэлектриком напряженность поля осталась бы прежней. а энергия конденсатора увеличилась бы в ε раз.

Задача 2. *Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поместить в центр незаряженной тонкой сферической оболочки заряд Q, первоначально расположенный на большом удалении от нее (рис. 1)? Радиус внутренней поверхности оболочки R_1, внешней R_2. Рассмотрите два случая: оболочка изолирована; оболочка заземлена.*

Прежде всего заметим, что минимальной работа будет в том случае, если заряд перемещать так медленно (квазистатически), что возможным выделением тепла при перемещении по оболочке наведенных зарядов можно будет пренебречь.

Теперь — непосредственно решение. Из энергетических соображений ясно, что работа равна разности энергий нашей системы (заряд и оболочка) в конечном и начальном состояниях:

$$A=W_к-W_н.$$

Сначала рассмотрим случай, когда оболочка не заземлена (изолирована). Электрическая энергия системы в на-

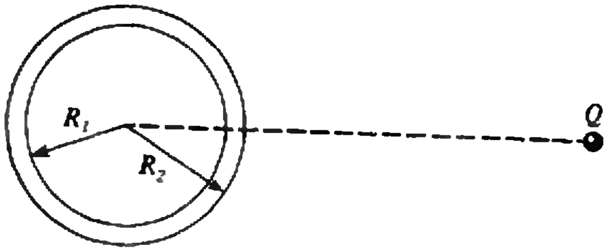


Рис. 1.

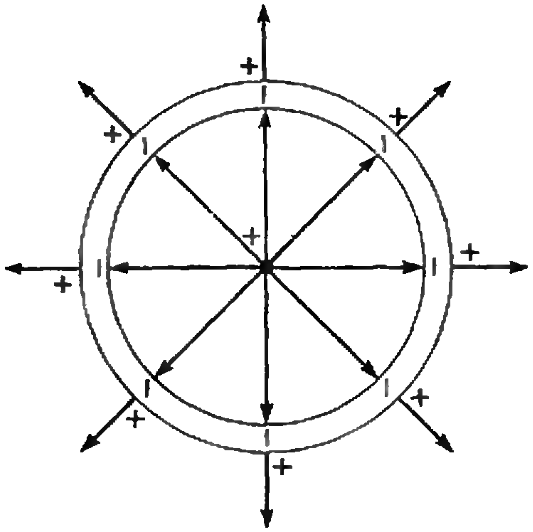


Рис. 2.

чальном состоянии, когда заряд Q (для определенности положительный) находится на большом удалении от оболочки, включает в себя только энергию электрического поля заряда Q:

$$W_н = W_Q.$$

Конфигурация электрического поля в конечном состоянии изображена на рисунке 2. Видно, что из поля заряда Q как бы вырезан сферический слой с радиусами R_1 и R_2. Поэтому понятно, что энергия электрического поля в конечном состоянии будет равна

$$W_к = W_Q - W_{R_1R_2},$$

где $W_{R_1R_2}$ — энергия электрического поля в сферическом слое с радиусами R_1 и R_2. Эта энергия может быть подсчитана что называется «в лоб» — плотность энергии поля нам известна, остается просуммировать (проинтегрировать) по всему объему сферического слоя. Мы же воспользуемся полученным в задаче 1 выражением для энергии поля заряженного сферического конденсатора:

$$W_{R_1R_2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Итак, совершенная в первом случае работа равна

$$A_I = W_к - W_н = (W_Q - W_{R_1R_2}) - W_Q =$$
$$= -W_{R_1R_2} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Рассмотрим теперь случай заземленной оболочки. Конфигурация поля, когда заряд Q будет находиться в центре, изображена на рисунке 3. В этом случае на оболочку перетечет отрицательный заряд, равный по величине Q. Этот заряд будет расположен на внутренней поверхности оболочки, и поле будет сосредоточено только внутри сферы радиусом R_1. Работа в этом случае будет равна

$$A_{II} = W_к - W_н = (W_Q - W_{R_1}) - W_Q =$$
$$= -W_{R_1} = -\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Разумеется, этот результат можно было получить сразу из выражения для A_I, положив в нем $R_2 \to \infty$.

З а д а ч а 3. *Какое количество теплоты выделится на резисторе сопро-*

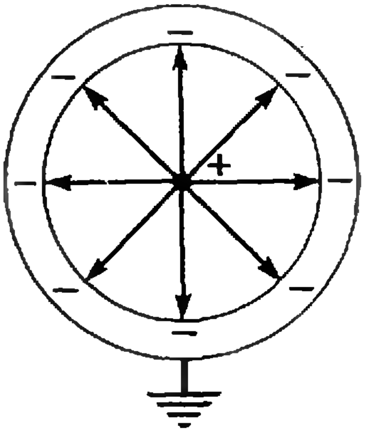


Рис. 3.

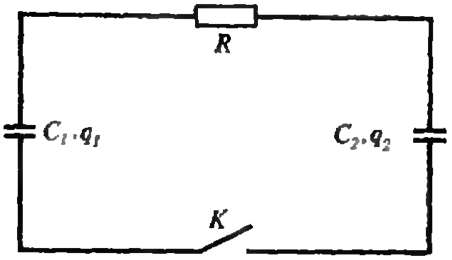


Рис. 4.

тивлением R в схеме, приведенной на рисунке 4, после замыкания ключа K? До замыкания ключа на конденсаторе емкостью C_1 находился заряд q_1, а на конденсаторе емкостью C_2 — заряд q_2.

Согласно закону сохранения энергии, выделившееся количество теплоты будет равно разности энергий конденсаторов до замыкания ключа K и после замыкания, т. е. разности начальной и конечной энергий:

$$Q = W_н - W_к.$$

До замыкания ключа суммарная энергия, сосредоточенная в конденсаторах, равна

$$W_н = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Для нахождения энергии конденсаторов после замыкания ключа и установления нового стационарного состояния мы должны найти новые заряды на конденсаторах. Пусть с конденсатора емкостью C_1 ушел заряд q, и новый заряд на нем стал равным $q_1 - q$. По закону сохранения суммарного заряда, на пластинах конденсатора емкостью C_2 установится заряд $q_2 + q$. Условием прекращения перетекания зарядов будет равенство напряжений на конденсаторах:

$$\frac{q_1 - q}{C_1} = \frac{q_2 + q}{C_2}.$$

Решая это уравнение, получим

$$q = \frac{q_1C_2 - q_2C_1}{C_1 + C_2}.$$

Тогда новые заряды на конденсаторах будут равны

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2)$$

и

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2),$$

новый запас энергии в конденсаторах будет

$$W_к = \frac{q_1'^2}{2C_1} + \frac{q_2'^2}{2C_2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)},$$

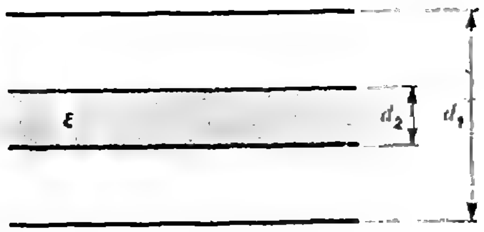


Рис. 5.

а выделившееся количество теплоты —

$$Q = W_н - W_к = \frac{(q_1C_2 - q_2C_1)^2}{2C_1C_2(C_1 + C_2)}.$$

Как видно из полученного выражения, Q не зависит от R. Какова же роль сопротивления? Оказывается, его величина влияет на скорость рассеяния (диссипации) энергии — чем меньше R, тем более интенсивно происходит выделение тепла, а время разрядки соответственно уменьшается.

Задача 4. *Какую работу нужно совершить, чтобы в зазор плоского воздушного заряженного конденсатора вставить другой плоский заряженный конденсатор, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 5)? Заряды на конденсаторах Q_1 и Q_2, площадь каждой пластины S, расстояние между пластинами d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$).*

Для решения задачи используем энергетический метод. Очевидно, что работа по введению конденсатора с зарядом Q_2 в конденсатор с зарядом Q_1 будет равна разности энергий электрического поля конденсаторов в конечном и начальном положениях:

$$A = W_к - W_н.$$

В исходном состоянии конденсаторы изолированы друг от друга, и их суммарная энергия равна

$$W_н = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q_1^2 d_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_2^2 d_2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}.$$

Энергию электрического поля системы в конечном состоянии найдем с помощью полученного выше выражения для плотности энергии электрического поля. Рассмотрим два объема однородных электрических полей: объем

$V_2 = Sd_2$ конденсатора с зарядом Q_2 и суммарный объем $V_1 = S(d_1 - d_2)$ воздушных зазоров между пластинами. Напряженность электрического поля в объеме V_1 определяется поверхностной плотностью зарядов на внешних пластинах: $E_1 = Q_1/(\varepsilon_0 S)$. В объеме V_2 напряженность электрического поля определяется суммарным зарядом пластин $Q_1 + Q_2$ и диэлектрической проницаемостью ε среды, заполняющей внутренний конденсатор: $E_2 = (Q_1 + Q_2)/(\varepsilon_0 \varepsilon S)$. Конечная энергия электрического поля системы равна

$$W_к = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} V_1 + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_2^2}{2} V_2 =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} \left(Q_1^2(\varepsilon d_1 - \varepsilon d_2 + d_2) + \right.$$

$$\left. + 2Q_1 Q_2 d_2 + Q_2^2 d_2\right).$$

Окончательно работа по введению конденсатора с зарядом Q_2 в конденсатор с зарядом Q_1 равна

$$A = W_к - W_н = \frac{Q_1 d_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} (2Q_2 - (\varepsilon - 1) Q_1).$$

Проанализируем полученное выражение. В нем содержатся два члена — первый определяет ту часть работы, которую нужно совершить, чтобы ввести пустой (воздушный) конденсатор ($\varepsilon = 1$), второй член характеризует работу по введению диэлектрической пластины толщиной d_2 ($Q_2 = 0$). Знак перед первым членом зависит от произведения зарядов: если $Q_1 Q_2 > 0$, то мы совершаем положительную работу, и, следовательно, на конденсатор с зарядом Q_2 и $\varepsilon = 1$ действует выталкивающая сила; если же $Q_1 Q_2 < 0$, то конденсатор втягивается, и мы совершаем отрицательную работу. Знак перед вторым членом всегда отрицательный — диэлектрическая пластина всегда втягивается в область, занятую электрическим полем. В общем случае полная работа A может быть или положительной, или отрицательной, или равной нулю.

Заметим, что при решении данной задачи мы пренебрегли краевыми эффектами, т. е. мы считали, что все электрическое поле зарядов на пластинах конденсатора сосредоточено в объеме, ограниченном размерами пластин, и однородно. Это приближение выполняется тем лучше, чем меньше расстояние между пластинами по отношению к размерам пластин. Казалось бы, все нормально и естественно. Однако возникает парадоксальная ситуация — для расчета количественного показателя эффекта мы пренебрегли самим эффектом. Действительно, работа, совершаемая при введении одного заряженного конденсатора в другой, обусловлена действием силы со стороны электрического поля основного (неподвижного) конденсатора на вводимый конденсатор. Эта сила возникает только из-за неоднородности поля на краю неподвижного конденсатора, т. е. определяется краевым эффектом. А мы этим эффектом пренебрегли. Как же так? На самом деле никакого парадокса нет — силы определяются не величиной поля на краю конденсатора, а величиной изменения поля по мере смещения от края пластин. В случае малого расстояния между пластинами конденсатора по сравнению с размерами пластин величина поля вне конденсатора резко спадает, и лишь малая часть силовых линий поля выходит за границы объема конденсатора.

Задача 5. *Плоский воздушный конденсатор касается поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью ρ. Найдите высоту поднятия жидкости в конденсаторе, пренебрегая капиллярными*

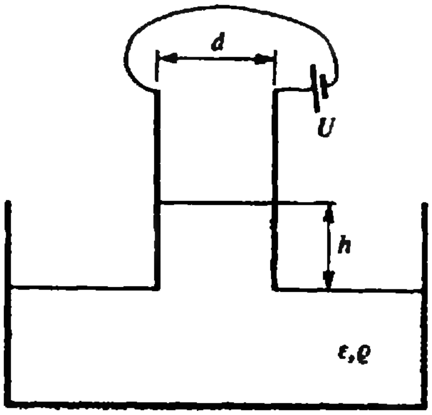


Рис. 6.

явлениями, если между его обкладками поддерживается постоянная разность потенциалов U, а расстояние между пластинами d (рис. 6).

Пусть уровень жидкости между пластинами конденсатора после подключения источника напряжения установится на высоте h. Любая замкнутая система стремится занять устойчивое положение, при котором она обладает минимумом потенциальной энергии.

Запишем полную энергию нашей системы. Она включает в себя энергию электрического поля конденсатора, энергию, запасенную в источнике, и потенциальную энергию жидкости в поле тяжести. Энергия W_C частично заполненного диэлектрической жидкостью конденсатора в нашем случае равна

$$W_C=\frac{CU^2}{2}=\left(\frac{\varepsilon_0 S(L-h)}{dL}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon Sh}{dL}\right)\frac{U^2}{2}=$$
$$=\frac{\varepsilon_0 S(L+(\varepsilon-1)h)}{dL}\frac{U^2}{2}.$$

Энергию W_U источника напряжения можно записать в виде разности некоторого первоначального запаса энергии W_0 (до подключения к конденсатору) и работы, совершенной источником по зарядке конденсатора:

$$W_U=W_0-qU=W_0-(CU)U=$$
$$=W_0-2W_C.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости равна

$$W_g=\frac{\rho g d h^2 S}{2L}.$$

Поскольку полная энергия W нашей системы в состоянии устойчивого равновесия минимальна, ее производная равна нулю:

$$\frac{dW}{dh}=0,\quad -\frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2}{2dL}+\frac{2\rho g d h S}{2L}=0,$$

откуда следует, что искомая высота поднятия жидкости будет равна

$$h=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2\rho g d^2}.$$

В приведенном решении мы не учитывали потерь энергии в нашей системе, и может возникнуть вполне законный вопрос: не окажут ли влияние эти потери на высоту подъема жидкости? Мы исследовали статические состояния нашей системы и среди них нашли состояние с наименьшей энергией. Это то состояние, к которому стремится наша система, а если в системе есть потери, то источник напряжения вынужден будет совершить дополнительную работу. И если источник в состоянии покрыть эти потери, то система рано или поздно придет в состояние устойчивого равновесия с минимумом потенциальной энергии.

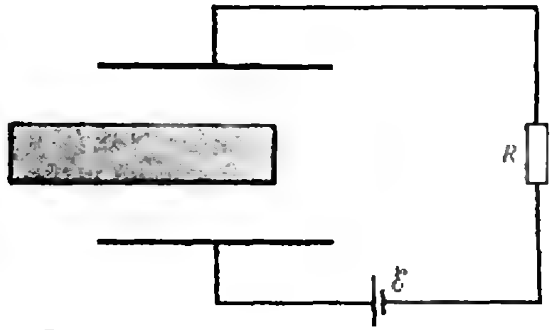


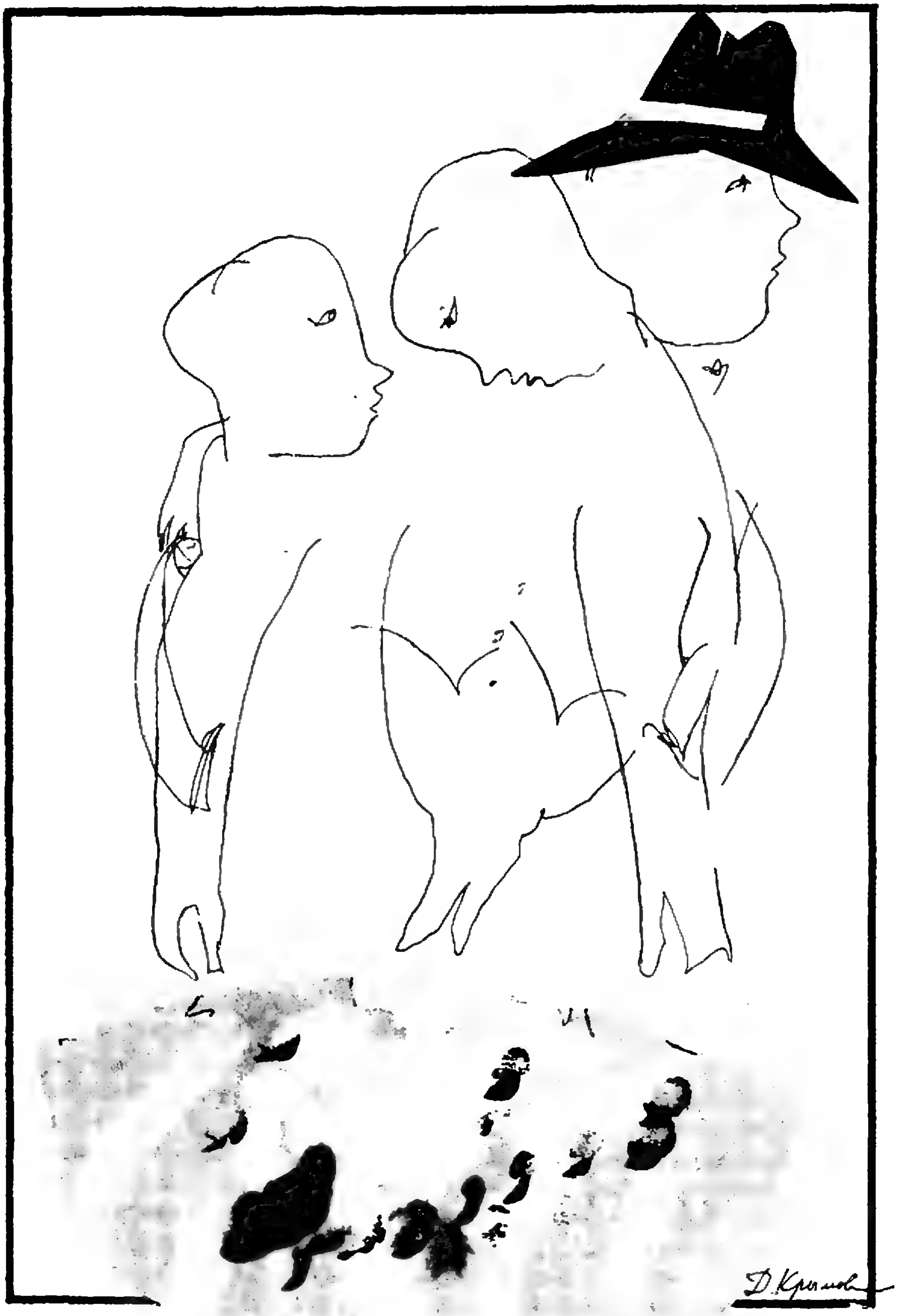
Рис. 7.

Упражнения

1. Вычислите электростатическую энергию шара радиусом R, заряд которого Q равномерно распределен по его объему.

2. В центрах двух удаленных друг от друга диэлектрических шаров с радиусами $R_1=R$, $R_2=12R$ и проницаемостью ε помещены заряды $q_1=q$, $q_2=2q$. Найдите работу, необходимую для того, чтобы поменять эти заряды местами.

3. Плоский воздушный конденсатор подключен через резистор к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ (рис. 7). В пространство между пластинами быстро вставляют металлическую пластину, толщина которой в три раза меньше расстояния между пластинами конденсатора. За время введения пластины заряд на конденсаторе не успевает измениться. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после введения пластины? Емкость пустого конденсатора C_0.



ПРАКТИЧНОЕ ИЗОБРЕТЕНИЕ

Л. ТАШНЕТ

Я человек практичный, не то что мои сыновья, хотя они и умные ребята. А ума у них хватает, ничего не скажешь. Не родись они близнецами и достанься этот ум одному, а не двоим, так все ученые в мире, вместе взятые, этому одному и в подметки бы не годились. Ну, да и сейчас им жаловаться не приходится — оба отличные инженеры и на самом лучшем счету в своей фирме. Большая фирма, занимается электроникой и еще чем-то в том же роде. Называть я ее не буду, потому что ребятам это не понравится. Я их хорошо знаю. Да кому и знать, как не мне? Я ведь сам их вырастил, а это, позвольте вам сказать, было совсем не так легко: мать их умерла, когда им еще девяти не исполнилось, а я второй раз жениться не стал. Вот и приходилось и делами заниматься, и следить, чтобы в доме все шло как полагается и за ребятами настоящий присмотр был. Ну, да они всегда были хорошими мальчиками...

У Ларри есть свой конек — лазеры. Ну, это такой способ посылать свет. Как уж они устроены, я не знаю, потому что я-то в колледжах не обучался, не до того было. А Лео — фокусник-любитель, и, надо сказать, это у него ловко получается. Ну, и вместе они напридумывали много разных фокусов и номеров. Подвал у нас битком набит всяким оборудованием. Вот об этом-то я и хотел рассказать.

Ларри придумал аппарат для Лео, чтобы создавать оптические иллюзии. Ну, знаете: словно бы видишь что-то, чего на самом деле тут и вовсе нет. Как-то там зеркала приспосабливают. А Ларри приспособил лазеры и начал делать вроде бы картинки, но только вовсе и не картинки, а голограммы — вот как он их назвал. На негативе одна мешанина из точек и всяких завитушек, а если спроецировать на экран, то вид такой, словно этот предмет можно кругом обойти. Объемное изображение. Ну, объяснить это трудно, надо своими глазами видеть. Обычная картинка — она плоская и выглядит одинаково, с какого боку на нее ни посмотришь, а голограмма выглядит, как будто это не картинка, а настоящая вещь, и если зайти справа или слева, то видишь совсем не то, что спереди.

Так вот, значит, Ларри сделал нашему Лео аппарат для голограммных иллюзий. Он проецировал изображение не на экран, а прямо в воздух. При помощи зеркал. Они меня позвали и показали. Просто поверить невозможно! В воздухе плавает самая настоящая шкатулка, или ваза с фруктами, или букет — ну просто что хотите. Даже кучка мелкой монеты. И она-то и навела меня на мысль.

— Прямо как настоящие,— говорю я.— Жалко, что вы не можете их сохранить насовсем! Обрызгали бы плексигласом, что ли,— ну, как цветы сохраняют.

Это я вспомнил про сувениры, которые продают в лавках для туристов — всякие штучки в прозрачных кубиках, вроде бы стеклянных.

Ребята так и покатились.

— Папа,— говорят они хором (они всегда говорят хором),— это же только иллюзия. Это же не реальные деньги. Их на самом деле тут нет.

— Реальные — не реальные... А что такое «реальные», позвольте вас спросить? Я их вижу, и вы их видите,— говорю я.— Мы могли бы хоть в суде под присягой показать, что видели горсть мелочи прямо в воздухе. Разве нет?

А потом в шутку я и говорю... Ну, не совсем в шутку, потому что забава — это забава, но раз уж подвернулась возможность заработать доллар-другой, так с какой стати ее упускать? Вот, значит, я и говорю:

— Вы, ребята, у меня такие умные, так почему бы вам не придумать способа, чтобы эта иллюзия не исчезла, даже когда вы свой лазер выключите? Хоть и мелочь, а все равно ведь деньги.

Ну, тут они принялись мне объяснять, что у световых волн нет никакой массы и еще всякие там премудрости, в которых сам черт ногу сломит. Но одно я все-таки понял:

— Раз световые волны, которые, по-вашему, неосязаемы, могут рисовать такие картинки, что кажется, будто тут что-то есть, так вам, чтобы оно и вправду тут

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практичное изобретение» (М., Мир. 1974).

было, достаточно будет это изображение чем-то обмазать. Скажем, другими какими-нибудь световыми волнами, чтобы изображение не пропало. А если его удастся обмазать, так, значит, оно и в самом деле будет тут, ведь верно?

Они опять засмеялись, но я увидел, что мои рассуждения не пропали даром...

— Папа, тебе бы философом быть,— говорит Лео.— Ты бы побил епископа Беркли его собственным оружием...

(Я потом нашел этого епископа в энциклопедии. Человек был с головой, ничего не скажешь. Так умел рассуждать, что не сразу и подкопаешься.)

Тут они принялись спорить между собой, что обмазывать надо будет волнами особой длины, и все такое прочее. Ну, я и ушел.

Недели через три ребята пригласили меня посмотреть, что у них получилось. К своему прежнему аппарату они добавили приставку, которая окружила голограмму (для модели они взяли десятицентовик) вроде бы туманом, как только она возникла. Потом они что-то включили, туман рассеялся, и — хотите верьте, хотите нет — изображение десятицентовика начало опускаться на пол. Правда, очень медленно, но все-таки оно опускалось.

— Видишь, папа,— говорит Лео,— у голограммы теперь есть вес.

— Очень интересно,— говорю я. А что еще я мог сказать? Тут вдруг изображеиие монеты исчезло, и на пол упала капля клея, какой прилагается к детским авиаконструкторам.

— Ну, а дальше что? — спрашиваю я.— Чего вы, собственно, добились?

— Одну проблему мы решили и сразу же столкнулись с другой,— говорят ребята хором.— Нам теперь нужно добиться, чтобы обмазка успевала затвердевать прежде, чем голограмма исчезнет. Если это нам удастся, то мы получим точный слепок оригинала.

Ну, я уже говорил, что я человек практичный. Я им посоветовал:

— А вы сделайте так: когда туман рассеется и изображение начнет падать, пусть оно упадет в жидкую пластмассу, которая затвердевает быстрее, чем за секунду. Вот будет фокус — взять в руку слепок оптической иллюзии.

Ну, тут они опять принялись втолковывать мне, что голограмма существует только в пучке света — то да се,— и вдруг оба замолчали и переглянулись. Я понял — они что-то придумали.

Потом время от времени я все пытался их расспросить, как у них идут дела с новым фокусом, но они отмалчивались. Прошло с полгода. Я совсем уж и думать забыл про эти голограммы, но тут они меня опять позвали посмотреть свой новый аппарат.

В углу подвала стояли два бочонка. Ребята дали мне мотоциклетные очки и велели их надеть. А я тем временем заглянул в бочонки и вижу, что они чуть не доверху полны десятицентовиками.

Новый аппарат был совсем не похож на прежний. Это была трубка из толстого, только совсем прозрачного стекла в форме буквы «Х». Трубка была со всех сторон запаяна, и только там, где палочки «Х» перекрещивались, снизу имелось отверстие. А на полу под трубкой лежал старый матрас, весь в черных дырочках, словно об него гасили окурки. Лео навел голограмму десятицентовика внутрь трубки и двигал ее до тех пор, пока она не оказалась в самой середке «Х». А Ларри в другом углу включил еще какой-то аппарат, и в одном конце трубки появилось изображение тумана — длинная такая, узкая полоска. Ларри покрутил что-то, и полоска тумана начала медленно двигаться по трубке, пока не совпала с голограммой десятицентовика в середке.

— Давай! — скомандовал Лео.

Тут они оба что-то покрутили — и в центре «Х» будто мигнула лампа-вспышка. И тут же матрас на полу поехал вперед, потом назад и вбок. Я просто глазам не верил: из отверстия в трубке на матрас посыпались десятицентовики, укладываясь ровными рядками. Скоро весь матрас был покрыт монетами, и они перестали сыпаться.

Я только рот разинул. А ребята расхохотались, и Лео говорит:

— Ну-ка, попробуй возьми их в руки, папа!

Я принялся подбирать монеты. Ну, ни дать ни взять настоящие десятицентовики, только покрыты очень тонкой прозрачной твердой пленкой и совсем легкие — прямо ничего не весят.

— Ты подал нам хорошую мысль, папа,— говорит Ларри,— но мы кое-что добавили и от себя. Сгусток световых волн нельзя обмазать ничем материальным, но мы сообразили, что на голограмму десятицентовика можно наложить голограмму аэрозоли быстротвердеющей прозрачной пластмассы.

Тут он объяснил, что свет — это не просто волна, но еще и частица, а потому теоретически тут должно произойти образование пленки.

Он мне очень подробно это объяснил, но только я все равно ничего не понял.

— Теперь ты видишь, папа? Наложи

один негатив на другой — и получишь позитив. Минус на минус дает плюс. Это верно не только с математической, но и с философской точки зрения. Отрицание отрицания, как сказал Гегель. Только новый позитив находится на более высоком витке диалектической спирали, чем оригинал...

И пошел, и пошел.

А я рассматривал десятицентовики. Если бы не пленка, они ни чем не отличались бы от настоящих монет.

— И что же вы будете с ними делать? — спросил я.

Ребята переглянулись.

— А мы с ними ничего и не собирались делать,— отвечают они.— Просто было интересно с этим повозиться.

Наверное, они заметили, как я на них посмотрел, потому что вдруг хором сказали:

— Мы можем раздавать их зрителям после представления на память, папа,— и глядят на меня с улыбкой: дескать, видишь, какие мы практичные.

Ну вы сами видите, каких я практичных сыновей воспитал. Изобрели копирующий аппарат и думают использовать его для любительских фокусов! Я покачал головой.

— Нет, я придумал кое-что получше. Эти штуки ведь ничего не стоят, если не считать расходов на пластмассу и на электричество, а потому из них можно много чего наготовить. (Они сразу поняли, к чему я клоню: я ведь занимаюсь бижутерией.) Ну, скажем, индийские браслеты или цыганские серьги.

— Ничего не выйдет, папа,— говорят они, а Ларри добавляет: — Вот посмотри.

Он подобрал одну монетку и швырнул ее об стену. Словно бы вспыхнуло радужное пламя — и все. От монеты даже и следа не осталось.

— Видишь? — спрашивает Лео.— Стоит нарушить структуру — и ты опять получаешь световые волны, которые движутся со скоростью сто восемьдесят шесть тысяч миль в секунду.

Это он правду сказал. Я взял с верстака коловорот и попробовал просверлить в десятицентовике дырочку. Хоп! Ни монеты, ни даже пластмассовой оболочки. Ларри говорит:

— Вот видишь, папа, они годятся только на бесплатные сувениры. Забавная новинка, и ничего больше.

До чего же они оба у меня непрактичные!

— Так сделайте их тяжелее, раз уж вы научились их изготовлять. Подберите оболочку потверже. На такие штучки всегда есть спрос — иностранные монеты, цветочки там или даже мушка какая-нибудь красивая.

Ну, оказалось, они уже пробовали, только ничего не вышло. Монеты-то образовывались, но как только теплая пластмасса ударялась о матрас, они сразу исчезали. Ребята мне тут же это и показали.

Эх, получи я их образование, давно бы я был миллионером! Самых простых вещей сообразить не могут.

— Вот что, ребята! До того, как проецировать изображение, приклейте на негативе к монете крохотное ушко. И тогда в него можно будет пропустить нитку или проволочку.

Вижу, им неприятно, что они сами до того не додумались. Ну, мне и захотелось их подбодрить. Это не дело, если отец собственных сыновей обескураживает. Я и говорю:

— Вот что, ребята. Я где-нибудь добуду золотую монету в двадцать долларов и закажу ювелиру приделать к ней ушко, как я вам и говорил. Вы изготовите побольше копий, и я покажу их Тони (это мой художник), а уж он что-нибудь сообразит. Прибыль поделим пополам.

Так мы и сделали. Они мне наготовили полный бочонок золотых монет (их изображений в оболочке, само собой). Золотые эти совсем ничего не весили. Тони понаделал из них всяких ожерелий, поясков, серег, обручей на голову, и расходиться они начали, как горячие пирожки. Я поставлял их крупным магазинам в Нью-Йорке и Далласе и бижутерийным лавочкам в Лос-Анджелесе. Они сразу вошли в моду. И выглядели совсем как настоящие. Да, собственно, в некотором роде они и были настоящими. Только такие украшения из подлинного золота совсем оттянули бы руки или шею, а эти были легче перышка. Некоторое время спрос на них был очень большой, и мы порядочно заработали.

Да оно и понятно. Электричество обходится дешево, лазерный аппарат и трубка были уже изготовлены раньше, а двадцатидолларовая монета стоит в антикварном магазине всего семьдесят два доллара. Так что можете сами высчитать чистую прибыль. В общем, как я уже сказал, мы на них неплохо заработали.

Однако мода — это мода, и когда украшения из монет всем приелись и перестали расходиться, я попросил ребят изготовить мне кое-что еще.

Тут уж я пошел на расходы: купил восьмикаратовый бриллиант самой чистой воды и заказал для него съемную филигранную оправу (понимаете, такая оправа позволяла изготовить несколько моделей). Ну, с бочонком таких побрякушек можно было сделать настоящее дело. Из-за пленки камешки выглядели похуже оригинала, но все-таки сверкали неплохо, можете мне поверить. Я ограничился одним бочонком потому, что намеревался продавать такие украшения как редкость. У меня их было достаточно для десятков диадем, кулонов, подвесок и хватило еще для особого заказа — одна миллионерша, жена нефтяного магната, расшила ими свое платье к свадьбе дочки. Конечно, я не утверждал, что это бриллианты, как и не выдавал мои золотые монеты за золото, и торговал я ими как бижутерией, только особого сорта. Они стали специальностью моей фирмы и соперничали даже с австрийским горным хрусталем и стразами.

Я мог бы найти сотни способов, чтобы использовать затвердевшие голограммы, и сказал ребятам, что им пора бы запатентовать процесс, и поскорее. А пока больше ничего изготовлять не следует.

Они сразу согласились.

Хорошие ребята, только несерьезные. Видите ли, им все это уже успело надоесть. А что дело приносит деньги, их совсем не интересовало.

Тут как раз подошло рождество — время для нас самое горячее,— и я так захлопотался, что спросил ребят про патент только после Нового года. Они поглядели друг на друга, потом на меня и хором вздохнули.

— Мы решили не брать патента, папа.

Ага! Благородство взыграло, подумал я. Опубликуют формулу в каком-нибудь научном журнале и подарят свое открытие человечеству. А какой-нибудь ловкач добавит пустячок, да и возьмет патент на свое имя.

— Почему же вы так решили? — спрашиваю я терпеливо.

— Слишком опасно,— говорят они хором. А потом Лео начал объяснять про сохранение энергии, а Ларри — про атомную бомбу, и зачастили, зачастили, так что у меня голова кругом пошла от этих их «е равно эм це в квадрате» и «эффектов реверберации при наложении волн». Ну, я их перебил:

— Бог с ней, с наукой. Объясните-ка по-человечески.

— Проще объяснить нельзя,— сказал Лео, а Ларри добавил: — Мы лучше тебе покажем.

Накануне выпало много снегу, и двор был весь в сугробах. Ларри спустился в подвал и принес оттуда мешочек с десятицентовиками, которые так там и лежали в бочонках. И еще он принес духовое ружье. Потом положил десятицентовик на сугроб, а на этот десятицентовик — еще один. А сам взял камешек и бросил его на монетки. Когда камешек о них ударился, они, как всегда, вспыхнули и исчезли.

— Ну и что? — спрашиваю я.— Мы же всегда знали, что они непрочные. И всех клиентов я об этом предупреждал.

— Посмотри получше, папа,— говорит Лео и показывает туда, где лежали монетки. Снег там подтаял, и образовалась ямка дюйма полтора в поперечнике и чуть меньше дюйма глубиной. Но я все равно не мог понять, к чему он клонит.

Ребята повели меня за дом, к большому сугробу, куда мы счищаем снег с крыши. Этот сугроб был чуть не в человеческий рост. Лео взял десять монеток и осторожно вдавил их колбаской в снег на высоте груди. Потом отвел нас шага на четыре к забору и выстрелил из духового ружья. Тут на секунду словно метель разбушевалась. А когда в воздухе прояснилось, я гляжу — от сугроба ничего не осталось, и пахнет словно после грозы.

Тут меня как осенило. Я схватил Лео за руку и закричал:

— Да это же замечательно! Кому нужны все эти побрякушки? Вы ведь можете за один час очистить от заносов целый город или шоссе.

Но ребята только головами покачали.

— Нет, папа. Ты сам человек мирный и нас такими же воспитал. Разве ты не понимаешь, к чему это может привести?

Тут Лео начал объяснять, и Ларри начал объяснять, а я только молчал и слушал.

— Ведь таким способом можно изготовить оружие уничтожения пострашней водородной бомбы. Чтобы убрать этот сугроб, хватило десяти монеток. А ты попробуй представить себе, что случится, если кто-нибудь сложит кучкой тридцать таких монеток и выстрелит в них из духового ружья? Или пятьдесят? Или сто? Одна разбитая монетка исчезает словно бы бесследно, просто возвращаясь в общее электромагнитное поле, и энергии при этом выделяется так мало, что невозможно измерить. Когда исчезли две монетки одновременно, выделилось тепло, которое растопило немного снега, как ты сам видел. Десять уже взорвались с выделением значительного количества тепла и ионизировали кислород в атмосфере. Ты ведь почувствовал запах газа, который при этом получился,— озона? Мы рассчитали, что будет происходить, если увеличивать число монет вплоть до сотни. А дальше мы просто побоялись считать. При добавлении каждого нового десятка, помимо взрыва и выделения тепла, возникают всякие явления вторичного порядка, и при этом все более сильные.

Мы вернулись в дом и с полчаса сидели молча. Я хорошенько обдумал все это. Ребята были абсолютно правы: в мире и без нас хватает неприятностей. И я им сказал, что они правильно решили. Тут оба вскочили и давай меня целовать — это взрослые-то люди! И оба просто сияют.

— Папа, ты у нас молодец!

А потом как-то сразу сникли, словно им меня жалко стало,— что все мои мечты о богатстве пошли прахом.

— Не расстраивайтесь, ребята,— говорю я им.— У меня же есть вы. Так чего мне еще надо? Свою старость я хорошо обеспечил.

Тут я даже немного всплакнул — от радости.

Ну, о патенте, конечно, больше и речи не было. И аппарат ребята сразу разобрали. Про это изобретение мы больше не говорим. Но когда выпадает много снега, ребята мне улыбаются, а я улыбаюсь им в ответ. Потому что мне все соседи завидуют: дорожки во дворе у меня всегда расчищены, а никто из них не разу не видел, чтобы я брался за лопату. Мы рассчитали, что после обычного снегопада двух монет мало, а десяти — многовато. А вот три будет в самый раз. Я кладу монетки через равные промежутки и наловчился стрелять из духового ружья почти без промаха. Какой толк от изобретения, если из него нельзя извлечь пользы, ведь верно? Я человек практичный.

Перевод с английского И. Гуровой

ЗАОЧНАЯ ПОДГОТОВКА В ВУЗЫ

Ассоциация преподавателей столичных вузов «МОСКОВСКИЙ ЛИЦЕЙ», обладающая большим опытом учебной, методической и репетиторской работы, предлагает оригинальные методики подготовки к вступительным экзаменам во ВСЕ ВУЗЫ СТРАНЫ. Эффективность наших программ подтверждена многолетней практикой.

МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА, ЛИТЕРАТУРА, РУССКИЙ ЯЗЫК, ХИМИЯ, БИОЛОГИЯ, ИСТОРИЯ, ОБЩЕСТВОВЕДЕНИЕ, ГЕОГРАФИЯ, ИНФОРМАТИКА, АНГЛИЙСКИЙ И НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫКИ

— Вы можете выбрать один или несколько предметов, по каждому из которых Вам будет предложен цикл из 10 учебно-методических разработок с контрольными заданиями.
Если Вы сомневаетесь в правильности выбора будущей профессии, Вам поможет система ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ТЕСТОВ кооператива «МОСКОВСКИЙ ЛИЦЕЙ». По результатам тестирования специалисты-психологи вышлют Вам индивидуальные рекомендации по профориентации.

Подробная информация об учебных программах, порядке и условиях заочного обучения высылается БЕСПЛАТНО. Заявки с указанием необходимых Вам предметов направляйте по адресу:

125190, Москва, а/я 140, кооператив «МОСКОВСКИЙ ЛИЦЕЙ».

Не забудьте вложить в свое письмо два конверта со СВОИМ адресом.
Для москвичей и жителей ближайшего Подмосковья действует очная форма обучения. Тел. для справок:

заочная форма: 289-43-59,
очная форма: 299-99-56

Игра шакур

С. КОНОВАЛОВ

В одном из выпусков шахматной странички «Кванта» приводились задачи, в которых в какой-то момент доска поворачивалась. Это меняло направление движения пешек, а следовательно, приводило к другой позиции. Возникает естественная для математика мысль: рассмотреть вариант игры, в котором преобразование шахматного пространства было бы настоящим ходом. Одну из реализаций этой идеи можно получить на кубике Рубика — шахматный кубик Рубика, или, сокращенно, шакур.

Игра будет поверхностной (в геометрическом смысле), «доска» состоит из 54-х клеток. В каждой вершине кубика встречаются три клетки, поэтому мы не сможем сохранить обычную пятнистую раскраску и будем считать доску одноцветной (белой), а фигуры — красными и черными (рис. 1).

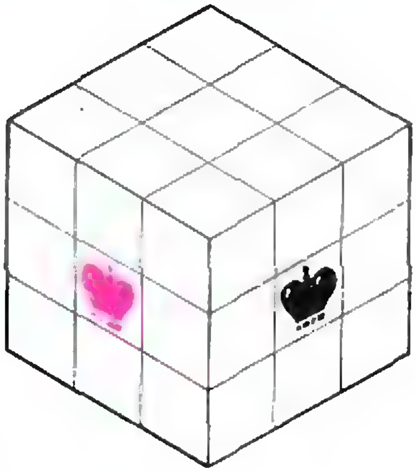
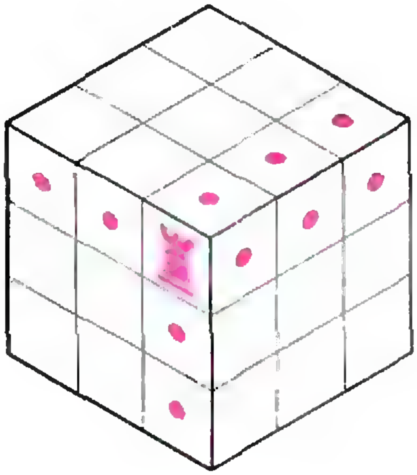


Рис. 1.

Оживим шахматные фигуры (все, кроме пешек, которые нам пока не понадобятся, так как сегодня мы рассмотрим самый простой вид игры — матование одинокого черного короля). Фигура (король, ферзь, ладья, слон или конь) может пойти с поля *A* на поле *B*, если на какой-нибудь развертке кубика фигура может попасть с *A* на *B* по обычным шахматным правилам, однако слону запретим ходить с одной клетки на другую, если у них есть общая сторона. Аналогичное исключение сделаем и для диагональных ходов ферзя, иначе эти фигуры были бы слишком мощными.

Чтобы читателю было проще освоиться с геометрией нашей шахматной доски, рекомендуем сделать комплект шакурных фигур, состоящий из кубика Рубика и фигур-наклеек, изготовленных с помощью любой клейкой ленты.



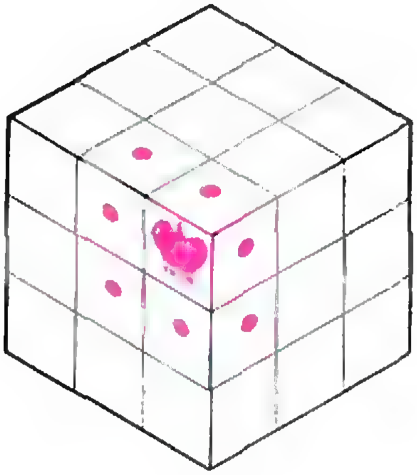


Рис. 2.

Самые простые ходы (и соответствующие развертки) у ладьи и короля (рис. 2). В дальнейшем на рисунках будем отмечать точками поля на «видимых» гранях, доступные фигуре.

У слона, если он не занимает центральную или угловую клетку грани, битые поля образуют два диагональных меридиана, пересекающихся в двух полюсах-антиподах. На рисунке 3 изображены два слона, расположенные в таких полюсах и имеющие одинаковые траектории.

Задача 1. *Нарисуйте развертку куба для определения одного хода-меридиана слона C_1 из позиции на рисунке 3.*

Возможности слона, расположенного в центральной или угловой клетке грани, показаны на рисунке 4.

Задача 2. *Проверьте, что за несколько ходов слон может попасть с любого поля доски на любое другое. За какое наименьшее число ходов слон может попасть с поля 1 на поле 2 (см. рис. 4)?*

Задача 3. *Разберите свойства ферзя.*

Даже на обычной доске кони выделяются своими коварными ходами, на кубике их ходы еще неожиданнее (см. рис. 5).

Отметим, что описанным образом можно определить ходы фигур на поверхности клетчатого кубика с гранями размером $n \times n$, а не только 3×3.

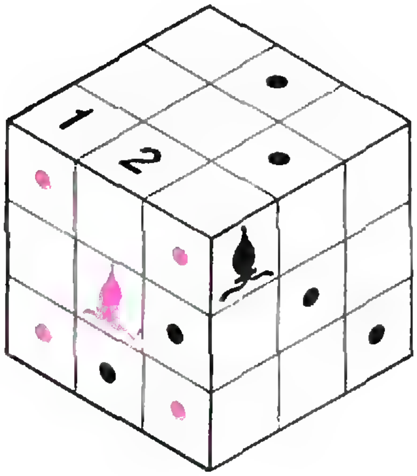


Рис. 4.

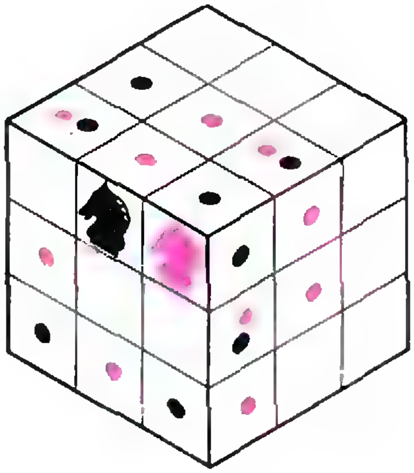


Рис. 5.

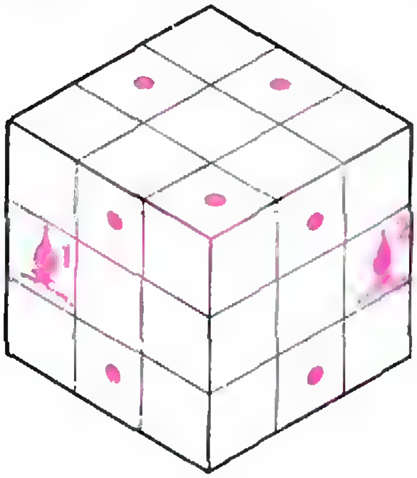


Рис. 3.

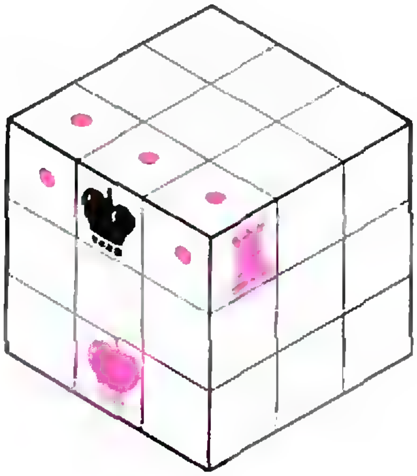


Рис. 6.

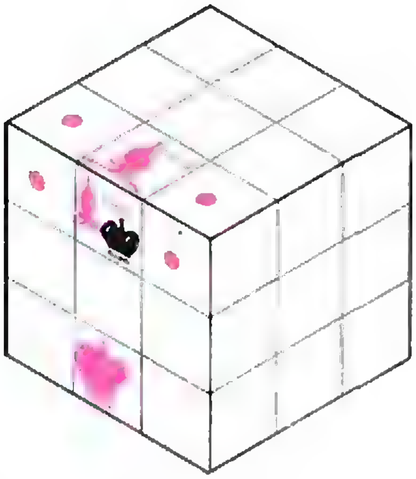


Рис. 7.

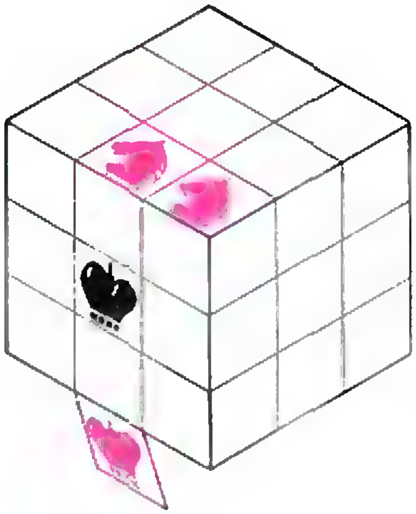


Рис. 9.

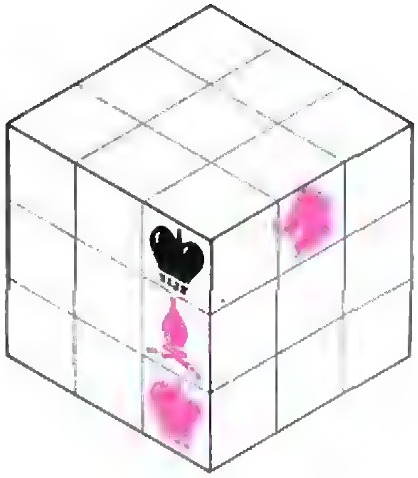


Рис. 8.

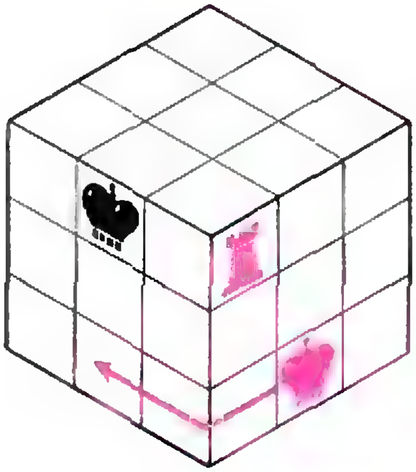


Рис. 10.

На такой доске можно решать обычные задачи с «активными» движениями фигур. Например, докажите, что красные король и ладья могут заматовать одинокого черного короля; заключительная позиция может быть такой, как на рисунке 6.

Любопытно, что перевес в ладью, минимально-достаточный для победы над одиноким королем на обычной доске, оказывается достаточным и на кубике! Еще более неожиданным является то, что на кубике 3×3 можно придумать матовые позиции, в которых кроме королей с сильнейшей стороны участвуют два слона, слон и конь, два коня — опять так же, как на обычной доске.

На рисунке 7 изображена матовая позиция; символ ∞ в клетке доски означает, что слон находится на далеком поле-антиподе, а как мы знаем, действует такой слон-двойник так, как если бы он находился в выделенной клетке. Из рисунка 8 видно, что вместе с красным королем слоны-невидимки отрезают черному королю все пути для бегства, а один из них еще и объявляет шах — на доске мат.

Приведем без комментариев еще несколько матовых позиций.

В позиции на рисунке 9 нам не удастся повернуть кубик так, чтобы все фигуры были на видимых гранях. Красный король расположен на невидимой нижней грани кубика, *часть которой изображена в виде развертки.*

Можно было бы и дальше рассматривать «обычные» шахматные ходы на кубике и решать соответствующие задачи, но у нас в этой заметке другая цель — использовать динамические возможности кубика Рубика.

Назовем две позиции совместимыми, если одну можно получить из другой вращениями граней кубика. Например, позиция, изображенная на рисунке 6, совместима с позицией на рисунке 10.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия игры шакур: *из заданной расстановки красных и черных фигур получить вращениями граней кубика совместимую с ней позицию, в которой на доске стоял бы мат черному королю.*

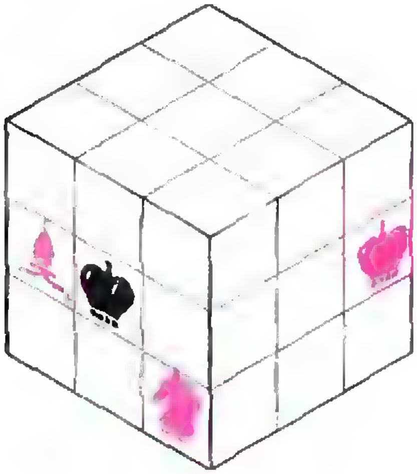
Решение такой задачи будет состоять из двух частей: сначала надо придумать матовую позицию, а потом получить ее, делая ходы-вращения. Подчеркнем, что фигуры будут двигаться только вместе с доской.

Для желающих придумывать задачи отметим, что при большом числе черных фигур их роль будет двоякой: они могут разрушать атаки красных фигур, но могут и ограничивать подвижность своего же черного короля.

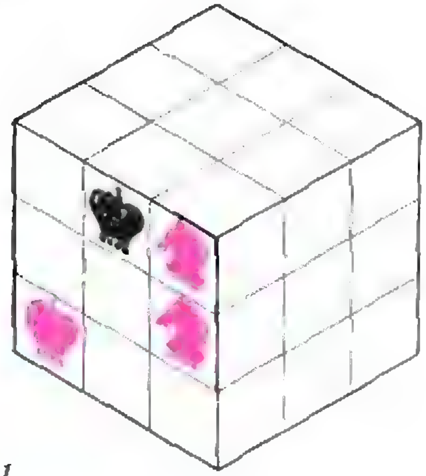
Как и в обычной шахматной композиции, можно было бы ввести ограничения на число ходов-вращений («мат в два хода»), но мы этого делать не станем.

В заключение предлагаем читателям еще четыре задачи (рис. 11) с одинаковым этюдным заданием: найти выигрыш в игре шакур, т. е. заматовать черного короля вращениями кубика Рубика (на невидимых гранях фигур нет).

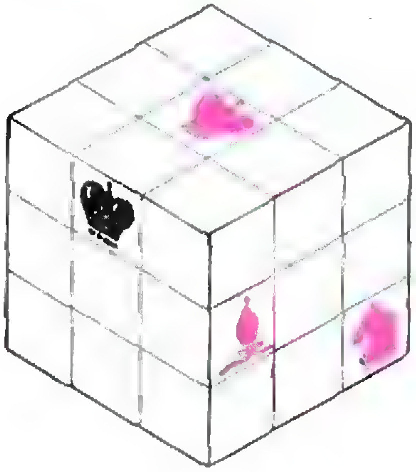
Задача 4.



Задача 5.



Задача 6.



Задача 7.

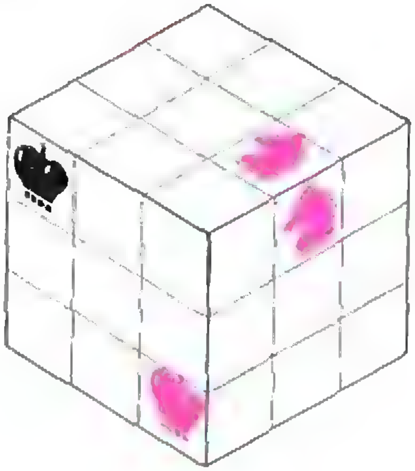


Рис. 11.

Алгоритмика простоты

Электронный плакат

Б. ТАРАСЕНКО

> *Нелегкий вопрос-то,*
> *Но верь одному:*
> *Все сложно и просто,*
> *Считай, по уму!*

«Мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь». И не только во времена А. С. Пушкина. В недалеком вчера, в очень неоднозначном сегодня. По тому же принципу, видимо, будем учиться и завтра.

Если разобраться — не такой уж и плохой принцип. Кто, положа руку на сердце, может честно сказать, что учился только в школе? Мы учимся и учим, формируем себя и воспитываем других в самых, казалось бы, невероятных ситуациях. Человек так устроен, что он каждый день вместе с хлебом должен получить и передать еще и порцию информации. Роль преподавателя еще не миновала никого! Им можно стать даже в очень раннем школьном возрасте. Тем, кто затрудняется с выбором объектов для своих программно-педагогических и социальных изысканий, предлагаем обратить внимание на старших или младших братьев, родителей, бабушек и дедушек, детей и внуков.

Никлас Вирт, всемирно известный ученый из Швейцарии, автор языков программирования Паскаль и Модула-2, недавний гость телепрограммы «Диалог с компьютером», считает, что учить всех детей компьютерной грамотности до уровня программистов высокой квалификации было бы нереальным и недальновидным делом. А вот показывать как можно большему числу детей возможности компьютеров и программ — надо, и чем раньше — тем лучше. Мы бы добавили, что чем более дешевы, распространенны, просты и безопасны используемые устройства — тем разумнее. Об использовании для дела именно таких простейших ЭВМ мы уже договорились с читателями. Было бы что показывать. Итак, очередная программа.

Если мы видим молоток, то сразу соображаем, что им забивают гвозди, если лопату — то знаем, что ею копают землю. О назначении программы никто не догадается, если не сказать о ней все заранее. Сегодня мы представляем читателям демонстрационный циклический генератор первых 25 простых чисел. Он был показан ученице 3-го класса из города Гатчина под Ленинградом Светлане, не отягченной большими знаниями и заботами жизнерадостной хохотушке. И это веселое создание на целых 10 минут оставило свои развлечения, чтобы ознакомиться с результатами работы демонстратора. Да еще более половины из предъявленных простых чисел, о которых узнала впервые в жизни, запомнила!

Так что, прежде чем приступить непосредственно к описанию программы, пожелаем вам как ученических, так и преподавательских успехов. Мы по-прежнему считаем, что большинство наших читателей — исследователи в области простых чисел и программирования. А всякий уважающий себя исследователь обязан знать не только кое-что из сделанного до него, но и как к этому относится его ближайшее окружение.

Программа 3. Демонстратор первых 25 простых чисел

Пригодны все ПМК от БЗ-34 до МК-61. Учебная программа для кружков программирования и математики любой возрастной категории, начиная от старших групп детского сада. Программа последовательно предъявляет простые числа от 2 до 97 включительно. Используется принцип электронной таблицы, в которой все предъявляемые числа записаны заранее и

Текст программы с пошаговыми комментариями

```
00      В↑       0E    /+   Перевод стартового номера И из PrX в PrY
01      2        02    /+   Набор
02      6        06    /+   константы 26
03      ↔        14    /+   PrX:=И и одновременно PrY:=26
04      —        11    /+   Н:=26 — И
05      БП       51    /+   Безусловный переход
06      09       09    /+   на шаг 09
07      2        02    /+   Набор
08      5        05    /+   константы 25
09      X→П 0    40    /+   Pr0:=Н
10      9        09    /+   Набор
11      8        08    /+   константы 98
12      П→X 0    60    /+   PrX:=Н
13      3        03    /+   Константа 3
14      ×        12    /+   Н×3
15      —        11    /+   А=98 — Н×3, начальный адрес подпрограммы
16      X→П 9    49    /+   запись адреса А подпрограммы в Pr9
17      К ПП 9   —9    /+   Обращение к подпрограмме по адресу А=Pr9
18      С/П      50    /+   Стоп-индикация выбранного простого числа
19      F L0     5Г    /+   Pr0=0? Проверка окончания цикла
20      10       10    /+   Переход на шаг 10, если цикл не закончен
21      БП       51    /+   Безусловный переход, если цикл закончен
22      07       07    /+   на шаг 07
```

Команды 26—97 состоят из 24 групп по 3 команды в каждой, все они однотипны, первые две команды — набор очередного простого числа, третья — возврат в основную программу. Для экономии места мы приводим только первую и последнюю группы и числа, набираемые в промежуточных группах.

```
23      0        00    /+   Набор в подпрограмме
24      2        02    /+   простого числа 02
25      В/О      52    /+   Возврат в основную программу
```

Далее набираются числа 03, 05, 07, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89.

```
95      9        09    /+   Набор в подпрограмме
96      7        07    /+   простого числа 97
97      В/О      52    /+   Возврат в основную программу
```

выбор их идет под управлением основной части программы.

Используемые регистры и переменные: А=Pr9 — начальный адрес подпрограммы-заготовки; Н=Pr0 — дополнение до 26 порядкового номера очередного простого числа; из регистров стека в явном виде используются только PrX и PrY.

Описание алгоритма

По заданному стартовому номеру И простого числа по формуле $А=98-3\times Н$, где $Н=26-И$, вычисляется начальный адрес А подпрограммы, выводящей на индикатор это простое число, после чего осуществляется переход к этой подпрограмме, а после возврата из нее — останов ПМК. При последующих запусках ПМК (клавишей С/П) Н автоматически уменьшается на единицу, в результате чего на индикацию вызывается следующее простое число; после отработки последнего простого числа (при Н=1) происходит переход к И=1 присваиванием Н: = 25, тем самым процесс демонстрации зацикливается.

Оценка быстродействия программы: «вычисление» стартового числа с применением команды В/О, а также переход от 97 к 2 выполняются за 6 секунд; очередное большее простое число высвечивается через 4 секунды.

Инструкция

После набора программы и переключения ПМК в режим счета нажать клавишу В/О. Затем набрать номер И начального простого числа (в диапазоне от 1 до 25 включительно) и нажать клавишу С/П; после останова ПМК на индикаторе появится И-е простое число. Новые нажатия клавиши С/П приведут к появлению на индикаторе следующих простых чисел до последнего, а затем появится первое и т. д.

Чтобы узнать номер И очередного простого числа (после серии С/П) необходимо выполнить вручную последовательность команд

2 6 П→Х 0 —

— на индикаторе появится значение И.

Программа 3 наиболее эффективна, если ее записать в энергонезависимую память МК-52. Для МК-61 и МК-52 эту программу можно дополнить (начиная с шага 98) подпрограммой, показывающей простое число 101. Ее можно вызывать вручную последовательностью команд

В/О 2 6 С/П

и на индикаторе появится число 101. Чтобы вернуться в основной цикл после такого вызова, нужно снова нажать клавишу В/О. Если же вы хотите, чтобы ПМК сам показывал это число после 97, а потом возвращался к числу 2, то программу надо доработать (как — обдумайте сами). Тем, кто будет экспериментировать на «хвосте» программной памяти ПМК, необходимо помнить, что счетчик адресов шаги 100, 101, 102 и т. д. показывает в виде -0, -1, -2 и т. д., но в самой программе эти адреса должны вырабатываться в обычном виде, т. е. как 100, 101, 102...

Мы уверены, что наши добровольные преподаватели-программисты сами понимают, когда можно рассказывать слушателям об устройстве этого циклического демонстратора, а когда необходимо показывать только результаты его работы. Последнее, например, в детском саду. Не так ли?

„Квант" улыбается

Программа, предотвращающая сбои ЭВМ

Представитель одной из крупных фирм-разработчиков матобеспечения сообщил о создании специальной программы, позволяющей свести практически к нулю простои ЭВМ, вызванные сбоями; используемый метод весьма прост и является развитием давно известного подхода. Разработанная фирмой программа OREMA (от латинского «oremus» — «давайте помолимся») через определенные интервалы времени воссылает молитвы о сохранности содержимого памяти, нормальном функционировании дисков и лентопротяжек, а также другого наиболее часто отказывающего оборудования.

Являясь в своей основе литургической, OREMA использует стандартные молитвы и мольбы, хранящиеся на внешних носителях в виде программ, реализованных на латыни, фортране и других языках. Служба проводится регулярно, три раза в день, в автоматическом режиме; участие оператора сводится лишь к установке лент и вводу с пульта ритуальных команд типа «Отныне и во веки веков» или «Аминь».

Молитвы на латыни могут сначала обращаться к периферийному оборудованию, а затем, посредством внутренних подпрограмм, вновь адресоваться центральному процессору, а мольбы на фортране и других языках обращаются непосредственно к центральному процессору.

Поставляемое молитвенное программное обеспечение охватывает все известные на сегодняшний день причины возможных сбоев. Кроме того, предусмотрена специальная функция, позволяющая модифицировать пакет OREMA и хранить вводимое дополнительно моление после последнего имеющегося блока «Аминь». Для закрытых учреждений выпускается особый пакет засекреченных молитв.

В ходе пробных прогонов на некоторых типах ЭВМ удалось уменьшить время простоев оборудования в среднем на 98,2 %. Представитель фирмы-изготовителя счел своим долгом подчеркнуть, что в настоящее время OREMA предотвращает лишь сбои, вызванные отказами оборудования. Ведется активная работа по созданию более совершенной версии — программы «Не греши!», которая позволит устранить ошибки операторов и другие человеческие глупости.

У. Минклер

(Data Link, 1966, № 3)

Перевод О. И. Мацарской

XIV Московская экономико-математическая олимпиада

В марте 1991 года на экономическом факультете МГУ силами сотрудников, аспирантов и студентов кафедры математических методов анализа экономики была проведена XIV Московская экономико-математическая олимпиада для школьников 9—11 классов.

Олимпиада состояла из двух туров. Впрочем, их лучше было бы назвать двумя попытками: любой школьник мог принять участие как в первом, так и во втором туре. Таким образом, ребята имели возможность «пристрелки», тренировки.

В каждом классе условие олимпиады содержало 4—5 вопросов и задач. Среди них были и сугубо экономические, и чисто математические — однако большая часть лежала на стыке двух наук. Соответственно, и критерии оценок несколько отличались от тех, которые обычно приняты на математических олимпиадах.

Так, в некоторые вопросы, даже, на первый взгляд, математические по формулировке, организаторы олимпиады изначально не закладывали

Внимание: идет подписка!

Ф. СП-1

Министерство связи СССР
«Союзпечать»

АБОНЕМЕНТ на газету / журнал 70465
(индекс издания)

(наименование издания)	Количество комплектов	

на 1992 год по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Годовая									

Куда ________ (почтовый индекс) ________ (адрес)

Кому ________ (фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	литер

на газету / журнал 70465
(индекс издания)

________ (наименование издания)

Стоимость	подписки	___ руб. ___ коп.	Количество комплектов	
	переадресовки	— руб. — коп.		

на 1992 год по месяцам:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		Годовая									

Куда ________ (почтовый индекс) ________ (адрес)

Кому ________ (фамилия, инициалы)

наличие полного и точного ответа.

Наряду с логикой и четкостью аргументации ценились общая эрудиция, глубина мышления, способность учесть условия, явно в задаче не сформулированные (например, если в поселке живет 1000 человек, то не могут 900 из них работать на местной фабрике — хотя бы в силу демографических причин).

При подведении итогов кроме общих призов были вручены также специальные призы — лучшему экономисту среди математиков и лучшему математику среди экономистов.

Ниже приведены некоторые из предложенных на олимпиаде вопросов и задач.

1. В Москве были проведены три социологических опроса:

— 1000 человек опросили с 8 до 9 утра у метро «Университет»;

— 2000 человек опросили вечером у метро «Спортивная»;

— из телефонной книги наугад выбрали 800 номеров и задали вопросы по телефону.

Как вы думаете, результаты какого из опросов наиболее точно отражают мнение москвичей?

2. Вы прочитали в журнале «Economist», что математически с помощью компьютеров доказано, что рыночная экономика эффективнее плановой. Как бы вы отнеслись к такому утверждению?

3. Известно, что фигура заданного объема имеет минимальную поверхность, если это — шар. Так может, делать конфеты шарообразными и сэкономить на этом оберточную бумагу?

4. Карандашный фабрикант для производства 10 000 карандашей должен купить у лесопромышленника 1 кубометр леса за 100 долларов. Лесопромышленник, любящий учет, на производство 1 кубометра леса расходует 100 карандашей по 10 центов

ПРОВЕРЬТЕ ПРАВИЛЬНОСТЬ ОФОРМЛЕНИЯ АБОНЕМЕНТА!

На абонементе должен быть проставлен оттиск кассовой машины.

При оформлении подписки (переадресовки) без кассовой машины на абонементе проставляется оттиск календарного штемпеля отделения связи. В этом случае абонемент выдается подписчику с квитанцией об оплате стоимости подписки (переадресовки)

Для оформления подписки на газету или журнал, а также для переадресования издания бланк абонемента с доставочной карточкой заполняется подписчиком чернилами, разборчиво, без сокращений, в соответствии с условиями, изложенными в каталогах Союзпечати.

Заполнение месячных клеток при переадресовании издания, а также клетки «ПВ—МЕСТО» производится работниками предприятий связи и Союзпечати.

за штуку. На сколько в итоге возрастут цены, если будет введен налог с продаж 10 %? Дайте экономическую интерпретацию ответа.

5. Вам необходимо покрыть плиткой пол помещения размером 20×20 метров. Однако в магазине, куда вы пришли, вам готовы продать за один раз только один набор плиток, в который входит по одной плитке размером 1×1, 1×2, ..., 1×N дм, причем N вы можете определить самостоятельно. Какие варианты поведения вы можете предложить и какой из них, на ваш взгляд, оптимален?

6. Укажите все пары простых чисел p и q таких, что число $p\cdot q+1$ и $p\cdot q-1$ также простые.

7. Разрежьте прямоугольник размером 1×5 на части, из которых можно сложить квадрат.

8. На бесконечной шахматной доске, поля которой занумерованы парами натуральных чисел, передвигается фигура Квазиладья по следующим правилам:

— она может удвоить любую из координат;

— она может из большей координаты вычесть меньшую.

Как описать множество клеток, на которые может попасть Квазиладья и на которые не может, если она начинает с клетки (1,1)?

9. В некотором царстве, в некотором государстве монетный двор чеканит в год 1000 золотых монет весом 10 граммов каждая. За год каждая монета стирается на 5 процентов от первоначального веса.

В тяжелый год после затяжной войны царь собрал лишь 6000 монет налога. Этих денег, вместе с той тысячей монет, что он мог отчеканить, ему не хватало, чтобы выплатить жалованье войску, и царь решил всех обмануть и переплавить эти монеты с 25-процентной добавкой меди.

Сколько может выиграть царь на этой операции?

Ответы, указания, решения

Энергия электрического поля

1. $W=\frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}$.

2. $A=\frac{11}{32}\frac{(\varepsilon-1)q^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$.

3. $Q=C_0\mathscr{E}^2/12$.

Игра шакур

4. См. рис. 1. 5. См. рис. 2. 6. См. рис. 3. 7. См. рис. 4.

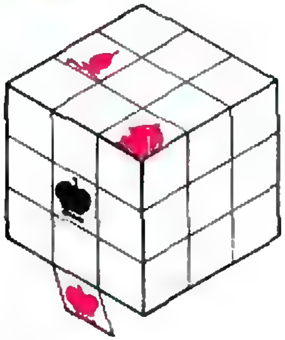


Рис. 1.

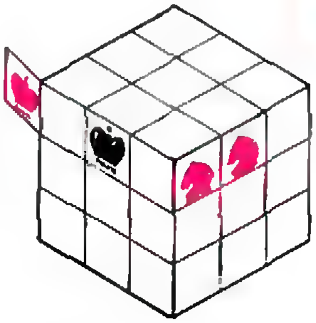


Рис. 2.

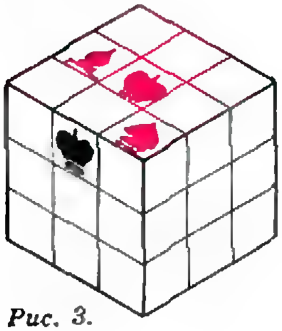


Рис. 3.

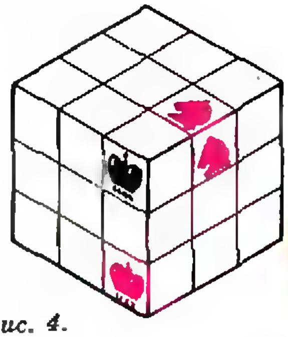


Рис. 4.

XIV Московская экономико-математическая олимпиада

1. Телефонный опрос. В двух других случаях выборки отвечающих не случайны.
2. Счетные возможности компьютера — не гарантия корректности тех математических моделей, с которыми он работает.
3. Из плоского листа нельзя получить шаровую поверхность без складок.
4. Учтите, что мельче цента монеты нет.
6. (2; 3), (2; 2).
8. Квазиладье доступны те и только те точки, где НОД координат равен 2^n, $n=0, 1, 2,...$
9. С точки зрения экономики поступок царя неэффективен: он вызовет в стране инфляцию.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 5)

25. Число равно 1991.

26. После каждой операции разрезания число кусков увеличивается либо на 5, либо на 11. Поэтому, если сделано n разрезаний на 6 кусков и m разрезаний на 12 кусков, то полученное количество кусков равно $1+5n+11m$. Покажем, что такое число не может равняться 40. Действительно, если $m=0$, то получаем уравнение $5n=39$, которое не имеет решений в целых числах, при $m=1$ получаем уравнение $5n=28$, при $m=2$ получаем $5n=17$ и при $m=3$ получаем $5n=6$. Если число кусков больше 40, то достаточно показать, как получаются 41, 42, 43, 44 и 45 кусков — остальные могут быть получены прибавлением к этим числам несколько раз по 5. Итак, $41=1+8\cdot5$, $42=1+6\cdot5+1\cdot11$, $43=1+4\cdot5+2\cdot11$, $44=1+2\cdot5+3\cdot11$, $45=1+4\cdot11$.

27. Это числа 8, 5, 4, 2 и —3.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. Обозначим число мячей, забитых Ван Бастеном, через x, Гуллитом — через y, Михайли-

ченко — через z, Фёллером — через v и Скилаччи — через w. Из условий задачи имеем: $2x=y$, $x=z+1$, $v=z+3$, $w=v+3$. Отсюда $x=z+1$, $y=2z+2$, $v=z+3$, $w=z+6$. Ясно, что числа z, $z+1$, $z+3$, $z+6$ не равны друг другу, кроме того, число $2z+2$ не меньше, чем любое из них, поэтому $2z+2=z+6$ и $z=4$. Отсюда $x=5$, $y=10$, $v=7$, $w=10$.

2. См. рис. 5.

Ч	*У*	*К*	*Е*	*Г*
Г	*К*	*Ч*	*У*	*Е*
У	*Г*	*Е*	*К*	*Ч*
Е	*Ч*	*У*	*Г*	*К*
К	*Е*	*Г*	*Ч*	*У*

Рис. 5.

3. Ясно, что четырех администраторов достаточно, поскольку возможен следующий график: «сутки работа — трое суток отдых». Покажем, что нельзя обойтись меньшим числом администраторов. Действительно, если кто-то работает подряд сутки, то во время его отдыха никто не сможет проработать больше суток, поэтому в течение 2,5 суток его отдыха необходима работа не менее, чем трех человек. В случае, если никто не работает больше полусуток, то за время отдыха администратора, проработавшего ночную смену, должны работать еще три администратора.

4. Отметим точку K — середину стороны AB и соединим ее отрезком с точкой D (рис. 6.). Угол

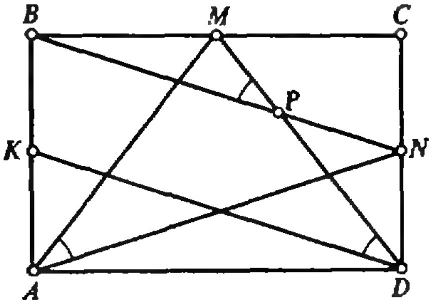


Рис. 6.

KDM равен углу MAN (из симметрии). В то же время прямые KD и BN параллельны, и поэтому углы KDM и BPM равны.

5. Рассмотрим 15 школьников, не упомянутых в условии задачи ($15=40-10-15$). У них количество винтиков не равно количеству гвоздиков, а количество гвоздиков должно быть равно количеству болтиков. Значит, по крайней мере у этих 15 школьников количество винтиков не равно количеству болтиков.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смиркова, Л. Тишков,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф
Художественный редактор Е. Потапенкова
Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор Е. Тихонова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 27.05.91. Подписано к печати 15.07.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,5. Усл. кр.-отт. 27,3. Уч.-изд. л. 7,80.
Тираж 86 666 экз. Заказ 887. Цена 70 коп.

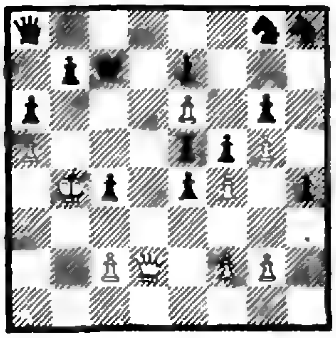
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

МАКСИ-РЕКОРДЫ

На шахматной страничке мы часто приводим позиции, в которых устанавливаются те или иные мини-рекорды (минимальное количество фигур на доске, минимум ходов и т. д.). Однако составителей необычных позиций издавна привлекают и задачи с большим числом использованных фигур или требуемых для решения ходов. В арабском манускрипте XI века, хранящемся в Британском музее, имеются композиции с заданием в 20, 24, 34 хода.

Если мини-рекорд часто оказывается абсолютным (мат в 0 ходов, на доске всего два короля — здесь уже просто нечего уменьшать), то макси-рекорды иногда улучшаются много десятилетий. В этом жанре шахматной композиции известно немало классиков, составивших множество задач-гротесков. Так, знаменитый венгерский проблемист О. Блаты свое творчество посвятил макси-жанру, установив ряд рекордов, которые никто не сумел превзойти.



О. Блаты, 1889 г.
Мат в 257 ходов

Для подрыва g2—g4 и проникновения белого короля в тыл противника необходимо последовательно уничтожить пешку h4 и коня h8.

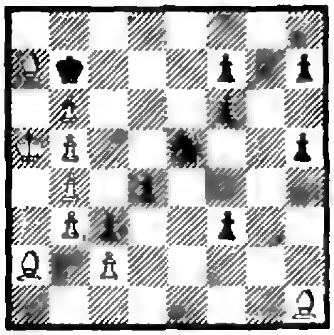
1. Фd7+ (если ходы черных единственные, то для экономии места мы их опускаем) 2. Фd8+ 3. Фd4+! Лс5 4. Ф:c5+ 5. Фe5+ Крc8 6. Фd5! Крc7 7. Фd7+ 8. Фd8+ 9. Фb6+ 10. c3!! Крc8 11. Фc5+ Крb8! 12. Фe5+ Крc8 13. Фd5 Крc7 14. Фd7+ 15. Фd8+ 16. Фb6+ 17. Крa3, и далее белые каждый раз выигрывают темп шестиходовым маневром ферзя.

24. Крb2 31. Крc1 (c2) 38. Крd1 45. Крe1 (e2) 52. Крf1 59. Крg1 66. Крh2 73. Крh3 80. Кр:h4. Теперь белый король возвращается обратно.

150. Крb4 Крc8 151. Фc5+ 152. Фe5+ 153. Фd4+ Крb8 154. Ф:h8 Крc7 155. Фe5+ 156. Фd5 Крb8! 157. Фd8+ 158. Фb6+. И вновь белый король отправляется в путешествие.

158—215. Крa3—h3 222. g4! 229. gf gf 230. Крh4 237. Крh5 244. Крg6 251. Крf7 Крc8 252. Крe8 Крb8 253. Крd7 e3 254. fe Кf6+ 255. gf ef 256. e7 и мат следующим ходом.

Приведенная позиция является легальной (может возникнуть в реальной шахматной партии) и комплектной (использованы лишь фигуры из начального комплекта). В легальном, но некомплектном варианте (на доске три белых слона) данный рекорд был побит спустя 80 лет! Рекордсмен — известный композитор-фантаст из Югославии.

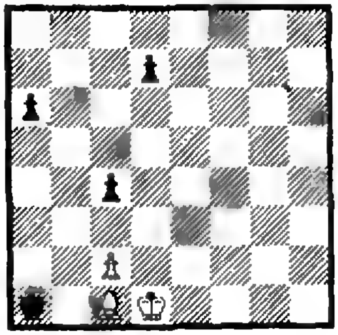


Н. Петрович, 1969 г.
Мат в 270 ходов

1. Сb1 h4 2. Крa4 Крa8! 3. Крa3 4. Крa2 5. Крa1 6. Сa2 7. Крb1 8. Крc1 9. Сb1 10. Крd1 11. Крe1 12. Крf1 13. Крf2 14. Крe1 15. Крd1 16. Крc1 17. Сa2 18. Крb1 19. Крa1 20. Сb1 21. Крa2 22. Крa3 23. Крa4 24. Крa5 f5. Белый король многократно повторяет осуществленный выше маневр, пока черные не исчерпают все ходы пешками.

254. Крa5 Крc8 255. Крa6 f2 256. b7+ Крd7 257. b8Ф f1Ф 258. Ф:e5 Ф:h1 259. Фg7+ Крe6 260. Фg6+ Крe5 261. Сb8 Крe4 262. Фc6+ Крe3 263. Ф:h1 Крf2 264. С:f4 Крe2 265. b6 d3 266. cd Крf2 267. Сc2 Крe2 268. Сd1+ Крf2 269. Фf3+ Крg1 270. Сe3×.

И в заключение макси-рекорд несколько другого рода.



В. Иоргенсен, 1980 г.
Мат в 28 ходов

Решение здесь недлинное и тем не менее оно представляет собой рекорд для задачи-миниатюры (на доске не более семи фигур).

1. c3 Крb1 2. Крd2 Крa2 3. Крc2 Крa1 4. Сa3 Крa2 5. Сb2 a5 6. Сc1 Крa1 7. Сa3 Крa2 8. Сb2 a4 9. Сc1 Крa1 10. Сa3 Крa2 11. Сb2 a3 12. Сc1 Крa1 13. С:a3 Крa2 14. Сb2 d6 15. Сc1 Крa1 16. Сa3 Крa2 17. Сb2 d5 18. Сc1 Крa1 19. Сa3 Крa2 20. Сb2 d4 21. cd c3 22. Кр:c3 Крb1 23. d5 Крa2 24. d6 Крb1 25. d7 Крa2 26. d8Ф Крb1 27. Фd1+ Крa2 28. Фa1×.

По-видимому, в миниатюрном жанре проблемисты еще не сказали своего последнего слова по поводу макси-рекордов. В следующем номере мы вернемся к этой теме.

Е. Гик

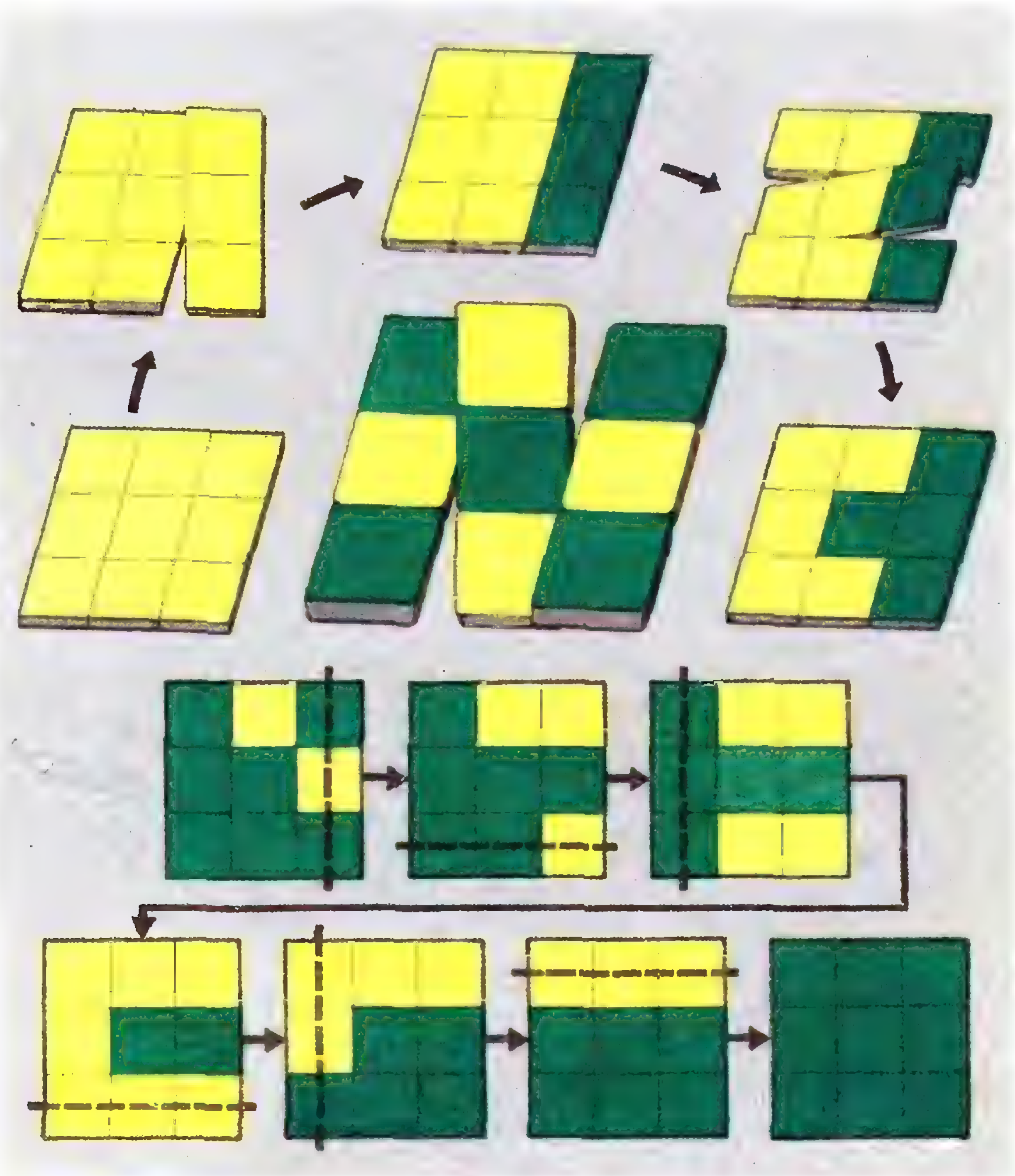
70 коп.

Индекс 70465

Игрушку, которая показана на рисунке, в Японии назвали двумерным кубиком Рубика. Пока эта головоломка существует только на экране компьютера, так как никому еще не удалось придумать механизм, который бы в панели из девяти квадратов переворачивал любой горизонтальный или вертикальный ряд из трех квадратов.

В головоломке требуется из произвольно заданного исходного состояния получить одноцветную раскраску каждой из сторон панели за наименьшее число ходов.

Всего существует $2^9-2=510$ разноцветных состояний панели. Расчеты на компьютере показали, что среди них имеется 192 состояния, из которых головоломка может быть решена за 6 ходов (это состояния, самые далекие от «правильного»). В нижней части рисунка приведено решение для одного из таких исходных положений квадратов. В домашних условиях эту головоломку проще всего смоделировать на обычных детских кубиках, и ряды переворачивать «вручную».



НОМЕР
9

Квант

9 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва. «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Митрофанов.* Полеты в струе и наяву
12 *Я. Стюарт.* Сказка о рождественской теореме Ферма

Задачник «Кванта»

20 Задачи М1301—М1305, Ф1308—Ф1312
22 Решения задач М1276—М1280, Ф1288—Ф1292

«Квант» для младших школьников

29 Задачи
30 *А. Коржуев.* Физика, Незнайка и другие
32 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»

Физика 9, 10, 11:

33 Идеальный газ — универсальная физическая модель
36 Гармонические колебания — обычные и удивительные
39 Избранные школьные задачи по физике
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

42 *И. Шарыгин.* Откуда берутся задачи

Информатика и программирование

50 *Б. Тарасенко.* Алгоритмика простоты. Компьютерная считалочка

Р — значит ракета

52 *В. Сурдин.* Межзвездным перелетам помогают... звезды

Информация

60 Новое в электронике

Фантастика

62 *Боб Шоу.* Свет былого

Игры и головоломки

68 Аховы тесты

Олимпиады

70 Задачи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады
71 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1991 года
73 Испанская математическая олимпиада 1990 года
73 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается (*11, 59*)

Реклама (*19, 49*)

Наша обложка

1 Парашют опускается плавно благодаря силе аэродинамического сопротивления. О сопротивлении среды вы можете прочитать в статье на с. 2.
2 С литографии «Рука с отражающей сферой» (1935 г.) на вас смотрит ее автор — знаменитый голландский художник Морис Эшер. Об Эшере мы писали в прошлом году; в этот раз речь пойдет о сфере (см. «Калейдоскоп»).
3 Шахматная страничка.
4 Кубический кроссворд.

© «Квант», 1991

ПОЛЕТЫ В СТРУЕ И НАЯВУ

(О движении тел в жидкостях и газах)

Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

Какое действие оказывает среда на двигающееся в ней тело? Скажем, если вы играете во дворе или идете по улице, вы почти не замечаете, что среда (воздух) оказывает вам какое-либо сопротивление. И опоздавший на урок ученик вряд ли станет утверждать, что основной причиной опоздания является сила сопротивления среды. Но стоит только чуть высунуть руку в открытое окно мчащегося поезда или попасть в поток сильного ветра, как вопрос о сопротивлении среды перестанет казаться бессмысленным. Воздух, обычно такой невесомый, неосязаемый, при больших скоростях начинает вдруг напоминать упругую стенку или непреодолимую преграду. Именно такие ощущения ждут пилота скоростного самолета, если ему придется катапультироваться в полете. Со свойством среды оказывать сопротивление движущемуся в ней телу хорошо знакомы не только авиаторы или космонавты, но и люди многих других, в том числе самых «земных» профессий.

Одно из первых научных исследований сопротивления среды принадлежит Ньютону.*) Так как в то время было накоплено слишком мало данных о взаимодействии движущихся тел со средой, Ньютон вынужден был сам экспериментировать с бросанием тел. В 1710 и 1719 годах в соборе св. Павла в Лондоне он ставил опыты с движущимися в воде шарами. Из экспериментов ученый определил коэффициент в выведенной им же формуле для силы сопротивления, действующей на двигающееся в среде тело.

В наш век скоростного транспорта, сверхзвуковой авиации и спускаемых космических аппаратов многие старые задачи и экспериментальные методики аэро- и гидродинамики не утратили своего значения.

Поэтому интересно вспомнить кое-что из идей ученых прошлого и проделать опыты, которые познакомят вас с некоторыми физическими явлениями, возникающими при движении тел в среде.

Что же такое сопротивление среды? Двигающееся в жидкости или

---

*) Кроме Ньютона, этими вопросами занимались Леонард Эйлер, Жан Лерон, д'Аламбер, Даниил Бернулли, Шарль Кулон и многие другие ученые. Читателям, интересующимся историей гидро- и аэродинамики, можно рекомендовать книгу из серии «Жизнь замечательных идей»: Г. Смирнов «Рожденные вихрем» (М.: Знание, 1982).

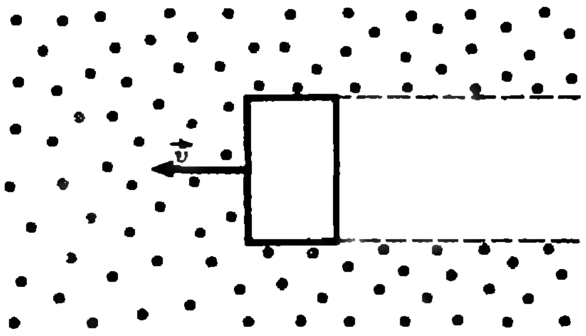


Рис. 1. Движение тела со скоростью v в разреженной среде.

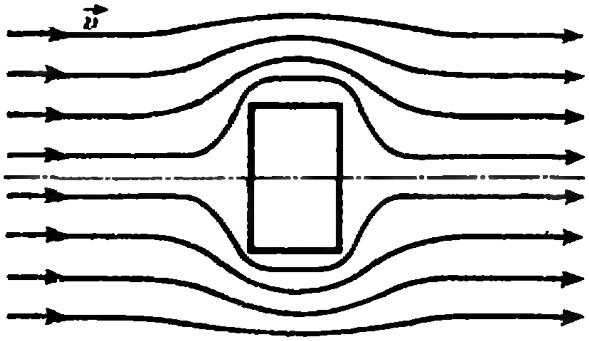


Рис. 2. Движение тела в сплошной среде (в системе отсчета движущейся среды).

газе тело оказывает воздействие на частицы среды, изменяя их скорость. По третьему закону Ньютона, на тело со стороны среды действует противоположно направленная сила, которую называют силой сопротивления. Рассмотрим составляющую силы сопротивления, которая направлена вдоль линии движения (скажем, оси X) и которую авиаторы называют лобовым сопротивлением. Из принципа относительности Галилея следует, что для определения этой силы при равномерном движении безразлично, двигается ли тело в неподвижной среде, или с такой же скоростью двигается ему навстречу среда, а тело неподвижно. Начнем с простого примера.

Пример 1. Пусть диск, шар или цилиндр радиусом R двигается со скоростью v вдоль своей оси в пространстве, заполненном множеством не взаимодействующих друг с другом неподвижных частиц (рис. 1; масса каждой частицы m, их концентрация n). Что это за частицы? Можно представить себе, например, разреженный холодный газ, в котором не учитывается движение молекул. Прав будет также и тот, кто представит себе, что частицы — это снежинки, а задача описывает движение снежного кома (попросту снежка), летящего в воздухе и сталкивающегося со снежинками, которые прилипают к нему при столкновениях, и т. д.

В единицу времени тело встречает на своем пути $N=nvS$ частиц, где $S=\pi R^2$ — площадь поперечного сечения тела. Если столкновения частиц с телом неупругие, то сила сопротивления равна

$$F_x=\frac{\Delta p}{\Delta t}=mvN=2S\frac{\rho v^2}{2}, \tag{1}$$

где $\rho=mn$ — плотность среды.

Подобным образом можно рассчитать силу сопротивления F_x, действующую на тело с произвольным профилем. Надо только знать скорость, плотность и площадь столба частиц, с которыми сталкивается тело при движении в разреженной среде.

Несколько сложнее обстоит дело, когда удар упругий, т. е. когда частицы при ударе о произвольную поверхность отскакивают от нее. Но и в этом случае $F_x \sim v^2$, только коэффициент пропорциональности в формуле (1), вообще говоря, зависит от формы тела.

Пример 2. До сих пор мы рассматривали движение в разреженной среде. А как быть, если тело двигается с постоянной скоростью в жидкости, например в воде или в плотном газе (воздухе), т. е. в сплошной среде? Чем сплошная среда отличается от системы невзаимодействующих частиц? Ведь сплошная среда, будь то жидкость или плотный газ, тоже состоит из молекул или атомов. Но если в разреженной среде частицы двигаются независимо друг от друга, испытывая лишь редкие столкновения, то в сплошной среде частицы выступают уже как «коллектив». Действительно, расстояние между частицами (точнее, средняя длина свободного пробега молекул) во много раз меньше, чем характерный размер тела. Из-за взаимных столкновений частиц и влияния их друг на друга возмущения среды вблизи границы тела, возникающие при его движении, передаются соседним элементам среды. Следовательно, с движущимся телом взаимодействуют не только те объемы жидкости или газа, которые находятся точно на пути тела, но и соседние с его траекторией объемы среды, которые тело расталкивает или увлекает за собой (рис. 2).

Как зависит F_x от v и от параметров среды? Ясно, что если скорость изменится, то при установившемся движении приблизительно пропорционально v изменится масса жидкости M, с которой в единицу времени встретится и провзаимодействует тело, т. е. $M \sim \rho v S$, где S — площадь поперечного сечения тела, ρ — плотность среды. А каждый элемент этой массы передаст телу импульс, также примерно пропорциональный v. Поэтому зависимость силы сопротивления от скорости тела, рассмотренная впервые Ньютоном, имеет вид (сравните с формулой (1))

$$F_x \sim \rho v^2 S,$$

или в другой записи

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \qquad (2)$$

где величина $\rho v^2/2$ называется динамическим давлением. (Она имеет размерность давления и есть ни что иное, как кинетическая энергия единицы объема движущейся среды, в которой находится неподвижное тело.) Коэффициент пропорциональности C_x в формуле (2) зависит в первую очередь от формы тела и, вообще говоря, от режима течения и скорости, если та изменяется в достаточно широких пределах. В аэродинамике эта величина называется коэффициентом лобового сопротивления, в гидродинамике — коэффициентом увлечения или коэффициентом гидродинамического сопротивления.

Сравнивая рисунки 1 и 2, отметим существенную разницу этих двух примеров. Жидкость обтекает тело, а не оставляет за ним «тень» пустого пространства, как при движении в разреженной холодной среде. Следовательно, сплошная среда оказывает давление на тело не только спереди (т. е. на носовую часть, если речь идет о корабле), но и с других сторон. С тыльной стороны тела (т. е. с кормы) направление действующей на тело силы совпадает с направлением движения. Таким образом, обтекание тела жидкостью или плотным газом приводит к уменьшению результирующей силы сопротивления F_x. Обтекая тело, жидкость сохраняет часть своего импульса, не передавая его телу. Это очень важное обстоятельство. С уменьшением коэффициента гидродинамического сопротивления вследствие обтекания тела потоком мы познакомимся, проведя следующий эксперимент.

Пример 3. Определим гидродинамическое сопротивление, которое испытывает шарик, плавающий под струей жидкости, и найдем коэффициент C_x для шарика в потоке. Этот простой эксперимент не потребует сложного оборудования. Нам нужны будут только ведро или ванна, мерный стакан или банка известного объема, линейка, часы с секундной стрелкой и легкий шарик, например пластмассовый шарик для настольного тенниса или небольшой резиновый мячик.

Откроем водопроводный кран. И вот в емкости уже достаточно много воды. Если положить шарик на воду, то он, как и следовало ожидать, поплывет прочь от струи. Но стоит только поместить шарик в струю или же подтолкнуть его к ней вплотную, как шарик сразу же захватится струей и... останется в ней на том месте, где струя встречается с поверхностью воды.

Посмотрим, что будет с шариком, если изменить напор воды в струе. Когда скорость струи небольшая, шарик плавает на поверхности (рис. 3, *а*) и может оставаться около струи сколь

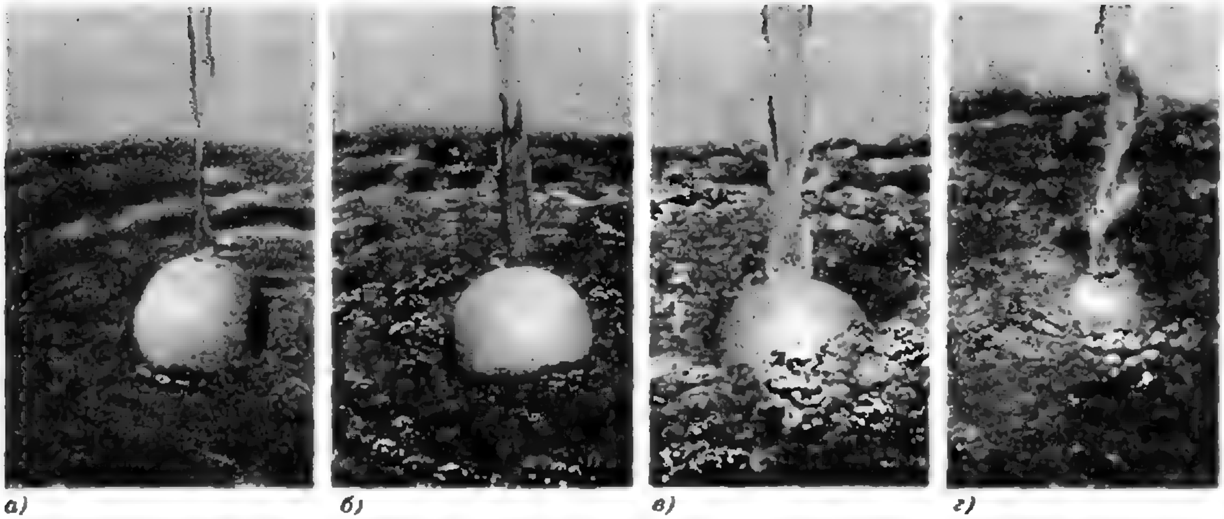

а) б) в) г)

Рис. 3. Фотографии шарика под струей жидкости при разных расходах воды в струе.

угодно долго. Иногда центр шарика смещается в сторону от осевой линии струи, а шарик при этом вращается вокруг некоторой горизонтальной оси, как маленькая турбинка.

С увеличением напора воды шарик глубже погружается в воду, перестает вращаться и его центр устанавливается на осевой линии струи, совершая еле заметные колебания (рис. 3, *б*, *в*). И наконец, если открыть кран еще больше, шарик совсем скроется под водой (рис. 3, *г*).

Погружение легкого пустотелого шарика происходит главным образом благодаря гидродинамическому сопротивлению — силе, действующей на него со стороны потока. Эту силу легко измерить, если контролировать глубину погружения шарика.

Подберем напор воды таким, чтобы шарик погрузился в воду на определенную глубину, скажем на величину радиуса шарика, и находился в равновесии. Такое погружение удобно фиксировать на глаз. В равновесном положении сила Архимеда $F_А$ уравновешивает силу тяжести шарика mg и силу сопротивления F_c:

$$mg+F_c=F_А.$$

В этом уравнении $m=\rho_ш 4/3\pi R^3$, где R — радиус шарика, а $\rho_ш$ — его средняя плотность. Радиус шарика для пинг-понга равен $R\approx1{,}9$ см, его масса $m\approx2{,}5$ г, т. е. $\rho_ш\approx0{,}09$ г/см^3, что примерно в 11 раз меньше плотности воды $\rho_в=1$ г/см^3 (поэтому шарик плавает, почти не погружаясь). Сила Архимеда, действующая на шарик, погруженный наполовину, равна $F_А=4/3\pi R^3\rho_в/2$. Для F_c используем формулу Ньютона (2), подставив туда $S=\pi r^2$, где r — радиус струи. Получим

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_ш g+C_x\pi r^2\frac{\rho_в v^2}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\pi R^3\rho_в g,$$

откуда выразим коэффициент гидродинамического давления C_x:

$$C_x=\frac{4}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{gR}{v^2}\left(1-2\frac{\rho_ш}{\rho_в}\right). \tag{3}$$

Чтобы найти отсюда значение C_x, надо знать еще величины r и v, которые измерить непосредственно не так-то просто. Но их можно определить косвенно (рис. 4), если измерить объемный расход воды в струе Q ($Q=\pi r^2 v$ — объем воды, проходящий через сечение в единицу времени), ее длину L, начальный радиус r_0 (у горловины крана) и воспользоваться тем, что расход воды в любом сечении струи — один и тот же (так называемое уравнение непрерывности струи):

$$r_0^2 v_0=r^2 v, \tag{4}$$

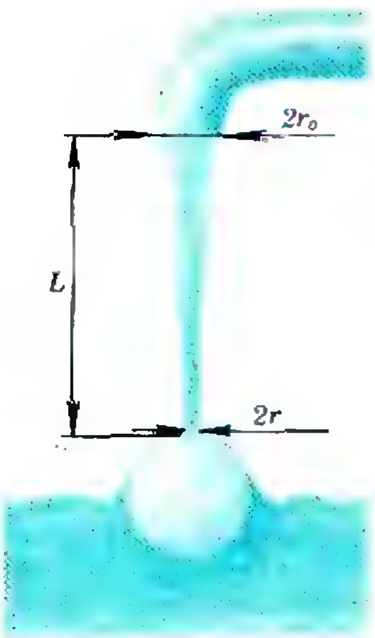


Рис. 4. К расчету величины коэффициента гидродинамического сопротивления для шарика под струей воды.

где v_0 — скорость потока у горловины крана. (Расход воды можно измерить, наливая ее в мерный сосуд и засекая время. Зная Q и r_0, найдем $v_0=Q/\pi r_0^2$. Зная v_0 и L, вычислим $v=\sqrt{v_0^2+2gL}$, а потом и r из уравнения (4)). Прежде чем проводить измерения, подумайте, каков смысл уравнения (4), почему струя утоньшается книзу и по какому закону уменьшается ее радиус (см. пример. 4).

Проведем измерения. И вот результат. Для того чтобы шарик от пинг-понга затонул под струей наполовину, для струи длиной $L=60$ см с начальным радиусом $r_0=0{,}8$ см расход воды Q должен быть примерно равен 130 см^3/с. Отсюда для C_x получается значение, близкое к 0,5. Если в опыте изменить длину струи L, то надо будет изменить и расход воды в струе, чтобы шарик оставался затопленным на ту же глубину. Однако, независимо от того, каков расход воды, величина C_x остается практически той же самой. Результаты наших измерений C_x при разных расходах воды в струе показаны на рисунке 5; пунктирная кривая — расчетные значения диаметра струи $D=2r$, который она имеет вблизи точки ее контакта с шариком. Проверьте самостоятельно, что для струй разной длины, независимо от величин r и v, получается приблизительно одно и то же значение коэффициента гидродинамического сопротивления, а именно $C_x=0{,}5\pm0{,}1$.

Попробуем теперь осмыслить полученный результат. При расчете силы сопротивления F_x мы использовали формулу Ньютона (2). Во-первых, так как эта формула хорошо описывает эксперимент (C_x почти не меняется), то можно сказать, что мы проверили ее справедливость (в диапазоне скоростей $v\approx1$—10 м/с). Во-вторых, измеряя значение C_x, мы получили, что, как ни странно, шарик «отбирает» только около 1/4 импульса струи, остальное «уходит» в воду, в которой плавает шарик: коэффициент гидродинамического сопротивления оказался равным около 1/2, а не 2, как это было бы в случае абсолютно неупругого «удара» струи о шарик! (см. формулу (1)).

Последний экспериментальный факт не является таким очевидным. На первый взгляд кажется, что узкая струя, падая на почти плоскую вершину шарика ($r\ll R$), должна передавать ему бо́льшую часть своего импульса. В действительности, как мы видим, струя огибает шарик почти без потери скорости и уходит под ним в воду, сохранив значительную часть

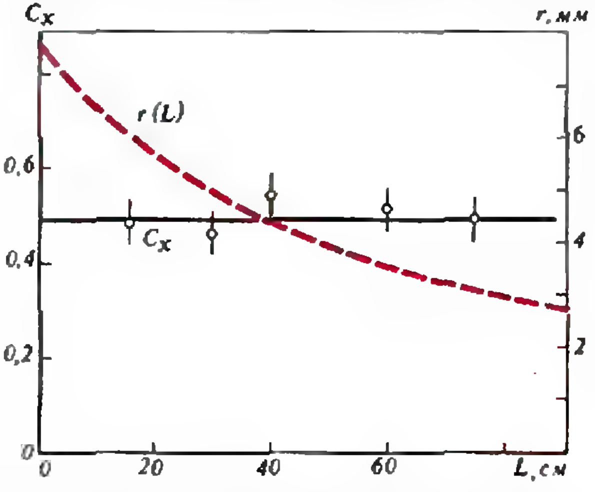


Рис. 5. Результаты измерений коэффициента гидродинамического сопротивления C_x для шарика в струе жидкости при разных длинах струи L. Пунктирная линия соответствует рассчитанной зависимости радиуса r струи, утапливающей теннисный шарик наполовину, при разных длинах струи L.

(три четверти!) своего импульса. Обтекание тела потоком уменьшает гидродинамическое сопротивление!

Кое-кто из любителей физики скажет, что числа 1/4 или 1 — это по порядку величины один и тот же множитель. Верно. Но не все задачи можно решать с точностью до порядка. Ведь никто не станет отрицать, что есть ощутимая разница в том, наливать ли в топливные баки, скажем, 400 т горючего или же загружать их только на 100 т. Как раз на преодоление сопротивления среды расходуется львиная доля энергии двигателей подводной лодки, скоростного автомобиля или электровоза. Поэтому уменьшение величины C_x даже на несколько процентов надо расценивать как достижение.

Пример 4. Формулой (2) с упехом пользуются на практике, скажем, когда оценивают силу давления ветра на парус или здание, силу сопротивления, действующую на двигающийся объект, будь то самолет, птица, автомобиль или подводная лодка. В аэродинамике формула (2) — одна из основных. Однако надо иметь в виду следующее. Поскольку давление в потоке зависит от скорости течения, то результирующая сила гидро- или аэродинамического сопротивления зависит от того, как жидкость или газ обтекает тело: какова скорость среды вблизи поверхности, плавное ли течение или оно с завихрениями, где на границе тела происходит так называемый срыв потока при обтекании и т. д. Именно многообразие видов течений сплошной среды вблизи тела (см., например, рис. 6) часто приводит к трудностям при определении величин F_x и C_x. Для таких тел, как шар, диск (поперек потока), не очень длинный цилиндр и т. д., величина C_x в широком диапазоне скоростей обычно порядка 0,1—1. Для хорошо обтекаемого удлиненного каплеобразного тела с закругленной головной частью коэффициент сопротивления может достигать значений 0,04—0,06.

Еще в несколько раз меньшее значение коэффициента гидродинамического сопротивления, вплоть до величин около 0,01, может быть у рыб и некоторых водных животных при плавании их в воде. Классический пример тому — дельфины. Правда, такие животные и рыбы не только имеют обтекаемую форму, но «применяют» еще и целый комплекс хитростей: специальные кожные покрытия, жировую смазку или слизь на чешуе, уменьшающие сопротивление при движении, и, кроме того, с помощью движений мышц активно управляют потоком, предотвращая возникновение завихрений, в которые могла бы «перекачиваться» энергия дельфина или рыбы. В этом направлении животные «обогнали» инженеров и ученых-гидромехаников — не все еще «технические решения» живой природы реализованы в конструкциях, созданных человеком. Здесь есть над чем поработать инженерам...

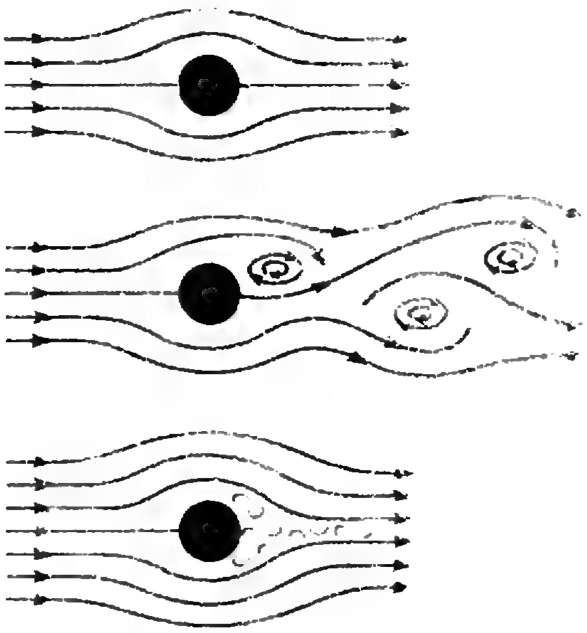


Рис. 6. Линии тока течения жидкости около цилиндра при разных скоростях потока — медленной, умеренной и сравнительно большой.

Пример 5. Еще на заре развития поршневой авиации в опытах по измерению лобового сопротивления в аэродинамических трубах было обнаружено неожиданное явление. При сравнительно больших скоростях воздушного потока с увеличением его скорости лобовое сопротивление шара (и некоторых других тел) в какой-то момент времени резко уменьшалось в несколько раз. Исследователям удалось определить условия, при которых наблюдается такой скачок, измерить его и объяснить эффект. Он оказался связан с перемещением точки срыва потока при увеличении его скорости и уменьшением ширины вихревой зоны позади тела. Улучшение условия обтекания тыльной части тела приводило как раз к уменьшению коэффициента C_x. Хотите познакомиться с одним интересным следствием этого явления?

Оказывается, что если бы на Земле шел очень крупный град и диаметр градин при их падении возрос до $D_{кр}=13$ см, то скорость града увеличилась бы скачком в 2,5 раза от 160 до 400 км/ч! (По другим оценкам получается, что $D_{кр}$ чуть меньше 10 см.) Есть сведения, что в наши дни выпадает град величиной с куриное яйцо или даже с апельсин. Но кто знает, быть может, когда-то падал и более крупный град (вплоть до размеров $D_{кр}$)? Ведь раньше атмосферная «машина» на планете работала активнее, грозы, дожди и град были более сильными! Возможно, здесь кроется объяснение загадочного исчезновения диназавров. Их просто побил крупный, быстрый град! Мелким животным по понятным причинам удалось избежать столь печальной участи...

Пример 6. Формула Ньютона для расчета силы сопротивления справедлива далеко не всегда. Эта формула не позволяет, например, правильно вычислить силу, действующую на ложку, которая погружается в банке с медом. Она не описывает, как тонет маленький стальной шарик в высоком сосуде с растительным маслом, и уж совсем не может объяснить, почему так долго опускается молочный туман, который любят грибники и который доставляет столько неприятностей водителям, речникам и авиаторам.

Во всех перечисленных случаях для определения силы сопротивления надо знать не только форму и размеры тела, скорость относительного движения в среде и ее плотность, но и еще одну характеристику среды, которая называется коэффициентом вязкости и обычно обозначается буквой η. Этот коэффициент показывает, сколь велико или мало в жидкости или газе внутреннее, или, как говорят, вязкое трение.

Если силы вязкости являются при движении шарика в среде определяющими, то шарик испытывает тормозящее сопротивление, которое можно вычислить по формуле Стокса

$$F_x=6\pi\eta Rv,$$

а не по формуле Ньютона (2).

Но как узнать, является ли среда вязкой и какую формулу надо использовать при определении силы сопротивления в каждом конкретном случае?

Рассмотрим сферическую капельку воды, свободно падающую в воздухе (или шарик-градину, пренебрегая разницей в плотностях воды и льда). Будем интересоваться установившейся скоростью падения капли, которую можно измерить и из условия динамического равновесия найти, как зависит лобовое сопротивление от скорости, размера капли и параметров среды (ее плотности и коэффициента вязкости). Массу капли будем считать постоянной, т. е. пренебрежем конденсацией паров и испарением влаги с капли.

На рисунке 7 показан график зависимости скорости падения дождевых капель от их диаметра. Данные взяты из пособия по метеорологии. Рядом с кривой указано, при каких атмосферных осадках, как правило, наблюдаются капли данного диаметра.

Из рисунка видно, что самые мелкие капельки (диаметром 0,01—0,1 мм) падают со скоростью $v_0\sim D^2$. Это возможно, только если сила сопротивления описывается формулой Стокса, из которой следует выражение для скорости осаждения частиц тумана:

$$v_0^{(C)}=\frac{1}{18}D^2\frac{\rho}{\eta}g,$$

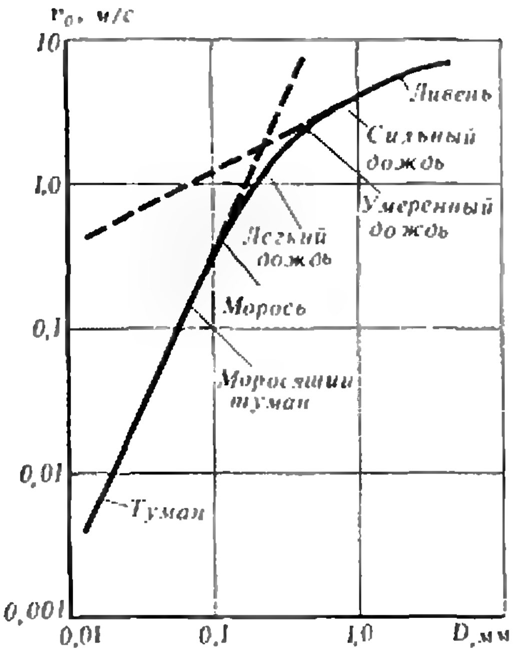


Рис. 7. Зависимость (в логарифмическом масштабе) скорости падения дождевых капель от их диаметра.

где $\eta \approx 1{,}8 \cdot 10^{5}$ кг/м·с при $T = 300$ К. Для воздуха и других газов величина $\eta \sim \sqrt{T}$ и почти не меняется с изменением плотности газа.

С увеличением размеров капли и скорости движения относительный вклад сил вязкого трения, пропорциональный $\eta v R$, уменьшается по сравнению с силами, пропорциональными величине $R^2(\rho v^2/2)$, для которых записана формула Ньютона (их иногда называют инерциальным откликом среды, чтобы не путать с силами вязкого трения).

Крупные капли дождя (диаметром $D \gtrsim 1$ мм) почти «не чувствуют» вязкое трение воздуха. Для них скорость установившегося падения в атмосферном воздухе пропорциональна $\sqrt{D}$ и равна

$$v_0^{(\text{н})} = \sqrt{\frac{4}{3C_x}\,\frac{\rho}{\rho_{\text{возд}}}\,Dg}\,, \qquad (5)$$

где $C_x \approx 0{,}5$. Это выражение получается из формулы (2).

Надо иметь в виду, что формула (5) носит приближенный характер, так как, в отличие от капелек тумана и града, крупные капли дождя имеют форму, заметно отличную от сферической. Силы поверхностного натяжения воды не в состоянии «справиться» с динамическим давлением набегающего потока воздуха, деформирующего каплю. Самые крупные капли ($D \gtrsim 5$ мм), достигая скорости около 8 м/с, сплющиваются столь сильно, что разбрызгиваются на более мелкие.

Для капелек диаметром $0{,}1 \text{ мм} \lesssim D \lesssim 1$ мм не работает ни формула Стокса, ни формула Ньютона. Для таких капелек силы вязкого трения и инерциальный отклик среды соизмеримы.

Пример 7. Есть еще один — третий — механизм торможения тел, который тоже часто встречается на практике и который при некоторых условиях может стать определяющим.

Налейте в ведро или ванну воды и погрузите в нее карандаш вертикально на некоторую глубину. Начните перемещать карандаш параллельно поверхности воды. Если скорость карандаша небольшая, то ничего интересного вы не заметите. Но если карандаш перемещать быстро, то за ним образуется расходящаяся группа волн, которая будет нести определенную энергию. На образование волн расходуется мощность двигателя (в данном случае руки), преодолевающего сопротивление среды.

По нашему опыту мы знаем, что за движущимся телом часто возникают волны, и они могут быть весьма разнообразными. Картина волн от корабля или моторки в глубокой воде отличается от мелких капиллярных волн, которые можно наблюдать в ведре, стакане или блюдце. Волны от моторной лодки на мелководье имеют иной вид, чем в глубокой воде. Сверхзвуковой самолет создает ударную волну в трехмерной среде (воздухе), а не на поверхности раздела (воды и воздуха), как корабль. К тому же, в отличие от обычных волн на воде, ударная волна в газе сопровождается сильным сжатием среды и ее разогревом.

Волновое сопротивление зависит от того, как возбуждаются волны, т. е. от свойств среды, в которой происходит движение, от скорости и характера движения, формы, прежде всего носовой части, и размеров тела. Обычно волновое сопротивление резко растет с ростом v, если, конечно, тело с увеличением v не выскакивает из воды, как скуттер или судно на подводных крыльях.

В каждом конкретном случае расчет величины волнового сопротивления представляет сложную задачу, которую обычно удается решить, только прибегая к услугам эксперимента, используя эмпирические данные. Но сравнительно просто оценить, сколь велико может быть волновое сопротивление.

Рассмотрим, например, прямолинейное и равномерное движение моторной лодки по глубокому озеру. От корпуса моторки расходятся симметрично по курсу две косые волны — носовая и кормовая, которые, складываясь, дают характерную картину волн, хорошо знакомую всем рыбакам и любителям плавания. Угол α, который образуют гребни волн с направлением движения лодки, не зависит от ее скорости и равен около 20°. С каждой стороны от линии курса лодки выделяются 2—3 небольших гребня. Амплитуды остальных волн значительно меньше, так что при оценках можно совсем не обращать на них внимания — они вносят малый вклад в общий результат. Волны от лодки распространяются на сотни метров, слабо затухая со временем.

Гребень волны будем приближенно считать треугольником высотой H, отмеряя эту величину от равновесного уровня озера. Длина основания треугольника равна $\lambda/2$, где λ — длина распространяющейся от лодки волны. Протяженность фронта волн, которые рождаются в единицу времени, численно равна $v\cos\alpha$. Работа, затрачиваемая на создание гребня, переходит в потенциальную энергию волны. Поэтому с учетом кинетической энергии волн, которая в периодических процессах равна потенциальной, для мощности, необходимой для создания группы волн за лодкой, получим оценку

$$W=\frac{1}{2}H\frac{\lambda}{2}v\cos\alpha\cdot\rho g\frac{H}{3}2\cdot 2n=$$

$$=\frac{1}{3}\rho gH^2v\lambda n\cos\alpha, \qquad (6)$$

где $2n$ — полное число гребней волн за лодкой. Множитель $H/3$ — это средняя (с учетом распределения массы в гребне) высота подъема воды.

Вот типичный пример. При скорости моторки 18 км/ч за ней бегут волны высотой 0,3 м и длиной около 0,6 м, $n=3$. По формуле (6) получаем, что $W\approx 3\cdot 10^3$ Вт$\approx$4 л. с. С точностью до множителя 2 этому же равна минимальная мощность мотора, с помощью которого на небольшой лодке удается достигнуть указанной скорости.

Таким образом видно, что существенная доля мощности двигателя моторной лодки расходуется на создание волн.

Задачи и вопросы

1. Изучая падение тел, Галилей бросал с башни одновременно пушечное ядро массой 80 кг и мушкетную пулю массой около 200 г. Существенным ли было в этом опыте влияние воздуха на время падения тел? Высота башни равнялась около 60 м.

2. Новая модель локомотива отличается от старой только двигателем, мощность которого в 1,5 раза больше прежней. Во сколько раз максимальная скорость нового локомотива больше, чем старого?

3. Чем вызван разброс экспериментальных точек на графике на рисунке 4? Определите значение коэффициента C_x в опыте при полном погружении шарика под струей воды, аналогично примеру 3, рассмотренному в статье. Какие выводы можно сделать на основании вашего результата? Что можно сказать о точности эксперимента?

4. Покажите, что в точке, находящейся на расстоянии L от горловины крана, радиус струи r определяется выражением $r(L)=r_0(1+2gL/v_0^2)^{-1/4}$, где v_0 — скорость воды, вытекающей из крана, g — ускорение свободного падения, r_0 — начальный радиус струи. Струя не разбрызгивается на капли, эффектами трения и поверхностного натяжения можно пренебречь.

5. Каким образом можно сделать видимым течение жидкости в воде под шариком? Проведите соответствующий опыт с водопроводной струей. Каков характер течения жидкости под шариком?

6. Если взять за ручку столовую ложку и подставить ее под струю воды, то реакция струи на ложку будет заметно разная, в зависимости от того, выпуклой или вогнутой поверхностью повернута ложка к струе. Почему?

7. Чему равняется равновесная скорость v_0, с которой падает в воздухе шарик от настольного тенниса?

„Квант" улыбается

«Гениальные» изречения учащихся

1.— Каким прибором измеряют атмосферное давление?
— Термометром.
— А температуру?
— Градусником.

2. Опыт — это когда человек делает, но не смотрит, а наблюдение — это когда человек смотрит, но не делает.

3. Причина опускания ртути в термометре при встряхивании простая. Когда его встряхивают, получают ветер, а при ветре температура уменьшается и ртуть опускается.

4. Старое ватное одеяло греет лучше нового, т. к. оно забирает энергию у человека, а потом ее отдает.

5. Тело движется по инерции, если оно остановилось.

6. Поток электронов, заряженных разноименно — такова природа дугового разряда.

7. Если ударить молоточком по камердинеру, то мы услышим звук.

8. В наполненном публикой зале звуки менее громкие, чем в пустом, т. к. они запутываются в публике.

9. Чтобы увидеть предмет в плоском зеркале, нужно, чтобы глаз наблюдателя попал в поле зрения этого предмета.

10. Астероиды — это недоразвитые планеты.

11. Первым электромагнитную волну получил Герцен.

12. Если толкнуть колебательный контур, то мы получим электромагнитные колебания.

13. Звезды — это твердые тела, состоящие из раскаленных газов.

14. Земля по учению Коперника встала на третье место после Солнца.

15. Венера видна утром при заходе Солнца.

Собрала Н. Разыкова

1. В атоме кремния один электрон пустой и называется «дырка», и по этим дыркам в полупроводнике течет электрический ток.

2. Работа впервые появилась в XVIII веке, а энергия почти на сто лет позже.

3.— Что служит топливом на АЭС?
— Как что? Атомы, конечно!

4. Электрон вращается в замкнутом кругу под действием буравчика...

5. Действие третьего закона Ньютона можно пояснить на примере Луны. Ее Земля к себе притягивает, а Луна с такой же силой от нее отталкивается и потому не падает.

6.— Что пришло на смену старым электронным лампам в новых телевизорах?
...Галогеновые?

7. Дельфин при помощи ультразвука не только находит добычу, но и определяет ее вкус, потому что у него хорошо развито обоняние ушей.

8. Телефон сильно искажает голос человека потому, что через него с трудом проходят высокие гармошки.

Собрал В. Плюхин

1. Для того чтобы уменьшить силу трения, надо смазать коэффициент трения.

2. Высокочастотные электромагнитные колебания высоко распространяются над поверхностью Земли, благодаря чему не зацепляются за преграды, что позволяет использовать их для осуществления радиосвязи на больших расстояниях.

3. Непроводники электричества предназначены для того, чтобы тащить от проводов человека, которого ударило током.

Собрал А. Давиден

1. Броуновское движение открыто Эйнштейном.

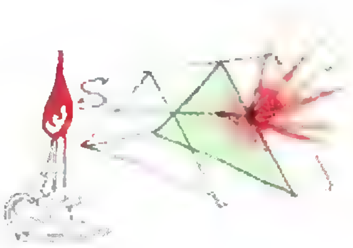
2. Два приемника и телефон — радиотелефонная связь.

3. Гальванометр — источник тока.

4. Электрический ток в металле — хаотическое движение электронов.

5. Скорость света $c = 3 \cdot 10^{-8}$ м/с!

6. Дисперсия света:



7. $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$, где γ — гравитационная постоянная!

8. $F_{\text{упругости}} = -kx$, где x — неизвестное!

9.— Что такое диод?
— Колебательный контур.

10. Весом тела называется масса тела.

11. Конденсатор в цепи создает переменный ток.

Собрала Н. Патрикеева

СКАЗКА О РОЖДЕСТВЕНСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФЕРМА

Я. СТЮАРТ

В этой статье*, перепечатываемой нами с некоторыми сокращениями из журнала «В мире науки», увлекательно рассказывается о некоторых интересных наблюдениях над миром целых чисел. В следующем номере мы намерены опубликовать статью известного советского математика В. М. Тихомирова, содержащую несколько доказательств теоремы, упомянутой в заголовке данной статьи.

Был канун рождества. В холодной, загроможденной столами комнате стрелки старинных часов неумолимо приближались к вертикали, пока не послышался мерный звон, возвестивший об окончании работы. Боб Скрэтчит**) промакнул страничку амбарной книги промокашкой Мебиуса, у которой была только одна сторона, и поэтому чернила никогда не пропитывали ее насквозь. Он захлопнул книгу и положил ее на полку. Завтра — праздник. Следующие 4! (факториал) часов — нерабочие. Он надел пальто и шарф, который был уже настолько потертым, что его фрактальная размерность была меньше 2. По пути на выход он прошел мимо конторы хозяина лавки.

---

*) © Перевод на русский язык «Мир», 1991 г.

**) В этой сказке все имена действующих лиц придуманы автором по аналогии с именами героев одной из «Рождественских повестей» Ч. Диккенса, и поэтому приводятся нами только в транслитерации. (Примеч. ред. изд-ва «Мир»)

— Счастливого рождества, мистер Студж,— приветливо сказал он.

— Да брось ты!— проворчал старик.— Лавка закрывается на рождество, Скрэтчит. Ты знаешь, что это значит?

— Это значит, что у нас выходной день, мистер Студж.

— Это значит, Скрэтчит, что у нас завтра не будет покупателей. День без всякого дохода. День, когда наш старый добрый магазинчик «Математические редкости» не выручит ни копейки.

Едва ли это был подходящий момент, но Скрэтчит обещал жене спросить...

— Э-э..., сэр?

— Ну что еще?

— Вы обещали мне небольшую рождественскую премию, сэр. Это для Джима, сэр, моего младшего, он у меня вечно капризничает, сэр. Ну, совсем небольшую...

— Премию? Премию! Еще одно слово, Скрэтчит, и ты уволен!

Скрэтчит ушел расстроенный. Однако к тому времени, когда он дошел до дома, рождественское веселое настроение взяло верх, и жизнь сразу представилась ему более радостной.

— Как, никаких подарков?— воскликнул Джим.

— Придется обойтись без подарков, сынок,— сказал Скрэтчит, чувствуя, как его хорошее настроение затухает по экспоненте.

— Я хочу подарок! Новую теорему! Или в крайнем случае какую-нибудь подержанную лемму. У Чарли Пикенса есть прекрасная лемма. Да что там, даже гипотеза лучше, чем ничего!

— Мне очень жаль, Джим, но мистер Студж не хочет расставаться со своими гипотезами. Боюсь, что мне не выбить из него даже прямого противоречия. У меня совершенно ничего нет.

— Твой недостаток, папа, в том, что у тебя нет честолюбия. Ты должен попроситься в Пифагоровский комиссионный магазин.

— Я не гордый человек, Джим, но я никогда не унижусь до того, чтобы продавать поношенные прямоугольные треугольники с перевернутой гипотенузой!— Скрэтчит заставил себя успокоиться.— Нам придется довольствоваться традиционным пудингом, оставшимся еще с Пасхи, и ты будешь рад и этому, как все другие. Ну, а если повезет, то, может быть, я откопаю старый парадокс, подаренный мне твоей матерью. Свежая подкладка из логики — и он будет как новенький.

— Интуитивная логика?— с надеждой в голосе спросил Джим.— Не просто обычная ерунда, типа ложь — истина?

— Блестящая идея, мой мальчик,— согласился Скрэтчит.

Джим удалился, на время умиротворенный, оставив Скрэтчита в лихорадочных попытках найти утверждение, истинность или ложность которого было бы невозможно установить. Он решил позвонить мистеру Студжу, чтобы попросить у него истинное логическое утверждение, но коммутатор ответил ему, что телефон отключен, поскольку им слишком редко пользуются.

В неприбранной квартире на другом конце города мистер Студж устроился поуютнее; в голове его мелькали мысли о доходах и налогах.

Он проснулся, когда холодный ветер зашевелил шторы и задребезжал по оконным стеклам. Он вскочил с кровати, чтобы закрыть окно, но с удивлением увидел, что оно уже было закрыто. Откуда же ветер?

— Стуууджжж, — послышался зловещий голос. Студж бросился обратно в постель и закрылся с головой одеялом.

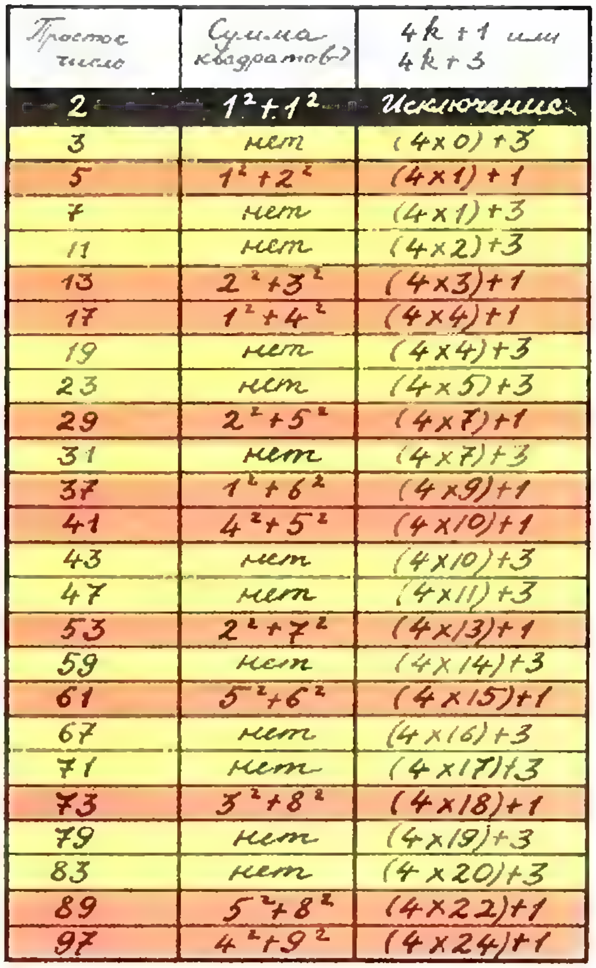
— Кто... кто ты?

— Я,— промычал голос,— дух теорем прошлого. Я пришел, чтобы взять тебя с собой, Студж!— дух протянул свою лишенную плоти руку, и Студж нехотя коснулся ее.

Внезапно они очутились в комнате, отделанной красным деревом. Человек в черном платье писал что-то гусиным пером.

— Где мы?— спросил Студж.

— Франция. Рождество, ровно 350 лет тому назад.



Простое число	Сумма квадратов?	4k+1 или 4k+3
2	1^2+1^2	Исключение
3	нет	(4×0)+3
5	1^2+2^2	(4×1)+1
7	нет	(4×1)+3
11	нет	(4×2)+3
13	2^2+3^2	(4×3)+1
17	1^2+4^2	(4×4)+1
19	нет	(4×4)+3
23	нет	(4×5)+3
29	2^2+5^2	(4×7)+1
31	нет	(4×7)+3
37	1^2+6^2	(4×9)+1
41	4^2+5^2	(4×10)+1
43	нет	(4×10)+3
47	нет	(4×11)+3
53	2^2+7^2	(4×13)+1
59	нет	(4×14)+3
61	5^2+6^2	(4×15)+1
67	нет	(4×16)+3
71	нет	(4×17)+3
73	3^2+8^2	(4×18)+1
79	нет	(4×19)+3
83	нет	(4×20)+3
89	5^2+8^2	(4×22)+1
97	4^2+9^2	(4×24)+1

Какие простые числа являются суммами квадратов?

— Кто этот тип в черном?

— Джентльмен в парике, Студж,— великий математик Пьер Ферма, больше всего известный своей недоказанной «последней» теоремой, и один из основоположников теории чисел. Он пишет письмо своему приятелю Марину Мерсенну. Если бы мы вернулись в настоящее, то могли бы прочитать письмо в подлиннике, оно датировано 25 декабря 1640 года. В письме сообщается об удивительном открытии.

— И что же это было за открытие?

— Оно известно как рождественская теорема Ферма. Некоторые простые числа могут быть представлены в виде суммы квадратов двух чисел: например,

$$5=1+4=1^2+2^2$$

или

$$13=4+9=2^2+3^2.$$

Другие же простые числа невозможно представить в этой форме: например, 3 или 11. Ферма нашел способ различать эти простые числа.

Студж достал из кармана затрепанную записную книжку и начал считать. Вскоре он решил задачу для всех чисел, меньших 100 (см. таблицу вверху слева).

— Ты подметил закономерность?— спросил дух теорем прошлого. Студж покачал головой.— Ну ладно, раз сегодня рождество, я дам тебе две подсказки. Во-первых, нужно не обращать внимания на простое число 2, которое является исключением. (Это ведь единственное четное среди всех простых чисел!). Во-вторых, нужно рассматривать остаток от деления на 4. Каждое нечетное простое число больше какого нибудь числа, кратного 4, либо на 1, либо на 3; т. е. его можно представить либо в виде $4k+1$, либо $4k+3$. Например, $5=4\times1+1$ представляется в форме $4k+1$.

Студж добавил новый столбец к своей таблице, показывающей, к какой форме представления относится каждое простое число, $4k+1$ или $4k+3$; теперь среди простых чисел уже просматривалась закономерность.

— Простые числа, представимые в виде суммы квадратов, как будто выражаются в форме $4k+1$,— сказал Студж с удивлением.— Кроме 2, числа, которое, по вашим словам, представляет исключение.

— Отлично. Дело в том, что Ферма не просто догадался об этом; он это доказал. По крайней мере, он наметил путь доказательства.

Уже после того, как дух теорем прошлого растворился в воздухе, Студж услышал, как он пробормотал:

— Леонард Эйлер доказал это, где-то в 1754 году или около того...

Студж очнулся опять в своей холодной спальне. Он попытался уснуть, но странная теорема Ферма продолжала крутиться у него в голове. Простые числа. Суммы двух квадратов. Остатки от деления на 4. Можно сойти с ума! Он поворочался с боку на бок, сходил на кухню подкрепиться, но так и не смог уснуть.

Так же не мог заснуть в своей менее удобной кровати Боб Скрэтчит. Он все думал, где бы ему успеть отыскать истинное логическое заключение, чтобы успеть сделать Джиму рождественский подарок.

Студж наконец заснул, но уже через $29=4+25$ секунд услышал страшное завывание и последовавший за этим громкий взрыв. Может быть, это пастор Сноуз опять швырнул свой ночной горшок в кошку вдовы Клини? Да нет, похоже, что шум был в его собственной спальне. Студж почувствовал, как трясется от страха. Перед ним возникло светящееся тело.

— Я,— прогремело видение,— дух прозрений грядущего.

— Делай со мной что хочешь, подлый негодяй, я слишком устал, чтобы сопротивляться.

Дух прозрений грядущего, положив на стол коробочку, скомандовал:

— Открой ее.

Внутри Студж обнаружил нечто похожее на телевизионный экран и вертушку, наподобие телефонной. Он взял устройство в руки:

— Что это?

— Модулоскоп. Он позволяет игнорировать то, что тебя не интересует, чего ты не хочешь видеть.

— Как бедных людей, например? Я это и так делаю все время.

— Зато с помощью модулоскопа ты сможешь взглянуть на вещи в необычном свете, в отрыве от привычной логики. В частности, если с помощью вертушки настроить устройство на какое-то число, то не увидишь ни одного числа, кратного ему. Настрой прибор на «канал 4» и посмотри на пальцы моих рук. Сколько пальцев ты видишь?

— Два. А куда девались остальные восемь?

— Модулоскоп первым делом вычитает восемь пальцев, поскольку 8 — это наибольшее кратное 4, которое меньше 10; затем он показывает оставшиеся два пальца. Математики описывают работу устройства лаконичнее: «10 по модулю 4 равно 2».

Студж посмотрел через модулоскоп на 147 монет, лежащие на его столике. Увидев лишь три, он вскрикнул. Убрав модулоскоп, он с облегчением обнаружил, что все его монеты были на месте.

— Перестань играться,— строго приказал дух.— Оставь устройство настроенным на канал 4, достань свою записную книжку и взгляни на таблицу простых чисел. Что ты видишь?

— Ничего, кроме единиц и троек, и еще двойку, которая представляет исключение. Каждое простое число, являющееся суммой квадратов, выглядит как 1; все простые числа, не являющиеся суммами квадратов, выглядят как 3! Но, конечно же, здесь срабатывает условие $4k+1$ или $4k+3$ — либо 1, либо 3, если брать по модулю 4.

На мгновение он задумался.

— Но я все же не пойму, почему значение простого числа, взятое по модулю 4, оказывается важным.

— Вместо простых чисел, посмотри-ка на квадраты.

Студж пристально рассмотрел таблицу через модулоскоп. Последовало долгое молчание.

— Все, что я вижу,— сказал он наконец,— это что уравнение $1=1+0$ повторяется снова и снова.

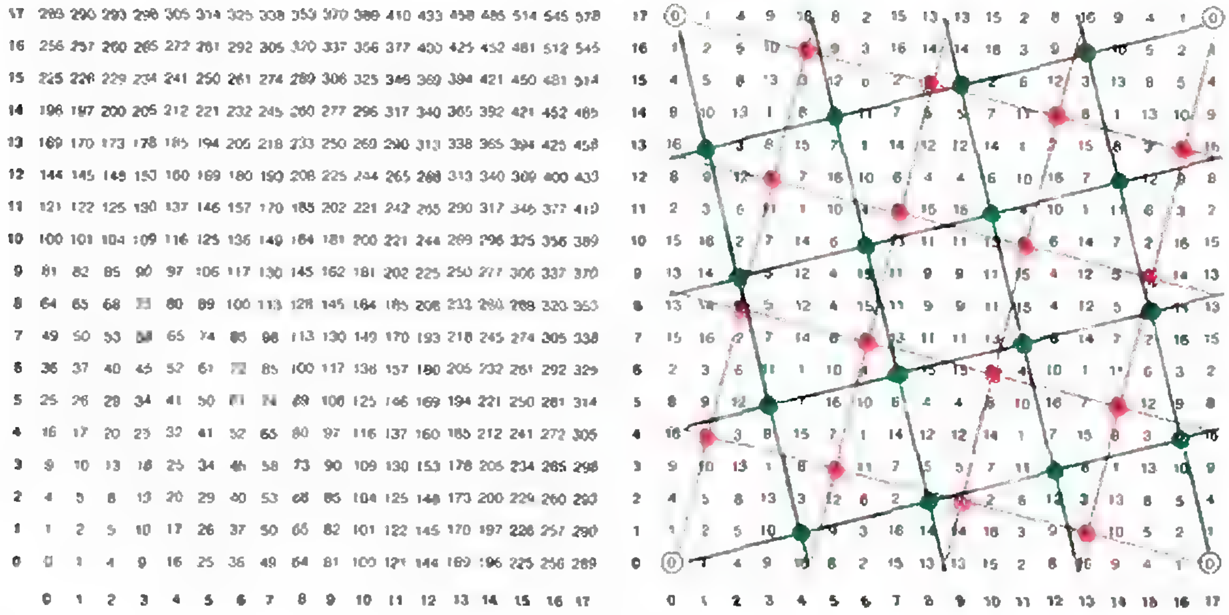
— Да. А почему, ты понял?

— Потому что квадраты по модулю 4 могут быть лишь нулями и единицами?

— Вот именно. Если возвести в квадрат четное число, то получишь кратное четырем, которое через модулоскоп будет выглядеть как 0. Если же возвести в квадрат нечетное число, то любой результат — 1, 9, 25, 49 — будет на 1 больше кратного 4. Поэтому суммы квадратов по модулю 4 будут выглядеть как $0+0=0$, $0+1=1$, либо $1+1=2$. Чего не хватает?

— Трех,— сказал Студж.

— Правильно. Сумма двух квадратов, взятая по модулю 4, может быть равна 0, 1 или 2, но никогда 3. Поэтому простые числа (на самом деле вообще любые числа) вида $4k+3$ никак не могут быть суммой двух квадратов. Теперь ты видишь, почему модуль 4 играет важную роль? — с этими словами дух начал испаряться.



17	289	290	293	298	305	314	325	338	353	370	389	410	433	458	485	514	545	578
16	256	257	260	265	272	281	292	305	320	337	356	377	400	425	452	481	512	545
15	225	226	229	234	241	250	261	274	289	306	325	346	369	394	421	450	481	514
14	196	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392	421	452	485
13	169	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	338	365	394	425	458
12	144	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	288	313	340	369	400	433
11	121	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242	265	290	317	346	377	410
10	100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	221	244	269	296	325	356	389
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162	181	202	225	250	277	306	337	370
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145	164	185	208	233	260	289	320	353
7	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130	149	170	193	218	245	274	305	338
6	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117	136	157	180	205	232	261	292	325
5	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106	125	146	169	194	221	250	281	314
4	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97	116	137	160	185	212	241	272	305
3	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90	109	130	153	178	205	234	265	298
2	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85	104	125	148	173	200	229	260	293
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101	122	145	170	197	226	257	290
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

17	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1	0
16	1	2	5	10	0	9	3	16	14	14	16	3	9	0	10	5	2	1
15	4	5	8	13	3	12	6	2	0	0	2	6	12	3	13	8	5	4
14	9	10	13	1	8	0	11	7	5	5	7	11	0	8	1	13	10	9
13	16	0	3	8	15	7	1	14	12	12	14	1	7	15	8	3	0	16
12	8	9	12	0	7	16	10	6	4	4	6	10	16	7	0	12	9	8
11	2	3	6	11	1	10	4	0	15	15	0	4	10	1	11	6	3	2
10	15	16	2	7	14	6	0	13	11	11	13	0	6	14	7	2	16	15
9	13	14	0	5	12	4	15	11	9	9	11	15	4	12	5	0	14	13
8	13	14	0	5	12	4	15	11	9	9	11	15	4	12	5	0	14	13
7	15	16	2	7	14	6	0	13	11	11	13	0	6	14	7	2	16	15
6	2	3	6	11	1	10	4	0	15	15	0	4	10	1	11	6	3	2
5	8	9	12	0	7	16	10	6	4	4	6	10	16	7	0	12	9	8
4	16	0	3	8	15	7	1	14	12	12	14	1	7	15	8	3	0	16
3	9	10	13	1	8	0	11	7	5	5	7	11	0	8	1	13	10	9
2	4	5	8	13	3	12	6	2	0	0	2	6	12	3	13	8	5	4
1	1	2	5	10	0	9	3	16	14	14	16	3	9	0	10	5	2	1
0	0	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1	0
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Суммы квадратов (слева) и та же таблица при наблюдении через канал 17 модулоскопа (справа).

— Не уходи!— в отчаянии вскрикнул Студж.— Все это очень хорошо, но это еще не доказывает, что все простые числа вида $4k+1$ представимы в виде суммы двух квадратов, не правда ли? Мы доказали только, что другие не представимы.

Послышался едва слышимый ответ:

— Ты прав, но спасение близко. Не оставляй модулоскоп и ждиииии...

Черт возьми, подумал Студж, сейчас, наверное, явится еще один дух. Беда не приходит одна, бог любит троицу. Он закричал, глядя в потолок:

— Ну, давай, материализуйся, я не хочу ждать всю ночь!

— Я духхх — апчхи!

— Что?

— Я дух доказательств настоящего. Здесь как в морозилке! Ты что, никогда не топишь камин?— Дух громко высморкался в завиток эктоплазмы.

— Ты пришел ко мне, чтобы показать, как доказывается, что каждое простое число вида $4k+1$ является суммой двух квадратов?

— Ну да, братец! У нас, у духов, иногда очень странная работа. Однако время уходит, Студж. Настройся на канал 17, и все будет замечательно!— величественным жестом дух доказательств настоящего достал пластмассовую дощечку, поделенную на квадраты, и положил ее на столик.— Я продемонстрирую тебе доказательство для числа 17, но тот же метод применим и в общем случае. Идея в том, чтобы отвлечься от простых чисел и начать с сумм квадратов. Эта специальная пластинка содержит в себе всевозможные суммы двух квадратов; в ячейке на пересечении столбца x и строки y записана сумма x^2+y^2. Посмотри на пластинку через модулоскоп. Что ты видишь?

— Множество чисел от 0 до 16, они заполняют все пространство.

— Ах да, я забыл. Возьми-ка этот фломастер и обведи кружком каждый 0, который увидишь, договорились?

Получив любопытную периодическую картинку из кружков (см. рисунок вверху), Студж уставился на нее и с недоумением покачал головой.

— Тут есть скрытая закономерность,— сказал дух.— Сейчас мы раскрасим часть кружков красным, остальные зеленым... Теперь видишь что-нибудь?

— Ну и ну! Да это же две правильные решетки, наложенные одна на другую.

— Правильно. Они так и называются решетками. Отмеченные нами цветные точки все являются точками (x, y) в столбце x и строке y, такие что x^2+y^2 являются кратными 17. Теперь посмотри на красную решетку и скажи мне, какая точка ближе всего к началу координат (столбец 0, строка 0)?

— Это легко. Столбец 1, строка 4.

— И соответствующая сумма квадратов, кратная 17?

— $1^2+4^2=17$ — это же и есть 17! Теперь я вижу! Ты показал мне, что точка на красной решетке, ближайшая к началу координат, решает задачу представления числа 17 в виде суммы двух квадратов!

— Совершенно верно. Зеленая решетка тоже работает, но она дает решение 4^2+1^2, в обратном порядке. Попробуем еще: настрой свой прибор на этот раз на канал 41. Получается ли все так же?

— Да. Смотри-ка, здесь опять две решетки, наложенные одна на другую! — сказал Студж. — И ближайшая к центру точка красной решетки расположена в столбце 4, строке 5, а 4^2+5^2 как раз равно 41!

— Великолепно! Тебе будет очень интересно попробовать другие каналы модулоскопа. Выбери какое-нибудь простое число p и отметь все позиции (x, y), в которых x^2+y^2 является числом, кратным p. В каждом случае будут получаться две решетки, хотя, наверное, ты бы этого не заметил, если бы я не сказал тебе об этом. Но я — дух доказательств настоящего, а не просто дух примеров! Я должен объяснить, почему возникают две решетки и почему точка решетки, ближайшая к началу координат, всегда решает задачу. Сначала — о существовании двух решеток. Это зависит от квадратного корня из -1.

— Я думал, что -1 не имеет квадратного корня, — прервал Студж.

— А-а. В самом деле, ни одно действительное число не может при возведении в квадрат дать -1, поэтому было изобретено специальное новое число i, такое что $i^2=-1$, и родилась система комплексных чисел. Но, если ты располагаешь модулоскопом, тебе не нужны комплексные числа. — Он написал что-то на пластмассовой пластинке. — Взгляни-ка на это через свой модулоскоп, настроенный на канал 17.

Студж посмотрел. На пластинке было написано:

$$x^2+y^2=(x+4y)(x-4y).$$

— Удивительно? Однако многое выглядит удивительно при наблюдении через модулоскоп до тех пор, пока не интерпретировать результат правильно, с учетом устройства модулоскопа. Из обычной алгебры нам известно, что $(x+4y)(x-4y)=x^2-16y^2$. Но через модулоскоп — 16 тождественно 17 — 16 (поскольку числа, кратные 17, остаются невидимыми), а это просто 1. Поэтому при наблюдении через модулоскоп $x^2-16y^2=x^2+y^2$.

— Точки, которые ты отметил, — продолжал дух, — это те, которые при наблюдении через модулоскоп удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=0$, но это уравнение по модулю 17 раскладывается на множители $(x+4y)(x-4y)=0$, а следовательно, $x=-4y$ или $x=4y$. Каждый множитель соответствует одной решетке. Красная решетка задается уравнением $x=-4y$, а зеленая — уравнением $x=4y$. Все это по модулю 17, разумеется. Теперь посмотри на решетки и проверь. Например, на зеленой решетке ты обнаружишь все точки — (4,1), (8,2), (12,3), (16,4) и так далее, — удовлетворяющие уравнению $x=4y$.

— Это первая важная идея. При наблюдении через модулоскоп, настроенный на канал 17, число -1 имеет квадратный корень, а именно 4! В самом деле, $4^2+1=17=0$. А это непосредственно приводит к существованию двух решеток. В точности то же самое справедливо по отношению к любому простому числу вида $4k+1$. А это в свою очередь точно те простые числа, по модулю которых -1 имеет квадратный корень. Ты готов ко второй важной идее?

— Всегда готов, — ответил Студж.

— Каждая решетка состоит из одинаковых параллелограммов. (В данном случае параллелограммы представляют собой покосившиеся квадраты, однако для многих других решеток это не так, поэтому мы будем называть эти фигуры параллелограммами.) Какова площадь такого параллелограмма? Попробуй несколько примеров.

Студж почеркал в своей записной книжке.

— При $p=17$ параллелограмм имеет площадь 17 квадратных единиц. А при $p=41$ площадь составляет 41 квадратную единицу. Я думаю, что в общем случае для простого числа p площадь параллелограмма должна составлять p квадратных единиц.

— Это действительно так, хотя я не стану этого сейчас доказывать. Но, возможно, тебе интересно, почему я обратил внимание на площадь параллелограмма.

— Да, я подумал об этом.

— Это связано с теоремой, доказанной Германом Минковским, русским математиком, преподававшим в Германии. Он изобрел пространство (пространство Минковского), которым воспользовался Эйнштейн в своей теории относительности. Минковскому пришла в голову блестящая идея, касающаяся решеток. На первый взгляд она тривиальна: если площадь параллелограмма относительно мала, то узловые точки решетки должны быть недалеко друг от друга. Поэтому некоторые из них должны оказаться совсем поблизости от начала координат. Он доказал теорему, сформулировав строго свою идею. Предположим, у нас есть решетка, образованная параллелограммами, и предположим также, что мы нарисовали окружность с центром в начале координат. Теорема Минковского гласит, что если площадь круга по меньшей мере в четыре раза превосходит площадь параллелограмма, то найдется по крайней мере одна узловая точка решетки, кроме начала координат, которая лежит внутри круга. Мы можем воспользоваться теоремой Минковского для доказательства того, что ближайшая к началу координат точка решетки решает задачу представления простого числа p в форме суммы двух квадратов. Возьмем, например, $p=17$. Площадь параллелограмма также равна 17. Возьмем окружность немного большего радиуса, чем квадратный корень из 17, скажем, радиуса 5. Тогда площадь круга составит $5^2\pi=25\pi=78{,}54$, что больше $4\times17=68$, так что условия теоремы Минковского соблюдены. Пока все правильно?

— Слежу за каждым словом.

— Согласно теореме Минковского, точка решетки, не лежащая в начале координат, находится внутри круга. Назовем ее (x, y). Тогда сумма x^2+y^2 меньше или равна квадрату радиуса окружности. Другими словами, $x^2+y^2\leqslant25$. Однако для точек решетки x^2+y^2 кратно 17. Это кратное не является нулем, поскольку данная точка решетки не совпадает с началом координат. Какие ненулевые кратные 17 меньше или равны 25?

— Само число 17,— сказал Студж.— Больше никаких.

— Вот именно! Поэтому x^2+y^2 должно быть равно в точности 17, и это есть решение задачи. Тот же метод работает и в общем случае,— похвастался дух. Дальновидная идея Минковского породила новую ветвь математики, названную геометрией чисел, по названию его книги, написанной в 1896 г. Здесь применяется геометрия для изучения теории чисел. Казалось бы, эти области слабо связаны друг с другом! Другое приложение геометрии чисел — теорема о четырех квадратах: каждое целое положительное число (простое или нет) является суммой четырех квадратов. Однако пусть эта задача не даст тебе покоя до следующего рождества, Студж.

Наконец Студж смог немножко расслабиться, буря в его утомленном мозгу утихла.

Уже засыпая, он вспомнил Боба Скрэтчита. Придя в необычно добродушное расположение духа, он решил в будущем быть добрее к своему служащему.

Но когда именно в будущем, он не решил.

В рождественское утро Джим проснулся в хорошем настроении.

— Папа, папа! Ты достал мне старый мамин парадокс с новой подкладкой из интуитивной логики, а, пап? Ну, такой, с промежуточным логическим значением?

— Понимаешь ли,— сказал Скрэтчит.— Это не так просто, сынок.— Он протянул Джиму потрепанную картонную коробку, подыскивая слова, которые могли бы остановить пронзительные вопли Джима.

— *Я не уверен, смог ли я это сделать.*

Это был миг удачи. Или, может быть, сам дух прозрений грядущего сел ему на плечо и прошептал подсказку на ухо. Потому что лицо Джима внезапно озарилось, как рождественская елка.

— Папочка, ты смог это сделать!

Ну, действительно, едва ли придумаешь более промежуточное значение истины, чем то, что выбрал Скрэтчит в своем ответе.

Вниманию
школьников и абитуриентов!

КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ

принимает учащихся 8—11 классов на заочные
отделения физики и математики по подготовке к поступлению в вузы.
Для заочных отделений лицея в Московском физико-техническом институте
разработаны уникальные пособия по всем разделам физики и математики,
содержащие теорию, методы решения задач, контрольные задания
и решения более 1500 конкурсных задач.

Обучение ведут профессора и доценты вузов.

Все учащиеся проходят обучение по полной программе,
независимо от того, с какого класса поступили в лицей.
Общая стоимость обучения на одном отделении — 216 руб.
Эта плата вносится сразу только учащимися 11-х классов,
а для ныне учащихся 8-х классов ежегодная плата на каждом отделении
будет составлять по 54 руб., 9-х — 72 руб., 10-х — 108 руб.

Для поступления на каждое отделение
необходимо в месячный срок оплатить один год обучения
почтовым переводом на адрес:

252001, г. Киев, Печерское отделение УСБ, р/с 1609455, Политехнический лицей.
На бланке почтового перевода укажите свой адрес, предметы и класс.

Для справок:

252001, г. Киев, ул. Крещатик 12, Политехнический лицей;
тел. 228-81-85.

Задачник «Кванта»

Задачи

М1301—М1305, Ф1308—Ф1312

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1301» или «Ф1308». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1305 и Ф1308—Ф1311 предлагались на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1301. Обязательно ли тетраэдр правильный, если
а) пять двугранных углов равны друг другу;
б) восемь плоских углов равны друг другу?
Обязательно ли пирамида $ABCD$ правильная, если ее основание ABC — правильный треугольник и три плоских угла при вершине D равны друг другу?

В. Сендеров

М1302. Докажите, что произведение многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен (отличный от нуля) имеет не менее n отличных от 0 коэффициентов.

Г. Карнаух, А. Савин

М1303. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ такие, что (при всех $n>3$)

$$q_n=(q_{n-3}+q_{n-1})/q_{n-2}.$$

О. Алиев

М1304. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, R — радиус описанной около него окружности. Докажите, что

$$R^3 \geqslant IA \cdot IB \cdot IC.$$

А. Соловьев

М1305. Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n \times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано число a_i+b_j. Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел одинаковы, то во всех строках — тоже.

Д. Фомин

Ф1308. У левого края тележки длиной $L=0{,}2$ м и массой $M=1$ кг лежит кубик массой $m=0{,}3$ кг (рис. 1).

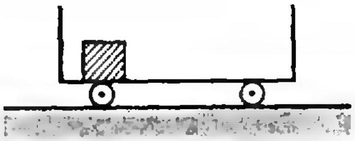


Рис. 1.

Кубику толчком придают горизонтальную скорость $v_0=1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как проскальзывание его относительно тележки прекратится. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu=0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.

А. Зильберман

Задачник „Кванта"

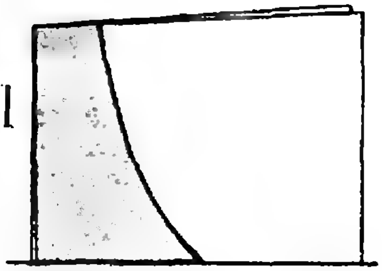


Рис. 2.

Ф1309. На рисунке 2 — фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол α, частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол α. Смачивание считать полным.

В. Можаев

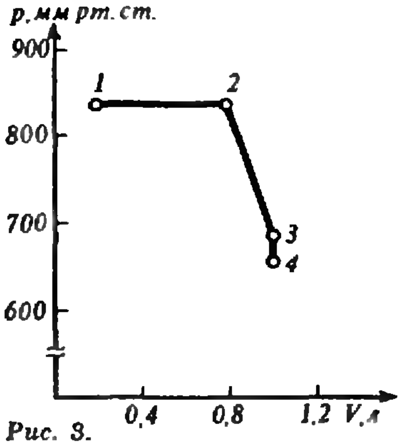


Рис. 3.

Ф1310. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его пары при температуре $T_1=78$ К (точка *1* на рисунке 3). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок *1—2—3*). В точке *3* давление в сосуде становится равным 686 мм рт. ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до $T_2=76$ К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт. ст. (точка *4*). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота $M=28$ г/моль. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3.

А. Зильберман

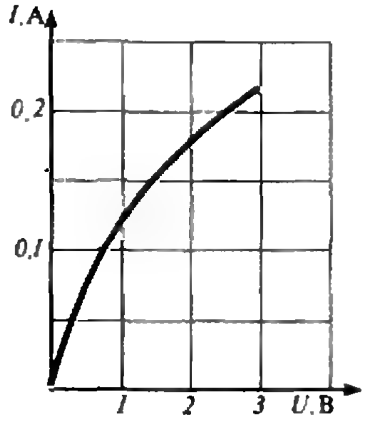


Рис. 4.

Ф1311. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м — 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке 4.

А. Зильберман

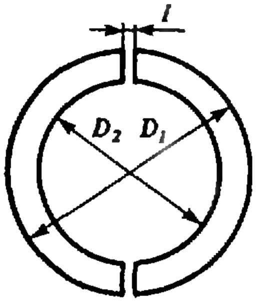


Рис. 5.

Ф1312. Катушка равномерно намотана на кольце из феррита с магнитной проницаемостью $\mu=3000$. Внешний диаметр кольца $D_1=2$ см, внутренний — $D_2=1{,}6$ см. Индуктивность катушки $L=0{,}1$ Гн. Какой была бы индуктивность катушки, если бы ее сердечник состоял из двух полуколец, прижатых друг к другу неплотно — с зазором шириной $l=0{,}1$ мм (рис. 5)? Во сколько раз изменилась бы эта индуктивность при замене материала полуколец на феррит с $\mu_1=2000$?

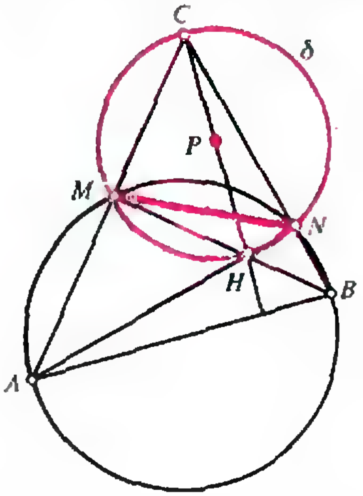
Р. Александров

Решения задач

М1276—М1280, Ф1288—Ф1292

М1276. *Для данной хорды MN окружности рассматриваются треугольники ABC, основаниями которых являются диаметры AB этой окружности, не пересекающие MN, а стороны AC и BC проходят через концы M и N хорды MN. Докажите, что высоты всех таких треугольников ABC, опущенные из вершины C на сторону AB, пересекаются в одной точке.*

Точки M и N — основания высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B, поэтому третья высота проходит через точку H их пересечения, причем точки C, M, N и H лежат на одной окружности δ с диаметром CH. Пусть P — центр этой окружности. Заметим, что при движении диаметра AB величина угла C треугольника остается неизменной,— она измеряется полуразностью постоянных по величине дуг AB и MN (см. рисунок). Поскольку хорда MN неподвижна, остается неизменной и окружность δ (по которой движутся точка C и диаметрально противоположная ей точка H), а тем самым и ее центр P: диаметр CH — участок интересующей нас высоты — просто вращается вокруг точки P.



Е. Куланин

М1277. *Докажите (для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$) неравенство*

$$\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\geqslant n\sqrt{2}.$$

Как следует из неравенства $x^2+y^2\geqslant 2xy$ (неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел x^2 и y^2), левая часть доказываемого неравенства не меньше

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{a_1a_2}{a_3^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_2a_3}{a_4^2}}+\ldots+\sqrt[4]{\frac{a_{n-1}a_n}{a_1^2}}+\sqrt[4]{\frac{a_na_1}{a_2^2}}\right).$$

Поскольку произведение n корней, стоящих в скобках, равно 1, по теореме Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для n чисел (эта теорема подробно обсуждалась в третьем номере журнала за этот год) их сумма не меньше n. Отсюда и следует нужное неравенство.

В. Сендеров, Л. Курляндчик

M1278. *Имеется n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$ и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что $x_ix_j\leqslant -1/n$ для некоторых i и j.*

Рассмотрим сначала «крайний» случай, когда числа принимают всего два различных значения: k из них равны $a<0$, а остальные $(n-k)$ равны $b>0$. Тогда $ka+(n-k)b=0$, то есть $ka=-(n-k)b$ и $ka^2+(n-k)b^2=$ $=-(n-k)ab-kab=1$, откуда $ab=-1/n$. Общий случай попробуем свести к этому, «раздвигая» переменные. Заметим, что если заменить пару чисел u, v $(u<v)$ на $u-t$, $v+t$ $(t>0)$, то сумма не изменится, а сумма квадратов увеличится:

$$(u-t)^2+(v+t)^2=u^2+v^2+2t(v-u)+\ t^2.$$

Пусть $a<0$ — наименьшее, $b>0$ — наибольшее из данных n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Если в этом наборе есть два числа, отличных от a и b, раздвинем их, не меняя суммы так, чтобы одно из них сравнялось с одним из крайних чисел a или b. После нескольких операций получим набор из n чисел, в котором все, кроме одного — обозначим его c,— равны a (пусть их k) или b (их $m=n-k-1$), сумма которых равна 0, а сумма квадратов — не меньше 1:

$$ka+c+mb=0,$$
$$ka^2+c^2+mb^2=-(c+mb)a+c^2-(ka+c)b\geqslant 1.$$

Поскольку $a\leqslant c<b$, $ca-c+cb-ab=(c-a)(b-c)>0$. Сложив это неравенство с предыдущим, получим требуемое:

$$-(m+k+1)ab=-nab>1,\ \text{или}\ ab<-1/n.$$

(Из этого доказательства ясно, что равенство достигается лишь в «крайних» случаях, рассмотренных вначале.)

Задача имеет и прямое алгебраическое решение. Для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$

$$(x_i-a)(x_i-b)\leqslant 0.$$

Просуммировав эти неравенства, получим

$$\sum_{i\leqslant 1}^{n} x_i^2-(a+b)\sum_{i=1}^{n} x_i+nab\leqslant 0 \qquad (*)$$

Но $\sum\limits_{i\leqslant 1}^{n} x_i^2=1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=0$, поэтому $(*)$ превращается в $nab\leqslant -1$.

Н. Васильев, Е. Столов

M1279. *На плоскости Oxy расположено n непересекающихся квадратов со стороной 1, стороны которых параллельны осям. Известно, что любые два из них можно пересечь прямой, параллельной одной из осей. Докажите, что*

Можно считать, что число квадратов $n>4$, поскольку при $n\leqslant 4$ утверждение очевидно. Рассмотрим наименьший прямоугольник $П$ со сторонами, параллельными осям, содержащий все квадраты. По крайней мере одна его сторона — ее можно считать горизонтальной (параллельной оси Ox) — больше 3. В самом деле, предположим, что вертикальная сторона не больше 3. Тогда каждый из n данных квадратов можно двигать вверх или вниз не задевая остальных (поскольку либо под *можно одной прямой, параллельной оси, пересечь некоторые $n-2$ квадрата.*

ним, либо над ним нет квадрата). Передвинув каждый квадрат вплотную к одной из горизонтальных сторон Π, мы получим, что (при $n>4$) к одной из этих сторон прилегает не менее 3 квадратов, и, значит, длина горизонтальной стороны больше 3.

Пусть M и N — два квадрата из данных n. Будем говорить, что они расположены горизонтально (вертикально) и писать $M-N$ (соответственно, $M|N$), если их пересекает некоторая горизонтальная (вертикальная) прямая; по условию, для любой пары M и N квадратов всегда выполнено ровно одно из этих отношений. Пусть далее X и Y — самый левый и самый правый квадраты (прилежащие к сторонам Π). Разумеется, $X-Y$. Для определенности считаем, что Y лежит не ниже X.

Существует не более одного квадрата Z такого, что $Z|X$. (Он по горизонтали должен отстоять от X не более чем на 1, поэтому $Z-Y$; так что центр Z должен лежать в прямоугольнике, закрашенном на рисунке 1.)

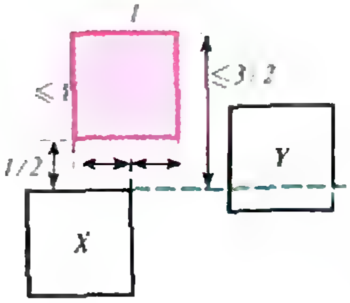


Рис. 1.

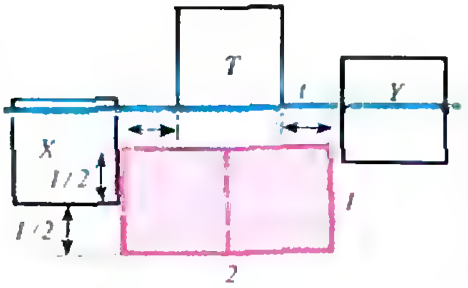


Рис. 2.

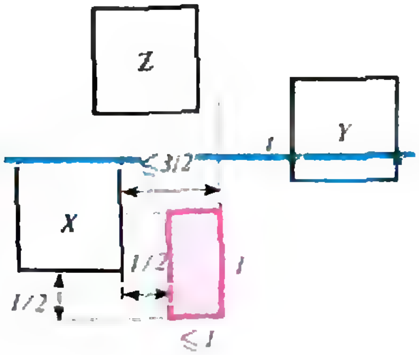


Рис. 3.

Рассмотрим два случая.

1) Такого Z нет, т. е. $Z-X$ для любого Z. Рассмотрим самый верхний квадрат T; пусть t — прямая, идущая по его нижней стороне. Для всех квадратов V, лежащих ниже t, должны быть выполнены условия $V|T$ и $X-T$, поэтому их центры лежат в прямоугольнике с горизонтальной стороной 2, закрашенном на рисунке 2. Ясно, что таких квадратов не более 2 (в левой и в правой половине прямоугольника лежит центр не более чем одного квадрата). Таким образом, прямая t — искомая.

2) Имеется такой (единственный) квадрат Z, что $Z|X$. Он лежит выше X (поскольку $Z-Y$). Пусть теперь прямая t проходит по верхней стороне X. Выше t расположен только Z. Если некоторый квадрат N расположен ниже t, то $Z|N$ (поскольку $Z-N$ неверно) и $X-N$, так что центр N находится в прямоугольнике, закрашенном на рисунке 3. Таких квадратов N не больше чем 1, и прямая t — искомая.

А. Анджанс

M1280*. *Докажите, что в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$ встретится:*

а) не менее 20 одинаковых цифр подряд;

б) последовательность цифр 123456789.

Мы докажем значительно более сильное утверждение: любая последовательность из 46 цифр встретится в периоде десятичной дроби $1/3^{100}$.

Заметим, что $3\cdot 9^9 > 10^9$ (можно проверить это непосредственно, а можно вспомнить более общее неравенство $(1+1/k)^k < 3$), поэтому $3^{100} = 3^{95}\cdot 3^5 = 3^{5\cdot 19}\times\times 243 > 10^{45+2} = 10^{47}$; зная логарифм 3, легко проверить, что эта оценка довольно точная: наша дробь $1/3^{100}$ начинается как раз с 47 нулей (что делает формально ответ на вопрос а) тривиальным; впрочем, сравнительно нетрудно показать, что в периоде по 20 и даже по 45 раз подряд встретятся и все другие цифры, отличные от 0).

Докажем сначала индукцией по n, что длина периода десятичной дроби $1/3^n$ равна 3^{n-2} (при $n \geqslant 2$). Для $n=2$ это верно: $1/9 = 0{,}11111\ldots$ Пусть $1/3^n = A_n/(10^{3^{n-2}}-1)$, где A_n — натуральное число, не делящееся на 3 (это и означает, что длина периода десятичной дроби $1/3^n$ равна 3^{n-2}). Тогда $10^{3^{n-2}}-1 = 3^n A_n$ и $10^{3^{n-1}}-1 = 10^{(3^{n-2})3}-1 = (10^{3^{n-2}}-1)(10^{2\cdot 3^{n-2}} + 10^{3^{n-2}}+1)$. Вторая скобка дает, очевидно, остаток 3 при делении на 9; пусть она равна $9B_n+3$, тогда

$$10^{3^{n-1}}-1 = (10^{3^{n-2}}-1)(9B_n+3) = 3^{n+1}A_n(3B_n+1) = 3^{n+1}A_{n+1},$$

где A_{n+1} не делится на 3, так что $1/3^{n+1}$ имеет период длины 3^{n-1}. (Заметим, что по индукции легко убедиться также, что A_n дает остаток 1 при делении на 3.) В качестве небольшого отступления покажем, пользуясь этим, почему в нашей дроби $1/3^{100}$ встретятся группы одинаковых цифр подряд. Дело в том, что период A_n при достаточно большом n начинается с серии нулей. При переходе к A_{n+2} — его можно получить, деля столбиком группу из девяти A_n на 9 — в начале $(k+1)$-го по счету A_n мы будем получать серию цифр k (где $k = 0, 1, \ldots, 8$). Любопытно, что если n настолько велико, что серия имеет длину более 9, мы можем, разделив серию ...11111... на 9, в явном виде указать место, где в числе A_{n+4} возникают подряд цифры 012345679 (это — период $1/81$), но из-за отсутствия восьмерки этих соображений чуть-чуть не хватает для решения задачи б).

Вернемся теперь к обещанному общему утверждению. Положим $M = 3^{98}$ и будем мысленно делить столбиком 1 на $9M = 3^{100}$. В процессе деления мы должны получить периодическую десятичную дробь с периодом длины M, так что всего нам встретится M различных остатков — до тех пор, пока очередной остаток вновь не окажется равным 1. Остатки — натуральные числа, меньшие $9M$, причем каждый из них дает при делении на 9 остаток 1, т. е. имеет вид $9q+1$ (q — целое); первый остаток 1, а каждый следующий получается из предыдущего умножением на $10 = 9+1$ — приписыванием нуля — и, быть может, вычитанием числа, кратного $9M$; все эти процедуры не меняют число «по модулю 9». Но количество таких чисел

($1, 10, 19, \ldots, 9q+1, \ldots, 9M-8$) как раз равно M, поэтому все они встретятся в качестве остатков.

Остальное просто. Пусть $b=0{,}b_1b_2\ldots b_{46}$ — любая 46-значная десятичная дробь, $b^*=b+10^{-46}$. Разность между числами $9Mb^*$ и $9Mb$ больше 10, поскольку $9M>10^{47}$. Значит, между ними найдется число a вида $9q+1$. И в процессе деления на $9M$, начиная с этого остатка $a=9q+1$, будут получены 46 нужных цифр $b_1b_2\ldots b_{46}$: ведь $a/9M$ заключено между b и b^*.

Г. Рыбников

Ф1288. *Посредине большой круглой комнаты диаметром 20 м с высотой потолка 3,2 м стоит большой сейф в виде куба с ребром 3 м. При помощи игрушечной катапульты, расположенной на полу, мы хотим забросить камешек на середину «крыши» сейфа так, чтобы камешек не коснулся потолка. Какая минимальная скорость для этого необходима? При какой высоте потолка в комнате это вообще возможно?*

Удобнее рассмотреть обратную ситуацию — бросать камешек из точки, в которую мы хотим попасть, и смотреть, чтобы он не коснулся потолка и попал на пол (а не в стену). Бросать, конечно, нужно параллельно ребру куба, а не вдоль диагонали.

Рассмотрим траекторию, которая касается ребра куба и почти задевает потолок, т. е. верхняя ее точка находится как раз посредине. Для этой траектории можно вычислить проекции скорости камешка в момент броска:

$$v_{\text{в}}=\sqrt{2g(H-a)}\approx 2\ \text{м/с},\quad v_{\text{г}}=\frac{a}{4}\sqrt{\frac{g}{2(H-a)}}\approx 1{,}87\ \text{м/с},$$

где $H=3{,}2$ м, $a=3$ м.

Теперь легко находится минимальная скорость камешка при падении на пол:

$$v_{\min}^2=v_{\text{г}}^2+v_{\text{в}}^2+2ga=\frac{ga^2}{32(H-a)}+2gH,\ v_{\min}\approx 8{,}2\ \text{м/с}.$$

Если уменьшить высоту потолка, то скорость эта увеличивается и при некоторой высоте камешек попадет в край пола. Это произойдет при высоте потолка

$$H^*=a+\frac{a}{(2d/a)^2-1}\approx a+\frac{a}{151{,}1}\approx 3\ \text{м}+2{,}0\ \text{см}.$$

З. Рафаилов

Ф1289. *В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M при температуре $t_0=0$ °С и прочно прикрепили его ко дну. Затем залили этот лед водой такой же массы M. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня H=20 см. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия уровень ее опустился на b=*

Уменьшение общего объема, занимаемого водой и льдом, связано с тем, что при установлении теплового равновесия часть льда тает, а образовавшаяся вода занимает меньший объем. Из анализа числовых данных видно, что растаял не весь лед — при таянии всего льда уровень воды опустился бы на $b^*=H(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})/(\rho_{\text{в}}+\rho_{\text{л}})\approx 0{,}87$ см. Следовательно, установившаяся температура системы $t_{\text{кон}}=0$ °С.

Обозначим массу растаявшего льда через m и запишем уравнение теплового баланса:

$$cM(t_{\text{в}}-t_{\text{кон}})=\lambda m.$$

Отсюда получаем

$$t_{\text{в}}=\lambda m/(cM).$$

$=0,4$ см. Плотности воды и льда равны соответственно $\varrho_{\text{в}}=1000$ кг/м^3 и $\varrho_{\text{л}}=920$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

Запишем выражения для изменения объема системы «вода — лед» и для ее начального объема (S — площадь сосуда):

$$\frac{m}{\rho_{\text{л}}}-\frac{m}{\rho_{\text{в}}}=bS, \qquad \frac{M}{\rho_{\text{л}}}+\frac{M}{\rho_{\text{в}}}=HS,$$

откуда

$$\frac{m}{M}=\frac{b}{H}\,\frac{\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}+\rho_{\text{л}}}.$$

Окончательно получаем

$$t_{\text{в}}=\frac{\lambda b}{cH}\,\frac{\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}+\rho_{\text{л}}}\approx 37{,}7\ ^\circ\text{C}.$$

М. Гаврилов

Ф1290. *Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 1). Проводящая перемычка длиной L с конденсатором C_3 касается шин. Перпендикулярно плоскости шин направлено однородное магнитное поле индукцией B. Перемычка движется с постоянной скоростью v. Найдите заряд на конденсаторе C_3.*

В движущемся проводнике возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=BLv$, полярность которой легко определить с помощью правила Ленца. Это приводит к перераспределению зарядов на конденсаторах.

Воспользуемся эквивалентной схемой, изображенной на рисунке 2 (знаки зарядов выберем произвольно), и получим систему уравнений

$$\begin{cases} U_{AB}=\dfrac{q_1}{C_1}=\dfrac{q_2}{C_2}=\mathcal{E}-\dfrac{q_3}{C_3}, \\ q_1+q_2-q_3=0. \end{cases}$$

Решая систему относительно искомого заряда q_3, найдем

$$q_3=\frac{\mathcal{E}}{\dfrac{1}{C_1+C_2}+\dfrac{1}{C_3}}=\frac{BLv}{\dfrac{1}{C_1+C_2}+\dfrac{1}{C_3}}.$$

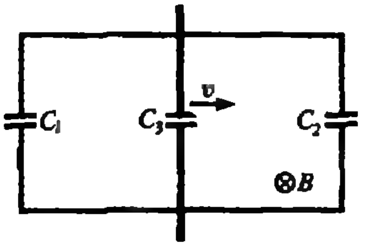


Рис. 1.

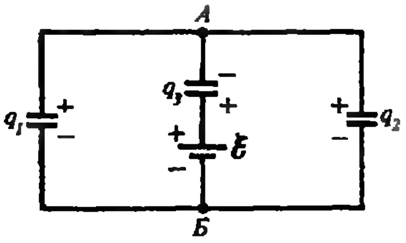


Рис. 2.

Ф1291. *Схема из двух одинаковых резисторов и конденсатора подключена к сети переменного напряжения 36 В, 50 Гц (рис. 1 на с. 28).*

Показания первого амперметра 0,3 А, второго — 0,2 А. Считая приборы

Так как амперметры идеальные, напряжение на каждом резисторе и на конденсаторе одно и то же, причем равное напряжению сети U. Нарисуем векторную диаграмму токов и напряжений (рис. 2 на с. 28), из которой получим

$$I_2^2=I_R^2+I_C^2,$$

$$I_1^2=(2I_R)^2+I_C^2,$$

идеальными, найдите сопротивления резисторов и емкость конденсатора.

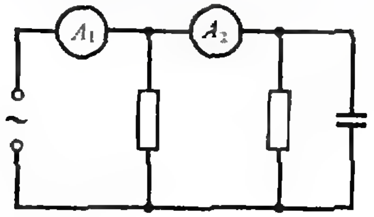


Рис. 1.

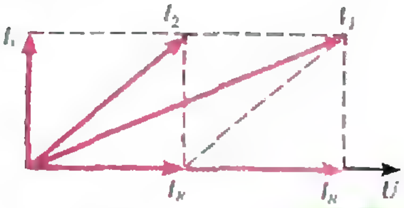


Рис. 2.

Ф1292. *На расстоянии 20 см от точечного источника света помещена собирающая линза диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см, а на расстоянии 50 см от источника — собирающая линза диаметром 10 см с фокусным расстоянием 20 см. Главные оптические оси линз совпадают, источник находится на оси. На каком расстоянии за большой линзой нужно поместить экран, чтобы световое пятно на нем имело минимальный внешний диаметр? Найдите диаметр этого пятна. Изменится ли освещенность пятна, если убрать маленькую линзу?*

или

$$I_1^2-I_2^2=3I_R^2 .$$

Поскольку $I_R=U/R$, найдем искомое сопротивление каждого резистора:

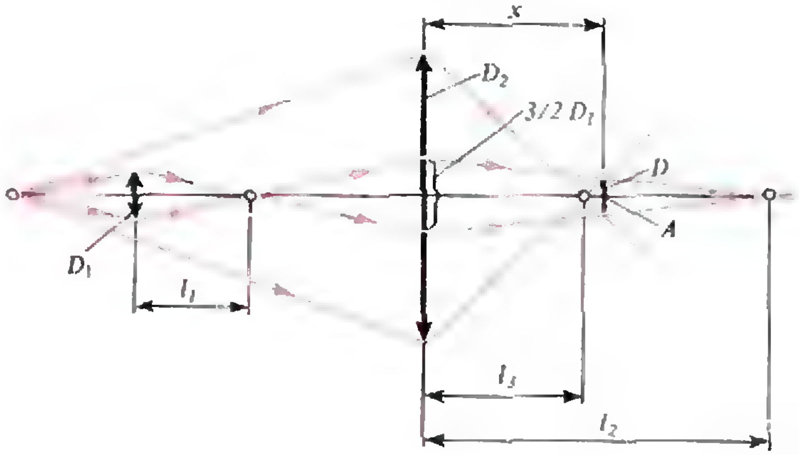
$$R=\sqrt{\frac{3U^2}{I_2^2-I_1^2}}\approx 279 \text{ Ом}.$$

Теперь из равенства $I_2^2=I_R^2+I_C^2$, учитывая, что $I_C=2\pi\nu CU$, найдем емкость конденсатора:

$$C=\frac{1}{2\pi\nu U}\sqrt{\frac{5I_2^2-I_1^2}{3}}\approx 16{,}9 \text{ мкФ}.$$

А. Зильберман

Изображение источника после преломления лучей в маленькой линзе (см. рисунок) оказывается между линзами на расстоянии $l_1=20$ см от первой линзы. Изображение после преломления этих же лучей в большой линзе окажется на расстоянии $l_2=60$ см справа от второй линзы.



Из рисунка видно, что маленькая линза не полностью заслоняет большую, значит, часть лучей от источника сразу преломляется в большой линзе. Изображение после такого однократного преломления получается справа от большой линзы на расстоянии $l_3=28$ см.

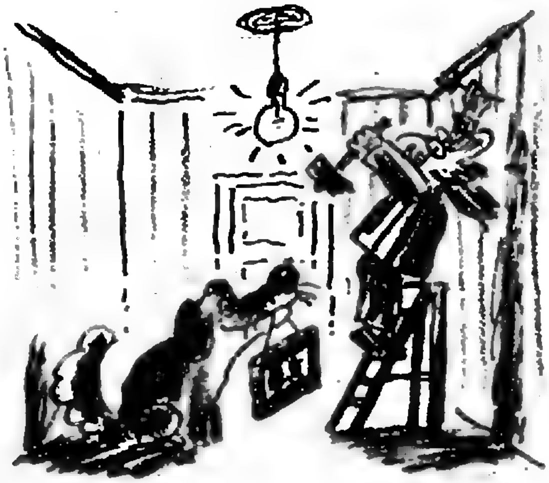
Очевидно, что минимальный внешний радиус пятна получается при положении экрана в точке A. Расстояние x до этой точки и диаметр D пятна легко найти из равенств $D/D_2=(x-l_3)/l_3$ и $D/(^3/_2D_1)=(l_2-x)/l_2$:

$$x\approx 30 \text{ см}, \quad D\approx 0{,}7 \text{ см}.$$

Поскольку большая линза не засвечивает центральную часть пятна, в центре освещенность меньше, а на краях больше. Если убрать маленькую линзу, полный поток, попадающий на экран, не изменится, значит, освещенность центральной части пятна при этом увеличится, а освещенность краев уменьшится.

А. Сашин

Задачи



1. Иван Степанович долгое время прожил в однокомнатной квартире. Ему почему-то нравилось, что его комната была квадратной и длины ее сторон выражались целым числом метров. Недавно он обменял ее на двухкомнатную квартиру той же площади. Одна из комнат имеет площадь 7 м^2, а другая — вновь квадратная со сторонами, выражающимися целым числом метров. Какая площадь у квартиры Ивана Степановича?

2. Решите уравнение (см. рисунок) в целых числах.

$$Д - В - А = Д : В : А = 2$$

3. — С днем рождения, бабушка!

— Спасибо, Андрей. И тебя с днем рождения!

— Сколько лет тебе исполнилось?

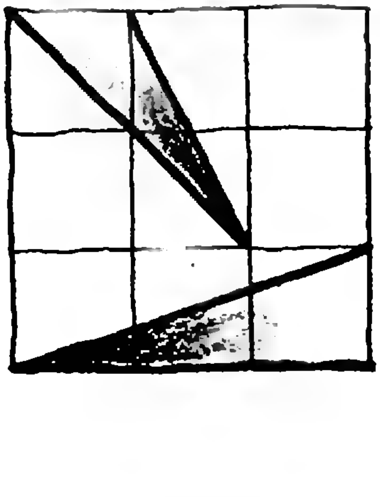
— А вот посчитай. Если две последние цифры нынешнего года поменять местами, то получится год моего рождения.

— Значит, ты в восемь раз старше меня. А дедушка еще старше?

— Конечно. Он родился до революции, а я — после.

В каком году происходил этот разговор?

4. Дима сидел за столом. Перед ним на стене висело зеркало, а на противоположной стене — электронные часы. Взглянув в зеркало, он увидел, что на отражении минутного табло указан его возраст. Взглянув на это табло через минуту, он обнаружил, что число увеличилось на 40. Сколько лет могло быть Диме?



5. Докажите, что углы, отмеченные на рисунке, равны.

Эти задачи нам предложили В. Вьюн, Ю. Аленков, М. Роллова, ученик 11 класса из г. Чебоксары Андрей Шаринёнок и В. Произволов.

ФИЗИКА, НЕЗНАЙКА И ДРУГИЕ

А. КОРЖУЕВ

Вы, наверное, не раз встречались с описаниями различных физических явлений в художественных произведениях. В этой статье мы хотим предложить вам несколько таких описаний из детских книг и попросить вас разобраться, о каких физических явлениях идет речь. Чтобы решить предложенные «задачи», придется, очевидно, взглянуть на описываемые явления природы с точки зрения того, что вы уже знаете из физики.

1. Вот, например, такая «задача» из повести М. Пришвина «Золотой луч»:

«...Тишина в лесу была такая, что за день ни одна струйка воздуха не переместилась. Поняв сразу, что по следам найти Антипыча невозможно, сделав круг с высоко поднятой головой, Травка попала на табачную струю воздуха и по табаку мало-помалу, то теряя воздушный след, то опять встречаясь с ним, добралась-таки до хозяина».

О каком физическом явлении идет речь?

2. А вот «задача» из книги А. Серафимовича «Лесная жизнь»:

«Торопливо и обрадованно мальчик послюнил палец и, подняв, стал медленно поворачивать. С той стороны, откуда неумолимо тянул ветерок, в пальце почувствовалось ощущение холода».

Объясните, почему.

3. А теперь приведем отрывок из хорошо известной повести В. Катаева «Белеет парус одинокий»:

«Сначала можно подумать, что звезды неподвижны. Но нет. Присмотришься — и видно, что весь небесный свод медленно поворачивается. Одни звезды опускаются за дачи. Другие, новые, выходят из моря».

Почему так «странно» ведут себя звезды?

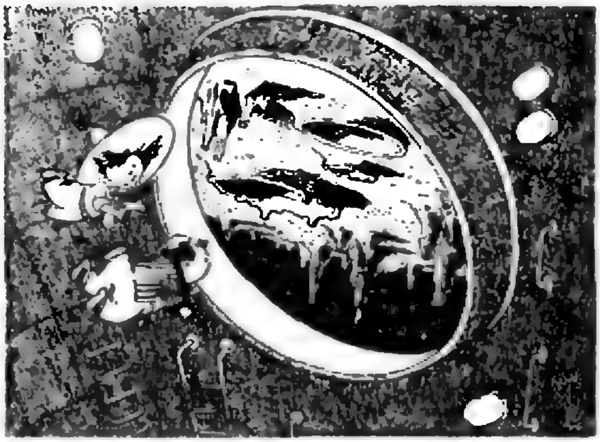
4. Еще один отрывок из той же повести:

«...Гаврик встал, сладко растянул руки, закатал штаны и, зевая, вошел по щиколотку в воду. С ума он сошел, что ли? Ноги и так озябли до синевы, а тут еще лезть в море, один вид которого вызывает озноб.

Однако мальчик хорошо знал, что он делает. Вода только на вид казалась холодной. На самом деле она была очень теплой, гораздо теплее воздуха. Мальчик просто-напросто грел в ней ноги».

Чем обусловлены такие интересные свойства воды? Почему она оказалась теплее воздуха? Как вы думаете, в какое время — вечером или утром — происходило то, о чем написано в отрывке?

5. В этой же повести есть следующие строки:



«Ладони у Гаврика приятно горели. Весло, опущенное в прозрачную зеленую воду, казалось сломанным».

Попытайтесь объяснить и это явление.

6. А вот полет на Луну, описанный детским писателем Н. Носовым в книге «Незнайка на Луне»:

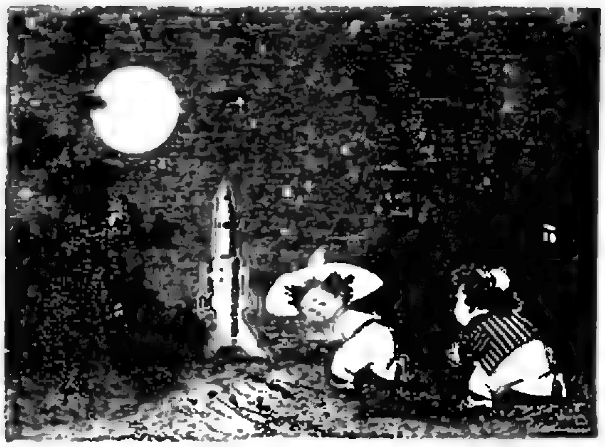
«В иллюминаторах по-прежнему чернело небо со звездами, с ярко сверкающим диском Солнца и серебристой, святящейся Луной сверху. Солнце было такого же размера, каким оно обычно видно с Земли, но Луна сделалась уже вдвое больше...»

Почему же так получилось, ведь на Земле видимые размеры Луны и Солнца почти одинаковы?

7. Интересно описание еще одного явления в этой же книге:

«Казалось, был день, но в то же время была и ночь. Так на Земле никогда не бывает. Когда на Земле видно Солнце, то не видно звезд, и, наоборот, когда есть звезды, нет Солнца».

Подумайте и попытайтесь узнать, что это — фантастика и вымысел или так может быть на самом деле?



8. И третий отрывок из книги Н. Носова «Незнайка на Луне». В нем описываются загадочные явления, происходящие в условиях невесомости:

«Шпунтик поскорей заткнул носик чайника пальцем, но вода тут же начала вылезать пузырем из-под крышки. Этот пузырь становился все больше, наконец, оторвался от крышки и, трясясь, словно был сделан из жидкого студня, поплыл по воздуху...

...— Тут у нас чудо какое-то! — растерянно сказал Шпунтик.— Пузырь лезет из чайника.

— Пузырь лезет — это еще не чудо,— ответил Знайка.

Он приблизился к чайнику и строго посмотрел на пузырь, выдувавшийся из носика чайника...

...— Никакого чуда здесь нет, а есть вполне объяснимое научное явление. Все вы знаете, что вода нагревается благодаря перемешиванию. Нижние слои воды в чайнике, нагреваясь на огне или на электроплитке, становятся легче и всплывают вверх, а на их место отпускается холодная вода из верхних слоев. В чайнике получается, как бы это сказать, круговорот воды. Но такой круговорот происходит при наличии у воды веса. Если веса не будет — вот как сейчас...»

Предлагаем вам подумать, что же произойдет при отсутствии веса,и продолжить объяснение Знайки. И предлагаем подумать над тем, будет ли гореть огонь в условиях невесомости.

А если вы захотите себя проверить — загляните в конец номера (на с. 73).

„Квант" для младших школьников

Конкурс «Математика 6—8»

В пятом номере мы завершили наш первый конкурс по решению математических задач для школьников 6—8 классов. Его результаты будут опубликованы через месяц. А сейчас мы открываем новый конкурс «Математика 6—8», который продлится до апреля будущего года. Вам будут предложены 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала.

Решения задач этого номера высылайте до 1 декабря 1991 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

ЗАДАЧИ

1. У лифта на 1-м этаже 18-этажного дома собрались 17 школьников, которым нужно подняться вверх, причем на разные этажи. Лифтер же согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются вниз на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком вверх на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

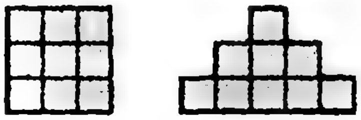
И. Акулич

2. Восемь команд провели по четыре игры каждая в футбольном турнире. На рисунке изображена частично заполненная таблица результатов этих игр. Закончите ее заполнение по результатам сыгранных матчей.

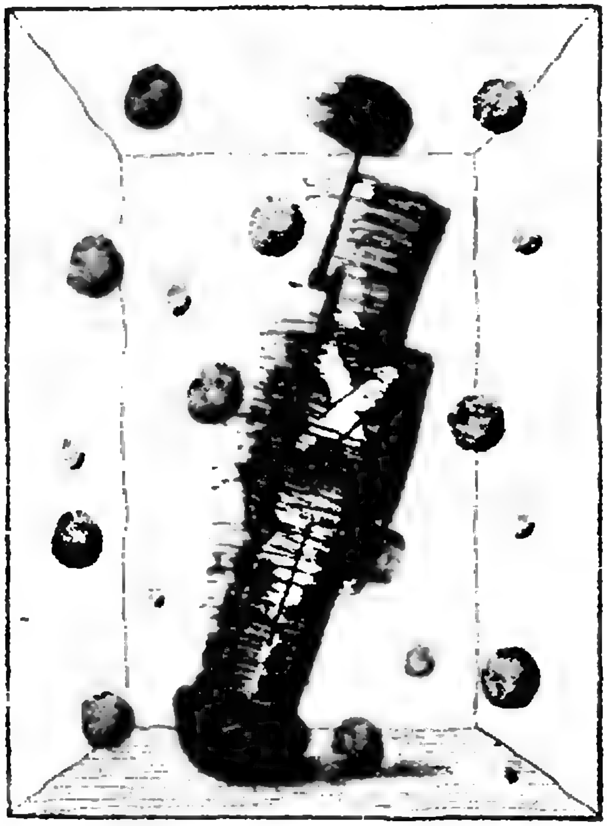
В. Перетятько

	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1	▨		0:0									3 :
2		▨										4 :
3			▨			1:1			0			: 1
4				▨								4 :
5					▨				1	1	2	2 : 2
6						▨			0	1	3	1 : 4
7							▨				3	0 : 3
8								▨	0	0	4	: 5

3. Из девяти одинаковых квадратных карточек сначала сложили квадрат, а потом пирамиду. Оказалось, что при этом всякие две карточки, которые имели две общие вершины в первом расположении, сохранили одну из них общей (ту же самую) и во втором расположении. Покажите, как это было сделано.



В. Произволов



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Идеальный газ — универсальная физическая модель» предназначена десятиклассникам, заметка «Гармонические колебания — обычные и удивительные» — одиннадцатиклассникам. Впрочем, последняя заметка будет полезной и интересной и девятиклассникам, но — в конце учебного года.

Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Идеальный газ — универсальная физическая модель

За огромным многообразием явлений, которые изучает физика, часто довольно трудно усмотреть какие-то общие подходы и универсальные модели, с поразительной устойчивостью возникающие в самых разных областях знания. А вместе с утратой универсальности пропадает ощущение красоты и единства физической картины мира. Все затягивается серой пеленой скуки и происходящего от нее непонимания.

Может быть, одним из самых типичных примеров сказанного является идеальный газ, при упоминании о котором представляют себе,как правило, просто сильно разреженный газ. А между тем это не совсем так. Идеальный газ — это универсальная физическая модель, применимая для описания самых разнообразных природных объектов. Чтобы увидеть эту универсальность, попытаемся основные результаты теории обычного идеального газа перевести на более общий язык.

Главным признаком идеального газа является отсутствие взаимодействия между молекулами. Или, лучше сказать, малость энергии взаимодействия молекулы со своим окружением по сравнению с ее собственной энергией.

Из чего же складывается собственная энергия молекулы? Прежде всего это кинетическая энергия ее поступательного движения. Для того чтобы задать кинетическую энергию любого тела, и в частности молекулы, достаточно задать три компоненты его скорости (или импульса). Три — потому что пространство наше трехмерное. Можно сказать иначе — в трехмерном пространстве молекула всегда обладает тремя степенями свободы, связанными с движением ее центра масс. Эти степени свободы называются поступательными. Как мы увидим чуть ниже, именно на языке степеней свободы наиболее явно проявляется универсальность модели идеального газа.

Кроме поступательного движения, молекула, если она имеет какую-то пространственную структуру, может принимать участие во вращении вокруг любой из трех координатных осей. Это означает, что, наряду с тремя поступательными, у молекулы есть еще и три вращательные степени свободы. (Исключение составляют молекулы, атомы которых вытянуты в жесткую цепочку: они могут вращаться лишь вокруг двух осей, перпендикулярных этой цепочке. Поэтому такие молекулы имеют лишь две вращательные степени свободы.)

Но и это еще не все. Реальная молекула отнюдь не представляет собой абсолютно жесткое, монолитное образование: атомы, составляющие молекулу, могут колебаться друг относительно друга. А это значит, что, кроме поступательных и вращательных, есть еще и колебательные степени свободы. Перебирая таким образом все движения, в которых может участвовать молекула или составляющие ее элементы, мы можем точно указать, сколько у нее степеней свободы.

Зачем это нужно? А затем, что существует чрезвычайно важная и очень общая теорема, которая утверждает, что на каждую степень свободы любой равновесной системы приходится в среднем энергия, равная $1/2kT$, где T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, указывающая, скольким джоулям энергии соответствует один градус температуры (градус — это тоже единица измерения энергии, только внесистемная). Так, например, суммарная энергия трех поступательных степеней свободы равна $3/2kT$. Но энергия поступательного движения молекулы — это ее кинетическая энергия. Отсюда и получается, что

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}kT.$$

Иногда говорят, что температура есть мера кинетической энергии молекулы. Точнее было бы сказать, что температура есть мера энергии, приходящейся на одну степень свободы. Таким образом, если мы знаем число степеней свободы одной молекулы (обозначим это число буквой i), что нетрудно найти полную энергию этой молекулы ($W_{мол}$) и, соответственно, внутреннюю энергию всего газа, содержащего N молекул ($W_{газа}$):

$$W_{мол}=\frac{i}{2}kT, \quad W_{газа}=N\frac{i}{2}kT.$$

Приведенные формулы выглядят предельно просто. Но простота эта обманчива! Дело в том, что между поступательными и всеми остальными степенями свободы существует одно чрезвычайно глубокое различие, открытое на заре XX века великим немецким физиком Максом Планком. Суть его сводится к тому, что, в то время как энергия поступательного движения может меняться непрерывно, энергия колебательного и вращательного движения меняется только порциями — квантами.

В применении к молекулам дискретность энергии означает, в частности, что для возбуждения колебаний атомов, составляющих молекулу, или приведения молекулы как целого во вращение необходима некоторая вполне конечная энергия. Существование такой пороговой энергии возбуждения $W_{пор}$ для какой-нибудь степени свободы (колебательной или вращательной) приводит к тому, что на эту степень свободы приходится уже не $1/2kT$, а меньшая энергия. Дело тут вот в чем. Распределение энергии по степеням свободы происходит при соударениях молекул газа. По порядку величины передаваемая при соударениях энергия равна kT (средней кинетической энергии поступательного движения молекул). Если температура газа настолько высока, что $kT \gg W_{пор}$, то наличие квантового порога возбуждения не чувствуется, возбуждение данной степени свободы происходит без помех и на нее приходится обычная доля энергии $1/2\,kT$. В противоположном случае ($kT \ll W_{пор}$) данная степень свободы при соударениях практически никогда не возбуждается и на ее долю приходится очень малая доля обычной энергетической нормы. Иначе говоря, при высокой температуре данная степень свободы должна учитываться наравне с поступательными, а при низкой она «вымораживается». Можно сказать, что число задействованных степеней свободы зависит от температуры.

Выше уже отмечалось, что единственное движение, энергия которого может меняться непрерывно, это поступательное движение. А это означает, что «вымораживания» поступательного движения не происходит никогда. Именно поэтому уравнение Менделеева — Клапейрона $pV=NkT$ остается справедливым при любых темературах, лишь бы газ был настолько разрежен, чтобы взаимодействием его молекул можно было бы пренебречь (давление связано исключительно с поступательным движением молекул). А вот в выражение для энергии газа $W_{\text{газа}}=Ni/2\ kT$ при высоких температурах надо подставлять одно значение i (задействованы все степени свободы), а при низких — другое (часть степеней свободы «заморожены»).

И наконец, прежде чем перейти к другим системам, совершенно не похожим на газ, приведем еще одно соотношение — между давлением газа и его энергией. Сравнивая уравнение Менделеева — Клапейрона ($pV=NkT$) и выражение для энергии поступательного движения ($W_{\text{пост}}=3/2NkT$, здесь число поступательных степеней свободы $i_{\text{пост}}=3$), легко найти

$$pV=\frac{2}{3}\ W_{\text{пост}}.$$

Тот факт, что энергия газа связана исключительно с полным числом его степеней свободы, а давление, в свою очередь, выражается через энергию, т. е. снова через число степеней свободы (только поступальных), наводит на очень важную мысль. А может и необязательно вовсе, чтобы система представляла собой большое число невзаимодействующих молекул? Может быть, все определяется лишь степенями свободы, а уж связаны эти степени свободы с молекулами (и тогда мы имеем идеальный газ) или с чем-то другим — это, так сказать, вопрос второй?

Чтобы пояснить эту мысль, давайте рассмотрим систему, очень далекую по своим внешним признакам от обычного газа. Представьте себе замкнутую полость, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре T. Как и всякое нагретое тело, стенки излучают внутрь полости электромагнитные волны. Полость оказывается как бы заполненной электромагнитным излучением. Идея о том, что находящееся в равновесии со стенками тепловое излучение можно рассматривать как идеальный газ, где различным степеням свободы соответствуют колебания различных частот, возникла сразу же, как начали заниматься этим объектом. Это казалось тем более правдоподобным, что давление, обусловленное излучением, связано с его энергией почти таким же соотношением, как для обычного идеального газа:

$$pV=\frac{1}{3}\ W.$$

Однако первые попытки сосчитать энергию такого «газа» привели к обескураживающим результатам. Дело в том, что в полости могут существовать волны любой, сколь угодно большой частоты. И если каждой такой «степени свободы» выделить энергию $1/2\ kT$, то полная энергия всех волн окажется бесконечно большой. Именно эта парадоксальная ситуация с тепловым излучением в полости (ее назвали «ультрафиолетовой катастрофой») и заставила Планка выдвинуть обсуждавшуюся выше квантовую гипотезу. Он предположил, что энергия колебания с частотой ν может меняться только порциями, равными $h\nu$ (h — постоянная Планка). Это значит, что все колебания с частотами, для которых $h\nu \gg kT$, оказываются «замороженными» и не дают вклада в энергию. Опираясь на свою гипотезу, Планк вывел формулу для распределения энергии электромагнитных колебаний в полости по частотам и получил прекрасное согласие с экспериментальными данными. Сходство между обычным идеальным газом и газом электромагнитных волн оказалось столь велико, что отдельным элементарным волнам с энергией $h\nu$ стали сопоставлять специальные частицы — фотоны.

Совершенно аналогичная ситуация возникает при описании свойств кристалла (казалось бы, совсем уж прямом антиподе идеального газа). Кристалл, так же как и замкнутая полость, оказывается заполнен волнами, только не электромагнитными, а звуковыми. При распространении таких волн согласованные колебания совершают атомы кристалла. Элементарную волну-частицу в случае звука называют фононом. И вновь удается найти внутреннюю энергию кристалла, вычислив число степеней свободы, соответствующих звуковым волнам разных частот. А зная энергию, можно рассчитать и многие другие свойства кристалла.

Вообще сведéние различных явлений к совокупности некоторых волн, каждой из которых сопоставляется совершенно определенное число степеней свободы, чрезвычайно распространено в физике. А это есть не что иное, как сведéние различных систем к идеальному газу. И в этом смысле сама модель идеального газа является одной из очень немнóгих фундаментальных физических моделей, сыгравших и продолжающих играть выдающуюся роль в создании физической картины окружающего нас мира.

Е. Городецкий

Гармонические колебания — обычные и удивительные

Когда и как лучше изучать колебания? Все колебательные процессы — и механические, и электрические — вместе, как это было в школьном курсе раньше? Или механические колебания обсуждать вместе с другими механическими явлениями, а электрические — с электрическими, как это делается сейчас?

Наверное, каждый метод имеет и свои резоны, и свои минусы. Дело в том, что все виды колебаний похожи друг на друга, как близнецы в разных одеждах,— все они описываются совершенно одинаковыми математическими уравнениями. Только там, где в механике присутствует смещение точки, в электричестве должен быть заряд конденсатора, а где скорость точки — сила тока в цепи и т. д. Вот почему, с нашей точки зрения, электрические колебания очень удобно изучать по аналогии, сопоставляя электрическим понятиям механические.

Итак, приступая к изучению электрических колебаний, полезно вспомнить о колебаниях механических. Не претендуя на полное повторение (проще взять в руки учебник), обсудим несколько вопросов, которые часто возникают у дотошных учеников.

Вы, наверное, обратили внимание, что речь шла исключительно о гармонических колебаниях, т. е. колебаниях, происходящих по закону косинуса (или синуса)

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где x — смещение точки, A — амплитуда, ω — циклическая частота, φ_0 — начальная фаза колебаний. В чем же дело? Может быть, в том, что косинус — самая простая по виду периодическая функция? Нет, главная причина в другом. Оказывается, нет необходимости специально придумывать механическую систему, которая совершала бы гармонические колебания. Такие колебания характерны почти для всех систем. (Почему «почти» — об этом чуть позже.) Надо только установить любую систему в состояние устойчивого равновесия, а потом слегка «подтолкнуть».

Вопрос первый: что такое устойчивое равновесие и у всех ли систем оно есть? Понятно, что раз речь идет о равновесии, то результирующая сила в этом состоянии обязательно должна быть равна нулю. Устойчивость же означает, что при отклонении от равновесия возникает возвращающая сила, т. е. сила, направленная назад, в сторону равновесия. Но еще лучше сформулировать то же самое на языке энергии. Дело в том, что энергия — понятие для физики более общее и важное, чем сила, и сказанное на этом языке в одной области легко переносится в другие. Так вот, устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии. Понятно, что такой минимум есть у любой системы, где есть потенциальная энергия. В противном случае, уменьшая до бесконечности потенциальную энергию, можно заставить систему совершить сколь угодно большую работу, т. е. получить вечный двигатель.

Простейшей системой, совершающей гармонические колебания, является грузик на пружинке, подчиняющейся закону Гука $F_{\text{упр}} = -kx$. Написав второй закон Ньютона для этого груза, получим уравнение

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0, \qquad (2)$$

где x'' — вторая производная смещения по времени, т. е. ускорение. А решением такого уравнения как раз является функция (1), т. е. гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ или с периодом $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$. Как в этом убедиться? Да просто подставить эту функцию в уравнение (2). И тут у школьников (особенно въедливых) часто возникает следующий вопрос.

Вопрос второй: откуда мы знаем, что у уравнения (2) нет какого-нибудь другого решения? Другими словами, нельзя ли не угадывать решение, а получить его прямо из уравнения? Конечно же, это можно сделать, но только если вы уже умеете интегрировать и решать простые уравнения с производными (их называют дифференциальными уравнениями). Однако в данном случае в этом нет никакой необходимости. Достаточно использовать следующее утверждение: если известны силы, действующие на точку, и ее положение и скорость в начальный момент (начальные условия), то движение точки полностью определено. Иными словами, существует только одно решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям. А теперь — несколько подробнее.

Зададим начальную координату x_0 и начальную скорость v_0 и покажем, что существует решение (1) уравнения (2), удовлетворяющее этим условиям. Иначе говоря, найдем параметры A и φ_0, которые это обеспечивают. Подставляя $t = 0$ в равенство (1) и в выражение для скорости $v = x' = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$, получаем систему уравнений

$$x_0 = A\cos\varphi_0,$$
$$v_0 = -\omega A \sin\varphi_0.$$

Решая ее, находим

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -v_0/(\omega x_0), \quad A^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega^2.$$

Функция (1) с такими A и φ_0 и $\omega = \sqrt{k/m}$ удовлетворяет как уравнению (2), так и начальным условиям. Значит, она описывает единственное решение.

Ну хорошо, с грузиком на пружинке разобрались. Но ведь не все системы описываются силой $F = -kx$ и потенциальной энергией $E_p = kx^2/2$. А было сказано, что любая система (почти!) будет совершать гармонические колебания. Нет, не совсем так. Мы сказали, что тело надо *слегка* «подтолкнуть». Не любые, а *малые* колебания около положения равновесия должны быть гармоническими. Это легко понять, посмотрев на график произвольной зависимости силы от смещения (рис. 1). При $x = 0$ $F = 0$, а достаточно малый участок кривой около этой точки можно приближенно считать прямолинейным (чем меньше участок, тем меньше мы ошибемся). Значит, в малой окрестности точки $x = 0$ силу можно записать в виде $F = -k_{\text{эфф}}x$, а потенциальную энергию, соответственно, в виде $E_p = k_{\text{эфф}}x^2/2$, где «эффективная жесткость» $k_{\text{эфф}}$ есть

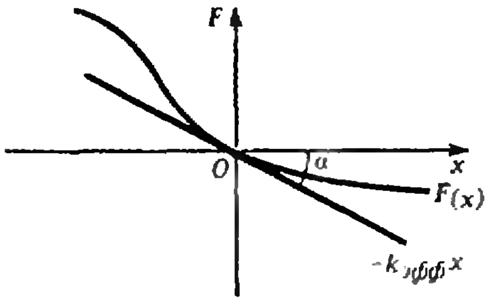


Рис. 1.

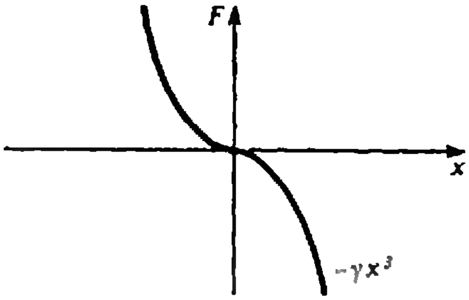


Рис. 2.

не что иное, как тангенс угла α наклона графика к оси X при $x=0$. При любой зависимости $F=F(x)$ малые колебания точки неотличимы от колебаний на пружинке с жесткостью $k_{эфф}$, т. е. происходят по гармоническому закону с периодом $T=2\pi\sqrt{m/k_{эфф}}$. (Проверьте сами, например, что для математического маятника $k_{эфф}=mg/l$.)

Внимательный и «настырный» школьник немедленно сформулирует еще один вопрос.

Вопрос третий: а что если потенциальная энергия имеет иной вид, например $E_p=\gamma x^4/4$? В этом случае сила $F=-\gamma x^3$*), и в точке $x=0$ угол α наклона графика $F=F(x)$ равен нулю (рис. 2). Какими будут колебания такой системы? Гармоническими или нет? Оказывается, в этом случае колебания, даже малые, будут происходить совсем по другому закону. (Имея в виду именно такие случаи, мы и говорили: «почти всегда» гармонические.)

Какие же системы удовлетворяют заданной зависимости потенциальной энергии от смещения? Приведем два примера. Первый — можно тщательно выдолбить ямку, сечение которой имеет вид $y=\beta x^4/4$. Тогда потенциальная энергия для движения в такой ямке $E_p=mgy=(mg\beta)x^4/4$. Другой пример: если к середине *недеформированной* пружины с закрепленными концами прикрепить

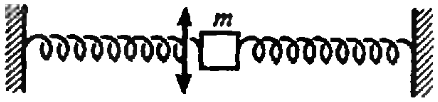


Рис. 3.

грузик (рис. 3), то при малых поперечных колебаниях сила будет пропорциональна третьей, а энергия — четвертой степени смещения. Заметим, что если пружина растянута, то колебания будут гармоническими!

Что же мы увидим в этих случаях? Разве можно на глаз отличить гармонические колебания от негармонических? Оказывается, есть очень важное отличие гармонических колебаний от любых других: их частота зависит от параметров системы, но не зависит от амплитуды колебаний. Мы настолько к этому привыкли, что совершенно не удивляемся, когда нас просят узнать период малых колебаний, ничего не говоря об их амплитуде. А ведь это — совсем не очевидное свойство, и выполняется оно только для силы $F=-kx$. Поясним это, воспользовавшись соображениями размерностей. Размерность жесткости k не содержит длины: $[k]=\text{Н/м}=\text{кг/с}^2$, поэтому период колебаний, который может зависеть только от k, ω и A, должен выражаться через комбинацию $\sqrt{m/k}$, имеющую размерность времени, и не может зависеть от амплитуды A. Совсем иное дело в случае, когда $F=-\gamma x^3$. Размерность γ содержит длину: $[\gamma]=\text{кг}/(\text{м}^2\cdot\text{с}^2)$, и чтобы получить размерность времени для периода колебаний, надо составить комбинацию $(m/\gamma A^2)^{1/2}=(1/A)\sqrt{m/\gamma}$. Именно так (с точностью до безразмерного множителя) должен выглядеть ответ для периода колебаний — чем больше амплитуда, тем меньше период. Если, например, грузик на недеформированной пружине отклонить в сторону один раз на 1 см, а другой раз на 2 мм, то во втором случае период будет в 5 раз больше, что, конечно, легко заметить невооруженным глазом.

А. Черноуцан

---

*) По определению, работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком. Для малых Δx имеем

$$F\Delta x=-\Delta E_p,\ \text{т. е. } F=-\Delta E_p/\Delta x=E_p'(x).$$

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. При горизонтальном ветре, имеющем скорость $v_1=10$ м/с, капли дождя падают под углом $\alpha_1=30°$ к вертикали. При какой горизонтальной скорости ветра капли будут падать под углом $\alpha_2=60°$ к вертикали?

2. За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь $l_5=5$ м и останавливается. Какой путь проходит тело за вторую секунду этого движения?

3. Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями, равными $v_{01}=10$ м/с и $v_{02}=20$ м/с, и с постоянными ускорениями, равными $a_1=2$ м/с^2 и $a_2=1$ м/с^2 и направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии между телами они встретятся в процессе движения.

4. Футбольный мяч посылается с начальной скоростью, равной $v_0=20$ м/с, под углом $\alpha=15°$ к горизонту. На расстоянии $L=15$ м от точки удара находится вертикальная стена, о которую мяч упруго ударяется. Найдите расстояние от точки удара по мячу до места его приземления. Сопротивлением воздуха и размерами мяча пренебречь.

5. Через блок радиусом $R=0{,}2$ м переброшена нерастяжимая нить с одинаковыми грузиками на концах. Ось блока поднимается со скоростью $v_1=1$ м/с, а один из грузиков опускается со скоростью $v_2=2$ м/с (относительно земли). Чему равна угловая скорость вращения блока, если нить движется по нему без проскальзывания?

10 класс

6. Газ находится в цилиндре под поршнем и занимает объем $V_1=240$ см^3 при давлении $p_1=100$ кПа. Какую силу надо приложить перпендикулярно поршню, чтобы сдвинуть его на $\Delta h=2$ см, уменьшив при этом объем газа? Площадь поршня $S=24$ см^2. Температура газа постоянна.

7. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре $t=7$ °С. Длина каждой части $L=30$ см. Когда одну часть сосуда нагрели, поршень сместился на $l=2$ см. До какой температуры нагрели газ?

8. По газопроводу течет углекислый газ при давлении $p=0{,}83$ МПа и температуре $t=27$ °С. Какова скорость течения газа в трубе, если за $\tau=2{,}5$ мин через поперечное сечение трубы площадью $S=5$ см^2 протекает $m=2{,}2$ кг газа? Молярная масса углекислого газа $\mathrm{M}=44$ кг/кмоль.

9. В закрытом сосуде находится водород. Как изменится давление в сосуде, если 50 % молекул водорода продиссоциируют на атомы при неизменной температуре?

10. Три одинаковых сосуда, соединенных трубками, заполнены газообразным гелием при температуре $T=40$ К. Затем один из сосудов нагрели до $T_1=100$ К, другой до $T_2=400$ К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз увеличилось давление в системе? Объемом соединительных трубок можно пренебречь.

11 класс

11. Шарик, подвешенный на пружине, отвели из положения равновесия вниз на $x_0=3$ см и сообщили ему начальную скорость, равную $v_0=1$ м/с. После этого шарик стал совершать вертикальные гармонические колебания с циклической частотой $\omega=25$ с$^{-1}$. Найдите амплитуду этих колебаний.

12. Шарик массой $m=0{,}1$ кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости. Во сколько раз изменится частота колебаний, если шарику сообщить заряд $q=200$ мкКл и поместить в однородное электрическое поле с напряженностью $E=40$ кВ/м, направленной вертикально вниз?

13. Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз увеличится частота собственных колебаний контура, если последовательно с первым соединить второй конденсатор, емкость которого в 3 раза меньше емкости первого?

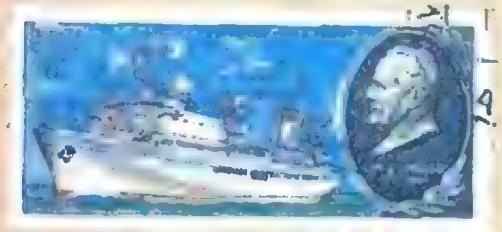
14. Заряженный конденсатор емкостью $C=0{,}2$ мкФ подключили к катушке индуктивностью $L=8$ мГн. Через какое время от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

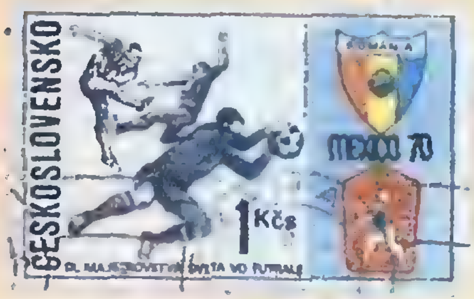
15. Два когерентных источника звука колеблются в одинаковых фазах. В точке, отстоящей от первого источника на $L_1=2{,}1$ м, а от второго на $L_2=2{,}27$ м, звук не слышен. Считая скорость звука равной $v=340$ м/с, найдите минимальную частоту колебаний, при которой это возможно.

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Сфера и шар

Сферу обычно определяют как совокупность точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром сферы. На палубе судна «Академик Королев» антенна локатора космической связи закрыта сферической оболочкой, так как точки антенны, наиболее удаленные от центра вращения, движутся при работе по некоторой сфере.

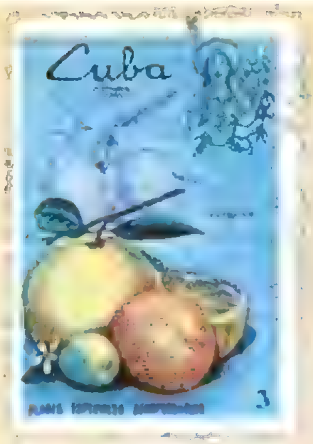




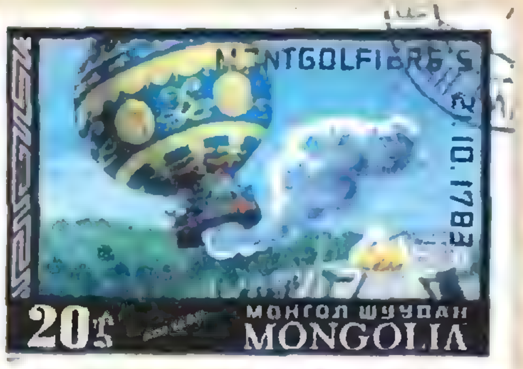
Другая отличительная особенность сферы — одинаковая «кривизна» этой поверхности во всех ее точках и по всем направлениям. Именно поэтому круглые мячи для игры в футбол, волейбол, теннис с равным успехом могут катиться в любую сторону, и траектория их полета зависит лишь от направления и силы удара. А вот мяч для регби — продолговатой формы: его не столько катают, сколько носят подмышкой, и не столько отбивают, сколько отнимают.

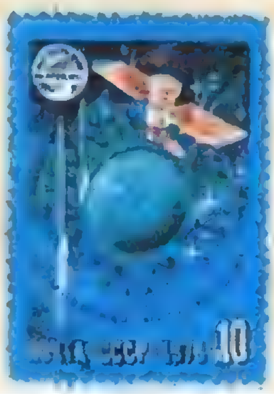
Из физики известно, что трение качения существенно меньше трения скольжения. Постоянная кривизна поверхности шариков, которые перекатываются между двумя кольцами в шарикоподшипнике, позволяет уменьшить износ вращающихся частей машин — локомотива, станка, вашего велосипеда.

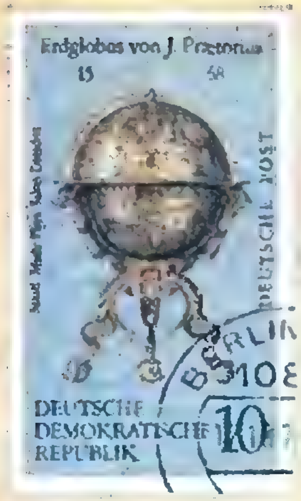
Еще одна причина интереса к шару — его экстремальное свойство: из всех тел данного объема именно у шара минимальная площадь поверхности. Потому-то и появились воздушные шары, а не воздушные кубы или тетраэдры — у них наименьший вес оболочки. Может быть, этим объясняется также сферическая форма многих плодов — ведь чем меньше площадь поверхности, тем меньше испарение влаги. Неспроста имеют шарообразную форму мыльные пузыри и водяные капли: поверхностное натяжение стремится уменьшить площадь мыльной и водяной пленки. А приходило ли вам в голову, что экстремальное свойство шара вместе с явлением поверхностного натяжения ответственно за форму планет? Предполагают, что все планеты вначале были жидкими (а некоторые из них, например Юпитер, жидкие и по сю пору).



Шаровидность нашей Земли космонавты могут наблюдать воочию, мы же поглядим на глобус. Геометрия (измерение земли) должна бы учитывать форму земной поверхности! Подобные размышления у глобуса привели в свое время к созданию сферической геометрии — родственницы привычной для нас планиметрии. Роль прямых на сфере играют дуги «больших кругов» — окружностей, которые получаются при сечении сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Действительно, кратчайшая линия на сфере между двумя ее точками — дуга большого круга, причем единственная (за исключением случая, когда точки диаметрально противоположны). Правда, любые «прямые» на сфере обязательно пересекаются, притом в двух точках, так что в этой геометрии параллельных прямых





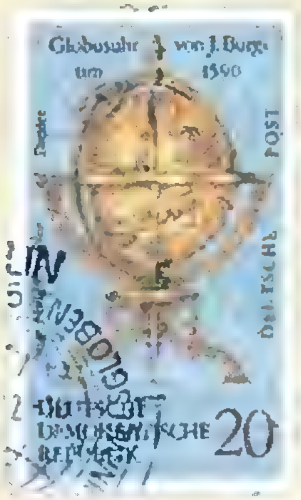

Erdglobus von J. Praetorius 15 68
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
10

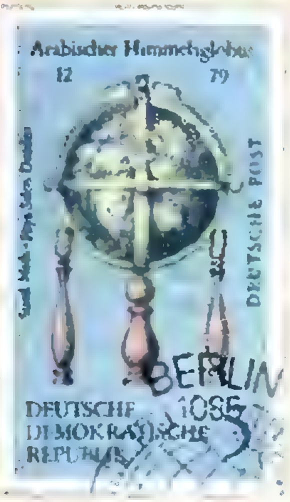
не бывает вовсе (в отличие от геометрии *Лобачевского*, где через точку можно провести бесконечно много прямых, параллельных данной).

Существует и сферическая тригонометрия, причем она возникла раньше, чем тригонометрия на плоскости. Ее создали древние астрономы, считавшие, что планеты и звезды находятся на «небесной сфере», которую также изготавливали в виде глобуса. Вот как выглядит на сфере теорема косинусов для треугольника со сторонами a, b, c и углом A:

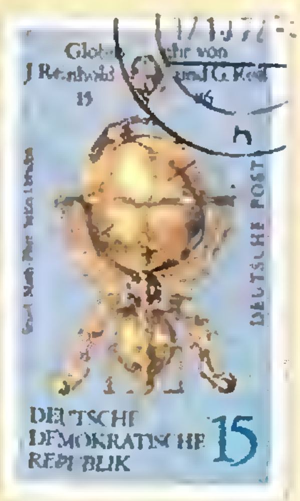
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Если угол A равен 90°, то получаем теорему Пифагора на сфере: $\cos a = \cos b \cos c$, где a — гипотенуза, а b и c — катеты. Длины сторон треугольника выражаются в углах, под которыми эти стороны видны из центра сферы. Интересно, что у сферических треугольников сумма углов всегда больше 180° (кстати, в геометрии Лобачевского эта сумма всегда меньше 180°). Желающие ближе познакомиться со сферической геометрией и тригонометрией могут сделать это по учебникам, которые издаются для студентов-астрономов, горных инженеров и геодезистов.

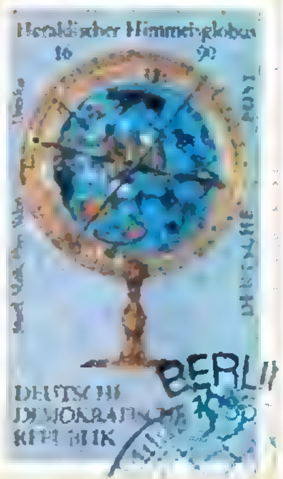

Globusuhr von J. Bürgi um 1590
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
20

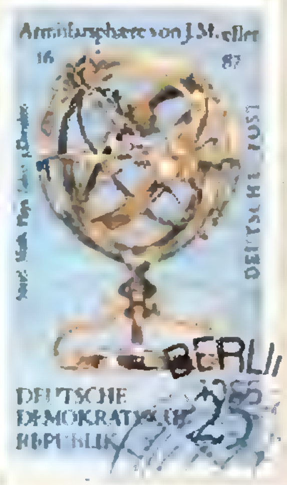

Arabischer Himmelsglobus 12 79
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
25

Сферой и шаром математики интересовались с давних пор. Архимед обнаружил, что площадь части поверхности сферы радиуса R, расположенная между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h, равняется $2\pi Rh$, как и у цилиндра при сечении его перпендикулярно оси. Из этого следует, что полная поверхность сферы равна боковой поверхности цилиндра, описанного вокруг нее. Отсюда легко получить, что поверхность сферы равняется 2/3 полной поверхности этого цилиндра. Более того, оказалось, что и объем шара составляет 2/3 объема этого цилиндра. Этот факт так поразил Архимеда, что он завещал изобразить соответствующий чертеж на своем надгробии.


Globusuhr von J. Reinhold und G. Roll 15 86
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
15

Существует еще немало красивых соотношений, связанных с шаром. Так, если взять точку внутри шара на расстоянии d от его центра и провести через нее три взаимно перпендикулярные плоскости, то сумма площадей полученных сечений шара этими плоскостями оказывается равной $\pi(3R^2-d^2)$.


Heraldischer Himmelsglobus 16 90
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK


Armillarsphäre von J. Moeller 16 87
DEUTSCHE POST
DEUTSCHE DEMOKRATISCHE REPUBLIK
25

Математический кружок

ОТКУДА БЕРУТСЯ ЗАДАЧИ

Кандидат физико-математических наук[*]
И. ШАРЫГИН

Варьирование условий

Простейший пример, достаточно точно иллюстрирующий этот прием, дает такая серия задач: построить треугольник по а) трем сторонам; б) трем медианам; в) трем высотам; г) трем биссектрисам. На этом примере видно, сколь сильно может меняться уровень сложности при подобном варьировании условия. В нашей четверке за совершенно элементарной первой задачей следует вполне содержательная, не очень, правда, сложная задача. Третья задача уже существенно сложнее, а четвертая — и вовсе не решается при помощи циркуля и линейки.

Любопытную идею, с помощью которой можно создавать серии задач, предложил киевский учитель математики В. Куценок. Возьмем какое-нибудь геометрическое соотношение, допустим, равенство $ah_a = bh_b$, и зададимся вопросом: каковы свойства треугольника, для которого выполняется соотношение, получающееся из рассматриваемого заменой высот на медианы или биссектрисы? В результате, можно получить такую задачу:

Задача 13. *На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек плоскости C таких,*

---

[*] Окончание. Начало см. № 8.

что для треугольника ABC имеет место равенство:

а) $am_a=bm_b$ *(*m_a *и* m_b *— медианы треугольника ABC);*

б) $a\beta_a=b\beta_b$ *(*β_a*,* β_b *— биссектрисы треугольника ABC).*

Решение в обоих пунктах весьма сходно. Рассмотрим пункт а).

Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника, AA_0 и BB_0 — медианы. Из условия следует подобие треугольников AA_0A_1 и BB_0B_1. Возможны два случая расположения точек A_1, A_0, B_1, B_0 на сторонах треугольника ABC, изображенные на рис. 1, *а* и 1, *б*. В первом случае точки A, B, A_0 и B_0 расположены на одной окружности. Из этого ввиду параллельности A_0B_0 и AB следует равнобокость трапеции AB_0A_0B, а значит, равенство $AC=BC$. Во втором случае на одной окружности оказываются точки C, M, A_0 и B_0. Во вписанном четырехугольнике CA_0MB_0 диагональ A_0B_0 есть половина AB и делится диагональю CM пополам. Диагональ CM есть $\frac{2}{3}\,m_c$ и делится диагональю A_0B_0 в отношении 3:1. Из равенства произведений отрезков диагоналей найдем $m_c^2=3AB^2$. Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из срединного перпендикуляра к отрезку AB и окружности с центром в середине AB и радиусом $AB\sqrt{3}$.

В пункте б) точка расположена также или на срединном перпендикуляре к AB, или на дуге окружности, из точек которой AB виден под углом 60°.

Вообще, при варьировании условий задачи могут возникать любопытные серии. Приведу пример двух таких серий (не стремясь к их полноте).

Известна классическая теорема, утверждающая, что из равенства двух внутренних биссектрис треугольника следует его равнобедренность (теорема Штейнера-Лемуса). Само по себе утверждение этой теоремы вполне естественно и ожидаемо, если бы не трудности, с которыми приходится сталкиваться при ее доказательстве, в отличие от родственных тривиальных теорем, касающихся медиан или высот. Уже здесь виден скверный нрав биссектрис. Но в полной мере он проявляется в следующей задаче.

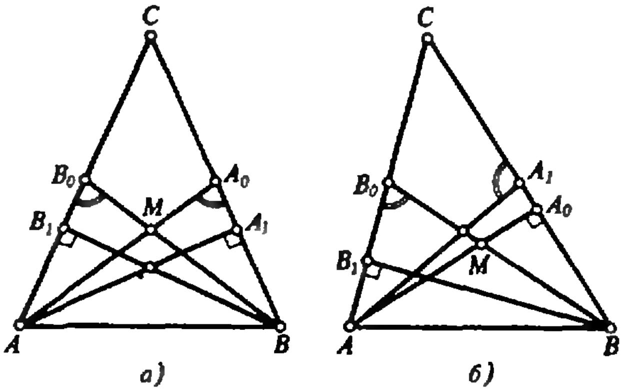


Рис. 1.

Задача 14. *Будет ли равнобедренным треугольник ABC, если у него:*

а) равны биссектрисы внешних углов A и B?

б) равны отрезки KA_1 *и* KB_1*, где* AA_1 *и* BB_1 *— биссектрисы внутренних углов треугольника, а K — их точка пересечения?*

в) равны расстояния от точки C_1 *(*CC_1 *— биссектриса угла C) до середин сторон CA и CB?*

г) имеет место равенство $C_1A_1=C_1B_1$*?*

д) окружность, проходящая через точки A_1*,* B_1 *и* C_1 *касается стороны AB данного треугольника?*

Во всех пяти пунктах ответ отрицательный. Наиболее нетривиально это получается в пунктах г) и д).

Ограничусь рассмотрением последнего пункта, о котором я узнал лишь недавно из фольклорных источников. При этом я покажу только, как можно построить пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего условию, не объясняя, как до этого можно додуматься.

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC (рис. 2). Возьмем на продолжениях сторон AC и BC точки A_2 и B_2 так, что $CA_2=CA_1$, $CB_2=CB_1$. Понятно, что точки A_1, A_2, B_1 и B_2 расположены на одной окружности. Если при этом окажется, что AC_1 и BC_1 равны касательным, проведенным из A и B к этой окружности, то она касается AB

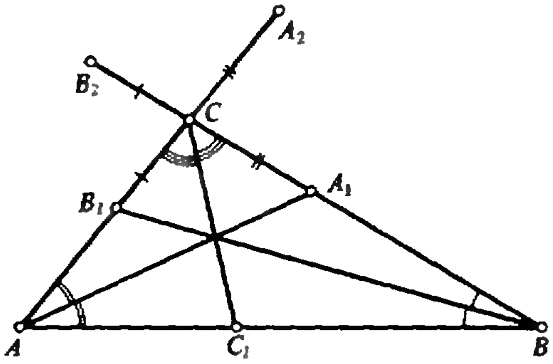


Рис. 2.

в точке C_1. (Если длина отрезка равна сумме касательных, проведенных из его концов к окружности, то этот отрезок касается окружности. Докажите это самостоятельно.) Следовательно, должны выполняться равенства:

$$AC_1^2 = AB_1 \cdot AA_2,$$

$$BC_1^2 = BA_1 \cdot BB_2.$$

Выражая отрезки сторон треугольника ABC через стороны ($AB_1 = \frac{bc}{c+a}$, и т. д.), убедимся, что каждое из этих двух равенств эквивалентно соотношению

$$(a+b+c)(a+b)^2 = c(c+a)(c+b).$$

Остается убедиться, что существует неравнобедренный треугольник, стороны которого удовлетворяют этому соотношению. Нетрудно найти конкретный числовой пример. Пусть $c=1$, $a+b=1+\lambda$. Тогда $ab=\lambda(2+\lambda)^2$. Если λ достаточно мало, можно найти a и b, при этом $a \neq b$.

Еще одна интересная серия задач связана с условием равногранности тетраэдра. Напомним, что тетраэдр (произвольная треугольная пирамида) называется равногранным, если все его грани — равные между собой треугольники. Известен целый ряд условий, необходимых и достаточных для того, чтобы тетраэдр был равногранным. Не стремясь к полноте, а тем более к рекорду, сформулирую следующую многопунктовую задачу.

Задача 15. *Какие из следующих условий являются необходимыми и достаточными для того, чтобы тетраэдр ABCD был равногранным:*

а) Противоположные ребра попарно равны.

б) Периметры всех граней равны между собой.

в) Суммы плоских углов при трех вершинах равны 180°.

г) Выполняются равенства

$$\angle BAD = \angle BCD = \angle ABC = \angle ADC.$$

д) Выполняются равенства

$$\angle BAC = \angle BDC,$$
$$\angle ABD = \angle ACD,$$
$$\angle BAD = \angle BCD.$$

е) Все грани имеют равные радиусы описанной окружности.

ж) Все грани имеют равные радиусы вписанной окружности.

з) Все грани имеют равные площади.

и) Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, попарно перпендикулярны.

к) Центр описанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

л) Центр вписанной сферы совпадает с центром масс тетраэдра.

м) Центры вписанной и описанной сфер совпадают.

н) Сумма косинусов двугранных углов равна —2.

о) На описанной около тетраэдра сфере расположены центры четырех шаров, каждый из которых касается одной грани во внутренней точке и плоскостей трех других граней.

Уф!... Пожалуй, достаточно. В принципе, подобных условий можно выписать несколько десятков, особенно если учесть, что некоторые из них можно смешивать. Так, например, первые 8 условий записываются в виде трех равенств, и мы имеем возможность выписывать новые условия, беря, скажем, одно равенство из пункта а) (равны два противоположных угла) и два равенства из пункта в) (суммы плоских углов при двух вершинах равны 180°).

В данной задаче почти все условия являются необходимыми и достаточными, чтобы тетраэдр был равногранным. Вы уже, наверное, догадались, что исключением скорее всего является пункт ж) — опять биссектрисы безобразничают. Так оно и есть. Попробуйте сами построить пример тетраэдра с неравными гранями, но с равными радиусами вписанных в них окружностей. В качестве граней можно взять две пары неравных равнобедренных треугольников, имеющих нужное свойство.

Весьма нетривиально доказывается пункт о). Во всяком случае, достаточно элементарного доказательства я не знаю.

Кстати, пункт д) возник уже в процессе работы над статьей. Здесь интересно, что существенной является «пространственность» тетраэдра. Если A, B, C и D в одной плоскости, этого недостаточно для равенства треугольников.

Обобщение

Все развитие математики представляет собой путь постоянных обобщений. Конечно, при использовании этого приема для получения новых элементарных задач мы, как правило, на многое не претендуем, но тем не менее помнить и понимать его значение необходимо.

Обобщение может идти по различным направлениям. Иногда оказывается возможным в рассматриваемой задаче снять некоторые ограничения и распространить соответствующее утверждение на более широкое множество объектов. Так, однажды в старом математическом журнале я встретил следующую задачу:

Задача 16. *Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ сторона AD является диаметром окружности, а биссектрисы углов B и C пересекаются на AD. Докажите, что имеет место равенство $AB+CD=AD$.*

Решение этой задачи, приведенное в журнале, мне не понравилось. После некоторого размышления удалось найти другое решение, в котором никак не использовалось то, что AD — диаметр окружности. Это условие оказалось лишним. В результате возникла вполне новая

Задача 16′. *Докажите, что если биссектрисы углов B и C вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD, то $AD=AB+CD$.*

Суть упомянутого мною решения (есть много других) состоит в следующем. Возьмем точку P на AD, в которой пересекаются биссектрисы углов B и C. Опишем около BCP окружность и обозначим через M вторую точку пересечения этой окружности с AD. Тогда, учитывая равенства соответствующих углов вписанных четырехугольников $ABCD$ и $BCPM$, докажем равнобедренность треугольников ABM ($AB=AM$) и CDM ($CD=DM$). Проделайте эти рассуждения самостоятельно.

Из этого примера также видно, сколь полезно при решении задачи не ограничиваться одним методом, рассматривать различные пути решения, уделяя особое внимание более геометричным, поскольку они глубже вскрывают внутренние свойства фигур, позволяют отделить главное от второстепенного. В связи с этим еще один, более свежий пример. На Всероссийской олимпиаде в 1990 году (см. «Квант», № 11, 1990 г.) была предложена

Задача 17. *Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC. Точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что*

$$TP \leqslant \frac{1}{3} AC.$$

Уже сама формулировка вызвала у меня легкое чувство протеста. Слишком громоздко, много буквенных обозначений, без которых вполне можно было обойтись. Также не удовлетворило меня и решение этой задачи, приведенное в журнале. Оно в некоторой мере противоречило выработанным мною принципам, выглядело неестественным (для меня). Найдя устраивающее меня решение, я сумел также и несколько переформулировать эту задачу, сделать ее более общей.

Задача 17′. *Из вершины угла выходят два луча, расположенные внутри угла. Некоторая прямая пересекает стороны угла в точках D и E, а лучи в точках K и M. Докажите, что отношение $\frac{KM}{DE}$ будет наибольшим, если $DK=ME$.*

Для доказательства рассмотрим какую-то другую прямую, причем можно считать, что она проходит через E и пересекает другую сторону и лучи в точках D_1, K_1 и M_1 (рис. 3). Положим $DK=ME=a$, $KM=b$, $OD_1=\lambda OD$. Проведя через D_1 прямую параллельно DE, будем иметь:

$$D_1K_2=\lambda a,\ K_2M_2=\lambda b,$$

$$\frac{D_1M_1}{M_1E}=\frac{\lambda(a+b)}{a},$$

$$D_1M_1=\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a}\cdot D_1E,$$

$$D_1K_1=\frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\cdot D_1E,$$

$$K_1M_1=\left(\frac{\lambda(a+b)}{\lambda(a+b)+a}-\frac{\lambda a}{\lambda a+b+a}\right)D_1E.$$

Окончательно задача сводится к доказательству несложного алгебраического неравенства

$$\frac{\lambda(b^2+2ab)}{(\lambda(a+b)+a)(\lambda a+a+b)}\leqslant\frac{b}{2a+b},$$

которое преобразуется к виду

$$(\lambda-1)^2a(a+b)\geqslant 0.$$

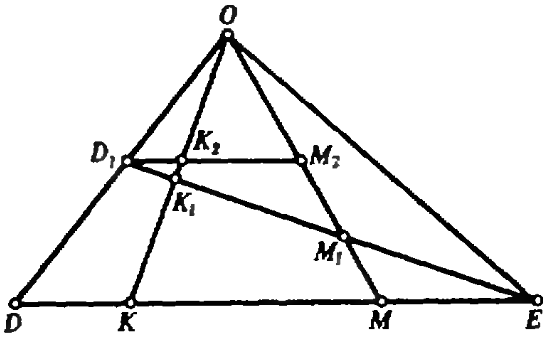


Рис. 3.

Другим возможным направлением обобщения является перенос некоего геометрического факта с одних объектов на другие, в частности, выход из плоскости в пространство. Так возникла

Задача 18. *К двум сферам проведены две касательные AB и CD, A и C — на поверхности одной сферы, B и D — на другой. Докажите, что проекции AC и BD на прямую, проходящую через центры сфер, равны.*

В плоском варианте эта задача вполне проста. (В этом случае AB и CD — общая внешняя и общая внутренняя касательные двух окружностей.) Да и в пространстве она не слишком сложна. (Все следует из того, что середины общих касательных к двум сферам лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров. Докажите это утверждение.) Здесь, на мой взгляд, интереснее то обстоятельство, что пространственный аналог планиметрического утверждения остается верным. Такое случается не слишком часто. Нередко смысл пространственного обобщения в построении опровергающего примера. Так, простейшее в планиметрии утверждение: основание хотя бы одной высоты треугольника лежит на соответствующей стороне, а не на ее продолжении,— в пространственном исполнении трансформируется в вопрос:

Задача 19. *Верно ли, что для любого тетраэдра основание хотя бы одной высоты принадлежит соответствующей грани этого тетраэдра?*

Ответ на этот вопрос отрицательный. Контрпримером является тетраэдр, у которого два двугранных угла, соответствующие двум скрещивающимся ребрам, являются тупыми.

Нередко одна и та же задача может обобщаться в различных направлениях, порождать целые обобщающие серии. Возьмем широкоизвестную теорему:

сумма расстояний от произвольной точки внутри правильного треугольника до его сторон постоянна. (Для тех, кто не знаком с этой задачей, обозначим доказательство. Площадь рассматриваемого правиль-

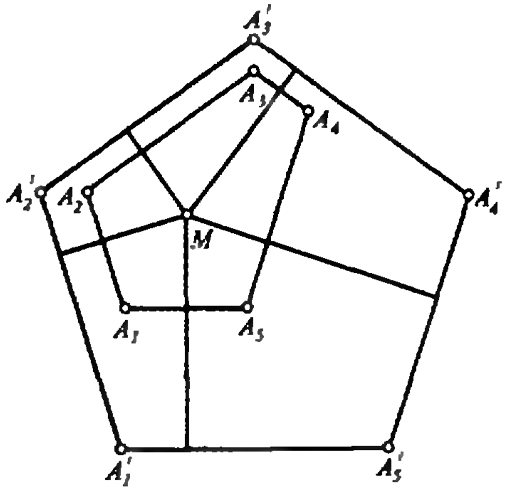


Рис. 4.

ного треугольника равна сумме площадей трех треугольников, основания которых — стороны правильного треугольника, и общая вершина — какая-то точка внутри этого треугольника. И т. д.)

Утверждение этой теоремы очевидно обобщается на произвольный выпуклый равносторонний многоугольник. Менее очевидно, что она обобщается и на равноугольный многоугольник. В самом деле, пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — равноугольный многоугольник (рис. 4, $n=5$). Рассмотрим правильный n-угольник $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ со сторонами, параллельными сторонам исходного n-угольника, и содержащий его. Для любой точки M внутри $A_1A_2 \ldots A_n$ сумма расстояний до сторон $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ постоянна. Но расстояние до какой-то стороны исходного n-угольника меньше, чем расстояние до параллельной ей стороны второго правильного n-угольника на постоянную величину. Значит, и вся сумма расстояний от M до сторон $A_1A_2 \ldots A_n$ отличается от сумм расстояний от M до сторон $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ на постоянную величину, то есть и сама является постоянной.

Можно сделать и еще один шаг обобщения, объединяющий два предыдущих (равносторонность и равноугольность). В итоге можно сформулировать следующую теорему:

Задача 20. *На плоскости даны n различных единичных векторов, сумма которых равна нулю. Рассмотрим выпуклый n-угольник, стороны которого перпендикулярны соответствующим векторам. Тогда для всех внутренних точек этого n-угольника сумма расстояний до его сторон одна и та же.*

Возможны и другие пути обобщения исходной теоремы про правильный треугольник. Например, выйти в пространство. Кстати, возникает вопрос, верна ли в пространстве теорема-задача 20, вернее, ее аналог?

Открытия и проблемы

Предыдущие примеры иллюстрировали те или иные технические приемы. И все же главный источник новых задач — это любознательность, стремление всякий раз докопаться до существа дела, умение увидеть привычное с неожиданной точки зрения. Вот тогда-то и появляются самые интересные геометрические задачи, задачи-открытия. К этой категории задач, на мой взгляд, относится одна из наиболее симпатичных олимпиадных задач последних лет.

Задача 21. *Можно ли из деревянного, единичного куба выпилить три правильных тетраэдра с единичным ребром?*

Задача эта предлагалась на Всероссийской олимпиаде в 1989 году. Здесь интересно то, что во многих олимпиадных сборниках обсуждалась задача о выпиливании из единичного куба двух тетраэдров. А оказывается, можно выпилить целых три! (Возьмем три попарно скрещивающиеся ребра куба. Каждое из них будет ребром одного тетраэдра. Середины противоположных ребер каждого тетраэдра совпадают с центром куба. Докажите теперь, что эти тетраэдры более не имеют общих точек.)

Конечно, вовсе не обязательно красивый факт, обнаруженный лично вами, окажется открытием и для всего человечества. Это не так уж и страшно, тем более что многие старые геометрические теоремы являются откровением для признанных геометрических экспертов. Многое, слишком многое, из тысячелетней геометрической культуры утеряно.

Одним из своих любимых геометрических открытий я считаю следующую задачу:

Задача 22. *Какое наибольшее число прямых можно провести через какую-то точку в пространстве так, чтобы все попарные углы между ними были бы равны?*

Ответ: 6. При этом я прекрасно понимаю, что наверняка этот факт был известен в глубокой древности, например, Архимеду.

То, что таких прямых не может быть более шести, несложно доказать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 — две прямые нашего семейства, проходящие через точку O. Тогда все оставшиеся прямые должны принадлежать пересечению двух конических поверхностей: осью одной из них является прямая l_1, а прямая l_2 является одной из образующих; для второй — наоборот, l_2 — ось, l_1 — образующая. Такие две конические поверхности пересекаются не более чем по четырем прямым.

Примером шестерки прямых, обладающих нужным свойством, могут служить диагонали икосаэдра — правильного двадцатигранника (двенадцативершинника). Если вы плохо представляете себе икосаэдр, то можете построить нужный пример следующим образом. Возьмем шесть векторов: $(a, \pm b, 0)$; $(\pm b, 0, a)$; $(0, a, \pm b)$ в качестве направляющих векторов наших прямых. Поскольку все вектора имеют одну и ту же длину, то должны быть равными абсолютные величины всех попарных скалярных произведений. Считая, что $a \geqslant b > 0$, приходим к равенству $a^2 - ab - b^2 = 0$. Можно взять $b=1$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

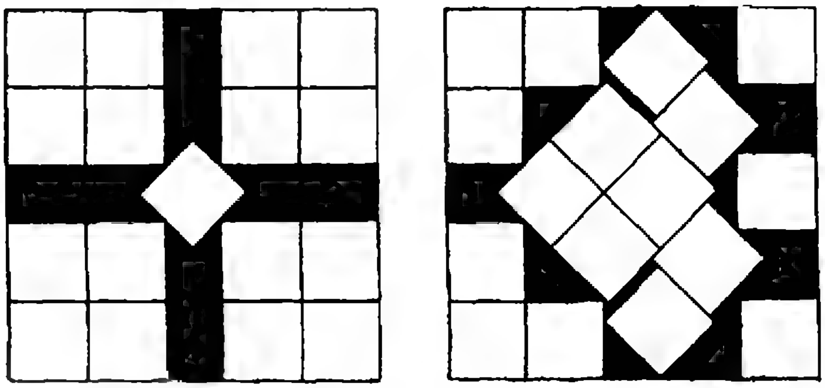
В геометрии, как наверное ни в одном предмете, короток путь от учебной задачи к нерешенной проблеме. В конце концов, не так уж сильно разнятся по постановке вопросы: «найти наименьшее значение площади треугольника, содержащего единичную окружность» и «найти фигуру наименьшей площади, которой можно покрыть любую плоскую фигуру диаметра 1». Но если первая — простая школьная задача, то вторая — до сих пор не решенная проблема Лебега о минимальной «покрышке». Но для того, чтобы сформулировать подобную содержательную проблему, надо обладать хорошей математической культурой и вкусом. Не следует забывать пословицу, утверждающую, что один дурак может задать столько вопросов, что и сотня мудрецов не ответит.

В отличие от других математических дисциплин в геометрии возможен эксперимент в прямом, физическом смысле этого слова. Многие геометрические открытия древности явились следствием наблюдений и эксперимента. Очень возможно, что известный современный геометр Коннели, построивший деформирующийся многогранник (многогранник, который может деформироваться так, что каждая из его граней остается неизменной), в процессе своей работы много экспериментировал — склеивал или как-то иначе создавал пространственные модели. Многогранник Коннели разрешил одну из старейших математических проблем, а то обстоятельство, что решение этой проблемы оказалось вполне элементарным, и полностью было опубликовано в журнале «Квант» (в 9 номере за 1978 год), учитывая уровень развития современной математики, кажется фантастическим. Такое возможно только в геометрии и то крайне редко.

Здесь я хочу привести пример другого «маленького» открытия, сделанного экспериментальным путем. В элементарной геометрии есть следующая проблема: какое наибольшее число единичных квадратов можно вырезать из квадрата со стороной $4+\alpha$, где $0<\alpha<1$? Этой проблемой занимались многие крупные геометры, в частности, известный венгерский геометр Эрдеш. Она послужила поводом дать в журнале «Математика в школе» ради эксперимента, хотя и в ином смысле, следующую задачу.

Известно, что из квадрата со стороной $4+\alpha$ можно вырезать 17 единичных квадратов. Указать как можно

Рис. 5.



а) б)

меньшее α, при котором это можно сделать.

Возможно, эта задача выглядит не очень красиво, но все же некоторый смысл в ней есть. Понятно, что никто не рассчитывал на то, что читатели найдут наименьшее такое α. Большинство читателей прислали расположение, изображенное на рисунке 5, *а*, для которого $\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Неожиданностью оказалось письмо от участников математической секции «Горизонт» при школе № 51 города Киева (руководитель Б. Н. Школьник). В письме было сказано, что, проделав соответствующий эксперимент (!), члены секции пришли к заключению, что наименьшее α достигается для расположения, указанного на рисунке 5, *б*. (Проверьте самостоятельно, что для такого расположения α на несколько сотых меньше, чем для рисунка 5, *а*). Не зная описания эксперимента, трудно судить о справедливости этого утверждения. Кроме того, математическое воспитание не позволяет с полным удовлетворением воспринять подобное «доказательство». (А собственно, почему?) Очень возможно, что указанное расположение и в самом деле является оптимальным для нашего частного случая. Но самое главное, эта задача показывает, что геометрические открытия доступны буквально любому школьнику, а не только начинающим математическим гениям. Дерзайте! Да сопутствует вам успех!

Центр обучения «ИКАР»

объявляет набор на заочные отделения:

астрономическое (начиная с 7-го класса), физико-математическое и
химическое (на базе 9-летнего образования) без верхнего возрастного ограничения.
Срок обучения (от 1 до 4 лет) определяется по результатам тестирования.
В течение года предусмотрено выполнение 10—15 контрольных
и практических работ, на базе углубленного изучения материала
по авторским методическим разработкам.
По окончании обучения выдается свидетельство.
Для поступления необходимо направить по адресу:
270114, Одесса, а/я 140, ЦО «ИКАР»
заявление с указанием фамилии, имени и отчества, возраста,
подробного домашнего адреса и названия избранного Вами отделения (отделений),
а также квитанцию об оплате обучения. Стоимость обучения: за 1 год
на одном отделении — 45 руб., на двух 80 руб., на трех — 110 руб.
Плату надо перечислять на р/с 161702 в ОПЕРО Облуправления
Госбанка г. Одессы, МФО 328027, получатель:
ЦО «ИКАР», сч. 345090.

«ИКАР» — это минимальные цены и гарантия знаний!

Алгоритмика простоты

Компьютерная считалочка

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

Кто не помнит милые забавы раннего детства, считалочки? «Вышел месяц из тумана...», «Эники-беники ели вареники...». Кроме способности вызывать приятные воспоминания они обладают еще одним свойством: результат, или «жребий, кому водить», в каждом конкретном случае однозначен, его легко подсчитать. Но по негласному уговору миф о непредсказуемости и справедливости ответа в конце считалки тщательно сохраняется и поддерживается. Это непременное условие любой ребячьей игры. Иногда для усиления впечатления псевдослучайности предусматривается специальный алгоритм.

На златом крыльце сидели:
Царь, царевич, король, королевич,
Сапожник, портной. Кто ты такой?
Говори поскорей, не задумывайся!

Тот, на кого выпадает последний ударный слог, действительно не задумываясь, выпаливает, например, «портной». Тогда счет «по стишку» обязательно повторяется, начиная с «портного», а заканчивается на водящем при слове «портной». Чтобы все было «честно», порой договариваются заранее, считать ли «по часовой» или «против».

С простыми числами все наоборот. Считают всегда «по часовой», т. е. в направлении возрастания. И всегда «от печки», от первого простого числа два. Используют только одну «считалочку» — возвратный алгоритм Эратосфена, иногда лишь немного его видоизменяя.

Простые числа распределены среди натуральных очень неравномерно. Рассмотрим нечто очень всем хорошо известное под названием «Таблица простых чисел, не превосходящих 6000». Классика. А сколько в ней простых? В книге А. А. Бухштаба «Теория чисел» (М., «Просвещение», 1966) таблица расположена рядами и колонками по схеме $11\times38+10\times36+5\times1$, что дает 783, т. е. примерно по три простых на каждые 23 числа. Тогда 25-е простое число должно находиться где-то около 200, но на самом деле оно равно 97. А быстро сказать, каким будет, хотя бы примерно, 25001-е простое, не сможет, пожалуй, никто, не обратившись к помощи компьютера, хотя математики и нашли формулы для приблизительной оценки количества простых чисел, не превышающих заданного натурального.

Попробуем немного «высветить» ситуацию, ибо всегда лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать. Поставим проблему и исследуем ее, применяя только карманную вычислительную технику. Каково количество простых в каждой первой сотне чисел после очередной степени десяти?

Вот экспериментальные данные. В начале каждой серии приводится степень десяти, затем в скобках количество простых в этой серии, затем сами простые числа этой серии, а в конце после точки с запятой — следующее простое (для экономии места приводятся лишь последние две или три цифры каждого числа). Для такого «обзора по сотням» нам вполне хватило программного инструмента № 1 из нашей первой публикации (см. «Квант» № 6), лишь для 10^8 и больших чисел вычисления проводились на МК-85 и HP-32S.

Программа 4. Счетный генератор простых чисел
Текст программы с пошаговыми комментариями

53	X→П	6	46	/+	Ввод нечетного стартового числа
54	0		00	/+	Константа 0
55	С/П		50	/+	Стоп-индикация для набора номера числа
56	F X≠0		57	/+	РгX≠0?
57	5 5		55	/+	НЕТ (т. е. РгX=0), переход на шаг 55
58	X→П	4	44	/+	ДА, запись порядкового номера в Рг4
59	1		01	/+	Константа 1
60	X→П	45	45	/+	Засылка 1 в Рг5
61	К П→X	5	Г5	/+	Добавление 1 в счетчик Рг5
62	К П→X	5	Г5	/+	Добавление еще 1 в счетчик Рг5
63	П→X	6	66	/+	Вызов в РгX текущего испытуемого числа И
64	П→X	5	65	/+	Вызов в РгX текущего делителя Д из Рг5
65	÷		13	/+	ЧАСТН=И/Д
66	X→П	9	49	/+	Засылка ЧАСТН в Рг9
67	К П→X	9	Г9	/+	К=целая часть от ЧАСТН
68	П→X	6	66	/+	Вызов И в РгX
69	П→X	9	69	/+	Вызов К в РгX; И перемещается в РгY
70	П→X	5	65	/+	Вызов Д в РгX; РгY=К; РгZ=И
71	×		12	/+	Д×К
72	—		11	/+	ОСТ=И—К×Д, остаток от деления
73	F X≠0		57	/+	ОСТ≠0?
74	8 4		84	/+	НЕТ (т. е. ОСТ=0), переход на шаг 84
75	П→X	9	69	/+	ДА (т. е. ОСТ≠0), вызов целого ЧАСТН
76	П→X	5	65	/+	Вызов Д из Рг5 в РгX
77	—		11	/+	РгX=ЧАСТН — Д
78	F X<0		5C	/+	ЧАСТН — Д<0?
79	6 1		61	/+	НЕТ, переход на шаг 61 к новому значению Д
80	П→X	4	64	/+	ДА (множество Д исчерпано), вызов номера
81	П→X	6	66	/+	Вызов простого числа
82	С/П		50	/+	Стоп-индикация простого числа
83	К П→X	4	Г4	/+	Добавление 1 в счетчик Рг4 номера числа
84	К П→X	6	Г6	/+	Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
85	К П→X	6	Г6	/+	Добавление еще 1 к испытуемому числу
86	ВП		51	/+	Безусловный переход
87	5 9		59	/+	на шаг 59

10^0 (25): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; 101.

10^1 (25): 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109; 113.

10^2 (21): 1, 3, 7, 9, 13, 27, 31, 37, 39, 49, 51, 57, 63, 67, 73, 79, 81, 91, 93, 97, 99; 211.

10^3 (16): 9, 13, 19, 21, 31, 33, 39, 49, 51, 61, 63, 69, 87, 91, 93, 97; 103.

10^4 (11): 7, 9, 37, 39, 61, 67, 69, 79, 91, 93, 99; 103.

10^5 (6): 3, 19, 43, 49, 57, 69; 103.

10^6 (6): 3, 33, 37, 39, 81, 99; 117.

10^7 (2): 19, 79; 103.

10^8 (6): 7, 37, 39, 49, 73, 81; 123.

10^9 (7): 7, 9, 21, 33, 87, 93, 97; 103.

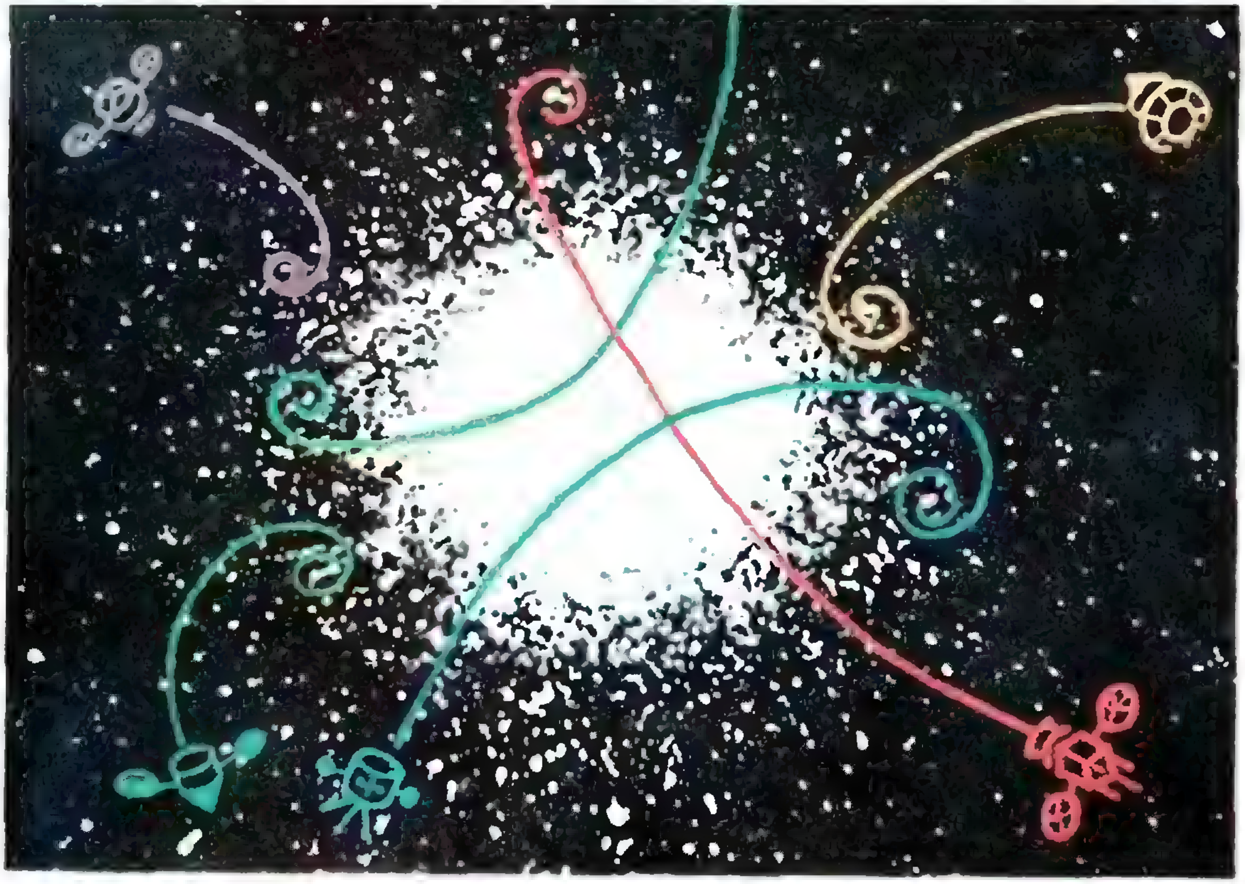
10^{10} (4): 19, 33, 61, 97; 103.

10^{11} (7): 3, 19, 57, 63, 69, 73, 91; 103.

Итак, количество простых в каждой последующей сотне падает, но отнюдь не равномерно: 25, 25, 21, 16, 11, 6, 6, 2, 6, 7, 4, 7, ... А это, в свою очередь, может быть поводом для постановки новых вопросов и новых исследований. Например: сколько простых в каждой тысяче натуральных, начиная от первой? Обратите внимание и на то, что из 12 исследованных «сечений» семь «заканчиваются» на 103 и лишь одно начинается на единицу.

На новом поприще нужны новые инструменты и удобства. Даем желающим программный нарастающий счетный генератор для МК-61. Он похож на самый первый, но дополнен нумератором простых чисел.

(Окончание см. на с. 58)



Р-значит ракета

Межзвездным перелетам помогают... звезды

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Введение

Осуществление межзвездных перелетов является чрезвычайно увлекательной задачей. Ее решение позволило бы детально изучить поверхность звезд разного типа, обнаружить планетные системы и, возможно, установить контакт с представителями внеземного разума. Мы не будем обсуждать здесь все возможные пути решения этой проблемы: за последние десятилетия было сделано на этот счет множество предложений — от фотонных и ядерных звездолетов (например, английский проект «Дедал») до использования солнечного паруса. В этой статье мы расскажем только об одной сравнительно новой идее, которая, в принципе, дает возможность посылать большое количество маленьких автоматических зондов к различным звездам нашей Галактики.

Пертурбационный маневр

Траектории межпланетных перелетов часто прокладывают вблизи планет не только для их исследования, но и чтобы использовать притяжение планеты для дополнительного разгона космического аппарата. Изменение траектории полета под действием гравитационного поля планеты называют обычно пертурбационным маневром. Именно он неоднократно применялся во время путешествия

«Вояджеров» по маршруту Земля — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун. Чтобы осмотреть полярные области Солнца, аппарат «Улисс» летит сейчас по маршруту Земля — Юпитер — Солнце. А чтобы достигнуть Юпитера без лишних затрат горючего, аппарат «Галилей» запущен по маршруту Земля — Венера — Земля — Юпитер. Пролет мимо каждой промежуточной планеты планируется таким образом, чтобы ее притяжение ускорило космический аппарат и сообщило ему нужное направление движения.

Механику этого эффекта легко понять на простом примере. Если по столу катится массивный шар, а навстречу ему — легкий, то при столкновении массивный почти не изменит свою скорость, а легкий отскочит с увеличенной скоростью (рис. 1; попробуйте самостоятельно решить эту задачу, используя законы сохранения кинетической энергии и импульса). То же самое происходит при «гравитационном столкновении» планеты с летящим навстречу ей космическим аппаратом. Отличие лишь в том, что столкновение твердых тел происходит почти мгновенно в момент касания, а гравитационное столкновение растянуто надолго. Но законы механики действуют одни и те же. Поэтому и результат тот же: совершив облет планеты, космический аппарат увеличивает свою скорость. А на сколько?

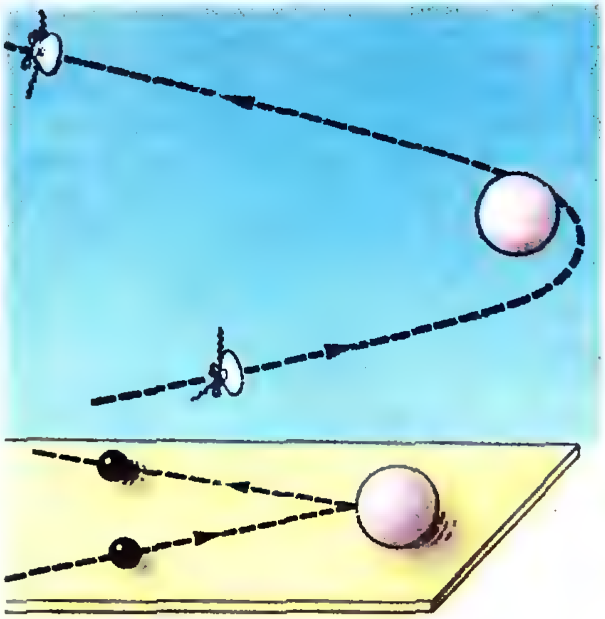


Рис. 1.

Рисунок 2 поможет нам это определить. Воспользуемся простым правилом сложения скоростей, но будем использовать при этом две инерциальные системы отсчета. С точки зрения

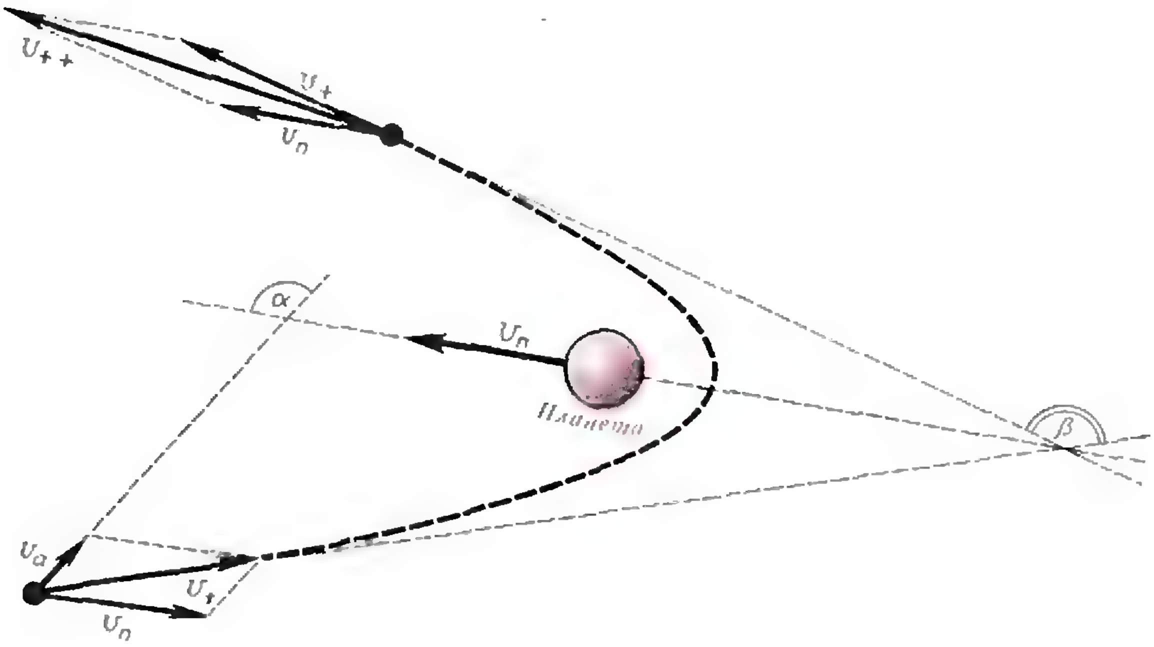


Рис. 2.

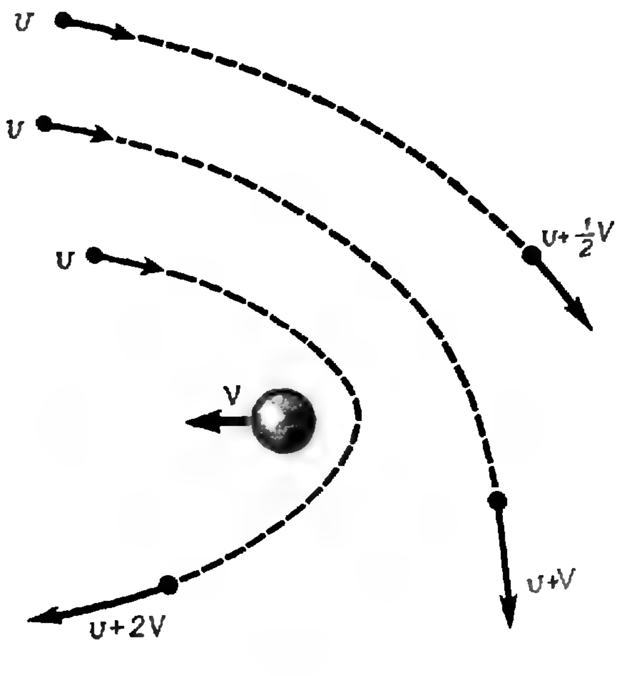


Рис. 3.

далекого наблюдателя (например, сидящего на Солнце), планета движется со скоростью $v_п$, а аппарат — со скоростью $v_а$; α — угол между направлениями этих скоростей. С точки зрения наблюдателя на планете, аппарат приближается к ней со скоростью v_+ и, очевидно, с такой же скоростью будет удаляться, изменив лишь ее направление на угол β. В этих рассуждениях мы подразумеваем, что связанная с планетой система координат практически инерциальна: ведь пролет аппарата влияет на движение планеты фантастически слабо. С точки же зрения далекого наблюдателя, удаляющийся от планеты аппарат имеет скорость v_{++}. Используя правило параллелограмма, получим

$$v_+^2 = v_а^2 + v_п^2 - 2v_а v_п \cos\alpha$$

и

$$v_{++}^2 = v_+^2 + v_п^2 - 2v_+ v_п \sin(\beta/2).$$

Сразу видно, что если аппарат и планета двигались навстречу друг другу ($\alpha \approx 180°$), а в результате маневра вектор скорости аппарата изменил свое направление на противоположное ($\beta \approx 180°$), то к скорости аппарата порибавилась удвоенная скорость планеты. Это наиболее выгодный случай (рис. 3). Но чтобы маневр был достаточно эффективным в смысле приращения скорости, желательно иметь β и $\alpha \gtrsim 90°$. Разумеется, аппарат должен при этом пройти над поверхностью планеты и не врезаться в нее, т. е. минимальное расстояние сближения должно превышать радиус планеты. Законы небесной механики указывают, что при этом максимальная скорость удаления аппарата относительно планеты после их сближения будет равна $v_{макс} = 0{,}46 v_{II}$, где v_{II} — скорость отрыва (вторая космическая скорость) у поверхности планеты. Если планета обращается вокруг звезды, то соответственно $v_{макс} \approx v_{орб} + 0{,}5 v_{II}$, где $v_{орб}$ — орбитальная скорость планеты.

Кстати, чтобы после сближения с планетой аппарат мог покинуть пределы Солнечной системы, необходимо выполнение условия $v_{макс} \geqslant \sqrt{2} v_{орб}$, т. е. скорость аппарата должна быть больше скорости отрыва с орбиты планеты. Как видно из таблицы 1, не все планеты Солнечной системы могут играть роль эффективных ускорителей: лишь планеты-гиганты при однократном пертурбационном маневре аппарата способы выбросить его из Солнечной системы. В четвертой колонке таблицы показано, какую скорость будет иметь аппарат, покинувший таким образом нашу планетную систему.

Таблица 1. Характеристики планет, связанные с пертурбационным маневром вблизи них.

Планета	Орбитальная скорость, $v_{орб}$ (км/с)	Критическая скорость у поверхности, v_{II} (км/с)	Скорость вылета из Солнечной системы Δv (км/с)
Меркурий	48	4,2	—
Венера	35	10	—
Земля	30	11	—
Марс	24	5	—
Юпитер	13	60	36
Сатурн	10	36	22
Уран	6,8	21	18
Нептун	5,4	24	14
Плутон	4,7	1?	—

Звезда-катапульта

Итак, мы выяснили, что специальный выбор траектории, проходящей в окрестности планет, дает возможность космическому аппарату без затраты топлива увеличить свою скорость и покинуть Солнечную систему. Очевидно, что необходимая для этого энергия черпается из механической энергии планет. А нельзя ли использовать этот же принцип разгона во время полета аппарата «на просторах Галактики»? Ведь звезды тоже движутся в пространстве, и, значит, пертурбационный маневр вблизи них может сообщить нашему межзвездному зонду дополнительную скорость.

Астрономам известно, что характерные скорости движения звезд лежат в пределах от 10—20 км/с у молодых объектов до 250—300 км/с у наиболее старых из них. Значит, каждая встреча со звездой при соответствующем подборе траектории сближения добавит аппарату несколько десятков, а то и сотен километров в секунду. Пределом для эффективного пертурбационного маневра, как и в случае с планетами, служит величина $v_{\text{макс}}$, но для звезд она значительно выше, чем для планет (см. таблицу 2). Правда, для нормальных звезд в широком диапазоне их масс и размеров значение $v_{\text{макс}}$ остается приблизительно таким же, как для Солнца. Оно относительно невелико (≈ 300 км/с), и поэтому такие звезды для нас большого интереса не представляют. Особенно же привлекательны для пертурбационных маневров старые компактные звезды — белые карлики, нейтронные звезды и, вообще говоря, черные дыры, хотя о последних мы в дальнейшем говорить не будем по причине их крайне малой изученности.

Светимость большинства компактных звезд невелика, и в этом смысле они не представляют большой опасности для пролетающего мимо космического аппарата. Но есть один физический эффект, который может существенно ограничить возможности пертурбационного маневра, особенно вблизи нейтронной звезды. Речь идет о приливном влиянии гравитационного поля звезды, которое стремится сообщить различным частям аппарата взаимное ускорение $a = 2GM_*\Delta r/R^3$, где G — постоянная тяготения, M_* — масса, звезды, R — расстояние от аппарата до центра звезды, Δr — расстояние между частями аппарата. Как видно из таблицы 2, приливное ускорение довольно велико у поверхности нейтронной звезды и может представлять опасность для конструкции аппарата. Сейчас промышленность изготавливает некоторые электронно-механические приборы, выдерживающие ускорения до 10^6 м/с^2. Поэтому выбранный нами в таблице 2 интервал для минимального расстояния межзвездного зонда от поверхности нейтронной звезды кажется вполне разумным.

Нужно заметить, что в отличие от нормальных звезд, у которых масса приблизительно пропорциональна их радиусу и поэтому между ними нет большого различия в величине $v_{\text{макс}}$, у нейтронных звезд и белых кар-

Таблица 2. Максимальная скорость зонда ($v_{\text{макс}}$) и приливное ускорение (a) при пролете вблизи звезд различного типа.

Характеристика	Нормальная звезда (Солнце)	Белый карлик	Нейтронная звезда	
			$R_{\text{мин}} = R_*$	$R_{\text{мин}} = 50R_*$
Масса звезды, M_* ($M_\odot$)	1	0,7	2	2
Радиус звезды, R_* ($R_\odot$)	1	0,01	20 км	20 км
Критическая скорость у поверхности, v_{II} (км/с)	617	5165	$16 \cdot 10^4$	$23 \cdot 10^3$
Максимальная скорость зонда, $v_{\text{макс}}$ (км/с)	309	2583	$8 \cdot 10^4$	$12 \cdot 10^3$
Приливное ускорение, a (м/с^2) для $\Delta r = 1$ м	10^{-6}	0,5	$7 \cdot 10^7$	530

ликов радиус уменьшается с увеличением массы, что существенно сказывается на величине $v_{\text{макс}}$. В таблице 2 для этих звезд приведены лишь средние значения, которые для индивидуальных звезд могут различаться в 3—4 раза.

Долго ли разгоняться?

Стратегия ускорения межзвездного зонда достаточно очевидна: на дальних подступах к очередной звезде-ускорителю автопилот зонда должен наметить из числа ближайших звезд следующую, движущуюся ему навстречу, и так скорректировать траекторию сближения аппарата с первой звездой, чтобы пертурбационный маневр направил его в сторону второй звезды. Если коррекция траектории происходит достаточно далеко от точки сближения, то для этого потребуется мизерное количество топлива, а может быть, вообще будет достаточно и безрасходных методов управления, использующих межзвездное магнитное поле или давление излучения.

Оценим время, необходимое зонду для достижения скорости $v_{\text{макс}}$, если он стартовал из Солнечной системы со скоростью v_0. Пусть, для простоты, все звезды равномерно распределены в пространстве на среднем расстоянии l друг от друга и имеют одинаковые скорости хаотического движения σ. Если при каждом сближении со звездой зонд получает приращение скорости $\Delta v=\sigma$, то ему необходимо совершить $N=(v_{\text{макс}}-v_0)/\sigma$ пертурбационных маневров, на которые будет затрачено время

$$t=\sum_{k=0}^{N-1} l/(v_0+k\sigma).$$

Для быстрых оценок значения t эту сумму при $v_0\ll\sigma$ можно заменить величиной $t\approx l/v_0$, а при $v_0\gtrsim\sigma$ заменить интегралом и получить $t\approx(l/\sigma)\ \ln(v_{\text{макс}}/v_0)$. Как видим, зависимость времени разгона от величины начальной и конечной скорости зонда слабая: для $v_0=100$ км/с и 300 км/с$\leqslant v_{\text{макс}}\leqslant 10^5$ км/с имеем $1\leqslant\ln(v_{\text{макс}}/v_0)\leqslant 7$. Поэтому для всех случаев довольно точное значение дает формула $t\approx 2l\left(\frac{1}{v_0}+\frac{1}{\sigma}\right)$. В ней фигурируют три величины. Каковы же они?

Как покинуть Солнечную систему?

С какой скоростью наш зонд может покинуть Солнечную систему? До сих пор для этой цели использовался лишь пертурбационный маневр вблизи планет-гигантов, который позволил выйти в межзвездное пространство аппаратам серий «Пионер» и «Вояджер». Они имеют скорости относительно Солнца около 20 км/с. В принципе же сложный маневр в поле Юпитера и Сатурна позволяет аппарату разогнаться до скорости почти 100 км/с. Правда, для этого требуется определенная конфигурация планет.

Второй способ, который кажется сейчас вполне осуществимым,— это ускорение небольших зондов с помощью электромагнитных ускорителей массы, разрабатываемых в рамках американской программы стратегической оборонной инициативы (СОИ). Уже сейчас лабораторные образцы этого устройства ускоряют массу в 10 г до скорости около 10 км/с. Ожидается, что полномасштабные ускорители будут разгонять аппараты массой порядка 1 кг до скорости 20—40 км/с. Дальнейшее увеличение скорости связано со значительным увеличением размеров ускорителя ($\gtrsim$1 км) и поэтому считается нецелесообразным в рамках СОИ. Но для уникального проекта запуска межзвездных зондов это не может быть препятствием. Поэтому можно надеяться на создание космического электромагнитного ускорителя, разгоняющего небольшие зонды до скорости не менее 100 км/с, причем он будет способен делать это в любой момент и в любом направлении, независимо от конфигурации планет.

Лучшее место для космического ускорителя

Итак, будем считать, что межзвездный зонд покинул Солнечную систему со скоростью $v_0 = 100$ км/с. В зависимости от того, какой тип звезд будет использован для пертурбационного маневра, в таблице 3 рассчитаны значения времени разгона до максимальной скорости. Напомним, что пространственная плотность звезд n связана со средним расстоянием между ними простым соотношением: $l = n^{-1/3}$.

Как видим, в окрестности Солнца время разгона измеряется сотнями тысяч лет при использовании любого звездного населения. Но если бы мы находились в ядре шарового скопления, то это время сократилось бы до нескольких тысячелетий, а в ядре Галактики — всего до нескольких столетий. Кстати, в ядре Галактики есть смысл запускать зонд из планетной системы со скоростью $v_0 = 300$—400 км/с. Тогда он разгонится с помощью белых карликов до скорости около 5000 км/с всего за 100 лет, а с помощью нейтронных звезд за три столетия может ускориться почти до 100 тыс. км/с (конечно, если конструкция зонда позволяет приближаться к нейтронным звездам).

В принципе, возможны и более изощренные варианты гравитационного ускорения межзвездных зондов. Например, астрофизикам известны двойные звездные системы, состоящие из нейтронной звезды и белого карлика. Эти компактные звезды обращаются по орбите со скоростью более 1000 км/с. Сближение с одним из компонентов такой системы сразу может добавить к скорости зонда около 2000 км/с! Особенно часто такие системы должны встречаться в ядрах шаровых скоплений. Вообще, хотим заметить, что центральные части шаровых звездных скоплений — чрезвычайно привлекательные места для цивилизаций, делающих первые шаги на пути колонизации космоса.

Невидимые разведчики космоса

Современная электроника и микромеханика делают информационные приборы чрезвычайно компактными и энергосберегающими. Сейчас микродатчики и микропроцессоры можно обнаружить в самых неожиданных местах: в телефонной трубке и записной книжке, в авторучке и поздравительной открытке. Микрохирургия близка к тому, чтобы изготавливать диагностические и лечебные аппараты, свободно плавающие

Таблица 3. Характерное время разгона зонда (t) при старте из различных мест и при использовании различных звездных населений Галактики. Принята начальная скорость $v_0 = 100$ км/с. В скобках указаны теоретические оценки исходных величин, без скобок — наблюдательные.

Локализация	Население	n, пк$^{-3}$	σ, км/с	t, лет	$v_{\text{макс}}$, км/с
Окрестности Солнца	Звезды диска	0,1	45	10^5	400
	Звезды гало	0,005	250	$2 \cdot 10^5$	400
	Белые карлики	0,05	50	$2 \cdot 10^5$	5000
	Нейтронные звезды	(10^{-3})	(100)	$4 \cdot 10^5$	10^5
Шаровые скопления	Нормальные звезды	$4 \cdot 10^4$	20	$4 \cdot 10^3$	400
	Белые карлики	$(5 \cdot 10^4)$	20	$3 \cdot 10^3$	5000
	Нейтронные звезды	(10^3)	20	10^4	10^5
Ядро Галактики ($R \approx 1$ пк)	Белые карлики	(10^6)	250	300	5000
	Нейтронные звезды	(10^4)	250	10^3	10^5

в сосудах человеческого организма.

Исследовательская космонавтика, вероятно, пойдет этим же путем. Сейчас трудно представить, что будут когда-нибудь реализованы проекты межзвездных кораблей типа английского «Дедала», для которого требуется построить ракету почти километровой длины с ядерным двигателем. Собрать такую махину можно только на орбите Земли, монтажные работы займут не менее пятнадцати лет. Для полета небольшого экипажа потребуются почти все запасы ядерного топлива, имеющиеся на планете. Лишь тогда эта ракета сможет разогнаться до скорости в несколько тысяч километров в секунду и примерно за сотню лет достичь ближайшей звезды. На одинединственный летательный аппарат уйдет масса ресурсов и сил, стоимость его будет исчисляться триллионами долларов. Вряд ли все это реально.

Более перспективным методом исследования дальнего космоса нам кажется создание множества однотипных, относительно дешевых микрозондов размером не более 1 м и массой порядка 10—100 кг (но не исключено, что и существенно меньше, ибо технология в этой области развивается стремительно). Только при таком подходе энергетических и материальных ресурсов науки будет достаточно для детального исследования Галактики. Имея небольшой размер, микрозонды смогут вторгаться в области относительно плотной межзвездной и межпланетной материи, сближаться с компактными и массивными объектами.

Стратегия исследования Галактики с помощью микрозондов должна составить предмет отдельного разговора. При этом необходимо рассмотреть возможность оптической связи как наиболее предпочтительной на дальних расстояниях, а также возможность возвращения зондов в район старта. Кстати, если подобные зонды, запущенные из других плаиетных систем, время от времени проходят через Солнечную систему, то обнаружить их у нас нет сейчас никакой возможности. Вероятно, в таком же положении окажется большинство предполагаемых «братьев по разуму» в отношении наших зондов. Поэтому подобный способ «микрозондажа» Галактики представляется наиболее безопасным и ответственным по отношению к человечеству.

Алгоритмика простоты

(Начало см. на с. 50)

Инструкция

После включения ПМК набрать БП 53, затем F ПРГ, затем набрать программу (она начинается с шага 53), после чего выполнить F АВТ БП 53. После этого набрать начальное нечетное число в диапазоне от 5 до 99 999 989 и нажать клавишу С/П; после останова ПМК (прекращения мигания) на индикаторе появится ноль. Теперь ПМК ждет набора номера начального простого числа. Если вы ввели простое число с известным номером, то наберите этот номер, в противном случае наберите единицу. Тем самым первому найденному простому числу будет присвоен номер 1, следующему — 2 и т. д.

Остается нажимать С/П и считывать простые числа и их номера. Числа ПМК будет показывать на индикаторе после каждой остановки, а номера — после нажатия клавиши ↔ в момент остановки (после этого можно снова нажимать С/П).

„Квант" улыбается

«Гениальные» изречения учащихся

1. Если масса пули будет больше массы ружья, то оно не выстрелит.

2. После замерзания белье трудно разогнуть, потому что там молекулы замерзли.

3. Сила упорности.

4. Сила тягости.

5. Лужи быстрее высыхают в теплую погоду, потому что тогда увеличивается их скорость.

6. Зимой после работы лошадь накрывают попоной для того, чтобы она не простудилась. Если лошадь простудится, то ее очень трудно лечить, т. к. она не умеет глотать таблетки.

7. Чтобы увеличить изображение предмета, даваемого линзой, надо отодвинуть линзу от фокусного расстояния.

8. Соединение проводников бывает последовательное и поперечное.

9. Из лампы выкачивают воздух и впускают туда вакуум.

10. Южный полюс магнита по правилу левой руки будет расположен к нам лицом.

11. В операционных включают ультрафиолетовые лампы, чтобы не падать в обморок.

12. На борту космического корабля находились собаки Пчелка, Мушка и другие мелкие насекомые.

Собрал А. Хоменко

1. Тлеющий разряд применяется в лампах накаливания.

2. Человек вытесняет из ванны воду объемом, равным весу.

3. Конденсаторы применяются в трансформаторах.

4. Уравнение писать в сантиметрах?

5. Изображение в фотоаппарате прямое, мнимое и увеличенное.

6. ФАРАД — емкость конденсатора, у которого площадь обкладки квадратный метр и расстояние между обкладками 1 метр.

Собрала Н. Патрикеева

Дорогой читатель!

Подписка на годовой комплект журнала «Квант» за 1992 год завершается.
«Квант» в розницу не поступает, поэтому советуем вам подписку не откладывать.
Стоимость одного номера журнала — 1 р. 10 к., периодичность — 12 номеров в год.
Если вы не успеете или не захотите оформить подписку на весь год, вы сможете выписать журнал на любой другой срок и с любого месяца.
Но напоминаем: журнал «Квант» — это не только занимательно.
Регулярная работа с ним — основа ваших будущих успехов на любом поприще, связанном с точными науками!
Подписка на «Квант» принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» — 70465.

Информатика

Новое в электронике

Самым «горячим» компьютером начала 1991 года стал персональный «блокнот», который понимает и воспроизводит в напечатанном виде рукописный текст. О его создании сообщила на пресс-конференции в Сан-Франциско калифорнийская фирма «Гоу» из г. Фостер-сити. Новый персональный компьютер явился плодом секретнейших тридцатилетних работ фирмы по изучению почерка. Средства массовой информации оценили это достижение как революцию в сфере производства «персоналок».

Напомним, что первый настольный компьютер был введен в повседневную рабочую практику офисов в теперь уже далеком 1977 году. Через шесть лет появились первые портативные персоналки, которые можно было брать с собой в самолет, машину, поезд и т. д., продолжая работу и в пути. Пару лет назад появились первые карманные компьютеры с достаточными для повседневной практики возможностями. Но все же прогресс в деле создания персоналок был скорее эволюционным, нежели революционным. На пути постиндустриальной компьютерной революции стояла, как это ни странно, клавиатура. Оказывается, десятки миллионов людей в такой стране как США по своим психо-физиологическим параметрам не могут научиться быстро работать на клавиатуре. Довольно трудно дается это обучение и детям, и пожилым людям. (В подавляющем большинстве своем и мужчины гораздо хуже овладевают клавиатурой, чем женщины, которые доминируют в машинописи.)

Таким образом, на рынке компьютеров вот уже три десятилетия сохранялась обширная «ниша» в десятки миллионов потенциальных потребителей. Электронная промышленность в последние годы пыталась как-то заполнить этот пробел. До «Гоу» на рынок были выброшены «гриды» (что в переводе означает «сетки»), производимые дочерней компанией большой корпорации Tandy. Их было продано около 10 тыс. штук по цене примерно 2,4 тыс. долл. Основными покупателями «грид» были люди, которым приходится часто писать однотипные рецепты, квитанции и заполнять массу другой документации — фармацевты, продавцы, складские менеджеры. Компьютер получил свое название по тончайшей сетке проводников, реагирующих на прикосновение электронного карандаша. Нечто похожее производят в Японии компании «Сони» и «Кэнон».

Однако новый компьютер компании «Гоу» представляет собой, как выразился редактор ведущего журнала американской электронной промышленности «Текнолоджик компьютер леттер» Р. Шаффер, «новый волнующий шанс в развитии компьютерной индустрии». Это действительно совершенно новый по своей концепции 2-килограммовый персональный компьютер размером с большой блокнот или альбом для рисования. Верхняя поверхность «блокнота» — большой дисплей на жидких кристаллах с сеткой проводников, реагирующих на прикосновение электронного «стила» (карандаша). Последний может быть соединен с компьютером проводами или даже быть абсолютно автономным.

Главным преимуществом персоналки «Гоу» является то, что компьютер не требует клавиатуры и «мышки». Если вам необходимо занести какой-то текст в компьютер, то вы просто пишете его от руки на экране карандашом — «стилом». Компьютер сохранит этот текст в памяти и в любой момент выведет его на экран. Если в составленном документе (проекте контракта, заявлении) вам не понравилось какое-то слово или выражение, то вы можете выбросить его из текста, очертив кружком. А ненужное предложение просто вычеркивается.

Новый компьютер очень удобен в редакторской работе, поскольку позволяет пользоваться обычными редакторскими значками. Более того: если вы хотите вставить в отпечатанный на бумаге документ какую-то фразу, то вам необходимо умещать ее в промежутке между строками. С «Гоу» же все проще: вы рисуете на полях маленькую тележку, на которой и «ввозите» то, что вам нужно. Компьютер сам раздвинет строки, чтобы новая фраза встала на место.

«Гоу» разбирается не только в почерках, но и в рисунках. Достаточно изобразить на экране любой рисунок, и он тут же воспроизведет его в чертежно-точном виде. Останется только внести нужные вам исправления и уточнения, и чертеж, причем в стандартном виде, готов.

Пока «Гоу» лишь проходил испытания среди продавцов и других представителей сферы обслуживания, но через два года фирма обещает выбросить на рынок карманные модели. Одновременно для учебных заведений, пресс- и конгресс-центров будут выпускаться компьютеры размером с обычную классную доску. Ожидается, что уже в 1992 году будет продано до четверти миллиона компьютеров типа «Гоу» на общую сумму порядка трех миллиардов долларов.

Новый компьютер представляет собой сочетание всего самого лучшего, что накоплено электронной промышленностью в производстве портативных миникомпьютеров, лазерных проигрывателей для компакт-дисков и программного обеспечения, необходимого для распознавания рисунков и почерков.

Работа с компьютером начинается с его «обучения», которое длится примерно полчаса. За это время компьютер привыкает к вашему почерку. Пока писать приходится «печатными» буквами, но в англоязычных школах уже довольно давно детей обучают именно такому письму.

Помимо букв и линий компьютер распознает также постукивания по экрану и отметки типа «галочек». Например, если документ не умещается на одной странице, то «галочка» в ее конце автоматически «переворачивает страницу». Все это обеспечивается «очень умным» микропроцессором и памятью объемом 4 Мбайта, что примерно в 4 раза больше памяти обычного персонального компьютера.

Под экраном смонтирован дисковод для компактов, а также дополнительные чипы памяти для постоянного хранения данных. В прототипах модели пытались использовать дисководы для гибких носителей информации, но они оказались слишком тяжелыми и шумными. Это вынуждает пользователя «Гоу» подключаться к стандартному компьютеру в офисе или к дисководу для гибких дисков для пересылки программ и документов. Впрочем, подсоединение «Гоу» может быть осуществлено и с помощью обычной телефонной линии.

Со временем новые компьютеры будут иметь встроенные модемы, а более дорогие модели смогут даже принимать и передавать факсы. К середине 90-х годов «Гоу» планирует ввести в свой компьютер контур целлюлярной телефонной связи, что даст возможность пользователю получать и передавать электронные данные в любом месте и любое время, связываясь к кем угодно посредством факсов и телефона.

«Гоу» был создан тремя молодыми учеными, главный из которых — 38-летний С. Каплан, сын манхеттенского адвоката. Он окончил Пенсильванский университет, в котором занимался проблемами искусственного интеллекта, и одно время заведовал отделом программирования в известной компании «Лотус», где разработал популярную программу 1—2—3 для PC. Двум его заместителям — сооснователям компании «Гоу» соответственно 36 и 34 года. Они не побоялись бросить вызов таким гигантам электронного мира как IBM и Microsoft знаменитого на весь мир Билла Гейтса. Microsoft (штаб-квартира которого находится в г. Редмонде, штат Вашингтон) уже десять лет эксплуатирует хорошо зарекомендовавшую себя операционную систему ДОС. «Гоу» использует принципиально новую операционную систему, которую Каплан назвал «Пенпойнт», т. е. «кончик пера».

Новая система особенно легка для понимания и удобна для новичков. При включении компьютера пользователь видит на дисплее набор «досье» или «папок» с набором тех или иных «документов». Достаточно ткнуть стилом в то или иное досье, и перед вами тут же развернется изображение «бумаг». Это можно сравнить с анкетой, в которую необходимо только заглавными буквами внести данные о себе, и после чего документ готов, его остается отправить по электронной почте в соответствующее место.

Microsoft на этот раз отстал от конкурента. Его система подобного рода, которую Б. Гейтс назвал «Пенуиндоуз» — «Окна для пера» — может появиться на рынке только к середине 1992 года. Гейтс считает, что в ходе развития рыночных отношений между двумя конкурентами его фирма обязательно нагонит «возмутителей спокойствия» из Калифорнии. Молодой мультимиллиардер настроен очень агрессивно, однако эксперты полагают, что места на рынке — необъятном и ненасытном — хватит не только им, но еще и другим производителям подобных компьютеров. Компании Каплана решила дать шанс могущественнейшая IBM, так что гегемонии фирмы Microsoft на рынке программ может действительно прийти конец. Среди клиентов «Гоу», помимо IBM, есть и такие известные компании, как Tandy и NCR.

Журнал «PC Letter» в лице своего редактора С. Элсопа назвал разворачивающуюся «лихорадку» одним из тех «магических моментов, которые показывают, что американская электронная индустрия показывает себя с самой лучшей стороны». Большой интерес к сообщению проявили японцы, считающие переход к компьютерам типа «Гоу» вполне естественным шагом, который должны будут обязательно сделать и они. Таким образом, ожидается новый виток мощной конкуренции, без которой просто невозможен прогресс в такой области как компьютеры. И эта конкурентная борьба всем на пользу.

Американцы потеснили японцев и в области чипов. Речь идет о новом успехе компании Texas Instruments, которая сообщила, что первой стала оснащать свои компьютеры чипами «динамической памяти с рандомизированным доступом» (ДПР) объемом 16 Мбит, что позволяет уместить на одном чипе более полутора тысяч страниц машинописного текста.

Японские чипы, которые абсолютно доминируют на рынке, имеют стандартный объем всего 4 Мбита. Четыре японские фирмы заявили вслед за американцами, что они тоже выбросят на рынок чипы 16 Мбит в первой четверти 1991 года, однако крупномасштабное производство смогут развернуть лишь в 1992 году. Таким образом, темп развития и в этой области ускорился: ранее 4-кратное увеличение объема памяти достигалось за три года, теперь же — всего за два. Эксперты оценивают емкость рынка подобных чипов памяти к 1993 году в 30 миллиардов штук.

И. Лалаянц
(По материалам Fortune 91, 11, II)

СВЕТ БЫЛОГО

(фантастический рассказ)

БОБ ШОУ

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практичный изобретатель» (М.: Мир, 1974).

Деревня осталась позади, и вскоре крутые петли шоссе привели нас в край медленного стекла.

Мне ни разу не приходилось бывать на таких фермах, и вначале они показались мне жутковатыми, а воображение и обстоятельства еще усиливали это впечатление. Турбодвигатель нашей машины работал ровно и бесшумно, не нарушая безмолвия сыроватого воздуха, и мы неслись по серпантину шоссе, среди сверхъестественной тишины. Справа, по горным склонам, обрамлявшим немыслимо красивую долину, в темной зелени могучих сосен, вбирая свет, стояли огромные рамы с листами медленного стекла. Лучи вечернего солнца порою вспыхивали на растяжках, и казалось, будто там кто-то ходит. Но на самом деле вокруг было полное безлюдье. Ряды этих окон годами стояли на склонах над долиной, и люди приходили протирать их только изредка в глухие часы ночи, когда ненасытное стекло не могло запечатлеть их присутствия.

Зрелище было завораживающее, но и я, ни Селина ничего о нем не сказали. Мне кажется, мы ненавидели друг друга с таким неистовством, что не хотелось портить новые впечатления, бросая их в водоворот наших эмоций. Я все острее ощущал, что мы напрасно затеяли эту поездку. Прежде я полагал, что нам достаточно будет немного отдохнуть, и все встанет на свое место. И вот мы отправились путешествовать. Но ведь в положении Селины это ничего не меняло, и (что было еще хуже) беременность продолжала нервировать ее.

Пытаясь найти оправдание тому, что ее беременность так вывела нас из равновесия, мы говорили все, что обычно говорят в таких случаях: нам, конечно, очень хочется иметь детей, но только позже, в более подходящее время. Ведь Селина из-за этого должна была оставить хорошо оплачиваемую работу, а вместе с ее заработком мы лишались и нового дома, который совсем было собрались купить,— приобрести его на то, что я получал за свои стихи, было, разумеется, невозможно. Однако в действительности наше раздражение объяснялось тем, что нам против воли пришлось осознать следующую неприятную истину: тот, кто говорит, что хочет иметь детей, но только позже, на самом деле совсем не хочет ими обзаводиться — ни теперь, ни после. И нас бесило сознание, что мы попали в извечную биологическую ловушку, хотя всегда считали себя особенными и неповторимыми.

Шоссе продолжало петлять по южным склонам Бенкрейчена, и время от времени впереди на мгновение открывались далекие серые просторы Атлантического океана. Я притормозил, чтобы спокойно полюбоваться этой картиной, и тут увидел прибитую к столбу доску. Надпись на ней гласила: «Медленное стекло. Качество высокое, цены низкие. Дж. Р. Хейген». Подчинившись внезапному побуждению, я остановил машину у обочины. Жесткие стебли травы царапнули по дверце, и я сердито поморщился.

— Почему ты остановился? — спросила Селина, удивленно повернув ко мне лицо, обрамленное платиновыми волосами.

— Погляди на это объявление. Давай сходим туда и посмотрим. Вряд ли в такой глуши за стекло просят особенно дорого.

Селина возразила насмешливо и зло, но меня так захватила эта мысль, что я не стал слушать. У меня было нелепое ощущение, что нам нужно сделать что-то безрассудное и неожиданное. И тогда все утрясется само собой.

— Пошли,— сказал я.— Нам полезно размять ноги. Мы слишком долго сидели в машине.

Селина так пожала плечами, что у меня на душе сразу стало скверно, и вышла из машины. Мы начали подниматься по крутой тропе, по вырезанным в склоне ступенькам, которые были укреплены колышками. Некоторое время тропа вилась между деревьями, а потом мы увидели одноэтажный каменный домик. Позади него стояли высокие рамы с медленным стеклом, повернутые к великолепному отрогу, отражающемуся в водах Лох-

Линна. Почти все стекла были абсолютно прозрачны, но некоторые казались панелями отполированного черного дерева.

Когда мы вошли в аккуратно вымощенный двор, нам помахал рукой высокий пожилой мужчина в сером комбинезоне. Он сидел на низкой изгороди, курил трубку и смотрел на дом. Там у окна стояла молодая женщина в оранжевом платье, держа на руках маленького мальчика. Но она тут же равнодушно повернулась и скрылась в глубине комнаты.

— Мистер Хейген? — спросил я, когда мужчина слез с изгороди.

— Он самый. Интересуетесь стеклом? Тогда лучше места вам не найти.— Хейген говорил деловито, с интонациями и легким акцентом шотландского горца. У него было невозмутимо унылое лицо, какие часто встречаются у пожилых землекопов и философов.

— Да,— сказал я.— Мы путешествуем и прочли ваше объявление.

Селина, хотя обычно она легко заговаривает с незнакомыми людьми, ничего не сказала. Она смотрела на окно, теперь пустое, с легким недоумением — во всяком случае, так мне показалось.

— Вы ведь из Лондона? Ну, как я сказал, лучшего места вы выбрать не могли, да и времени тоже. Сезон еще не начался, и нас с женой в это время года мало кто навещает.

Я рассмеялся.

— То есть мы сможем купить небольшое стекло, не заложив последнюю рубашку?

— Ну вот! — сказал Хейген с виноватой улыбкой.— Опять я сам все испортил! Роза, то есть моя жена, говорит, что я никогда не научусь торговать. Но все-таки садитесь и потолкуем,— он указал на изгородь, а потом с сомнением поглядел на отглаженную голубую юбку Селины и добавил: — Погодите, я сейчас принесу коврик.

Хейген, прихрамывая, вошел в дом и закрыл за собой дверь.

— Может быть, нам и незачем было забираться сюда,— шепнул я Селине,— но ты все-таки могла бы держаться с ним полюбезнее. По-моему, мы можем рассчитывать на выгодную покупку.

— Держи карман шире,— ответила она с нарочитой вульгарностью.— Даже ты мог бы заметить, в каком доисторическом платье расхаживает его жена. Он не станет благодетельствовать незнакомых людей.

— А это была его жена?

— Конечно, это была его жена.

— Ну-ну,— сказал я с удивлением.— Только ты все равно постарайся быть вежливой. Не ставь меня в глупое положение.

Селина презрительно фыркнула. Когда Хейген вышел из дома, она очаровательно улыбнулась, и меня немного отпустило. Странная вещь — мужчина может любить женщину и в то же время от души желать, чтобы она попала под поезд.

Хейген расстелил плед на изгороди, и мы сели, чувствуя себя несколько неловко в этой классической сельской позе.

Далеко внизу, за рамами с бессонным медленным стеклом, неторопливый пароходик чертил белую полосу по зеркалу озера.

Буйный горный воздух словно сам рвался в наши легкие, перенасыщая их кислородом.

— Кое-кто из тех, кто растил здесь стекло,— начал Хейген,— расписывает приезжим вроде вас, до чего красива осень в этой части Аргайла. Или там весна, или зима. А я обхожусь без этого — ведь любой дурак знает, что место, которое летом некрасиво, никогда не бывает красивым. Как, по-вашему?

Я послушно кивнул.

— Вы просто хорошенько поглядите на озеро, мистер...

— Гарленд.

— ...Гарленд. Вот что вы купите, если вы купите мое стекло. И красивее, чем сейчас, оно не бывает. Стекло в полной фазе, толщина не меньше десяти лет, и полуметровое окно обойдется вам в двести фунтов.

— Двести фунтов! — Селина была возмущена.— Даже в магазине пейзажных окон на Бонд-стрит стекла не стоят так дорого.

Хейген улыбнулся терпеливой

улыбкой, а затем внимательно посмотрел на меня, проверяя, достаточно ли я разбираюсь в медленном стекле, чтобы в полной мере оценить его слова. Сумма, которую он назвал, была гораздо больше, чем я ожидал, но ведь речь шла о десятилетнем стекле! Дешевое стекло в магазинчиках вроде «Панорамплекса» или «Стекландшафта» — это самое обычное полуторасантиметровое стекло с накладной пластинкой медленного стекла, которой хватает на год, а то и всего на десять месяцев.

— Ты не поняла, дорогая,— сказал я, уже твердо решив купить.— Это стекло сохранится десять лет, и оно в полной фазе.

— Но ведь «в фазе» значит только, что оно соответствует данному времени?

Хейген снова улыбнулся ей, понимая, что меня ему убеждать незачем.

— Только! Простите, миссис Гарленд, но вы, по-видимому, не отдаете себе отчета, какая чудесная, в буквальном смысле слова чудесная, точность нужна для создания стекла в полной фазе. Когда я говорю, что стекло имеет толщину в десять лет, это означает, что свету требуется десять лет, чтобы пройти сквозь него. Другими словами, каждое из этих стекол имеет толщину в десять световых лет, а это вдвое больше расстояния до ближайшей звезды. Вот почему уклонение в реальной толщине на одну миллионную долю сантиметра приводит...— он вдруг замолчал, глядя в сторону дома. Я отвернулся от озера и снова увидел в окне молодую женщину. В глазах Хейгена я заметил жадную тоску, которая смутила меня и одновременно убедила, что Селина ошиблась. Насколько мне известно, мужья никогда так не смотрят на жен — во всяком случае, на своих собственных.

Молодая женщина оставалась у окна лишь несколько секунд, а затем теплое оранжевое пятно снова исчезло в глубине комнаты. Внезапно у меня, не знаю почему, возникло совершенно четкое ощущение, что она слепа. По-видимому, мы с Селиной случайно стали свидетелями эмоциональной ситуации, столь же напряженной, как наша собственная.

— Извините,— сказал Хейген,— мне показалось, что Роза меня зовет. Так на чем я остановился, миссис Гарленд? Десять световых лет, сжатые в половину сантиметра, неминуемо...

Я перестал слушать, отчасти потому, что твердо решил купить стекло, а отчасти потому, что уже много раз слышал объяснения свойств медленного стекла — и все равно никак не мог понять его принципа. Один мой знакомый физик как-то посоветовал мне для наглядности представить себе лист медленного стекла как голограмму, которой для воссоздания визуальной информации не требуется лазерного луча и в которой каждый фотон обычного света проходил сквозь спиральную трубку, лежащую вне радиуса захвата любого из атомов стекла. Эта, на мой взгляд, жемчужина неудобопонимаемости не только ничего мне не объяснила, но и еще сильнее убедила меня в том, что человеку, столь мало склонному к технике, как я, следует интересоваться не причинами, а лишь результатами.

Наиболее же важный результат, на взгляд среднего человека, заключался в том, что свету, чтобы пройти сквозь лист медленного стекла, требовался большой срок. Новые листы были всегда угольно-черными, потому что ни единый луч света еще не прошел сквозь них. Но когда такое стекло ставили, например, возле лесного озера, это озеро в нем появлялось. И если затем стекло вставлялось в окно городской квартиры где-нибудь в промышленном районе, то в течение года из этого окна словно открывался вид на лесное озеро. И это была не просто реалистичная, но неподвижная картина — нет, по воде, блестя на солнце, бежала рябь, животные бесшумно приходили на водопой, по небу пролетали птицы, ночь сменяла день, одно время года сменяло другое. А через год красота, задержанная в субатомных каналах, исчерпывалась, и в раме возникала знакомая серая улица.

Коммерческий успех медленного стекла объясняется не только его новизной, но и тем, что оно создавало полную эмоциональную иллюзию, будто все это принадлежит тебе. Ведь владелец ухоженных садов и вековых парков не занимается тем, что ползает по своей земле, щупая и нюхая ее. Он воспринимает ее как определенное сочетание световых лучей; с изобретением стекла появилась возможность переносить эти сочетания в угольные шахты, подводные лодки, тюремные камеры.

Несколько раз я пытался выразить в стихах свое восприятие этого волшебного кристалла, но для меня эта тема исполнена такой глубочайшей поэзии, что, как ни парадоксально, воплотить ее в стихи невозможно. Во всяком случае, мне это не по силам. К тому же все лучшие песни и стихотворения об этом уже написаны людьми, которые умерли задолго до изобретения медленного стекла. Например, ведь не мог же я превзойти Мура с его

Когда, не зная сна, лежу
В плену безмолвия ночного,
Я счастье давнее бужу,
И мне сияет свет былого.

Потребовалось всего несколько лет, чтобы медленное стекло из технической диковинки превратилось в товар широкого потребления. И к большому удивлению поэтов — то есть тех из нас, кто верит, что красота живет, хоть розы увядают,— став товаром, медленное стекло приобрело все свойства товара. Появились хорошие стекландшафты, которые стоили очень дорого, и стекландшафты похуже, которые стоили много дешевле. Цена в первую очередь определялась толщиной, измеряемой годами, но значительную роль при ее установлении играла и реальная толщина, или фаза.

Даже самое сложное и новейшее оборудование не могло обеспечить постоянного достижения точно заданной толщины. Грубое расхождение означало, что лист стекла, рассчитанный на пятилетнюю толщину, на самом деле получал толщину в пять лет с половиной, так что свет, попадавший в стекло летом, покидал его зимой. Не столь грубая ошибка могла привести к тому, что полуденное солнечное сияние загоралось в стекле в полночь. В таких несоответствиях была своя прелесть — многим из тех, кто работает по ночам, например, нравилось существовать в своем собственном времени — но, как правило, стекландшафты, которые точнее соответствовали реальному времени, стоили дороже.

Хейген замолчал, так и не убедив Селину. Она чуть заметно покачала головой, и я понял, что он не нашел к ней правильного подхода. Внезапно платиновый шлем ее волос всколыхнулся от удара холодного ветра, и с почти безоблачного неба на нас обрушились крупные прозрачные капли дождя.

— Я оставлю вам чек,— сказал я резко, и зеленые глаза Селины сердито сфокусировались на моем лице.— Вы сможете переслать стекло мне?

— Переслать-то нетрудно,— сказал Хейген, соскользнув с изгороди.— Но может, вам будет приятнее взять его с собой?

— Да, конечно, если это не доставит вам хлопот,— я был пристыжен его безоговорочной готовностью принять мой чек.

— Я пойду выну для вас лист. Подождите здесь. Я сейчас, вот только вставлю его в раму для перевозки.

Хейген зашагал вниз по склону к цепочке окон — в некоторых из них виднелось озеро, залитое солнцем, в других над озером клубился туман, а два-три были совершенно черными.

Селина стянула у горла воротник блузки.

— Он мог хотя бы пригласить нас в дом! Уж если к нему завернул идиот, он мог бы быть полюбезнее.

Я пропустил эту шпильку мимо ушей и начал заполнять чек. Огромная капля упала мне на палец, и брызги разлетелись по бумаге.

— Ну, ладно,— сказал я.— Постоим на крыльце, пока он не вернется.

«Крыса,— думал я, чувствуя, что все получилось совсем не так.— Да, конечно, я был идиотом, раз женился на тебе... Призовым идиотом, идиотом из идиотов... А теперь, когда ты носишь в себе частицу меня, мне уже никогда, никогда не вырваться».

Чувствуя, как внутри меня все сжимается, я бежал рядом с Селиной к домику. Чистенькая комнатка за окном, где топился камин, была пуста, но на полу валялись в беспорядке детские игрушки. Кубики с буквами и маленькая тачка цвета очищенной моркови. Пока я смотрел, в комнату вбежал мальчик и принялся ногами расшвыривать кубики. Нас он не заметил. Несколько секунд спустя в комнату вошла молодая женщина и подхватила мальчика на руки, весело смеясь. Она, как и раньше, подошла к окну. Я смущенно улыбнулся, но ни она, ни мальчик не ответили на мою улыбку.

У меня по коже пробежали мурашки. Неужели они оба слепы? Я тихонько попятился.

Селина вскрикнула. Я обернулся к ней.

— Коврик! — сказала она.— Он намокнет.

Перебежав двор под дождем, она сдернула с изгороди рыжеватый плед и побежала назад, прямо к двери дома. Что-то конвульсивно всколыхнулось у меня в подсознании.

— Селина! — закричал я.— Не входи туда!

Но я опоздал. Она распахнула деревянную дверь, заглянула внутрь и остановилась, прижав ладонь ко рту. Я подошел к ней и взял плед из ее безвольно разжавшихся пальцев.

Закрывая дверь, я обвел взглядом внутренность домика. Чистенькая комната, в которой я только что видел женщину с ребенком, была заставлена колченогой мебелью, завалена старыми газетами, рваной одеждой, грязной посудой. В комнате стояла сырая вонь, и в ней никого не было. Единственный предмет, который я узнал, была маленькая тачка — сломанная, с облупившейся краской.

Я закрыл дверь на щеколду и приказал себе забыть то, что я видел. Некоторые мужчины содержат дом в порядке и когда живут одни. Другие этого не умеют.

Лицо Селины было белым как полотно.

— Я не понимаю... не понимаю...

— Медленное стекло, но двухстороннее,— сказал я мягко.— Свет проходит через него и в дом и из дома.

— Ты думаешь?..

— Не знаю. Нас это не касается. А теперь возьми себя в руки. Вон идет Хейген со стеклом.— Судорога ненависти, сжимавшая мои внутренности, вдруг исчезла.

Хейген вошел во двор, держа под мышкой прямоугольную раму, запакованную в клеенку. Я протянул ему чек, но он глядел на Селину. Он, по-видимому, сразу понял, что наши бесчувственные пальцы рылись в его душе. Селина отвела взгляд. Она вдруг стала старой и некрасивой и упрямо всматривалась в горизонт.

— Позвольте взять у вас коврик, мистер Гарленд,— сказал, наконец, Хейген.— Вы напрасно затруднялись.

— Ничего. Вот чек.

— Благодарю вас.— Он все еще смотрел на Селину со странным выражением мольбы.— Спасибо за покупку.

— Спасибо вам,— ответил я такой же стереотипной фразой, с той же бессмысленной вежливостью.

Я взял тяжелую раму и повел Селину к тропе, по которой нам предстояло спуститься на шоссе. Когда мы добрались до первой смоченной дождем и скользкой ступеньки, Хейген окликнул меня:

— Мистер Гарленд!

Я неохотно оглянулся.

— Я ни в чем не виноват,— сказал он ровным голосом.— Их обоих сшиб грузовик на шоссе шесть лет назад. Шофер был пьян. Моему сыну только исполнилось семь. Я имею право сохранить хоть что-то.

Я молча кивнул и начал спускаться по лестнице, крепко обнимая жену, радуясь ощущению ее руки у меня на плече. Перед поворотом я оглянулся и за струями дождя заметил, что Хейген, ссутулившись, сидит на изгороди там, где мы увидели его, когда вошли во двор.

Он смотрел в сторону дома, но я не мог различить, виднеется ли что-нибудь в окне.

Перевод с английского И. Гуровой

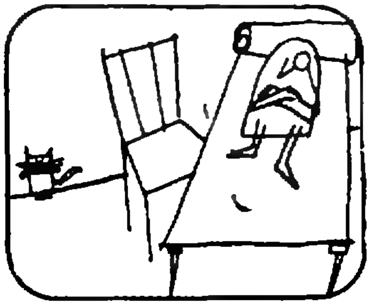
Игры и головоломки

Перед вами — небольшой отрывок из книги замечательного американского популяризатора Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М., Мир, 1982). В ней собраны занимательные задачи, заставляющие читателя искать нестандартные решения.

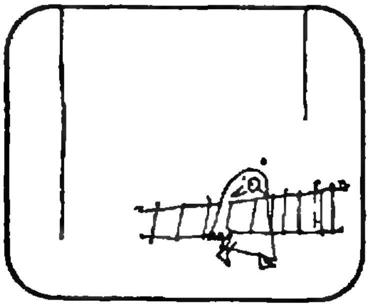
Аховы тесты

М. Гарднер

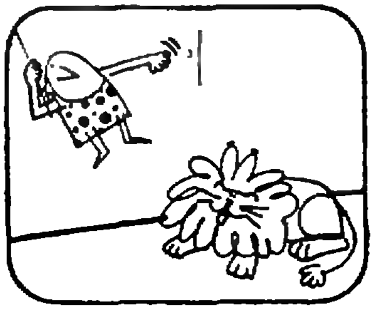
Полиция обратилась за помощью к известному специалисту по решению головоломок, профессору психологии Аху. Свои необычайно остроумные решения он назвал «феноменами Ах» и предложил множество тестов, позволяющих выявлять «феномены Ах» у испытуемых.



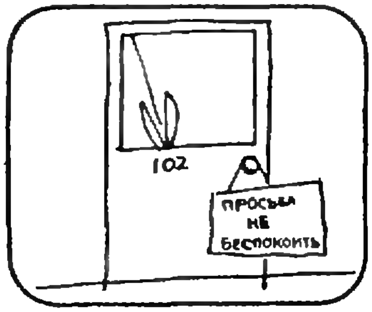
Один из его тестов осуществляется с помощью двух веревок, свисающих с потолка в пустой комнате.



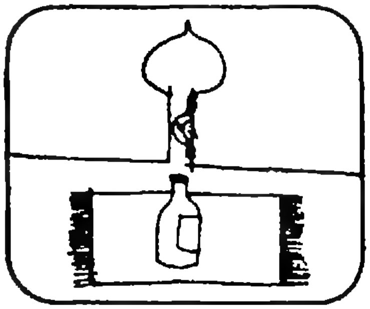
Проф. Ах. Расстояние между этими веревками достаточно велико, поэтому, держась за одну веревку, невозможно дотянуться до другой.



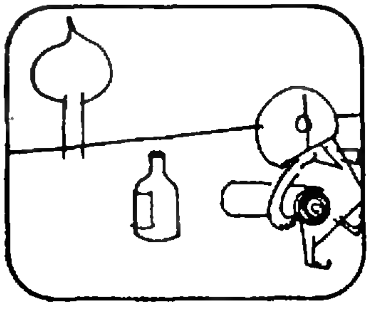
Проф. Ах. Задача состоит в том, чтобы связать свободные концы веревок, не пользуясь ничем, кроме ножниц.
Справитесь ли вы с этим тестом?



Проф. Ах. А вот еще один тест, который я также очень люблю. В центре небольшого восточного ковра я ставлю открытую бутылку пива. Требуется достать ее, сняв с ковра.

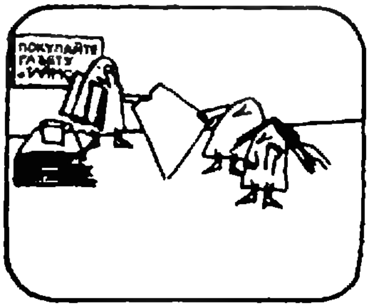


Проф. Ах. К бутылке нельзя прикасаться ни рукой, ни ногой, ни любой другой частью тела или каким-нибудь предметом. Разумеется, проливать пиво на ковер также не разрешается. Если вы не справитесь с этим тестом, может быть, следующий тест покажется вам более простым.



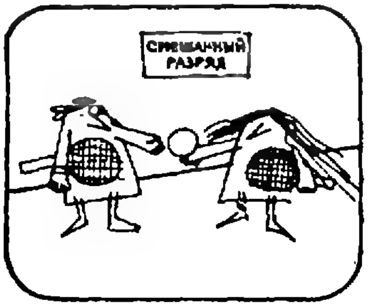
Проф. Ах. Для этого теста нам понадобится газета. Вы с приятелем должны встать на газетный лист так, чтобы ни один из вас не мог прикоснуться к другому. Сходить с газеты не разрешается.

Покажите, на что вы способны. Это ваш последний шанс успешно справиться с одним из тестов проф. Аха.



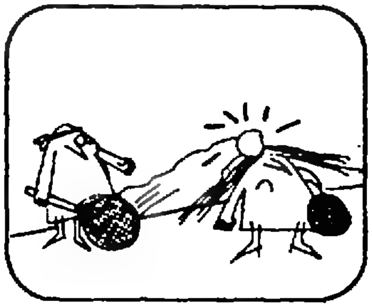
Когда проф. Ах предложил последний тест одной из студенток, она не только справилась с заданием, но и предложила профессору свой тест.

Студентка. Уважаемый профессор! Не могли бы вы бросить теннисный мяч так, чтобы он, пролетев короткое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?



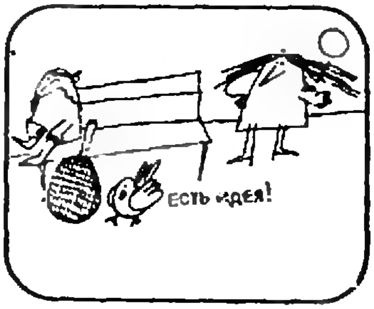
Проф. Ах. Может ли мяч стукнуться о препятствие?

Студентка. Ни в коем случае! Не разрешается также ударять мяч чем-нибудь или привязывать его к чему-нибудь.



После того как проф. Ах признал свое поражение, студентка показала ему, как решается задача. Решение оказалось удивительно простым.

Проф. Ах. И как я только об этом не подумал! О чем не подумал проф. Ах?



Еще несколько тестов. Чтобы помочь вам в развитии «феномена Ах», приведем еще пять задач-тестов:

1. Можете ли вы бросить на пол с высоты 1 м картонную спичку так, чтобы она упала на ребро?

2. Рабочие смешивают известь с песком и цементом для заделки швов между бетонными блоками в фундаменте здания. В одном из блоков узкий прямоугольный канал глубиной 2 м. В этот канал случайно падает вывалившийся из гнезда птенец. Отверстие слишком узко, чтобы в него можно было просунуть руку, впрочем, достать до дна канала все равно было бы невозможно. Не могли бы вы предложить простой и надежный способ, позволяющий в целости и сохранности извлечь птенца из канала в бетонном блоке?

3. К крюку в потолке на нити длиной около 2 м подвешена кофейная чашка. Можете ли вы перерезать нить ножницами посредине так, чтобы чашка не упала на пол? Держать нить, пока вы ее перерезаете, или чашку запрещается.

4. В плотине недостает одного кирпича. Через образовавшуюся брешь размером 5 см × × 20 см льется вода. Обнаруживший течь голландец имеет при себе пилу и цилиндрический деревянный шест диаметром 50 мм. Как ему лучше всего распилить шест, чтобы заткнуть брешь?

5. Нижняя часть винной бутылки имеет форму цилиндра. Высота ее составляет 3/4 высоты бутылки. Верхняя четверть бутылки, состоящая из горлышка и плавного перехода к нижней части, имеет неправильную форму. В бутылку до середины ее налита жидкость. Открывать бутылку запрещается. Можете ли вы, пользуясь только линейкой, точно определить, какая часть объема бутылки заполнена жидкостью?

Перевод с английского Ю. Данилова

*Иллюстрации канадского графика
Дж. Глена*

Задачи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады

8 класс

1. Докажите, что если $a>b>c$, то

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0.$$

И. Сергеев

2. По данным точкам A и B на плоскости требуется построить точку C, симметричную точке A относительно B. Можно ли это сделать, пользуясь одним лишь циркулем неизменного раствора r, если а) $AB<2r$, б) $AB\geqslant 2r$?

И. Сергеев

3. Для круглосуточной охраны объекта нужно установить дежурство на посту в две смены: дневную и ночную. Дежурный может отработать дневную или ночную смену, или же сутки подряд. В первом случае ему предоставляется отдых не менее 1 суток, во втором — не менее 1,5 суток, в третьем — не менее 2,5 суток. Какое наименьшее количество дежурных необходимо при этих условиях?

И. Сергеев

4. Имеется шесть одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г». Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить правильность всех шести надписей?

С. Токарев

5. Между двумя странами установлено авиационное сообщение так, что любые два города из разных стран соединены ровно одним авиарейсом и только в одну сторону, причем из каждого города можно куда-нибудь вылететь. Докажите, что найдутся четыре города A, B, C, D, которые можно посетить, перелетая непосредственно из A в B, из B в C, из C в D, из D в A.

М. Гринчук

9 класс

1. Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+\ldots+x^{10})=(1+x+\ldots+x^6)^2.$$

А. Галочкин

2. Колоду из а) 36, б) 54 карт фокусник разложил на несколько кучек и на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем он специальным образом перемешал карты, опять разложил их на кучки и написал на каждой карте справа от первого числа — второе, равное количеству карт в новой кучке. Мог ли фокусник добиться того, чтобы среди пар чисел, записанных на картах, не было одинаковых пар, но для каждой пары (m, n) можно было найти пару (n, m)?

А. Скопенков

3. Докажите, что в правильном 12-угольнике $A_1A_2\ldots A_{12}$ диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} пересекаются в одной точке.

С. Токарев

4. Дан график функции $y=\frac{1}{x}$ при $x>0$, а оси координат — стерты. Как с помощью циркуля и линейки восстановить стертые оси, если даже их направления заранее не известны?

И. Сергеев

5. В клетках таблицы 15×15 расставлены ненулевые числа так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что все числа в таблице положительны.

С. Токарев

10 класс

1. Функция $f(x)$ при каждом значении $x\in(-\infty, \infty)$ удовлетворяет равенству

$$f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot f(1-x)=1.$$

а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.

б) Найдите все такие функции $f(x)$.

Б. Кукушкин

2. Какое количество n из 16 одинаковых биллиардных шаров можно расположить в пространстве так, чтобы каждый шар касался ровно трех других? Перечислите все возможные значения n.

А. Спивак

3. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

И. Шарыгин

4. Куб размером $10\times 10\times 10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1\times 1\times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

А. Спивак

5. Колоду из 54 карт фокусник разложил на несколько кучек, а зритель на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем фокусник специальным образом перемешал карты и еще

раз разложил их на кучки, а зритель написал на каждой карте еще одно число, равное количеству карт в новой кучке, и т. д. При каком наименьшем количестве раскладок фокусник мог добиться того, чтобы на разных картах оказались разные множества чисел (как бы ни располагал их зритель на карте)?

А. Скопенков

11 класс

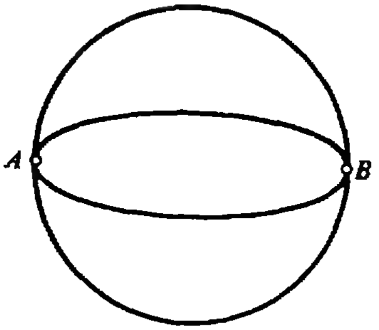
4. Между какими двумя девятками в записи $\underbrace{199\ldots991}_{1991\ \text{девятка}}$ нужно поставить знак:

а) «+», чтобы полученная сумма была наименьшей;

б) «×», чтобы полученное произведение было наибольшим?

А. Галочкин, С. Конягин

2. На рисунке дана ортогональная проекция земного шара с экватором (A и B — общие точки проекции экватора с окружностью). Как с помощью циркуля и линейки найти проекцию северного полюса?



А. Макаров

3. Докажите, что в правильном 54-угольнике найдутся четыре диагонали, не проходящие через его центр и пересекающиеся в одной точке (отличной от вершины).

С. Токарев

4. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, проследив за тем, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?

И. Сергеев

5. На прямоугольном экране размером $m \times n$, разбитом на единичные клетки, светится более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате 2×2 не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

А. Часовских

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1991 года

Много лет на базе физического факультета МГУ им. М. В Ломоносова проводится Московская городская олимпиада по физике для школьников 8—11 классов. Из ее победителей формируется команда г. Москвы на Всесоюзную олимпиаду.

Московская городская олимпиада по физике проводится в четыре этапа:

1. Районный тур. В нем участвует ежегодно до 4 тысяч школьников.

2. I городской тур. На этот тур приглашаются около четверти участников районных туров, показавших наиболее высокие результаты.

3. II городской тур. Это наиболее сложный этап. Задачи, которые предлагаются на этом туре, требуют умения находить решения сложных нестандартных физических ситуаций.

4. И наконец, последний этап — экспериментальный тур. На него приглашаются претенденты на дипломы I и II степени (около 40 человек).

Все задачи для олимпиады составляются научными сотрудниками, преподавателями, аспирантами и студентами физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, входящими в состав жюри олимпиады. В работе жюри участвуют также научные сотрудники из других вузов и академических институтов Москвы (МИРЭА, ФИАНа и др.).

Награждение победителей олимпиады происходит на «Дне открытых дверей» на физическом факультете МГУ. В последние два года победители награждаются также специальными призами Физического общества СССР. Недавно по инициативе Физического общества СССР и жюри Московской олимпиады решено проводить соревнования по физике между победителями Московских олимпиад и иностранными школьниками. В отличие от традиционных Международных олимпиад, в которых принимают участие одновременно школьники из многих стран мира, такие соревнования будут парными: советско-финские, советско-венгерские и т. д. Это позволит значительно большему числу московских школьников принять участие в международных соревнованиях. Первый такой турнир (советско-финский) состоится в октябре-ноябре 1991 года в Москве, а ответный — в апреле 1992 года в Финляндии.

Ниже мы предлагаем вам попробовать свои силы в решении некоторых задач, предлагавшихся на олимпиаде в этом году.

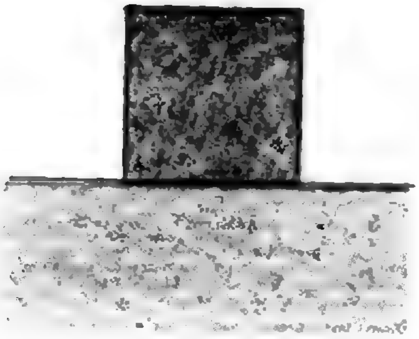


Рис. 1.

9 класс

1. Тело массой m находится на дне сосуда, заполненного очень вязкой жидкостью. Ему сообщили скорость v_0, направленную вертикально вверх. Найдите время, через которое тело опустится на дно, если сила сопротивления, действующая на него со стороны жидкости, равна $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость тела, $\alpha \gg mg/v_0$. Тело при движении все время находится в жидкости. Архимедовой силой пренебречь. (I тур)

2. Во время сильного снегопада лыжник, бегущий по полю со скоростью $v = 20$ км/ч, заметил, что в рот ему попадает $N_1 = 50$ снежинок в минуту. Повернув обратно, он обнаружил, что в рот попало $N_2 = 30$ снежинок. Оцените дальность прямой видимости в снегопад, если площадь рта спортсмена $S = 24$ см^2, а размер снежинки $l = 1$ см. (I тур)

3. Однородное бревно квадратного сечения размером $a \times a$ и длиной $L \gg a$ в исходном состоянии держат параллельно поверхности воды так, что оно касается воды своей гранью (рис. 1). Плотность бревна равна половине плотности воды. Бревно отпускают. Найдите количество теплоты, которое выделится, пока система не придет в равновесие. (II тур)

10 класс

4. Заряженная частица совершает одномерное движение в постоянном электрическом поле. Свое движение частица начинает из точки x_0 с начальной скоростью v_0. Может ли зависимость ее координаты от времени иметь вид

$$x(x_0, v_0, t) = x_0 + v_0 t + a(x_0)t^3,$$

где $a(x_0)$ — функция, зависящая только от x_0 и не обращающаяся тождественно в нуль? (I тур)

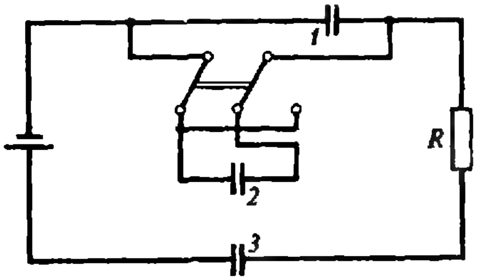


Рис. 2.

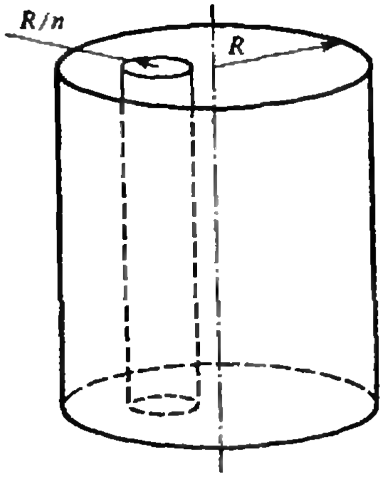


Рис. 3.

5. Какое количество теплоты выделится в схеме, изображенной на рисунке 2, при переключении ключа из левого положения в правое? Суммарный заряд на обкладках 1, 2, 3 вначале равнялся нулю. Емкости всех конденсаторов равны C. (II тур)

11 класс

6. Длинная сверхпроводящая цилиндрическая катушка индуктивностью L и радиусом R, по которой течет ток I, замкнута накоротко (рис. 3). Витки катушки намотаны густо, так что можно считать, что поле внутри катушки однородно, а вне ее равно нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы внести в катушку из бесконечности сверхпроводящий цилиндрический образец, радиус которого равен R/n, а длина равна длине катушки? Оси катушки и образца параллельны. (I тур)

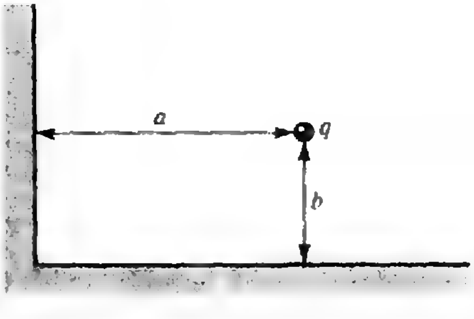


Рис. 4.

7. Две проводящие полуплоскости образуют прямой угол. Точечный заряд q находится на расстояниях a и b от каждой из сторон угла (рис. 4). Найдите энергию взаимодействия заряда с проводниками. (II тур)

Публикацию подготовил В. Степанюк

Испанская математическая олимпиада 1990 года

Первый день

1. Пусть a, b и c — стороны прямоугольного треугольника. Докажите, что если эти числа — целые, то их произведение abc делится на 30.

2. Полусфера лежит на столе плоской частью вниз, ее радиус равен 1. Шесть сфер радиуса r расположены так, что каждая из них касается полусферы, стола и двух соседних сфер. Найдите r.

3. Уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$, $c\neq 0$, имеет три различных корня, составляющих арифметическую прогрессию. Найдите b и c как функции от a.

4. Последовательность $\{a_n\}$, $n\geqslant 1$, комплексных чисел определяется соотношением

$$a_n=(1+i)\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\dots\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Существует ли натуральное число m такое, что

$$\sum_{n=1}^{m}|a_n-a_{n+1}|=1990?$$

Второй день

5. В окружность вписаны правильные пятиугольник, шестиугольник и десятиугольник. Покажите, что треугольник, который имеет своими сторонами стороны этих многоугольников, является прямоугольным.

6. Определим числа A_n, как произведение всех натуральных чисел, кратных n и не больших 1000. (Например, $A_3=3\cdot 6\cdot 9\dots 999$). Найдите наибольший общий делитель чисел $A_2, A_3, \dots, A_{31}, A_{32}$.

7. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\cos a_1x+\cos a_2x,$$

где a_1 и a_2 — вещественные числа, отличные от нуля. Покажите, что существует по крайней мере одно число x_0 такое, что $f(x_0)<0$.

8. Пусть BM — медиана, BD — биссектриса треугольника ABC, и BN — прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы (точки M, D и N лежат на отрезке AC). Покажите, что

$$\frac{AN}{NC}=\frac{c^2}{a^2},$$

где $a=BC$, $c=AB$ — длины сторон треугольника ABC.

Публикацию подготовил А. Савин

Ответы, указания, решения

Полеты в струе и наяву

1. В опыте Галилея мушкетная пуля и ядро достигали земли практически одновременно. Скорость тел вблизи земли около 30 м/с, время падения около 3,5 с. Однако, если бы Галилей фиксировал интервалы времени более короткие, скажем порядка 10^{-2} с, он заметил бы, что мушкетная пуля чуть-чуть отстает от ядра: относительный вклад сопротивления воздуха для падающей пули больше, чем для ядра.

2. В $\sqrt[4]{1,5}\approx 1,15$ раза.

5. Если, не изменяя течение струи, добавить в нее небольшое количество красителя, например чернила или марганцовку, то видно, что под шариком течение носит хаотический, турбулентный характер.

6. Коэффициент C_x сильно зависит от ориентации ложки относительно направления струи.

7. Если в воздухе с большой высоты уронить шарик для настольного тенниса, то за время $\tau\approx 2$—3 с устанавливается равновесное падение со скоростью около 8 м/с.

Знайка, Незнайка и другие

1. Описано явление диффузии газов.

2. Происходит испарение. А при испарении поверхность жидкости покидают молекулы, обладающие самыми большими скоростями. Они уносят с собой энергию. Температура жидкости понижается.

3. Находящийся на Земле наблюдатель не может указать на ее вращение, ведь он вращается вместе с ней. И подобно тому, как пассажир в поезде видит из окна движущиеся деревья, столбы, дома и т. п., так и находящийся на вращающейся Земле наблюдатель видит вращение небесных тел.

4. У воды теплоемкость гораздо больше, чем у воздуха; чтобы ее нагреть даже на 1 градус, требуется большое количество тепла. Поэтому вода медленно нагревается, но и так же медленно остывает. К утру воздух сильно остывает, и оказывается обычно гораздо холоднее воды. Так что дело происходило, скорее всего, утром.

5. Происходит преломление световых лучей при переходе из воды в воздух.

6. Расстояние от Земли до Солнца почти в 400 (!!) раз больше, чем до Луны. Поэтому значительно приблизившись к Луне (а видимые размеры ее при этом, как при приближении к любому далекому предмету, увеличиваются), мы лишь на ничтожно малое расстояние (в относительных единицах) приближаемся к Солнцу и продолжаем видеть его таким же, как и на Земле.

7. Солнце — обычная звезда, как и миллионы других на небе. Однако это самая близкая к нам звезда. Ее свет, рассеянный атмосферой Земли, не позволяет нам видеть звезды днем. На Луне атмосферы нет, и Солнце —

лишь более яркий круг по сравнению с точками-звездами на темном фоне.

8. Предоставим слово Знайке: «...Если веса не будет, вот как сейчас, то нижние слои воды, нагревшись, не станут легче и не поднимутся вверх, а останутся внизу и будут нагреваться до тех пор, пока не превратятся в пар. Этот пар, расширяясь от нагревания, начнет поднимать находящуюся над ним холодную воду, в результате чего она пузырем вылезет из чайника...

Из этого следует, что кипятить воду в условиях невесомости надо... в таком сосуде, крышка которого закрывается плотно и не пропускает ни воды, ни пара».

Теперь легко понять, что огонь в невесомости гореть не будет, ибо горячий воздух не поднимется вверх и не будет притока кислорода.

анные школьные задачи по физике

1. Перейдем в систему отсчета, которая движется горизонтально со скоростью, равной скорости ветра. В этой системе отсчета воздух неподвижен и капли падают вертикально. Скорость падения капель $v_к$ зависит только от их размера, и ее можно считать во всех случаях одинаковой. Получаем (см. рис. 1): $\operatorname{tg}\alpha_1=v_1/v_к$, $\operatorname{tg}\alpha_2=v_2/v_к$, откуда

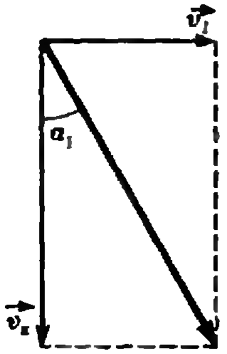


Рис. 1.

$$v_2=v_1\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1}=3v_1=30\ \text{м/с}.$$

2. Для упрощения расчетов применим следующий прием. Заснимем движение тела на кинопленку, а затем прокрутим пленку наоборот. Получим равноускоренное движение из состояния покоя, за первую секунду которого ($\tau=1$ с) тело проходит путь $l_5=5$ м. Нам надо найти путь l за четвертую секунду этого «обращенного» движения:

$$l=\frac{a(4\tau)^2}{2}-\frac{a(3\tau)^2}{2}=7\frac{a\tau^2}{2}=7l_5=35\ \text{м}.$$

3. В системе отсчета, связанной со вторым телом, первое тело движется с постоянным ускорением $a=a_1-(-a_2)=a_1+a_2$, направленным противоположно начальной скорости $v_0=v_{01}-(-v_{02})=v_{01}+v_{02}$. До разворота это тело пройдет расстояние $L=v_0^2/2a$. Тела встретятся в том случае, если начальное расстояние между телами S меньше или равно L:

$$S\leqslant\frac{(v_{01}+v_{02})^2}{2(a_1+a_2)}=150\ \text{м}.$$

4. Траектория мяча после удара о стенку (линия BC на рис. 2) симметрична его траектории в отсутствие стенки (линия BD). Расстояние AD равняется дальности свободного полета мяча

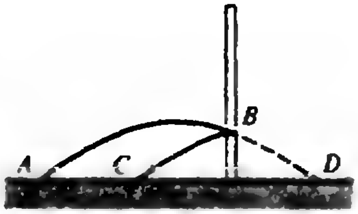


Рис. 2.

$$S_0=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\approx 20{,}4\ \text{м}.$$

Для расстояния AC получаем

$$S=L-(S_0-L)=2L-S_0\approx 9{,}6\ \text{м}.$$

5. В системе отсчета, связанной с блоком, скорость груза равна $v_{21}=v_2-(-v_1)=v_2+v_1$. Получаем

$$\omega=\frac{v_1+v_2}{R}=25\ 1/\text{с}.$$

6. Запишем условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$p_1S-mg-p_0S=0,$$
$$p_2S-mg-p_0S-F=0,$$

где m — масса поршня, p_0 — атмосферное давление, F — приложенная к поршню сила. Вычитая первое уравнение из второго, получим

$$F=p_2S-p_1S$$

(сила давления возрастает настолько, чтобы скомпенсировать силу F). Давление p_2 найдем из уравнения изотермического процесса

$$p_1V_1=p_2(V_1-S\Delta h).$$

Получаем

$$F=\frac{S\Delta h}{V_1-S\Delta h}p_1S=6\text{Н}.$$

7. Условие равновесия свободного вертикального поршня заключается в равенстве давлений в обеих частях сосуда. Обозначая начальное давление в системе p, а конечное p', запишем газовые законы для каждого из газов:

$$pSL=p'S(L-l),$$
$$\frac{pSL}{T}=\frac{p'S(L+l)}{T'},$$

где T и T' — начальная и конечная температуры, S — площадь поршня. Поделив уравнения почленно, найдем T':

$$T'=T\frac{L+l}{L-l}=320\ \text{К},\ t'=47\ ^\circ\text{C}.$$

8. За время τ через сечение трубы пройдет объем газа $V=Sv\tau$. Подставляя V в уравнение состояния газа

$$pV=\frac{m}{\text{M}}RT,$$

найдем скорость течения:

$$v=\frac{mRT}{\text{M}pS\tau}=2\ \text{м/с}.$$

9. Конечное давление p' равно сумме парциальных давлений p_1 и p_2, создаваемых в объеме сосуда одноатомным и двухатомным газами. Найдем эти давления, а также начальное давление p_0, из уравнений состояния

$$p_0V=\frac{m}{\text{M}_2}RT,\ p_1V=\frac{m_1}{\text{M}_1}RT,\ p_2V=\frac{m_2}{\text{M}_2}RT,$$

где $m_1=m_2=m/2$, $\text{M}_1=\text{M}_2/2$. Из этих уравнений получаем

$$p'=p_1+p_2=1{,}5\ p_0.$$

10. При неравномерном нагревании сосудов газ по соединительным трубкам перетекает из одного сосуда в другой, благодаря чему выравнивается давление. Запишем уравнения состояния для газов в сосудах до и после нагревания:

$$pV=\frac{m}{\text{M}}RT,\ p'V=\frac{m_1}{\text{M}}RT_1,$$

$$p'V=\frac{m_2}{\text{M}}RT_2,\ p'V=\frac{m_3}{\text{M}}RT,$$

где p' — конечное давление в системе. Выразив массы газов и подставив их в уравнение сохранения полной массы

$$m_1+m_2+m_3=3m,$$

получим

$$\frac{p'}{p}=\frac{3}{T}\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T}\right)^{-1}=2.$$

11. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}=\frac{kA^2}{2},$$

где в правой части равенства стоит полная энергия колебаний, равная потенциальной энергии в крайнем положении (при $x=A$). Учитывая, что $k/m=\omega^2$, получим

$$A=\left(x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^{1/2}=5\ \text{см}.$$

12. Вместо внешней силы mg на маятник действует результирующая сила $F=mg+qE$. Записав эту силу в виде $F=mg'$, где $g'=g+qE/m$, видим, что g' играет роль эффективного ускорения свободного падения, через которое будет выражаться частота колебаний математического маятника: $\omega=\sqrt{g'/l}$. Отношение ω к $\omega_0=\sqrt{g/l}$ равно

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\sqrt{\frac{g'}{g}}=\sqrt{1+\frac{qE}{mg}}=3.$$

13. Новую емкость C_2 конденсатора в контуре найдем из уравнения $1/C_2=1/C_1+1/(C_1/3)$. По сравнению с начальной величиной C_1 емкость уменьшится в 4 раза, т. е. частота $\nu=1/2\pi\sqrt{LC}$ возрастет в 2 раза.

14. По условию $q^2(t)/2C=Li^2(t)/2$, где $q(t)=q_0\cos\omega t$, $i(t)=q'(t)=-q_0\omega\sin\omega t$. Учитывая, что $\omega=1/\sqrt{LC}$, получаем $\operatorname{tg}\omega t=1$, т. е. $t=\pi/4\omega=\pi\sqrt{LC}/4\approx 31{,}4$ мкс.

15. Условие минимума имеет вид $L_2-L_1=\lambda/2+k\lambda$, где $k=0,\ 1,\ \ldots$ Это условие выполняется при частотах колебаний, равных $\nu=v/\lambda=v(k+1/2)/(L_2-L_1)$. Минимальная возможная частота равна $\nu_{\min}=v/2(L_2-L_1)=1$ кГц.

[illegible]чи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады

8 класс

1. Левая часть неравенства равна $(a-b)(b-c)\times\times(a-c)$.

2. Ответ: а), б) можно. Указание. а) При $AB=r$ построение показано на рисунке 3, *а*. При $AB\neq r$ см. рисунок 3, *б*. (На этом рисунке видно, как последовательно находятся точки D, E, E', D' и $A'=C$.)

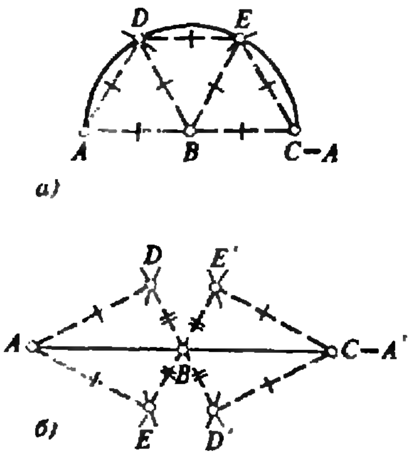


Рис. 3.

б) при $AB\geqslant 2r$ строим сеть вершин правильных треугольников (рис. 4), пока две из них — точки D и E — не попадут в круг с центром B и радиусом r.

3. Ответ: 4. Указание. Четверо дежурных обеспечат охрану, если каждый из них будет дежурить сутки, а затем трое суток отдыхать. Троих дежурных не хватит. Для доказательства достаточно отметить три обстоятельства: 1) два или больше суточных дежурств не могут идти подряд; 2) если есть хотя бы одно суточное дежурство, то среди следующих пяти смен (дневных и ночных) обязательно должны быть два суточ-

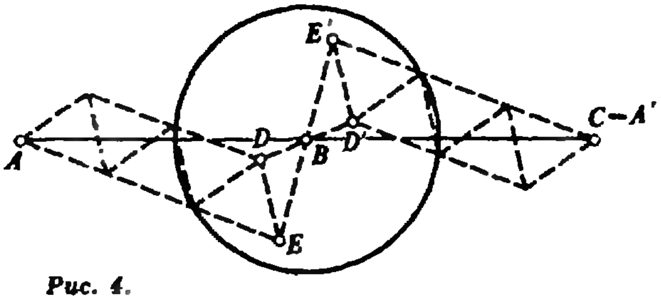


Рис. 4.

ных дежурства; 3) если вообще нет суточных дежурств, то трех дежурных хватит не больше, чем на 4 смены.

4. Достаточно проверять два соотношения:

$$x_1+x_2+x_3=x_6,\ x_1+x_6<x_3+x_5,$$

где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «kг».

5. **Указание.** Пусть $A_1, A_2, \ldots A_n$ — города первой страны, а M_i — множество тех городов второй страны, в которые есть рейс из A_i. Из условия следует, что не существует города второй страны, который принадлежал бы всем M_i. Поэтому существуют такие k и l и города B_k и B_l, что $B_k \in M_k$, $B_l \in M_l$, $B_k \notin M_l$, $B_l \notin M_k$. Но тогда условию задачи удовлетворяют города A_k, B_k, A_l и B_l.

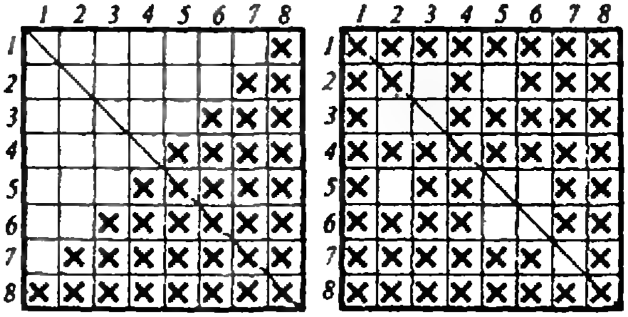
9 класс

1. **Ответ:** —1; 0. **Указание.** Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x^3-1)(x^{11}-1)=(x^7-1)^2,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

2. **Ответ:** да. **Указание.** а) Напишем на всех 36 картах все пары чисел (m, n), показывающие номера строк и столбцов 36 клеточек, отмеченных крестиками в таблице на рисунке 5, *а*. При первой раскладке будем объединять в одну кучку карты с одинаковыми номерами строк — всего получим 8 кучек по 1, 2, 3, ..., 8 карт в каждой. При второй раскладке будем, аналогично, объединять в кучки карты с одинаковыми номерами столбцов.

б) Поступим так же, как в пункте а) в соответствии с таблицей на рис. 5, *б*; получим при первой раскладке — 8 кучек по 1-й карте, 3 кучки по 2 карты, 2 кучки по 3 карты, 2 кучки по 4 карты и по одной кучке из 5, 6, 7 и 8 карт соответственно.



а) *б)*

Рис. 5.

3. Решение этой задачи (см. задачу M1291) будет опубликовано позже.

4. **Ответ:** Проведите прямую l через середины двух параллельных хорд. Биссектрисы углов между этой прямой и хордами параллельны осям координат. Возьмите другую пару параллельных хорд и проведите через их середины прямую l_1. Прямые l и l_1 пересекаются в начале координат.

Указание. Докажите утверждения, высказанные в ответе, с помощью теоремы Виета.

5. Если заменить все числа в указанной таблице числами ±1 в соответствии со знаками исходных чисел, то таблица по-прежнему будет удовлетворять условию задачи. Таблицу $m\times n$, в которой расставлены числа ±1 и каждое число равно произведению соседей, назовем пригодной. Докажем, что любая пригодная таблица $m\times 15$, где $m=1, 3, 7, 15$, заполнена одними лишь единицами, т. е. тривиальна.

Действительно, непосредственно проверяется, что пригодная таблица 1×15 тривиальна: она полностью задается каким-нибудь из крайних чисел, одно из которых обязательно равно 1. Допустим, что существует пригодная нетривиальная таблица 15×15. Если она симметрична относительно средней строки, то в этой строке каждое число совпадает с произведением соседей по горизонтали и, значит, как было отмечено выше, равно 1. Тогда над этой строкой располагается пригодная таблица 7×15, причем нетривиальная (иначе вся таблица тривиальна). Если же таблица 15×15 не симметрична относительно средней строки, то каждое число в верхней ее части размером 7×15 умножим на число, симметричное относительно средней строки. Полученная таблица 7×15 будет пригодной и опять нетривиальной (иначе вся таблица симметрична). Итак, из существования пригодной нетривиальной таблицы 15×15 мы вывели существование такой таблицы 7×15. Найдем, аналогично, пригодную нетривиальную таблицу 3×15, а затем и 1×15. Противоречие.

10 класс

1. **Ответ:** а) $f(0)=2$; $f(1)=-2$.

$$\text{б) } f(x)=\begin{cases}1/(\frac{1}{2}-x) & \text{при } x\neq\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Указание. Подставьте в данное соотношение $(1-x)$ вместо x, после чего найдите $f(x)$ из полученной системы.

2. **Ответ:** 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. **Указание.** Если n шаров удовлетворяют условию задачи, то удвоенное число точек касания равно $3n$. Поэтому n — четно. При $n=4$ шары располагаются так, чтобы их центры оказались в вершинах правильного тетраэдра. При $n=2k$ можно расположить центры k шаров в вершинах правильного k-угольника, а затем приложить

точно такую же цепочку шаров так, чтобы каждый шар одной цепочки касался одного шара другой цепочки.

3. Решение этой задачи (см. задачу М1293) будет опубликовано позже.

4. Решение этой задачи (см. задачу М1294) будет опубликовано позже.

5. **Ответ:** 3. **Указание.** При решении 2-й задачи для 9 класса была построена таблица (рис. 3, *б*). Третью раскладку можно осуществить так: берем все 30 карт, которым соответствуют крестики, лежащие на диагонали таблицы и выше нее, и остальные 24 карты. Теперь на каждой карте (m, n) первой группы написаны числа $\{m, n, 30\}$, а на парах второй группы числа $\{m, n, 24\}$. Двух раскладок недостаточно. Для доказательства можно связать с двумя раскладками таблицу $k\times k$, где k — число карт в наибольшей из кучек. Тогда в k-й строке окажется k крестиков, один из которых будет стоять на диагонали. Тогда k-й столбец тоже будет содержать k крестиков, расположенных симметрично крестикам k-й строки.

11 класс

1. **Ответ:** а) между 996-й и 997-й; б) между 995-й и 996-й.

Указание. Число, содержащее m первых девяток, равно $2\cdot 10^m-1$, а оставшаяся часть записи — это число $10^{1992-m}-9$.

а) Сумма $S(m)=2\cdot 10^m+10^{1992-m}-9$ удовлетворяет неравенствам $S(996)\leqslant 3\cdot 10^{996}$, $S(m)\geqslant 10\cdot 10^{996}$ при $m\geqslant 997$ и при $m\leqslant 995$.

б) Произведение будет наибольшим при наименьшем значении величины

$$R(m)=18\cdot 10^m+10^{1992-m}$$

2. **Ответ:** Через точку O — середину отрезка AB — проведем перпендикуляр, на котором отложим точку C (проекцию северного полюса) так, чтобы отрезок OC был равен половине хорды, проходящей через точку D и параллельной AB (рис. 6).

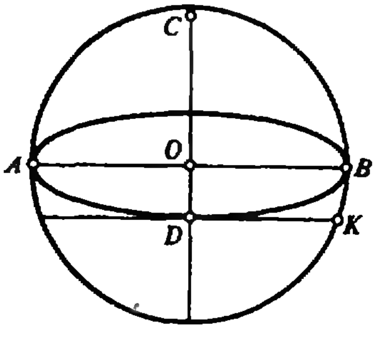


Рис. 6.

3. Решение этой задачи (см. задачу М1291) будет опубликовано позже.

4. Решение этой задачи (см. задачу М1292) будет опубликовано позже.

5. Решение этой задачи (см. задачу М1295) будет опубликовано позже.

[illegible]анные задачи Московской городской олим[illegible]ы по физике 1991 года

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1298 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

2. $L=\dfrac{2vS}{(N_1+N_2)l^2}=200$ м.

3. $Q=\dfrac{1}{4}\varrho La^3g\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$, где ϱ — плотность воды.

4. Не может.

5. $Q=4C\mathcal{E}^2/27$, где $\mathcal{E}$ — ЭДС источника.

6. $A=\dfrac{LI^2}{2(n^2-1)}$.

7. $W=-q^2\dfrac{k}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, где $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$.

Аховы решения

Тест с веревками. Думаете, можно выполнить задачу, если повиснуть на одной веревке и раскачаться на ней, как Тарзан на лиане? Вы ошибаетесь по двум причинам: во-первых, веревка недостаточно прочна, чтобы выдержать взрослого человека, и, во-вторых, даже если бы веревка не оборвалась под вашим весом, вы все равно не смогли бы дотянуться до другой веревки. Тем не менее картинка дает ключ к правильному решению.

Привязав ножницы к одной веревке, вы можете раскачать их, как маятник. Подтянув другую веревку к маятнику и дождавшись, когда ножницы качнутся навстречу, вы сможете поймать их и связать обе веревки.

Решение этой задачи требует двух необычных идей. Необходимо догадаться, во-первых, что веревки следует раскачать и что, во-вторых, ножницы можно использовать в качестве груза маятника, то есть «не по назначению». Трудности, возникающие у людей при использовании различных устройств и предметов не по назначению, психологи называют специальным термином «функциональная ограниченность». Услыхав о ножницах, мы думаем лишь о том, как разрезать ими веревку, что, разумеется, не может помочь в решении теста.

Тест с ковром. Поскольку к бутылке нельзя прикасаться ничем, то решить тест сумеет тот, кто догадается, что ковер уже касается бутылки и его можно каким-то образом использовать для того, чтобы сдвинуть ее, например на пол.

Догадка оказывается верной. Действительно, начните скатывать ковер и, когда рулон дойдет до бутылки, аккуратно придерживая его за концы, столкните им бутылку с ковра, не прикасаясь к ней ничем, кроме свернутого в рулон ковра.

Как и в предыдущей задаче, функциональная ограниченность блокирует путь к решению. Мы так убеждены, что ковром можно только покрыть пол, и упускаем из виду, что ковром можно столкнуть бутылку.

Тест с газетой. Вы сумеете решить тест, если догадаетесь, что два человека, стоящие на газетном листе и разделенные дверью, не могут прикоснуться друг к другу. Просуньте под дверь лист газеты, встаньте на него по одну сторону от двери, а ваш приятель пусть встанет на него по другую сторону от двери. Дверь не позволит вам коснуться друг друга, пока вы не сойдете с газетного листа. *Тест с теннисным мячом.* Решению теста препятствует неявно принимаемое допущение о том, что мяч нужно бросить горизонтально. В действительности ничто не мешает бросить мяч вертикально. Тогда, поднявшись на определенную высоту, он остановится, после чего начнет двигаться обратно.

Другое решение — бросить мяч так, чтобы он катился вверх по склону холма. Такое решение можно было бы заранее исключить, потребовав, чтобы мяч находился в воздухе, но поскольку в условии задачи это не оговорено, второе решение вполне законно.

1. Чтобы картонная спичка упала на ребро, ее нужно согнуть посредине.
2. Нужно осторожно подсыпать песок в канал до тех пор, пока он не наполнится доверху.
3. Сделайте на нити небольшую петлю, завязав ее у основания, после чего перережьте петлю сбоку.
4. Отрезок шеста длиной в 20 см имеет продольное сечение в форме прямоугольника 20 см × 5 см, и, следовательно, им можно плотно заделать брешь в плотине.
5. Измерьте линейкой внутренний диаметр бутылки и уровень жидкости в ней. Столб жидкости имеет форму цилиндра, поэтому объем его вычисляется без труда. Переверните затем бутылку. Находящийся в ней воздух образует другой цилиндр, объем которого вы также легко измерите. Сумма объемов даст вам полный объем бутылки, после чего не составит никакого труда вычислить, какую часть объема занимает жидкость.

[redacted]ческий кроссворд
(см. 4-ю с. обложки)

1. Менелай. 2. Видеман. 3. Кратное. 4. Дальтон. 5. Гиперон. 6. Материя. 7. Подобие. 8. Рубидий. 9. Вороной. 10. Архимед. 11. Стрелец. 12. Токамак. 13. Радикал. 14. Леверье. 15. Тихонов. 16. Годунов. 17. Полином. 18. Позитив. 19. Калория. 20. Маховик. 21. Новиков. 22. Семьсот. 23. Деление. 24. Отрезок. 25. Мегафон. 26. Минимум. 27. Ермаков.

[redacted]ант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. Заметим, что число 101 — простое, поэтому, если $101=a+b$, числа a и b взаимно просты, так как при наличии общего делителя d, он являлся бы и делителем суммы. Поэтому всегда выигрывает Малыш, независимо от хода игры.
2. 958 214 134.
3. Сумма чисел в первом ромбе равна $1=1^3$, во втором — $8=2^3$, в третьем — $27=3^3$, в четвертом — $64=4^3$. Гипотеза: в n-м ромбе сумма

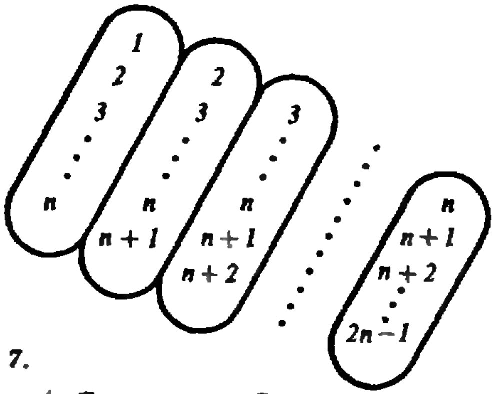


Рис. 7.

равна n^4. Докажем ее. Сумма чисел в верхней левой строчке (рис. 7) равна $1+2+...+n=$ $=\frac{n(n+1)}{2}$, в следующей строчке — на n больше, в следующей — на $2n$ больше и так далее, в последней — на $n(n-1)$ больше. Поэтому сумма всех чисел равна $(1+2+...+n)n+$ $+n+2n+...+(n-1)n=2(1+2+...+n)n-n^2=$ $=n^2(n+1)-n^2=n^3$.

4. Проведем среднюю линию PM треугольника ABC, пересекающую прямую BK в точке Q (рис. 8). Треугольники ANK и MNQ равны по

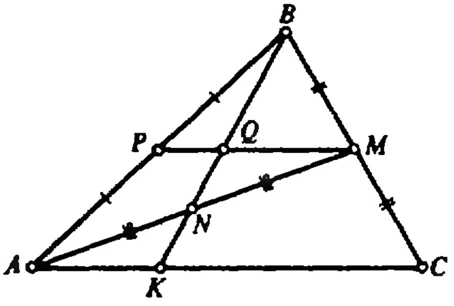


Рис. 8.

трем углам и стороне, поэтому $AK=QM$, а $2PQ=AK$, т. к. PQ — средняя линия треугольника ABK. Итак, $QM=AK=2PM$, поэтому точка Q делит отрезок PM в отношении 1:2. Очевидно в том же отношении делится точкой K отрезок AC.

5. Ерема в день выпивает 1/10 бочки, а Емеля — 1/14. Вместе они выпивают в день 1/10+1/14=6/35 бочки. Следовательно, бочку они выпьют за 35/6=6—1/6 дня. Таким образом, шести дней им хватит.

[redacted]йдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. Сообщая им вращательное движение. Круто сваренное яйцо вращается как сплошное целое — заметно быстрее и дольше сырого, в котором жидкое содержимое задерживает вследствие своей инерции движение твердой оболочки.
2. Момент сил трения, вращающий кирпич по часовой стрелке, должен быть равен мо-

менту сил реакции плоскости на кирпич. Отсюда следует, что сила реакции плоскости на правую часть кирпича должна быть больше, чем на левую. Значит, и сила давления правой половины кирпича на плоскость должна быть больше силы давления левой.

3. Рассматривая вращение колеса вокруг точки его соприкосновения с землей, можно увидеть, что к верхней точке обода колеса следует приложить меньшую силу, чем к корпусу телеги, соединенному с осью колеса.

4. Это — пример, иллюстрирующий закон сохранения момента импульса. Прижимая руки к телу, фигуристка уменьшает свой момент инерции и тем самым увеличивает свою угловую скорость.

5. При таком расположении витка момент действующих на него магнитных сил равен нулю и его равновесие будет устойчивым.

6. Во-первых, улучшаются условия захвата, во-вторых, слой материи, намотанной на пробку, увеличивает плечо сил, отвертывающих пробку, в то время как момент сил сцепления пробки со стенками сосуда не изменяется.

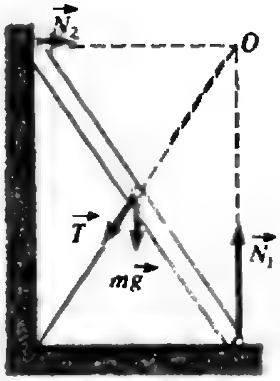


Рис. 9.

7. Если стержень удерживать за середину, необходимо приложить силу, равную силе тяжести стержня. Если же удерживать его за конец, надо создать момент, уравновешивающий момент силы тяжести стержня. Так как плечо удерживающей силы меньше половины длины стержня, то эта сила будет больше силы тяжести.

8. Половинку.

9. Двигатель, установленный посередине машины, обладает меньшим моментом инерции относительно центра масс автомобиля, поэтому для поворота будет нужен меньший момент сил.

10. При правильной стрелковой стойке линия выстрела лежит в одной вертикальной плоскости с центром тяжести стрелка. В этом случае сила отдачи не создает вращательного момента относительно вертикальной оси.

11. Если угол α наклонной плоскости к горизонту таков, что $\operatorname{tg}\alpha < k$, где k — коэффициент трения между плоскостью и мячом, то точка соприкосновения мяча с плоскостью не скользит по ней. Сила тяжести мяча создает момент, который заставляет мяч поворачиваться вокруг этой точки. При $\operatorname{tg}\alpha > k$ мяч катится по наклонной плоскости с проскальзыванием. По абсолютно гладкой поверхности мяч скользил бы не вращаясь.

12. Резкие движения ног конькобежца вызывают появление моментов сил, стремящихся повернуть его корпус вокруг вертикальной оси. Поэтому конькобежец в такт движению ног размахивает руками так, чтобы движением рук создать компенсирующие моменты сил.

13. Моменты сил реакции пола и стены, а также момент силы натяжения веревки относительно точки O равны нулю при любой силе натяжения. Момент силы тяжести относительно той же точки отличен от нуля. Лестница упадет (см. рис. 9).

14. При протекании тока на рамку со стороны

Анкета 9—91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении. Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 9—91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

Круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

магнитного поля действует сила, создающая момент относительно горизонтальной оси. Рамка отклоняется до тех пор, пока этот момент не уравновесится моментом силы тяжести.

Микроопыт

Вращение вокруг осей, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции тела, как показывают и опыт, и расчеты, устойчиво. Вращение же вокруг оси, соответствующей промежуточному значению момента инерции, неустойчиво, и всякое малое возмущение в этом случае приводит к беспорядочному движению.

Анкета 9—91

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились? ______

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______

5. Какая обложка из номеров 7—9 Вам больше всего понравилась? ______

6. Ваши вопросы и пожелания: ______

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили.
Е. Барк, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, Л. Тишков,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав редакцией [illegible] Давыдова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К 6, ул Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

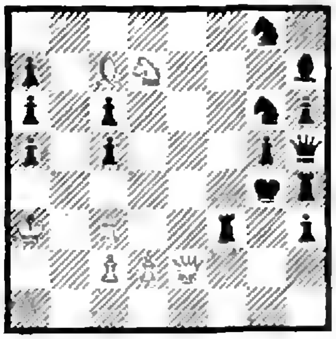
Сдано в набор 24.06.91. Подписано к печати 19.08.91.
Формат 70×100/16 Бумага офс. № 1 ,
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр. отт. 27,09 Уч.-изд. л. 6,87.
Тираж 87 100 экз. Заказ 1084. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Производственного объединения «Периодика»
Министерства информации и печати СССР
142300, г. Чехов, Московской обл

Шахматная страничка

ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОГО РЕКОРДА

Каждая новая ультрамногоходовая задача берется специалистами под пристальный контроль и время от времени кто-нибудь бьет рекорд. Вот один интересный пример эволюции макси-рекорда.



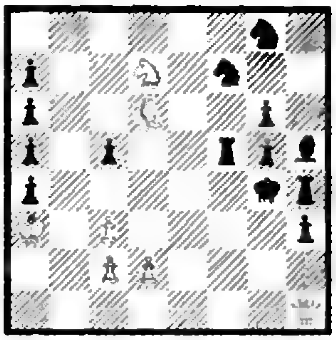
В. Иоргенсен, 1976 г.
Мат в 200 ходов

1. Фе6+ Лf5 2. Сh2 Крf3 3. Фе3+ Крg2 4. Фg1+ (если ходы черных единственные, то для экономии места мы их опускаем) **5. Фf1+ Крg4! 6. Фе2+ 7. Фе6+ 8. Крb2! Крf3,** и далее всякий раз темп выигрывается маневром ферзя.

14. Крс1 20. Крd1 а4! 21. Крс1 27. Крd1 а5 28. Крс1 34. Крd1 а6 41. Крd1 а3 48. Крb1! 54. Кра2 60. Кр:а3 66. Крb2 72. Крс1 78. Крd1 а4 85. Крd1 а5 92. Крd1 а3 111. Кр:а3 129. Крd1 а4 136. Крd1 с4! 137. Крс1! 140. Фf1+ Кре4! 141. Ф:с4+ 142. Фf1+ Крg4! 144. Фе6+ 145. Крd1 с5 146. Крс1! 152. Крd1 с4 153. Крс1 156. Фf1+Крg4! 159. Крd1! а3 160. Крс1 166. Крb1 169. Фf1+ Кре4 174. Кра2 Крf3 180. Кр:а3 198. Крd1 Кg (любой ход) **199. Кf6+.**

Известный швейцарский мастер и теоретик эндшпиля А. Шерон заметил, что если в этой позиции белого ферзя переставить на h1, а черную ладью с f3 на f5, то можно «бесплатно» прибавить три хода: **1. Фg1+ Крf3 2. Фf1+ Крg4** (2...Кре4 3. Фd3×) **3. Фе2+Лf3,** и мы приходим к исходной позиции.

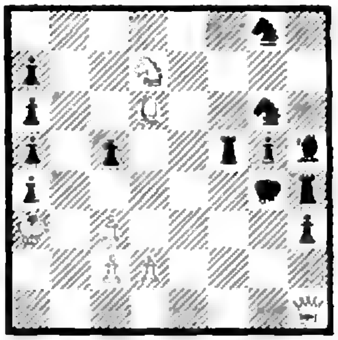
В свою очередь Иоргенсен в позиции Шерона заменил черного ферзя слоном, а пешку h6 передвинул на h7. В результате число ходов было доведено до 210 (за счет лишнего движения пешки h7—h6). Тогда Шерон снова взялся за дело и уже существенно переработал позицию.



А. Шерон, 1979 г.
Мат в 215 ходов

Пешка с6 перескочила на а4, и решение удлинилось, поскольку теперь каждое движение пешки по линии «а» требует от белых более продолжительного маневра, чем при с5 — с4. Белый король последовательно уничтожает все пешки вертикали «а», и игра завершается так: **213. Крd1 с4 214. Кре2** и **215. Ке5 (f6)×.**

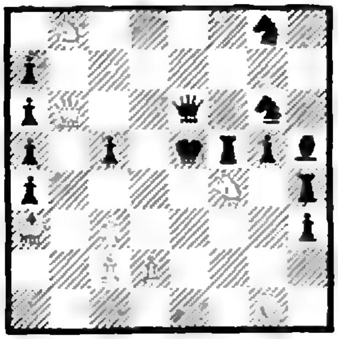
Но на этом история не закончилась. Позицией заинтересовались англичане, и вот что из этого вышло.



К. Морс, Д. Хетерингтон, 1981 г.
Мат в 224 хода

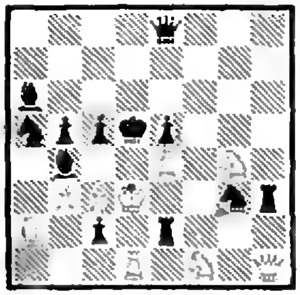
Перестановка черного коня f7 на место пешки g6 препятствует ходу 214. Кре2, и белым приходится совершать еще один маневр: **213... с4 214. Крс1 215. Фе3+ 216. Фg1+ 217. Фf1+ Кре4! 218. Ф:с:4+ 219. Фf1+ Крg4! 220. Фе2+ Лf3 221. Фе6+ Лf5 222. Крd1 Кg** (любой ход) **223. Кf6+ Крf3 224. Фе2×.**

Как мы видим, по сравнению с первоисточником, здесь на пешку меньше, а игра удлинилась на 24 хода! Несдабое достижение, но англичане на этом не успокоились. Переставив белого ферзя на b6, слона на g1, коня на b8, черного короля на е5 и добавив белого коня f4 и черного ферзя е6, они в очередной раз побили рекорд.



Решение «подросло» на три хода: **1. Ф:е6+ 2. Сh2** и т. д.

Интересную позицию, претендующую на рекорд, придумал П. Сотников из Бугульмы.



Похоже, здесь белые и черные объявляют друг другу максимальное число беспрерывных шахов. **1. е4+ bc+ 2. bc+ С:с4+ 3. Л:с4+ е4+ 4. Л:е4+ с4+ 5. Л:с4+ Ке4+ 6. Кfе3+ Лh:е3+ 7. К:е3+ Л:е3+ 8. Кр:е3+ cdК+ 9. Ф:d1+ Сd2+ 10. Ф:d2+ К:d2+ 11. Ле4+ Кас4+ 12. С:с4+ К:с4+.** Итак, по 12 шахов с каждой стороны. Можно ли побить этот рекорд?

Е. Гик

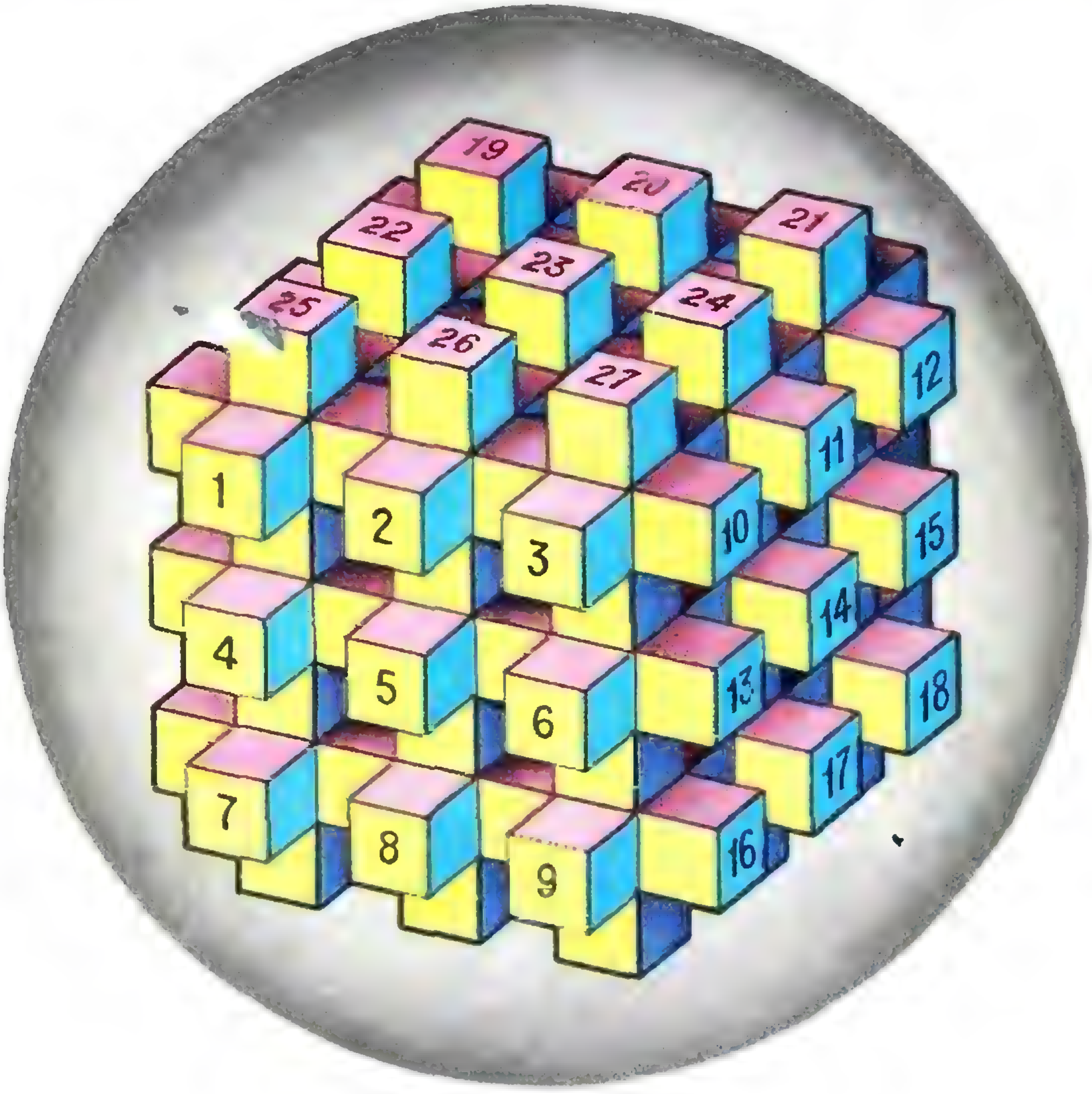
70 коп.
Индекс 70465

КУБИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

Буквы отгаданного слова размещаются в кубических ячейках кроссворда, начиная с той, на грани которой написан соответствующий номер (в направлении, перпендикулярном к этой грани).

1. *Древнегреческий математик и астроном I—II вв.* 2. *Немецкий физик XIX в.* 3. *Число, делящееся на данное целое без остатка.* 4. *Английский химик и физик XVIII—XIX вв.* 5. *Элементарная частица.* 6. *Основа всех реально существующих в мире свойств, связей и форм движения.* 7. *Геометрическое понятие, характеризующее наличие одинаковой формы у геометрических фигур.* 8. *Химический элемент I группы.* 9. *Русский математик XIX—XX вв.* 10. *Древнегреческий ученый III в. до н. э.* 11. *Зодиакальное созвездие.* 12. *Тип тороидальной магнитной ловушки.* 13. *Математический знак.* 14. *Французский астроном, вычисливший орбиту и положение Нептуна.* 15. *Советский математик.* 16. *Советский математик.* 17. *Многочлен.* 18. *Фотографическое изображение.* 19. *Внесистемная единица количества теплоты.* 20. *Колесо, используемое в качестве инерциального аккумулятора механической энергии.* 21. *Советский математик.* 22. *700.* 23. *Арифметическое действие.* 24. *Множество точек на прямой.* 25. *Приспособление для усиления звучания голоса.* 26. *Наименьшее количество.* 27. *Русский математик XIX—XX вв.*

А. Жуков



НОМЕР
10

Квант 10 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *М. Рейтман.* Динамическое программирование
9 *В. Тихомиров.* Теорема Ферма — Эйлера о двух квадратах
13 *Ю. Носов.* Голографическая память
20 *В. Зуев.* Триггерный эффект в человеческом организме

Задачник «Кванта»

25 Задачи М1306—М1310, Ф1313—Ф1317
26 Решения задач М1281—М1285, Ф1293—Ф1297
33 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

36 Задачи
37 *И. Акулич.* Литературно-художественные задачи
42 Конкурс «Математика 6—8»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Лаборатория «Кванта»

44 *Б. Бубнов.* «Грибы» под лампочкой и... война в заливе

Математический кружок

48 *Я. Понарин.* Гармонический четырехугольник

Практикум абитуриента

53 *В. Волков.* Задачи на построение в тонких линзах

Олимпиады

57 XVII Всероссийская олимпиада школьников
62 V Иберо-американская математическая олимпиада

Информатика и программирование

63 *Б. Тарасенко.* Алгоритмика простоты. Простые близнецы

Из истории науки

66 Философская беседа — украшение обеда

Игры и головоломки

68 Ташкентская линейка

Фантастика

70 *Дж. Д. Пирс.* Инвариантный

74 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут (*12, 47*)

Наша обложка

1 *Какое отношение имеют эти красивые эллипсы к простым числам? Самое непосредственное! (см. с. 9)*
2 *Дж. Северини (1883—1966). «Автопортрет» (1912). Что помогло художнику написать эту картину — зеркало? линза? или... (см. с. 53)*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Ханойская башня».*

© «Квант», 1991

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

М. РЕЙТМАН

Лестница фараона

Дворец фараона славился своей роскошью: жемчужные занавесы, стены, отделанные янтарем, золотая посуда — всего не перечесть. Но больше всего поражала тех, кто допускался в тронный зал дворца, золотая лестница, которая вела к трону. Как выглядела эта лестница в разрезе, если перевести древнеегипетские меры в дециметры, вы видите на рисунке 1. Археологам не пришлось долго ломать головы, чтобы понять, отчего ступени поначалу были такими низкими, все объяснялось просто: престарелый фараон не хотел, чтобы подданные видели, как тяжело ему взбираться на трон, они могли утратить почтение, а кто знает, чем это могло кончиться? Поэтому он и повелел придворным ювелирам сделать лестницу с такими низкими ступенями, не выше 1,5 дм.

Но время шло, и старый фараон скончался. Его молодой сын принял царство.

Молодой фараон слышал и раньше, как придворные посмеивались над наивной хитростью отца. И хотя сам он обычно взлетал на трон, прыгая через три ступеньки, но кривотолки продолжались. И молодой фараон решил покончить с ними, нарастив лестницу. Для этого он призвал придворных ювелиров и казначея и сказал им:

— Слуги мои! Повелеваю вам нарастить лестницу так, чтобы она имела самое большее четыре ступени. Устройте их, где хотите, но чтобы их было не больше четырех!

— Но государь,— робко вышел вперед казначей,— где взять столько золота? Вот я тут прикинул на листке папируса (и казначей показал то, что изображено на рисунке лестницы пунктиром). Лестница имеет ширину 1 м, или 10 дм. Значит, для ее наращивания понадобится $[3\times1{,}5+1{,}2\times(5+1)+1\times1+1\times3+0{,}8\,(3+4)+1{,}2\times11]\times10=345$ дм^3 золота! Увы, государь, столько не найдется в нашей казне, разоренной войной.

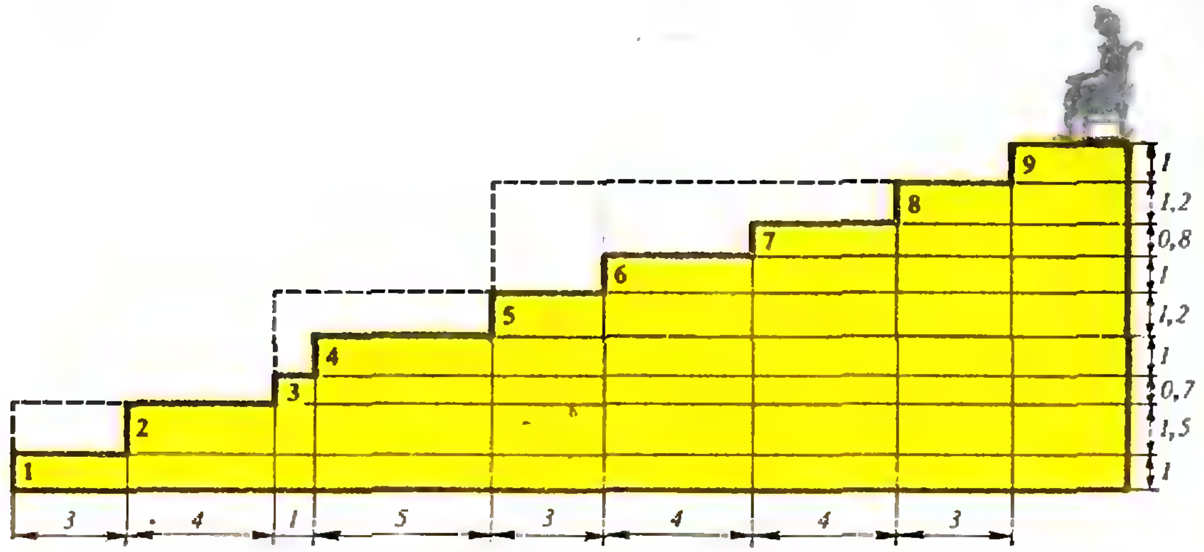


Рис. 1.

— Негодяй! Ты хочешь разорить страну! Да я сразу вижу, что ты и не думал всерьез об экономии! Смотри! — и фараон провел красную линию.— Ты всегда готов потратить лишнее золото!

— О мудрейший из фараонов! В самом деле, ты прав. Но это дает выигрыш лишь 90 дм³, а $345-90=255$ дм³ у нас тоже нет.

— Презренный! Ты бросаешь тень на мое могущество! Если через 7 дней лестница не будет готова, я сам утоплю тебя в священном Ниле, а ювелиры будут проданы в рабство. И не вздумай еще раз соваться со своими дурацкими чертежами!

Удрученным ушел казначей от фараона и отправился к своему другу. Не было человека искуснее, когда нужно было распланировать пирамиду или исчислить земельные наделы. Хотя друг и был по должности жрецом столичного храма, но слыл человеком расчетливым и практичным. Узнав о беде, он спросил:

— А сколько золота осталось в казне?

— 200 дм³.

— Не густо! А может быть, можно обойтись меньшим количеством, если иначе распланировать ступеньки?

— Я пробовал,— вздохнул казначей,— но вариантов так много, а времени в обрез.

— Ладно, друг,— сказал жрец.— Дай мне подумать, и приходи завтра.

Когда на следующий день убитый горем казначей приплелся к жрецу, тот встретил его довольной улыбкой.

— А скажи, друг, могу ли я рассчитывать на оставшееся золото, если обойдусь меньшим количеством?

— О боги! — воскликнул казначей, не веря своему счастью.— Ты получишь еще дюжину рабов и столько же мер зерна!

— Так смотри же! — и жрец протянул ему лист папируса, где был другой проект наращивания лестницы.— Этот проект требует лишь 171 дм³ золота. А остальные 29 дм³ — мои!

— Но скажи, о величайший из вычислителей, как ты нашел такой вариант? Я пробовал и так и сяк, но он мне не попадался!

— Слушай же,— молвил жрец.— Сначала я разобрал случаи, когда лестницы из разного числа ступенек заменяются всего одной ступенькой. Чтобы числа были попроще, я буду вычислять только площадь f фигуры между сплошной и пунктирной линиями, а постоянный множитель, ширину лестницы, добавлю потом. Не возражаешь? Если бы первоначальная лестница состояла всего из одной ступеньки, то и наращивать было бы нечего:

$$f_1(1)=0.$$

Формула

$$f_1(2)=1{,}5\times 3=4{,}5$$

показывает, что если две первые ступеньки лестницы фараона заменяются одной ступенькой, на это требуется 4,5 дм². Аналогично найдем

$$f_1(3)=1{,}5\times 3+0{,}7\times(3+4)=9{,}4.$$

Ну а дальше

$$f_1(4)=9{,}4+1\times(3+4+1)=17{,}4,$$

$$f_1(5)=17{,}4+1{,}2\times(3+4+1+5)=33,$$

и так далее.

— Все это понятно,— возразил казначей,— но зачем мне одна ступенька? Ведь фараон просил четыре! Да и лестница имеет их сейчас не пять, а куда больше!

— Не торопись! — улыбнулся жрец.— Скоро новых ступенек станет больше — две (рис. 2). Но вначале найдем площадь одной ступени, начинающейся и на других ступенях первоначальной лестницы: их также легко посчитать одну за другой. Например, чтобы нарастить ступеньку от 2-ой до 4-й, требуется

$$g(2,4)=2{,}8+1\times 5=7{,}8 \text{ дм}^2.$$

Все эти числа, которые понадобятся в наших подсчетах, я записал в таблицу, которая поместилась на одном листе папируса (рис. 3). Числа $g(1,j)=f_1(j)$ в столбце «*одна* ступенька» мы уже посчитали, а дальше удобно вычислять ряд за рядом, двигаясь вправо и вверх: $g(2,3)$, $g(3,4)$, $g(2,4)$,

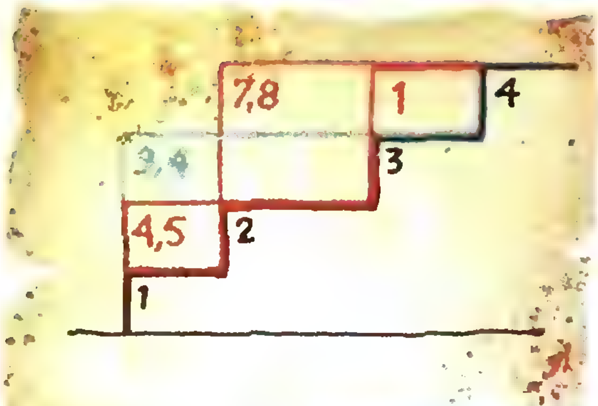
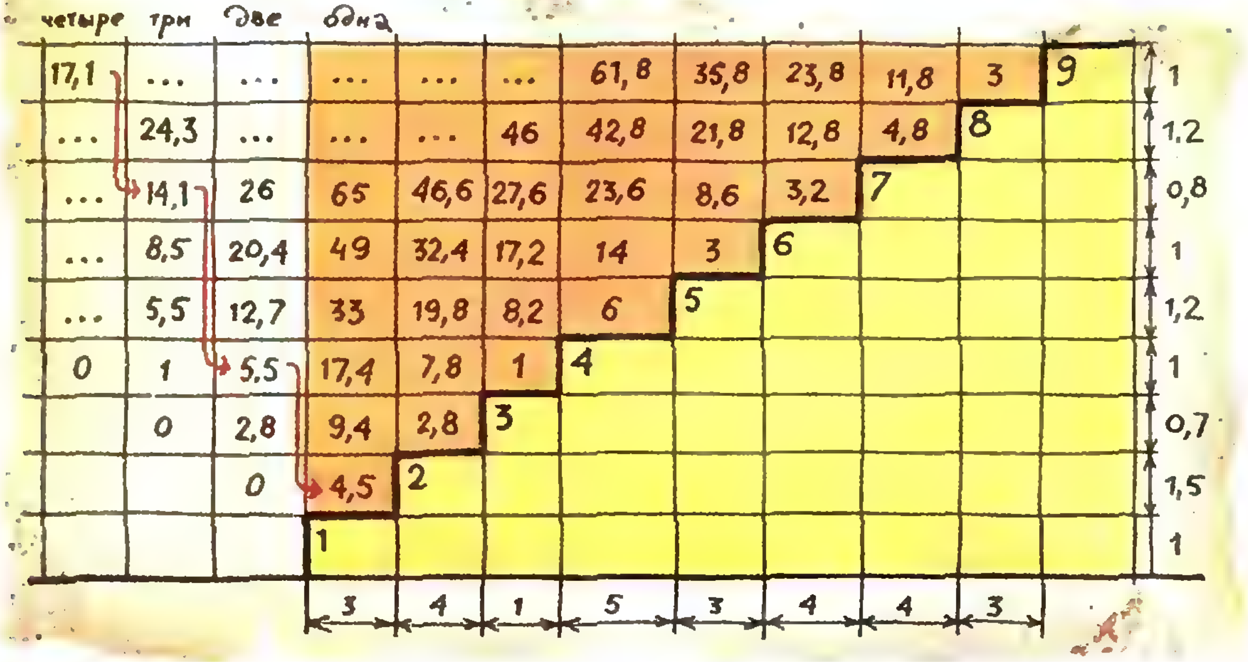


Рис. 2. Меньше всего золота требуется для наращивания красной лестницы: $f_2(4)=4,5+1=$ $=5,5$.

Рис. 3. Числа $g(i,j)$, $1\leqslant i<j\leqslant 9$ в темных клетках показывают, сколько золота требуется для одной ступени от i-й до j-й ступеньки первоначальной лестницы, а числа $f_k(j)$ в левой части ($k=2, 3, 4$) — какого минимального количества золота потребует лестница из k ступенек до j-го уровня.



четыре	три	две	одна									
17,1	…	…	…	…	…	61,8	35,8	23,8	11,8	3	9	1
…	24,3	…	…	…	46	42,8	21,8	12,8	4,8	8		1,2
…	14,1	26	65	46,6	27,6	23,6	8,6	3,2	7			0,8
…	8,5	20,4	49	32,4	17,2	14	3	6				1
…	5,5	12,7	33	19,8	8,2	6	5					1,2
0	1	5,5	17,4	7,8	1	4						1
	0	2,8	9,4	2,8	3							0,7
		0	4,5	2								1,5
			1									1
			3	4	1	5	3	4	4	3		

$g(2,5)$, ... Давай теперь подсчитаем минимальные площади при двух ступеньках. $f_2(1)$ не имеет смысла, заменить одну ступеньку двумя мы не можем. Чтобы заменить две ступеньки двумя новыми, наращивать их не придется:

$$f_2(2)=0.$$

Вот $f_2(3)$ подсчитать несколько сложнее. Здесь нужно рассматривать два варианта и выбрать оптимальный: чтобы заменить первые три ступеньки двумя, мы должны нарастить либо вторую ступеньку, либо первую, и $f_2(3)$ равно наименьшей из соответствующих площадей:

$$f_2(3)=\min\{g(2,3);\ f_1(2)\}=$$
$$=\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8.$$

Для отыскания $f_2(4)$ потребуется найти наименьшее из трех чисел (на рисунке 2 они показаны разными цветами):

$$f_2(4)=\min\{g(2,4),\ f_1(2)+g(3,4),$$
$$f_1(3)\}=\min\{7,8;\ \underline{4,5+1};\ 9,4\}=5,5,$$

и так далее... (Все эти вычисления приведены в таблице на рисунке 4.)

— Погоди, я понял, как найти наилучшую лестницу из двух ступеней, но ведь дальше число вариантов будет быстро возрастать: страшно даже подумать, какое количество лестниц из трех ступеней надо рассчитать,— а ведь нам нужна лестница из четырех ступеней! Неужели ты рассмотрел здесь все варианты?

— А в этом нет нужды, как ты сейчас увидишь. Например, найдем $f_3(4)$: наименьшую по площади лестницу из трех ступеней, заканчивающуюся на уровне 4-й старой ступени.

$f_2(3)=\min\{\underline{2,8};\ 4,5\}=2,8$

$f_2(4)=\min\{7,8;\ \underline{1+4,5};\ 9,4\}=5,5$

$f_2(5)=\min\{19,8;\ \underline{8,2+4,5};\ 6+9,4;\ 17,4\}=12,7$

$f_2(6)=\min\{32,4\ \ 17,2+4,5;\ 14+9,4;\ \underline{3+17,4};\ 33\}=20,4$

$f_2(7)=\min\{46,6;\ 27,6+4,5;\ 23,6+9,4;\ \underline{8,6+17,4};\ 3,2+33;\ 49\}=26$

$f_3(4)=\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1$

$f_3(5)=\min\{0+8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5$

$f_3(6)=\min\{0+17,2;\ 2,8+14;\ \underline{5,5+3};\ 12,7\}=8,5$

$f_3(7)=\min\{0+27,6;\ 2,8+23,6;\ \underline{5,5+8,6};\ 12,7+3,2;\ 20,4\}=14,1$

$f_3(8)=\min\{0+46;\ 2,8+42,8;\ 5,5+21,8;\ 12,7+12,8;\ \underline{20,4+4,8};\ 26\}=25,2$

$f_4(9)=\min\{0+61,8;\ 1+35,8;\ 5,5+23,8;\ 8,5+11,8;\ \underline{14,1+3};\ 24,3\}=17,1$

Рис. 4.

Посмотрим, где может кончаться вторая ее ступень. Конечно, на 2-й или на 3-й старой. Но мы уже знаем, какая именно двуступенная лестница оканчивается на этом уровне: $f_2(2)=0$, а площадь наилучшей двухступенчатой лестницы $f_2(3)=2,8$ мы уже нашли, так что

$$f_3(4)=\min\{g(3,4);\ f_2(3)\}=\min\{\underline{1};\ 2,8\}=1.$$

— Постой, я хочу убедиться, что понял, как найти $f_3(5)$. Из трех ступеней, заканчивающихся на 5-й, вторая может закончиться на 2-й, 3-й или 4-й старой. Значит,

$$f_3(5)=\min\{g(3,5);\ f_2(3)+g(4,5);\ f_2(4)\}=\min\{8,2;\ 2,8+6;\ \underline{5,5}\}=5,5.$$

— Воистину, мудрые следят за казной государства,— польстил жрец.— Точно так же можно посчитать f_3 от 6, 7 и 8, а затем перейти к случаю с четырьмя ступенями. Теперь уже рассматривать $f_4(4), ..., f_4(8)$ нет нужды: мы точно знаем, что последняя четвертая ступенька кончается на старой девятой (иначе бы лестница имела больше четырех ступенек). Итак, нам остается найти $f_4(9)$ как минимум из сумм $f_3(j)+g(j,9)$, где j — одно из шести чисел 3,4, ..., 8; это число равно $f_3(7)+g(8,9)=14,1+3=17,1$. Эта — минимальная из всех четырехступенных лестниц!

Значит, всего на лестницу понадобится $17,1\times10=171$ (дм^3) золота. А теперь давай найдем, где должны располагаться новые ступеньки. Заметим, что оптимальные варианты всюду подчеркнуты красным. В последний оптимальный вариант вошла стоимость трех новых ступеней $f_3(7)=14,1$; значит, третья ступень должна кончаться на 7-й старой. Теперь вернемся на шаг назад к определению $f_3(7)$ и увидим, что в $f_3(7)$ входит стоимость первых двух ступеней $f_2(4)=5,5$. Следовательно, вторая ступень должна кончаться на 4-й старой. И, наконец, в выражение для $f_2(4)$ входит $f_1(2)=4,5$.

Значит, первую ступень новой лестницы нужно окончить на второй ступеньке старой. Окончательно, самая дешевая лестница изображена на рисунке 5.

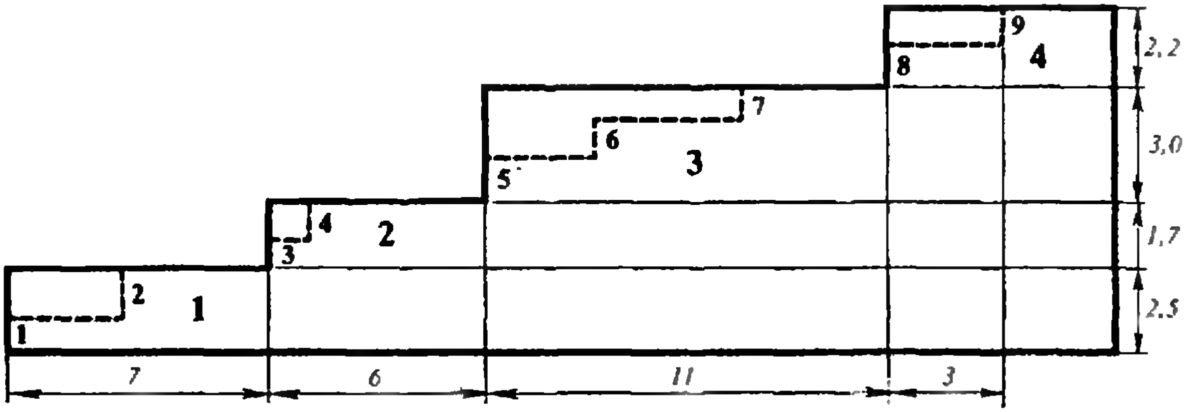


Рис. 5.

Теория динамического программирования

Мы не знаем, выполнил ли хитроумный казначей свое обещание жрецу, более того, мы не знаем, случилась ли вообще описанная история или она вымышлена. Но зато мы знаем, что она вполне могла произойти, ибо в рассмотренной задаче используются только два арифметических действия — сложение и умножение, а они были хорошо известны в Древнем Египте (хотя, конечно, обозначения чисел и операций, которые мы используем, появились значительно позднее). Ну и еще немного используется здравый смысл. А между тем здесь применен математический аппарат, который получил распространение лишь лет сорок назад; он называется динамическим программированием.

Вдумаемся, почему нам удалось найти оптимальное решение, не рассматривая всех возможных вариантов наращивания лестницы (а их очень много, и для их полного исследования жрецу действительно не хватило бы времени). Дело в том, что на каждом шаге мы разбивали общую задачу на ряд более простых.

Пусть требуется нарастить лестницу, имеющую N ступенек, так, чтобы она их имела n, где $N \gg n$, то есть N намного больше n. Допустим, что нам уже известно оптимальное распределение ступенек, когда их в новой лестнице меньше n. Пусть h_k — номер старой ступеньки, на которой кончается k-я новая. Очевидно, начинается эта k-я ступенька на $(h_{k-1}+1)$-й старой. Добавочную площадь, показанную на рисунке 6, обозначим через $g(h_{k-1}+1,\ h_k)$. Общая задача состоит в том, чтобы найти значения h_1, $h_2, \ldots, h_{k-1}$, при которых сумма k величин

$$g(1, h_1)+g(h_1+1, h_2)+\ldots$$
$$\ldots+g(h_{k-2}+1, h_{k-1})+g(h_{k-1}+1, h_k)$$

(при заданном $k=n$ и $h_k=h$) наименьшая, обозначим это наименьшее значение через $f_n(h_n)$. Заметим, что

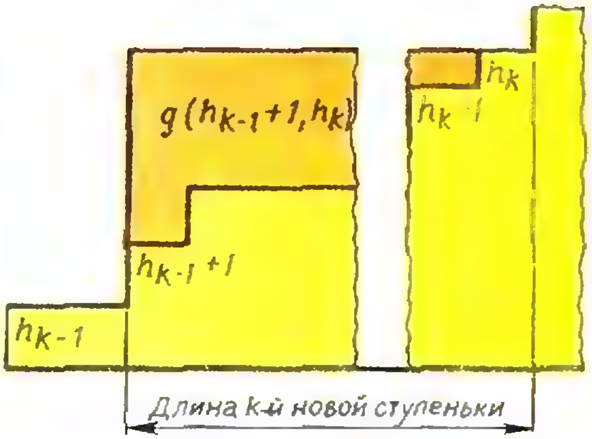


Рис. 6.

сумма первых $n-1$ слагаемых, в которые h_n не входит, принимает наименьшее значение $f_{n-1}(h_{n-1})$ — это та же задача для на 1 меньшего числа ступеней. В результате получаем замечательную формулу Р. Беллмана:

$$f_k(h_k)=\min\{f_{k-1}(h_{k-1})+g(h_{k-1}+1,\ h_k)\},$$

которая позволяет последовательно найти числа $f_k(h_k)$ (при всех $k \leqslant n$, $h_k \leqslant h$) на каждом шаге. Ее нужно понимать так: для отыскания минимума следует придавать k все возможные значения, начиная с 1, и для каждого найти и запомнить значение h_{k-1}, доставляющее наименьшую величину $f_k(h_k)$. А затем, дойдя до последнего значения $k=n$, нужно, «пятясь», вернуться назад и найти все оптимальные значения h_{n-1}, $h_{n-2}, \ldots$ $\ldots, h_1$ (см. красные стрелки на рисунке 3).

Обсуждение метода и немного истории

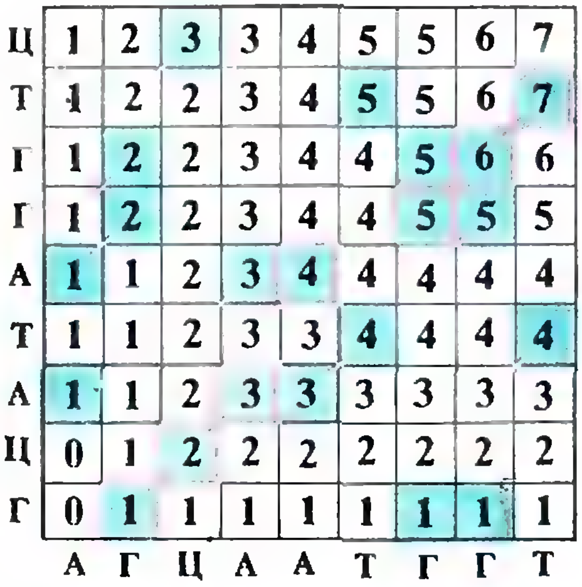
Обратим внимание на то, что в описанном методе не накладывается никаких условий на вид функций g (этим динамическое программирование выгодно отличается от линейного, в котором требуется, чтобы все рассматриваемые зависимости были линейными и переменные изменялись непрерывно). Существенно лишь, что функцию f, минимум которой мы ищем, удается представить в виде суммы членов, в которой предыдущий зависит от меньшего числа переменных. Поэтому уравнение Р. Беллмана и вышеописанный метод используются сейчас очень широко. Но, разумеется, не для удовлетворения прихотей фараонов. Попробуйте без него найти оптимальное соотношение весов ступеней космической ракеты, определить наилучший принцип унификации деталей, построить расписание, в котором было бы меньше всего простоев! Вы очутитесь в отчаянном положении казначея, сникшего перед обилием возможных вариантов. Разумеется, вручную с помощью динамического программирования почти не считают. Зато оно хорошо приспособлено для счета на ЭВМ и не содержит всяких «подводных камней», которые, к сожалению, встречаются в линейном программировании и других методах отыскания минимумов для функций от многих переменных.

Идея метода динамического программирования витала уже давно. В какой-то мере ее применял еще К. Маклорен (1698—1746) и даже Архимед. Однако окончательно оформилась она в работах американского математика Р. Беллмана и связывается с его именем.

Мы здесь показали применение динамического программирования к весьма простой задаче. Насколько применим этот метод к задачам более сложным? На этот вопрос нужно отвечать с известной осторожностью. Дело в том, что при этом возникает специфическая трудность, которую назвали «проклятием размерности». Приходится перебирать так много разных возможностей и запоминать столько результатов, что метод теряет свои положительные черты. «Второе дыхание» метод динамического программирования обрел благодаря «распараллеливанию» вычислений, которому в последние годы уделяется все больше внимания специалистами по программированию и конструкторами вычислительных машин.

Еще одно приложение

Одно из сравнительно новых применений динамического программирования — молекулярная биология, где «банки данных» содержат биологические последовательности (ДНК, РНК, белков), насчитывающие в сумме многие миллионы «букв», так что в их анализе не обойтись без компьютеров. Молекулы ДНК, содержащие генетическую информацию,— это длинные слова из четырех букв (А, Г, Ц, Т). В процессе эволюции, в результате мутаций, последовательности меняются: одна буква может замениться на другую, выпасть, а может добавиться новая. Насколько похожи два фрагмента — каким наименьшим числом превращений можно один из них получить из другого? Вот точная формулировка задачи такого типа. *Заданы два «слова» (длины m и n), состоящие из букв А, Г, Ц, Т. Найти подпоследовательность наибольшей длины, входящую в то и другое слово.* Опишем простую, предложенную в начале 70-х годов, процедуру, которая решает эту задачу (биологи называют ее алгоритмом Нудельмана — Вунша). Запишем одно из данных слов — $x=(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ — снизу-вверх, а другое — $y=$



Ц	1	2	3	3	4	5	5	6	7
Т	1	2	2	3	4	5	5	6	7
Г	1	2	2	3	4	4	5	6	6
Г	1	2	2	3	4	4	5	5	5
А	1	1	2	3	4	4	4	4	4
Т	1	1	2	3	3	4	4	4	4
А	1	1	2	3	3	3	3	3	3
Ц	0	1	2	2	2	2	2	2	2
Г	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	А	Г	Ц	А	А	Т	Г	Г	Т

Рис. 7. Одна из последовательностей максимальной длины 7: ГЦААГГТ.

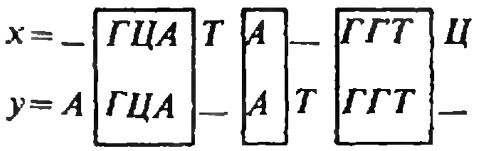


Рис. 8. Одно из наилучших «выравниваний» двух слов, найденное на рисунке 7.

$=(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ — слева-направо рядом с таблицей размерами $m \times n$ (рис. 7). Отметим те клетки таблицы, в строке и столбце каждой из которых стоят одинаковые буквы (в таблице на рисунке 7 художник закрасил эти клетки голубым цветом). Теперь будем заполнять таблицу числами a_{ij} $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ по следующему правилу: a_{ij} равно наибольшему из чисел $a_{i-1,j}$, $a_{i,j-1}$ и (если клетка (i, j) отмечена!) $a_{i-1,j-1}+1$. Конечно, нужно задать еще начальные условия. Они таковы: $a_{11}=1$, если первые буквы X_1 и Y_1 наших слов совпадают (при этом $a_{1j}=a_{j1}=1$ для всех i, j); если же нет, то $a_{11}=a_{12}=\dots=a_{1,j-1}=0$ и $a_{1j}=\dots=a_{1n}=1$, если первые $j-1$ букв второго слова y отличны от X_1, а j-я буква $Y_j=X_1$; аналогично, $a_{21}=\dots=a_{i-1,1}=0$, $a_{i1}=\dots=a_{m1}=1$, если X_i — первая из букв слова x, совпадающая с Y_1.

Итак, вычисляя каждый раз максимум из двух или трех чисел,— и запоминая, как и в задаче фараона, наш путь,— мы за $m \cdot n$ шагов заполним всю таблицу.

Проверьте, что последнее число a_{mn} будет равно длине наибольшей общей подпоследовательности наших двух слов, а саму эту подпоследовательность можно прочесть, двигаясь в обратном порядке (иногда, возможно, путь и не единственный). Биологи обычно изображают результат как «выравнивание» (*alignement*) двух данных слов (рис. 8). Сходные быстрые и требующие мало памяти алгоритмы можно найти и для других похожих задач: например, замене букв можно приписать другой «вес», чем удалению (или вставке); в белковых последовательностях (это — слова из 20 аминокислотных «букв») разумно сопоставить каждой паре букв свой «вес», отражающий степень их сходства (измеряемую, например, частотой замен одной буквы на другую). Очень важна и задача «множественного выравнивания» сразу нескольких слов, но с ростом числа слов количество необходимых операций в ней быстро растет.

Упражнения

1. Для школьной мастерской решили сначала купить 9 разных токарных станков стоимостью 10, 20, 40, 60, 75, 100, 130, 160, 190 рублей. Каждый из последующих станков в этом ряду может заменить любой предыдущий, но не наоборот. Например, станок за 100 рублей может обрабатывать те же детали, которые обрабатывает станок за 40 рублей. Однако директор школы возразил:

— Слишком много типов станков! Нам будет трудно их обслуживать — ведь для каждого нужны свои запчасти. Давайте купим 9 станков, но всего четырех разных типов, причем так, чтобы купленные станки обладали не меньшими возможностями, чем исходные 9 станков.

— А какие типы станков мы возьмем?

— Выберем их так, чтобы заплатить за все 9 станков поменьше. Евгений Иванович, вы поможете нам выбрать типы станков? — обратился он к учителю математики.

Какие типы станков предложил выбрать учитель и сколько они стоили?

2. То, что предложил проделать директор в предыдущей задаче, называется унификацией. Обычно на практике унификация дает экономическую выгоду. Но как эту выгоду подсчитать?

Пусть снова имеется 9 станков со стоимостями 16, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 28, 33 рубля. Требуется составить из них унифицированные серии, как это было сделано раньше, считая, что объединение станков в серии за счет упрощения обслуживания дает снижение затрат на серию по следующей таблице:

Число станков в серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Снижение стоимости	0	12	16	18	20	20	21	21	21

3. Дополните таблицы на рисунке 2, чтобы найти самую экономную лестницу из 5 ступеней; сколько золота на нее потребуется?

ТЕОРЕМА ФЕРМА — ЭЙЛЕРА О ДВУХ КВАДРАТАХ

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

Взгляните на несколько первых простых чисел: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19... Числа 5, 13 и 17 представимы, как суммы двух квадратов:

$$5=1^2+2^2,\ 13=2^2+3^2,\ 17=1^2+4^2,$$

а остальные написанные числа (3, 7, 11, 19) так представить нельзя. Можно ли дать какое-нибудь объяснение этому наблюдению? Оказывается, что возможно, а именно справедлива следующая

Теорема. *Для того, чтобы простое число было представимо в виде суммы двух квадратов, необходимо и достаточно, чтобы оно при делении на четыре давало в остатке единицу.*

(Действительно, $5=4\cdot1+1$, $13=4\cdot3+1$, $17=4\cdot4+1$, тогда как $3=4\cdot0+3$, $7=4\cdot1+3$, $11=4\cdot2+3$, ...)

Немного истории

Кто и когда впервые обнаружил это явление? Есть свидетельство, что этот результат в конце прошлого года мог праздновать свое трехсотпятидесятилетие. Ибо на Рождество 1640 года (в письме от 25.12.1640 г.) великий Пьер Ферма (1601—1665) извещал знаменитого Мерсенна, верного друга Декарта и главного посредника в переписке ученых своего времени, о том, что «Всякое простое число, которое при делении на четыре дает единицу, единственным способом представимо, как сумма двух квадратов».

В ту пору математических журналов еще не существовало, информацией обменивались в письмах и, как правило, результаты лишь анонсировались и не сопровождались доказательствами.

Правда, спустя почти 20 лет после письма Мерсенну в письме к Каркави, отправленном в августе 1659 г., Ферма приоткрывает замысел доказательства сформулированной выше теоремы. Он пишет, что основная мысль доказательства состоит *в методе спуска*, позволяющем из предположения, что для какого-то простого числа вида $4n+1$ заключение теоремы неверно, получить, что оно неверно и для меньшего числа и т. д., пока мы не доберемся до числа пять, когда окончательно придем к противоречию.

Первые доказательства были найдены Эйлером (1707—1783) между 1742 и 1747 гг. Причем, желая утвердить приоритет Ферма, к которому он испытывал чувство глубокого уважения, Эйлер придумал доказательство, отвечающее описанному выше замыслу Ферма. Воздавая должное обоим великим ученым, мы называем эту теорему *теоремой Ферма — Эйлера*.

Есть свойство, присущее почти всякому прекрасному математическому результату (равно, как и почти любой неприступной и прекрасной горной вершине): к нему можно добраться разными путями, его можно штурмовать с разных сторон, и все пути доставляют наслаждение тому, кто не устрашится ими проследовать.

Я хочу продемонстрировать все это на примере теоремы Ферма — Эйлера.

К вершине, открытой в XVII веке, мы пройдем тремя различными путями. Один из них был открыт в XVIII, другой — в XIX, а третий — уже в XX веке.

Доказательство Лагранжа

Это доказательство (с некоторыми модификациями) излагается ныне почти во всех руководствах по теории чисел. Оно опирается на так называемую лемму Вильсона (1741—1793): *если p — простое число, то число $(p-1)!+1$ делится на p.*

Чтобы не отвлекаться на доказательство этого вспомогательного результата, продемонстрируем здесь лишь основную идею этого доказательства на примере простого числа 13. Для любого числа между двумя и одиннадцатью (включая сами эти числа) найдем такой множитель, что их произведение при делении на 13 даст единицу:

$$(13-1)!=12!=$$
$$=(2\cdot 7)(3\cdot 9)(4\cdot 10)(5\cdot 8)(6\cdot 11)\cdot 12$$
$$(2\cdot 7=14=13+1,$$
$$3\cdot 9=27=2\cdot 13+1,$$
$$4\cdot 10=40=3\cdot 13+1,$$
$$6\cdot 11=66=5\cdot 13+1).$$

Из написанных равенств следует, что $12!$ при делении на 13 дает в остатке 12, т. е. $12!+1$ делится на 13. Аналогичную конструкцию можно осуществить и в общем случае.

Из леммы Вильсона извлечем такое следствие: *если $p=4n+1$ — простое число, то $((2n)!)^2+1$ делится на p.* Действительно, поскольку (лемма Вильсона) $(4n)!+1$ делится на p, простейшими тождественными преобразованиями получаем

$$(4n)!+1=$$
$$=1\cdot 2\ldots(2n)\cdot(2n+1)\ldots(4n)+1=$$
$$=1\cdot 2\ldots 2n(p-2n)(p-2n-1)\ldots$$
$$\ldots(p-1)+1=(2n)!(-1)^{2n}(2n)!+$$
$$+pk+1\equiv((2n)!)^2+1(\operatorname{mod} p),$$

откуда все и следует. Обозначим $(2n)!$ через N. Тем самым, мы доказали, что $N^2\equiv-1(\operatorname{mod} p)$.

Теперь нам предстоит преодолеть главную трудность.

Рассмотрим все пары целых чисел $(m;\ s)$ такие, что $0\leqslant m,\ s\leqslant[\sqrt{p}]$ ($[\sqrt{p}]$ — целая часть $\sqrt{p}$). Число таких пар равно $([\sqrt{p}]+1)^2>p$. Значит, по крайней мере для двух различных пар $(m_1;\ s_1)$ и $(m_2;\ s_2)$ остатки от деления m_1+Ns_1 и m_2+Ns_2 на p будут одинаковыми, т. е. число $a+Nb$, где $a=m_1-m_2$, $b=s_1-s_2$, будет делиться на p. При этом $|a|<\sqrt{p}$, $|b|<\sqrt{p}$. Но тогда число $a^2-N^2b^2=(a+Nb)\times(a-Nb)$ делится на p и, значит, учитывая, что $N^2\equiv-1(\operatorname{mod} p)$, получим, что a^2+b^2 делится на p, т. е. $a^2+b^2=rp$, где r — натуральное число ($r\neq 0$, т. к. иначе пары были бы одинаковые). С другой стороны, $a^2+b^2<2p$, т. е. $r=1$ и $a^2+b^2=p$. Теорема доказана.

Доказательство Д. Цагира

Это доказательство, принадлежащее современному математику Д. Цагиру, совершенно потрясло меня: это какое-то чудо, когда результат получается как бы из ничего. Вот это доказательство.

Рассмотрим преобразование, которое тройке натуральных чисел $(x;\ y;\ z)$ сопоставляет три числа $(x';\ y';\ z')$ по следующему правилу:

$$x'=x+2z,\ y'=z,\ z'=y-x-z,\quad \text{если } x<y-z, \tag{1}$$

$$x'=2y-x,\ y'=y,\ z'=x-y+z,\quad \text{если } y-z\leqslant x\leqslant 2y, \tag{2}$$

$$x'=x-2y,\ y'=x-y+z,\ z'=y\quad \text{в остальных случаях.} \tag{3}$$

Обозначим это преобразование буквой B:

$$B(x;\ y;\ z)=(x';\ y';\ z').$$

Очень легко проверить, что преобразование B сохраняет форму x^2+4yz. Сделаем это, например, для случая (1).

Имеем:

$$x'^2+4y'z'=(x+2z)^2+4z(y-x-z)=$$
$$=x^2+4xz+4z^2+4yz-4xz-4z^2=$$
$$=x^2-4yz.$$

В остальных случаях проверка столь же проста. Значит, если для какого-то числа p имелось равенство $x^2+4yz=p$, то оно сохранится и после преобразования B.

Проверим, что преобразование B

инволютивно, т. е. дважды примененное оно возвращает нас назад. Снова проделаем это для (1).

Пусть $x<y-z$, тогда $x'=2z+x$, $y'=z$, $z'=y-x-z$, откуда $x'=x+2z>y'-z'=2z+x-y$ и, значит, $B(x';\ y';\ z')$ надо вычислять по правилу (3):

$$x''=x'-2y'=x+2z-2z=x,$$

$$y''=x'-y'-z'=$$

$$=x+2z-z+y-x-z=y,$$

$$z''=y'=z.$$

И в остальных случаях все аналогично.

А теперь предположим, что p — простое число вида $4n+1$. Тогда, во-первых, уравнение $x^2+4yz=p$ разрешимо по крайней мере двумя способами: $x=1$, $y=n$, $z=1$ или $x=y=1$, $z=n$. И, во-вторых, это уравнение имеет конечное число решений. Если предположить, что среди его решений нет таких, при которых $y=z$ (ведь если таковые имеются, то и доказывать нечего: $p=x^2+(2y)^2$), мы получим, что преобразование B разбивает все решения на пары $((x;\ y;\ z);\ B(x;\ y;\ z))$, если только $(x;\ y;\ z)\neq B(x;\ y;\ z)$. Посмотрим, существуют ли такие пары или, как говорят, имеются ли у преобразования B *неподвижные точки*.

Очень легко понять, посмотрев на формулы (1)—(3), что неподвижные точки у B — те, для которых $x=y$. Но при $x=y>1$ решений у уравнения $x^2+4yz=p$ нет (ибо p не делится на y). Значит, есть только одна неподвижная точка $(1;\ 1;\ n)$. Из всего сказанного вытекает, что число решений уравнения $x^2+4yz=p$ нечетно: неподвижная точка $(1;\ 1;\ n)$, а остальные решения разбиваются на пары.

Однако, есть еще одно преобразование, обозначим его J, которое y и z меняет местами: $J(x;\ y;\ z)=(x;\ z;\ y)$. Оно, конечно, тоже инволютивно. Посмотрим, какие тройки (из наших решений уравнения $x^2+4yz=p$) оно оставляет на месте, т. е. каковы те $(x;\ y;\ z)$, что $(x;\ y;\ z)=(x;\ z;\ y)$. Мы условились ранее, что $y\neq z$. Но тогда и неподвижных точек нет! Значит, все решения разбиваются на пары. То есть число решений четно! Но только что мы утверждали, что число решений нечетно. Получилось противоречие. Значит, обязано существовать решение уравнения $x^2+4yz=p$, где $y=z$, т. е. p — сумма двух квадратов. Теорема доказана.

Третье доказательство

Немного модифицированное доказательство Минковского, о котором мы сейчас расскажем, пожалуй, еще больше поражает воображение. К сожалению, оно чуть-чуть неэлементарно, а именно, требует знания того, что такое эллипс и формулы площади эллипса.

Все начинается с одного результата Минковского, который, казалось бы, особого отношения к теореме Ферма — Эйлера не имеет.

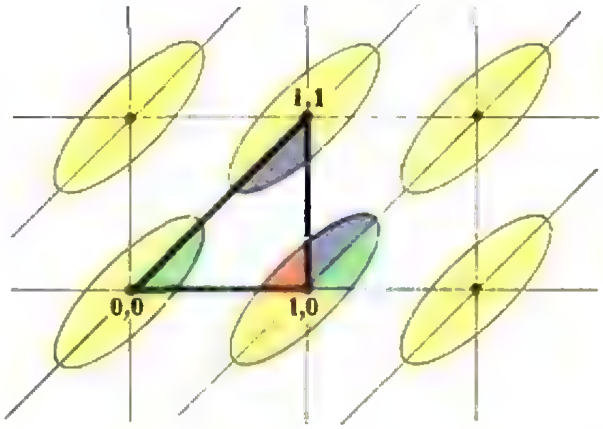
Теорема. *Пусть a, b и c — целые числа, при этом $a>0$ и $ac-b^2=1$. Тогда существует целочисленное решение уравнения $ax^2+2bxy+cy^2=1$.*

Доказательство. Возьмем декартову прямоугольную координатную систему на плоскости и зададим в ней скалярное произведение формулой:

$$((x;\ y);\ (x';\ y'))=$$
$$=axx'+bxy'+bx'y+cyy'.$$

Это скалярное произведение порождает «расстояние» от начала координат до точки $(x;\ y)$:

$$d((0;\ 0),\ (x;\ y))=\sqrt{((x;\ y),(x;\ y))}=$$
$$=(ax^2+2bxy+cy^2)^{1/2}.$$



Найдем кратчайшее «расстояние» от начала координат до какой-либо отличной от точки (0; 0) точки целочисленной решетки $(m; n)$ (m и n — целые числа). Пусть это расстояние равно $\hat{d}$ и достигается оно на точке решетки $(\hat{m}; \hat{n})$ так, что

$$a\hat{m}^2+2b\hat{m}\hat{n}+c\hat{n}^2=\hat{d}^2. \qquad (4)$$

Множество точек $(x; y)$ плоскости, удовлетворяющих неравенству

$$ax^2+2bxy+cy^2\leqslant\hat{d}^2,$$

является эллипсом. Из нашего построения вытекает, что если этот эллипс гомотетически сжать в два раза, а затем разнести этот «сжатый» эллипс (параллельно самому себе) центром в точки целочисленной решетки, то все полученные эллипсы, если и будут пересекаться, то только лишь граничными точками.

Нетрудно понять (см. рисунок), что площадь, занимаемая пересечениями эллипсов с треугольником с вершинами (0; 0), (1; 0) и (1; 1), равна половине площади всего эллипса. А она — эта площадь — равна

$$\frac{\pi\hat{d}^2}{4}\det\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\frac{\pi\hat{d}^2}{4}(ac-b^2)=\frac{\pi\hat{d}^2}{4}$$

(вот единственное «неэлементарное» место!). Итак, площадь, занимаемая в треугольнике эллипсами, равна $\pi\hat{d}^2/8$, и это лишь часть площади треугольника, равной 1/2, т. е.

$$\pi\hat{d}^2/8<1/2 \Rightarrow \hat{d}^2<4/\pi.$$

Но $\hat{d}^2$ — целое число (посмотрите на формулу (4)). Значит, $\hat{d}^2=1$ и, следовательно, $\hat{d}=1$! Теорема Минковского доказана.

Но какое же эта прекрасная геометрия имеет отношение к Ферма и Эйлеру? Самое непосредственное!

Мы знаем из леммы Вильсона, что число b^2+1, где $b=((p-1)/2)!$, делится на p — не так ли? А теперь применим теорему Минковского к числам $a=p$, $b=((p-1)/2)!$ и $c=(b^2+1)/a$. Мы получим, что существуют целые числа m и n такие, что

$$1=am^2+2bmn+cn^2,$$

следовательно,

$$a=a^2m^2+2abmn+(b^2+1)n^2=$$
$$=(am+bn)^2+n^2.$$

Итак (вспомним, что $a=p$),

$$p=(am+bn)^2+n^2,$$

т. е. p есть сумма двух квадратов. И снова: теорема доказана!

Нам пишут

Наш читатель Я. Грозенский, исследуя последовательность квадратов целых чисел, получил, что

$$x^2=2(x-1)^2-(x-2)^2+2.$$

Затем для кубов он нашел, что

$$x^3=3(x-1)^3-3(x-2)^3+(x-3)^3+6,$$

а для четвертых степеней —

$$x^4=4(x-1)^4-6(x-2)^4+$$
$$+4(x-3)^4-(x-4)^4+24.$$

В своем письме он спрашивает, существует ли общая зависимость

$$x^n=n(x-1)^n+A_1(x-2)^n+\dots$$
$$\dots+A_k(x-k)^n+\dots+A_n(x-n)^n+n!$$

Такая формула действительно существует:

$$x^n-C_n^1(x-1)^n+C_n^2(x-2)^n-\dots$$
$$\dots+(-1)^kC_n^k(x-k)^n+\dots$$
$$\dots+(-1)^n(x-1)^n=n!,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты $\left(C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$.

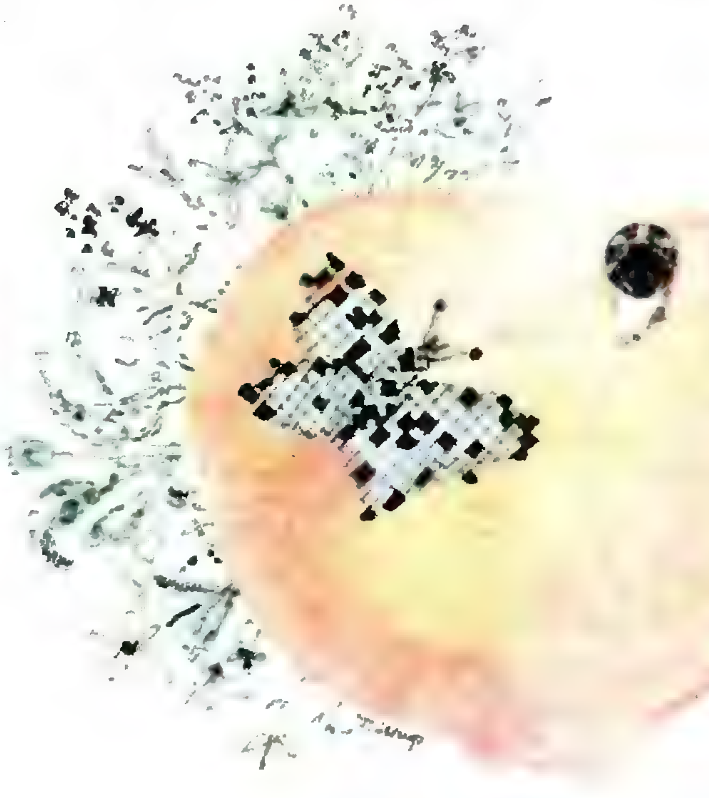
Попробуйте ее доказать.

В «Кванте» № 11 за 1989 год была опубликована статья Ю. Носова «Оптическая память». В ней рассказывалось о физических основах оптической памяти и обсуждались большие технические возможности оптических дисковых накопителей (ОДН). Публикуемую ниже статью, посвященную голографическим запоминающим устройствам (ГЗУ), можно рассматривать как развитие и продолжение первой статьи. Но читать ее можно независимо от первой.

ГОЛОГРАФИЧЕСКАЯ ПАМЯТЬ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

Оптические дисковые накопители не только не вытеснили магнитные запоминающие устройства (ЗУ), но даже не поколебали их позиций — не так-то легко вскочить в быстро идущий поезд. Но заговорить о себе ОДН заставили — «невиданная плотность записи», «на смену магнитной памяти», «революция ЗУ», и т. д. и т. п.,— все чаще стали появляться сопоставления оптических и магнитных ЗУ. И невольно в этих сравнениях начинает фигурировать «идеальное ЗУ», *то, к чему надо стремиться, эталон.* Несомненно, что искусственная память будущего информационного общества не сведется лишь к огромной емкости и низкой стоимости, к тому, в чем состязаются друг с другом ОДН и магнитные ЗУ. Ориентиром, образцом все-таки остается человеческий мозг со всем многообразием его количественных и качественных особенностей, но мозг «улучшенный», усо-



вершенствованный так, как это способна сделать электроника, мозг, лишенный человеческих недостатков.

Конечно, первое, в чем выигрывает оптическая память по сравнению с магнитной, это плотность записи на носителе. Локальность лазерного воздействия обеспечивает выигрыш на 1—2 порядка, достигнутая плотность составляет 10^8 бит/см^2, в перспективе на тех же принципах можно преодолеть и рубеж 10^9 бит/см^2. Много это или мало? Судите сами. Еще в 1986 году на оптическом компакт-диске была записана вся Британская энциклопедия, а о предельной плотности записи тогда и не мыслилось. При использовании оптики королю рока Элвису Пресли, мировому рекордсмену по числу записанных песен (659!), потребовалось бы не 90 дисков-гигантов, а всего один компакт-диск.

Очень важно, что в ОДН информацию можно вводить не только в цифровой, но и в так называемой аналоговой форме — графики, рисунки, чертежи, тексты могут быть прямо вписаны лучом лазера на носитель. Благодаря этому существующие банки данных можно дополнить банками изображений — искусственная память станет богаче, разнообразнее.

Повышение плотности записи, относительная простота устройства и эксплуатации ОДН ведут к снижению «стоимости бита хранимой информации» — показателя, который, по мнению большинства авторитетов, оказывается определяющим, когда приходится выбирать между разными ЗУ. Многих привлекает в ОДН долговечность и надежность хранения информации — очень часто именно это становится решающим фактором. Оптические диски сохраняют выжженные метки и 10, и 30 лет, некоторые фирмы не боятся называть и круглую цифру 100 лет, а бесконтактность лазерного считывания — надежный гарант сохранения целостности записанного. На магнитных же носителях все не так: домены разрушаются за несколько лет, а при считывании головка почти скользит по поверхности, порой нанося ей повреждения.

Правда, оптическая память заметно уступает магнитной по времени выборки, что в общем-то естественно: в большем хранилище труднее отыскать нужное, чем в меньшем. И еще одно обстоятельство — оптическим дискам порой нелегко прорваться через заградительную сеть стандартов, выработанных для магнитной памяти за десятилетия. Этим стандартам ОДН не во всем удовлетворяют, свои пока что еще не созданы, а в промышленности соответствие стандарту — все равно, что предъявление пропуска в проходной.

Пока оптические и магнитные ЗУ выясняют между собой отношения, посмотрим, как те и другие соотносятся с природным ЗУ — человеческим мозгом. Хотя что же смотреть, ведь и так видно, что это, как якобы говорят в Одессе, две большие разницы. И все же... Естественно, что машинная и биологическая память одинаковы по функциональному назначению: запоминание («запись»), хранение, извлечение («считывание»). В мозге могут быть выделены механизмы оперативной и долговременной памяти. Первый основан на активных процессах возбуждения нервных клеток — так достигается быстродействие, но для этого нужны непрерывные затраты биоэнергии. Поэтому емкость такой памяти невелика, а стоит человеку уснуть, оперативная память стирается — все как в ЭВМ при отключении питания. Механизм долговременного запоминания основан на химических превращениях клеток (ну чем не перемагничивание доменов?), поэтому после записи дополнительные энергозатраты не нужны.

Емкость мозга огромна — на языке ЭВМ она оценивается числом 10^{12}—10^{13} бит (это несколько тысяч плотно заполненных оптических дисков). Но расходуется эта емкость очень аккуратно: даже за всю жизнь не срабатывается и 10—20 %. Поэтому-то мозг и способен так долго сохранять свежесть — лет 50, а то и больше. Достигается это жесткой самодисциплиной. Аппарат кратковременной памяти воздвигает преграду всему случайному, тому, что не должно осесть надолго. Кроме того, записанная информация, если сознание не обращается к ней, постепенно стирается. Как мозг расставляет метки, что сохранить, что стереть, какой механизм забывания ненужного, не очень ясно, но механизм этот сусуществует. Психологи считают, что способность запоминать и помнить достигает пика приблизительно к 25-летнему возрасту, а затем постепенно начинает ослабевать.

Здесь мы подошли к еще одному очень важному моменту. Запоминание информации мозгом нельзя даже с натяжкой сопоставить с перемагничиванием доменов или выжиганием лазерных меток. Этот процесс у человека не сводится к строго (или сухо) логическому, абсолютно точному, бесстрастному. Запоминая, человек что-то убирает из образа, а что-то и добавляет, сравнивает с чем-то ранее увиденным, подыскивает аналогии в совсем других областях, и т. п. Говоря обобщенно, это процесс творческий, запоминание информации всегда сочетается с ее одновременной обработкой.

Далее. Запись на оптический диск ведется последовательно бит за битом, ее так и называют «побитовой». И мозг проделывает приблизительно то же, когда человек, например, читает книгу. Но ведь более характерны другие ситуации... Вы вбежали в соседнюю комнату, из которой раздался хлопок, и мгновенно увидели дымящийся цветной телевизор, оценили расстояние от него до оконных занавесок, зафиксировали испуганные глаза младшей сестренки и еще многое другое. Мозг обладает способностью параллельного ввода информации, причем ввод этот осуществляется конвейерно, синхронно с течением времени или, как принято говорить в технике, в реальном масштабе времени. А оптическое ЗУ (да и магнитное тоже), как бы резво диск не вращался, восприняло бы эту картину (меточка за меточкой, ничего не пропуская) тогда, когда вряд ли это было бы уже нужно... И еще одно. Запись на дисках ведется по преимуществу цифровым методом, те аналоговые формы восприятия чертежей, кривых, гистограмм, которые доступны лазерному лучу, вряд ли можно считать действительно аналоговыми. Передача полутонов, цветовых оттенков, двумерных или тем более объемных картин требует огромного, порой фантастического объема цифровой информации. А аналоговое восприятие, присущее мозгу, пусть не такое точное, как цифровое, обходится совсем незначительными средствами.

Но не только тем, как запоминается информация, но и тем, что получается в итоге, биопамять принципиально отличается от искусственной. Лазерный луч помещает данный конкретный бит в конкретную точку диска, каждый бит имеет свой «адрес», ничто не перепутается, не потеряется. Это предмет гордости ОДН — в обилии выжженных точек сохранить идеальный порядок. Но так ли уж это идеально? А если царапина исказит диск, если вообще кусочек диска отколется? Все, что там было, пропадет безвозвратно. Правильно, скажете вы, ведь произошла катастрофа, как же ее предусмотреть и тем более преодолеть?

Нет, не правильно, возразит многоопытный мозг, повидавший разное за миллионы лет эволюции. Катастрофы так же естественны, как и нормальное течение жизни. И если к катастрофам не приспособиться, не выработать против них защитной реакции — вот это действительно будет катастрофа. Мозг к запоминанию даже простейшей информации привлекает большую группу клеток, причем не обязательно близких друг к другу. Запись как бы размазывается по всему объему памяти. В случае повреждения части «мозгового ЗУ» память ослабевает, но записанная ранее картина сохраняется полностью.

Теперь уже естественным представляется и различие в поиске и считывании информации сравниваемых видов памяти. Для машинных ЗУ типична адресная выборка — информация отыскивается точно по адресам, предписываемым программой. Мозг тоже способен на это, но он может извлекать желаемое и совсем другим способом. Речь идет об ассоциативном поиске, при котором выборка осуществляется по тем или иным качественным признакам, присущим большому массиву информации.

В новелле К. Чапека «Что видел поэт» инспектор полиции, расследуя наезд автомобиля на старушку, использует свидетельские показания очень рассеянного поэта, который при этом присутствовал и, придя домой, написал стихотворение, что называется по горячим следам. В нем были и такие строки: «О шея лебедя, о грудь, о барабан и эти палочки». Нарушителя обнаружили именно по «показаниям» поэта — номерной знак автомашины был — вы уже, конечно, догадались — 235. Конечно, ассоциативная выборка может приводить и к неточностям или ошибкам при считывании, но она резко ускоряет поиск, что особенно существенно при большой емкости памяти. Как и ранее — хорошо совмещать оба вида поиска, и мозг это может. Однако постараемся быть объективными — каким бы совершенством не являлся человеческий мозг, но «и на Солнце есть пятна». Хорошо, конечно, что, забывая, мозг защищает себя от полного износа. Но если он забывает то, что как раз хотелось бы сохранить? Или, наоборот, вдруг выплеснет из своих глубин такое, что во время урока вы неожиданно начинаете сотрясаться от едва сдерживаемого хохота. Мозгу трудно запоминать монотонные, ничем не примечательные цифровые данные — сколько, например, вы помните телефонных номеров? А в простейшей ДВК их могут храниться тысячи...

Рабочая температура мозга — наши неизменные 36,6, уже на отметке 37 мы ставим красную черту. А если допустить типичные для технических требований колебания на ±3 °С? Хорошо еще, если +3 °С — воспаленное воображение хоть как-то будет цепляться за канву действительности. А если —3 °С? Такое, пожалуй, лучше и не представлять... Очень незначительные изменения давления, влажности, даже магнитного поля Земли, не говоря о вибрациях, ускорениях, ударах,— все это мозгу категорически противопоказано. Конечно, неплохо бы все это выправить, но приходится принимать мир таким, каков он есть.

И все-таки огромная емкость, надежное хранение, параллельно-последовательный ввод-вывод аналоговой и цифровой информации, адресный и ассоциативный поиск, обработка информации на всех стадиях записи, хранения, считывания — эта «визитная карточка» человеческого мозга не может не вызвать естественной зависти искусственной памяти.

Понятно, что дисковые накопители — оптические или магнитные,— как бы они не совершенствовались, никогда не смогут приблизиться к идеалу. Нужна какая-то новая идея, новый принцип, новый физический эффект.

Оказывается, подходящий эффект есть, этот эффект — оптический, и открыт он еще в 1947 году английским ученым венгерского происхождения Д. Габором. Это голография — способ записи световых потоков, существенно отличающийся от фотографии и значительно превосходящий ее своими возможностями. До 1960 года, пока не был изобретен лазер, позволяющий получать пучки когерентного света, голография «пребывала в спячке» (выражение Габора из речи по поводу присуждения ему Нобелевской премии 1971 года), но уже в 1961 году были получены первые лазерные голограммы.

В чем состоит основная идея голографической записи? О голографии написано немало, поэтому будем краткими. В фотографии свет, отраженный предметом, фокусируется объективом на поверхности пленки (или пластинки), покрытой фотоэмульсией. Чем больше интенсивность падающего света, тем сильней почернение негатива после проявления.

Но ведь свет — это электромагнитная волна, а она характеризуется не одной лишь интенсивностью. Важна частота колебаний, различные частоты воспринимаются глазом как разные цвета, и фотоснимок способен зафиксировать это различие (цветная фотография). Но волна обладает еще одной характеристикой — фазой. С этим понятием вы встречались при изучении интерференции — результат интерференции двух волн определяется разностью их фаз. Отраженная от разных точек предмета когерентная волна приходит к месту наблюдения с разными формами, т. е. фаза отраженной волны несет в себе информацию об объемной форме предмета. Но... на фотопластинке, которая фиксирует только интенсивность света, фаза волны безнадежно теряется. Ни один регистратор света не способен зафиксировать фазу световой волны: колебания происходят с такой высокой частотой (в миллионы раз превышающей частоту радиоволн), что и в фотоэмульсии, и в глазу человека неизбежно усреднение по очень большому числу колебаний, и отсюда — потеря фазы.

Голограмма получается без объектива, поскольку здесь изображение предмета не формируется. Вместо этого свет от лазера сначала расширяется, а затем расщепляется на два пучка при помощи полупрозрачного зеркала (рис. 1). Свет одного из этих

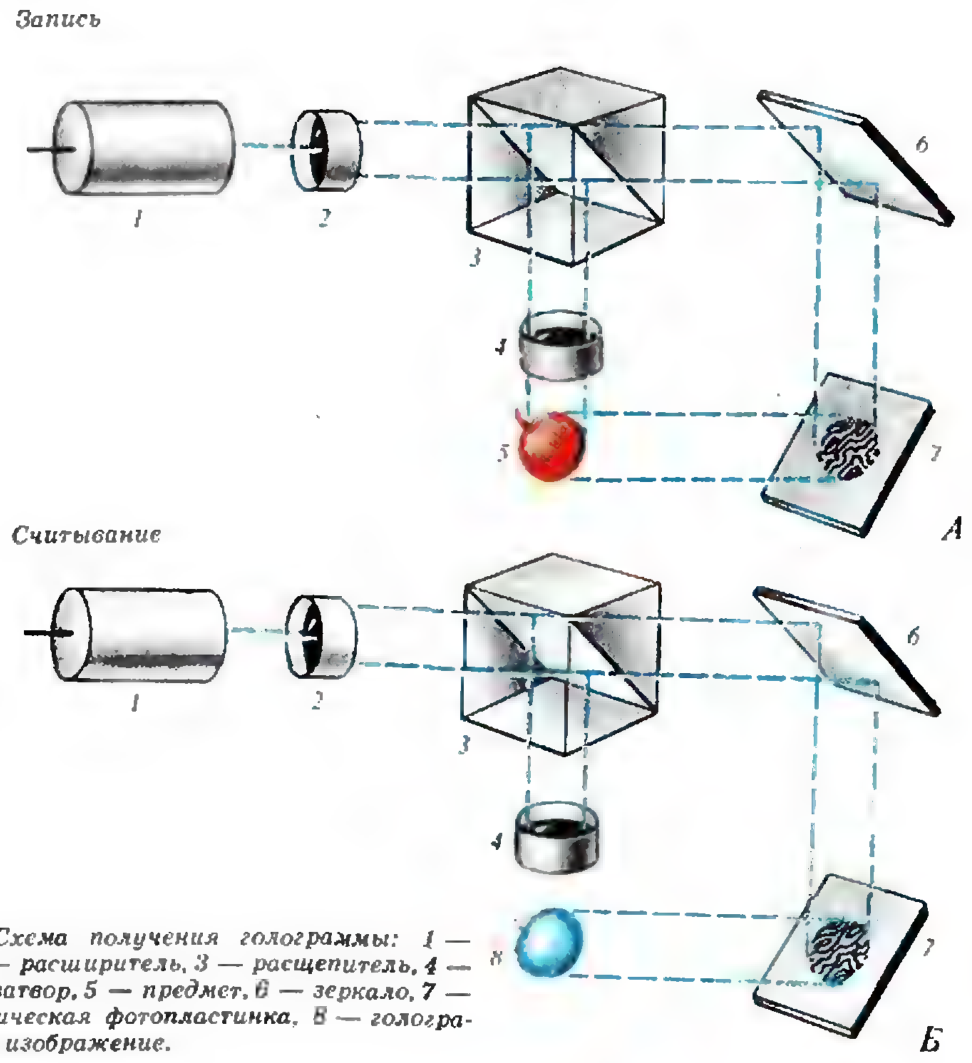


Рис. 1. Схема получения голограммы: 1 — лазер, 2 — расширитель, 3 — расщепитель, 4 — световой затвор, 5 — предмет, 6 — зеркало, 7 — голографическая фотопластинка, 8 — голографическое изображение.

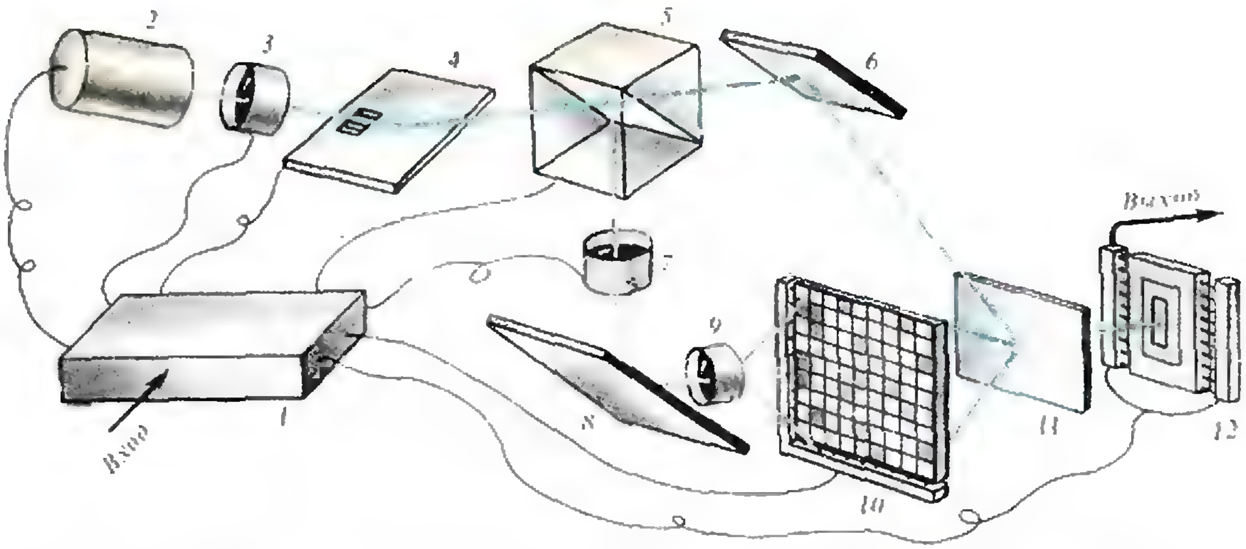


Рис. 2. Структурная схема голографического ЗУ: 1 — электронный блок управления, 2 — лазер, 3, 7 — световые затворы, 4 — дефлектор, 5 — расщепитель, 6, 8 — зеркала, 9 — расширитель, 10 — управляемый оптический транспарант, 11 — голографическая фотопластинка, 12 — матричный фотоприемник.

пучков (предметный пучок) направляется на предмет, который отражает его и рассеивает в сторону фотопластинки. Свет второго пучка (опорный пучок) прямо направляется на фотопластинку.

На фотоэмульсии фиксируется картина интерференции этих двух пучков, проявляющаяся в виде светлых и темных волнистых линий и точек без каких-либо внешних признаков изображения, скрытого в ней. Тем не менее эта картина, несмотря на кажущийся хаос, содержит полный зрительный образ предмета. Степень потемнения эмульсии определяется не только интенсивностью предметного пучка в этой точке (как при фотографии), а разностью фаз предметной и опорной волн. Если волны приходят в фазе, их амплитуды складываются, если в противофазе — вычитаются. Опорная волна, ничем не искажаемая, несет в себе как бы базу сравнения, начало отсчета для фазы предметной волны; иногда говорят, что голография содержит «встроенную оптику». Таким образом, интерференционная картина содержит в закодированном виде информацию и об амплитуде, и о фазе волнового фронта рассеянного предметом света, а это и означает полное изображение предмета.

Итак, на фотопластинке запечатлелась мгновенно остановленная, «замороженная» световая волна, отраженная предметом. Но как же в этой причудливой шифрограмме разглядеть сам предмет? Теперь это уже несложно, достаточно лишь воспользоваться принципом обратимости волн. Если осветить фотопластинку с записанной голограммой потоком света, в точности идентичным опорному (закрыть затвор 4; см. рисунок 1), то возникающее при этом изображение оказывается неотличимым во всех своих трех измерениях от вида реального предмета. Этот процесс называется восстановлением (считыванием) голограммы.

Голография, позволяющая записать, сохранить, считать световую волну со всеми ее тонкостями, естественно, привлекла к себе внимание тех, кто задумывался об оптической памяти. Еще в 1967 году, лет за пятнадцать до появления оптических дисковых накопителей, начали развиваться концепции голографических запоминающих устройств (ГЗУ). Но ограниченность технических средств не позволила достигнуть в ту пору успеха. Сегодня же, когда оптоэлектроника на подъеме,— иное дело.

Структурная схема голографического ЗУ (рис. 2) является естественным развитием схемы записи и восстановления голограмм и совершенно не похожа на ОДН ни составом элементов, ни системой связи между ними. Для голографии, как ясно из предыдущего, необходимы потоки излучения, представляющие собой идеально когерентные (или близкие к ним) световые волны,— иначе четких интерференционных картин не получить. Такое излучение могут дать только лазеры, да и то не все. Наивысшей степенью когерентности обладают газовые лазеры, полупроводниковые же пока еще большей частью для голографии непригодны. Но газовые лазеры, в отличие от полупроводниковых, работают лишь в непрерывном режиме, поэтому для их модуляции необходимы внешние модуляторы — это и объясняет появление в схеме ГЗУ оптических затворов *3* и *7*, прерывающих по программе лазерный луч.

Вводимая в память информация размещается на оптическом транспаранте. В простейшем случае — это фотопластинка с чередующимися темными и прозрачными областями: прозрачное место соответствует логической «единице», затененное — логическому «нулю». Но, переписав в память одну пластинку, надо чисто механически заменять ее другой — это медленно, неудобно, несовременно. Поэтому стали использовать управляемый оптический транспарант, в котором потемнение или просветление отдельных участков пластинки происходит по команде от электронного блока управления.

Процесс записи выглядит следующим образом. В транспарант «вписывается» страница информации — тот или иной набор темных и светлых пятен, затворы *3* и *7* на некоторое время открываются, и страница в виде голограммы переносится в левый верхний угол фотопластинки. На транспарант выводится новая страница информации, и в это же время вступает в игру дефлектор, назначение которого — изменять направление лазерного луча (от лат. deflectio — «отклоняю»). Затворы *3* и *7* вновь «щелкают», и вторая страница информации «оседает» на фотопластинке рядом с первой. Процесс повторяется многократно до заполнения всей фотопластинки — общее число голограмм может составлять сотни и тысячи. После проявления фотопластинка может сохраняться сколь угодно долго. При считывании информации дефлектор по команде от программатора «нацеливается» на нужную голограмму. Затем затвор *3* срабатывает (затвор *7* во время считывания остается закрытым, «запирая» предметный луч) — и восстановленная голограмма (т. е. ранее записанная страница черно-белых ячеек) отображается на многоэлементный матричный фотоприемник, содержащий столько же фоточувствительных элементов, сколько точек в странице. Возникающие на каждом элементе электрические импульсы последовательно подаются на выход устройства — считывание одной голограммы завершилось.

Чтобы ГЗУ от лабораторных образцов (а сегодня это так) шагнули к совершенным промышленным изделиям, необходима и совершенная элементная база. Высококогерентные мощные полупроводниковые лазеры; транспаранты, содержащие миллионы быстро перепрограммируемых ячеек; дефлекторы, быстро и безошибочно ориентирующиеся в тысячах близких, но все-таки разных направлений; многоэлементные высокочувствительные фотоприемники с электронным самосканированием сигналов — все это в принципе уже есть, все это ускоренно развивается и вот-вот станет достоянием разработчиков устройств памяти. Пессимист, правда, может заметить, что «вот-вот» растянулось уже более чем на 30 лет. Но — будем оптимистами и помечтаем о совершенных голографических ЗУ.

Лишь по плотности записи они сродни ОДН — и там и здесь все определяется длиной волны излучения лазера. А дальше начинаются различия,

(Окончание см. на с. 24)

ТРИГГЕРНЫЙ ЭФФЕКТ В ЧЕЛОВЕЧЕСКОМ ОРГАНИЗМЕ

(или Как переобуться на морозе)

Доктор физико-математических наук
В. ЗУЕВ

Выбранное мною название звучит довольно парадоксально, а я — не любитель парадоксов. Парадоксы, по моим наблюдениям, результат временного незнания связи явлений или чего-либо подобного.

Название настраивает на шутливый тон, и это хорошо, но речь тем не менее идет о серьезных вещах — ниже следует разъяснение некоторых особенностей поведения человеческого организма с точки зрения физики. Физика — моя профессия.

Спрашиваю себя: не лучше ли сразу же все объяснить и сразу же снять налет мистификации. Удерживает меня лишь заочный характер нашего общения: в устной беседе, темп которой может быть очень высок, а рассказчик следит за реакцией слушателей, сделать это было бы проще. Написанные объяснения — совсем иное дело. Поэтому начну излагать все по порядку.

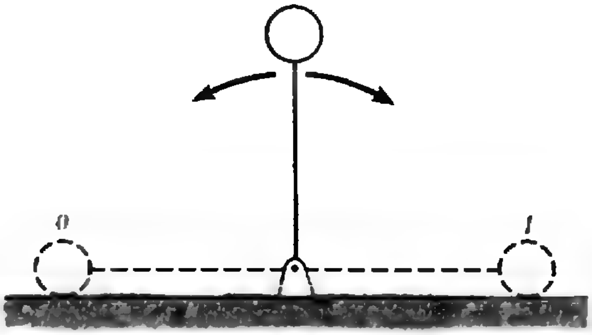
Триггер — это такой электронный прибор (электронная схема), который имеет два состояния покоя, два состояния устойчивого равновесия.

Сначала обратимся к механическому аналогу — к маятнику в виде жесткого стержня с грузом на одном конце и с шарниром — на другом, вроде маятника в старинных (довоенных) часах-ходиках. Однако наш маятник следует установить на столе грузом вверх, а шарниром вниз, т. е. совсем не так, как в часах-ходиках.

Маятник с грузом вверху в отвесном положении неустойчив: он падает либо влево, либо вправо от вертикали (см. рисунок) и ложится на бок на плоскость, на которой закреплен шарнир. Обозначим (для определенности) положение равновесия слева цифрой нуль, а положение равновесия справа — единицей.

Вернемся теперь к триггеру. На выходных клеммах этого электронного прибора либо есть определенное напряжение, например, 1 вольт, либо нет напряжения, т. е. 0 вольт. Внешний импульс, приходящий на вход триггера, изменяет его состояние, т. е. переводит триггер из того устойчивого состояния, в котором он находится (например, 0 на выходе), в другое (1 на выходе). Важно, что после переходного процесса триггер устойчиво выдает напряжение либо один вольт, либо нуль вольт. В этом смысле поведение триггера сходно с поведением механического маятника, установленного грузом вверх.

Триггер — самый распространенный прибор в современной электронике, как в профессиональной, так и в бытовой. Триггеры есть в электронных часах, в микрокалькуляторах, в персональных компьютерах,



в радиоприемниках с цифровой настройкой, в мощных вычислительных машинах. Ведь на самом внутреннем (для электронного прибора) уровне обработки информации как раз и происходит обмен последовательностями нулей и единиц.

Теперь пора перейти к вопросу о том, как правильно переобуться на морозе. Речь о том, как обуть промерзшие ботинки и не замерзнуть.

Опыт правильного обращения с промерзшими ботинками я приобрел, когда мальчишкой бегал на каток и там менял валенки на ботинки с беговыми коньками. Катались на коньках по нескольку часов, и ноги не замерзали на морозе 15—18 градусов.

Не знаю, как сейчас выглядят ботинки беговых коньков, а тогда это были легкие ботинки из тонкой хромовой кожи на тонкой кожаной подошве — почти как дамские туфли-лодочки (соответствующего размера), разве что в полтора-два раза тяжелее: дамские туфли изготавливают из лаковой кожи, она тоньше хромовой.

Для довершения описания ботинок беговых коньков следует отметить, что эти ботинки не имели никакой подкладки — ни шерстяной, ни войлочной; поролон в то время еще не был изобретен. Тонкие шерстяные носки следовало, естественно, надевать. И все это в силу жестокой борьбы за облегчение веса конька с ботинком — совсем, как при постройке дельтаплана.

Переобувались в холодном павильоне-раздевалке, где было почти так же морозно, как и снаружи.

Главная хитрость состояла в следующем: перед одеванием ботинка нужно было, как мы говорили, в него дыхнуть (неблагозвучно, но ничего не поделаешь, уже история...) теплым воздухом собственного дыхания, т. е. заполнить ботинок воздухом, нагретым собственными легкими. Если этого не сделать, то нога практически мгновенно замерзала. Если подышал в ботинок (достаточно одного выдоха, более того — именно одного, иначе ботинок отсыреет — в нем выпадет влага, в некотором смысле — роса) — нога не замерзнет.

Позднее, когда я узнал о теплоемкости, о внутренней энергии физических тел и тому подобном, я много лет удивлялся тому, как можно согреть легкий, но все-таки довольно массивный ботинок слабым дуновением — теплом одного выдоха легких. Опыт показывает, что в каком-то смысле — можно. Чтобы покончить с ботинком, заметим, что на короткое время выдохом легких можно согреть изнутри тонкий поверхностный слой кожи ботинка. Запомним этот факт.

К сожалению, подготовка к объяснению еще не закончена. Дополнительно следует объяснить, как реагируют на тепло и холод поверхностные покровы человеческого тела, ниже для краткости — кожа. В коже, а точнее — непосредственно под кожей, имеется слой, пронизанный многочисленными тонкими сосудами — капиллярами. Этот слой — теплообменник с окружающей средой. (Теплообменник есть у паровоза, автомобиля, спутника на орбите, в любом электронном приборе, даже на АЭС; человеческое тело тоже имеет свой теплообменник.) С его помощью температура человека поддерживается на постоянном уровне — 36,6 градуса по Цельсию. Если снаружи холодно, то поступление крови к поверхности тела уменьшается, теплоотдача вовне уменьшается. Если жарко — поступление крови увеличивается, теплоотдача вовне также увеличивается.

При медленных изменениях окружающей температуры кожа справляется со своими обязанностями, работает, как говорят, в нормальном режиме, и человек чувствует себя комфортно.

Вот теперь мы располагаем понятиями, с помощью которых сможем объяснить, почему промерзший ботинок следует слегка согреть изнутри собственным дыханием.

Имеем две ситуации. В первой ситуации надеваем холодный ботинок. Кожа ощущает холод и реагирует таким образом, чтобы уменьшить теплоотдачу. А нам нужно, чтобы ботинок нагревался и побыстрей. Нам нужна мощная теплоотдача, чтобы теплоподвод к ботинку был большим. Но... Итог обсуждения первой ситуации, на мой взгляд, таков: нога в ботинке, скорее всего, замерзнет.

Во второй ситуации имеем дело со слегка нагретым ботинком, точнее, внутренняя поверхность ботинка теплая, основная масса ботинка холодная. Нога ощущает тепло, и теплоотвод через кожу уж во всяком случае не уменьшается. Ботинок начинает прогреваться вглубь, теплоотвод (и теплоподвод) не только не уменьшается, а, может быть, даже увеличивается. В итоге ботинок прогреется полностью. И вы не будете беспокоиться за свои ноги даже на сильном морозе.

Позвольте мне в данном месте повториться, так как я не хочу быть неверно понятым. Мой рецепт состоит в следующем: если вам необходимо обуться на холоде, если у вас нет средств предварительно согреть обувь, если у вас замерзли ноги и негде их согреть, то целесообразно максимально быстро переобуться, слегка подышав в ботинки. Вам станет лучше. На морозе до 30 градусов по Цельсию это проверено.

Подведем итог. А именно, постараемся понять, что мы (может быть, весьма условно) хотим назвать «триггерным эффектом в человеческом организме». Слабый внешний толчок (один выдох) переводит организм (в данном случае — ногу в ботинке) в одно из двух сильно отличающихся друг от друга состояний (отличие это особенно очевидно «хозяину» ноги!). (Заметим, кстати, что ситуация больше напоминает пример с маятником, чем с триггером. При легком толчке маятник переходит из некоторого начального (вертикального) положения в одно из двух устойчивых состояний. Триггер же переходит из одного устойчивого положения в другое. Но название «триггерный эффект» звучит красиво и легко запоминается, отражая при этом главное — наличие двух состояний устойчивого равновесия.)

Можно предположить, что такая «триггерная» реакция организма должна проявляться и в других ситуациях, т. е. достаточно адекватно описывать реакцию человеческого организма на изменение внешних условий.

Если бы я писал, как говорят профессионалы-физики, более строго, то я бы сказал что-нибудь вроде того, что предложена феноменологическая теория поведения организма при некоторых ограничениях на начальные и граничные условия.

Феноменологические теории в науке вполне приемлемы и эффективны. Они позволяют интенсивно продвигаться вперед в научных исследованиях, пока кто-либо не разовьет, как принято говорить, строгую теорию. Для разработки строгой теории нужно время, спокойные условия для работы и, наконец, просто удача.

Обсудим вопрос о соотношении теории и эксперимента. Речь идет о достаточности теории и о достаточности эксперимента. Не следует думать, что я, так сказать, подстилаю себе соломку, чтобы мягче было падать. Дело в том, что на основании аналогии, т. е. феноменологической теории, я собираюсь сделать кое-какие обобщения: я намерен использовать теорию «триггерного эффекта» как инструмент исследования. Однако, мне вновь необходимо небольшое отступление.

В книге Е. Л. Фейнберга «Кибернетика, логика, искусство» имеется место, где он обсуждает поставленный выше вопрос о достаточности теории и эксперимента. Е. Л. Фейнберг указывает, что вопрос о достаточности теории и эксперимента выходит за пределы формальной логики теории, строгой логики оценки результатов эксперимента. Этот вопрос решается всякий раз и каждым конкретным человеком произвольно.

Моя позиция заключается в том, что после принятия решения о достаточности (на определенный момент) теории и эксперимента следует строго зафиксировать условия, при которых принято решение, с тем, чтобы впоследствии можно было бы вернуться к вопросу о достаточности на новой основе, с новыми фактами.

Я склонен сейчас думать, что триггероподобный характер реакции организма на условия — довольно общее свойство человеческого организма. В частности, я имею в виду невралгические боли, которые тем сильнее, чем больше внимания им уделяется. Возможно, эффективнее чем-то отвлечь себя, применить аутотренинг. Второй пример — мышечные судороги при плавании на длинные расстояния. Здесь известен эффективный прием — следует превозмочь себя и кольнуть сведенную судорогой мышцу английской булавкой. Возможно, женские рыдания, которые в конце концов приносят облегчение,— такого же типа явление. И наконец, нервнопсихические расстройства, например астенический синдром. Я — не специалист, и поэтому не могу, точнее, не хочу пускаться в пространные рассуждения по данному предмету. Думаю, однако, что полезно с помощью аналогии с триггером поискать новые средства воздействия на пациента, на которого обрушилась эта болезнь.

Есть еще одна область деятельности человека, на которую мне указал Р. О. Нестеров. Это — проблема одежды для работающих в условиях Крайнего Севера. Возможно, с помощью представлений о триггерных эффектах в организме человека трудности конструирования одежды для Севера можно перенести, так сказать, в иную плоскость, избавиться от привычных представлений и найти новые, оригинальные решения.

(Начало см. на с. 13)

да какие! За один цикл в ОДН записывается одна метка, а в ГЗУ — страница, и в ней может быть хоть миллион меток. То же самое и при считывании. Эта параллельность ввода-вывода информации очевидно роднит ГЗУ с мозгом. Внутри считанной страницы дальнейшая выборка идет последовательно бит за битом — опять же как в мозге.

На этом аналогии, даже совпадения, не кончаются. Голографическая запись характеризуется тем, что волна, отраженная от одной ячейки транспаранта, например от прозрачной «1», воздействует на всю площадь голограммы, т. е. получается, что любой бит «размазывается» по этой площади, подобно тому, как это происходит в мозге. Диаметр голограммы может достигать миллиметра, что в сотни раз больше диаметра лазерной метки в ОДН. Отсюда — повышенная надежность хранения информации в голограммах: незначительные пылинки и даже царапинки им не страшны. На транспарант можно записывать не только черные и белые нули и единицы, но и картины, образы, в том числе и цветные полутоновые. Для голографии могут использоваться фотопластинки с очень толстой эмульсией — запись в ней осуществляется не только на поверхности, но и во всем объеме — вот еще одно приближение к «серому веществу» наших черепных коробок. Все манипуляции с лазерным лучом, переписывание транспаратна, перестройка других элементов осуществляется чисто электронным способом — в устройстве нет механически перемещающихся, трущихся (и, увы, истирающихся) деталей и узлов. Вот еще один, и опять принципиальный, шаг от ОДН к мозгу. Помещая на пути предметного лазерного луча оптические фильтры, линзы, призмы, решетки и т. п., можно осуществлять разнообразную обработку голограмм, обеспечивая, в частности, и ассоциативный поиск.

Совершенные голографические ЗУ пока не созданы, но сообщения о победах этого направления появляются все чаще и чаще. Вот голографический фильтр, позволяющий распознать любой летящий объект, зарегистрированный локатором. Уже давно создан голографический банк изображений, содержащий... отпечатки пальцев всех преступников США. А в Англии начали выпуск денежных чеков, подделка которых исключается благодаря нанесению на них голограммы с портретом Шекспира (неплохое использование классического наследия!). Пока это отдельные штрихи, частности, сложится ли из них принципиально новая голографическая запоминающая и вычислительная техника — покажет будущее.

Задачник „Кванта"

[illegible]

Задачи

М1306—М1310, Ф1313—Ф1317

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10-91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1306» или «Ф1313». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1306. Назовем вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника B, вписанного в другой прямоугольник Π (так, что вершины B лежат по одной на сторонах Π), не меньше вытянутости Π.

И. Акулич

М1307. Докажите, что при любом натуральном n у числа $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ не меньше n различных простых множителей.

Н. Васильев, В. Сендеров

М1308. На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трех прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.

А. Савин

М1309. На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определяется 1-й «залп»: множество $H_1(M)$ из трех точек — середин отрезков, соединяющих M с вершинами треугольника, затем 2-й залп: множество $H_2(M)$ из 9 точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_1(M)$ с вершинами треугольника, и так далее) k-й залп $H_k(M)$ состоит из 3^k точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_{k-1}(M)$ с вершинами треугольника). Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ для данного треугольника можно указать фигуру площади меньше ε такую, что для любой точки M найдется номер $k=k(M, \varepsilon)$, начиная с которого весь «салют» $H_k(M)$, $H_{k+1}(M)$,... не будет выходить за пределы этой фигуры.

А. Белов

М1310*. В соревнованиях участвуют 64 боксера. Ежедневно встречаются 32 пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за 16 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание на каждый день составляется накануне вечером и не меняется в день соревнований.)

А. Анджанс

Ф1313. Шмель может лететь вертикально вверх с максимальной скоростью v_1, а вниз — со скоростью v_2. Считая «силу тяги» шмеля не зависящей от направления полета, а силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости шмеля, определите максимальную скорость полета шмеля под углом α к горизонту.

Б. Корсунский

Задачник „Кванта"

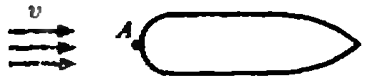


Рис. 1.

Ф1314. Модель дирижабля обдувают в аэродинамической трубе потоком воздуха со скоростью $v=300$ м/с. В точке A (точно по оси) скорость потока обращается в нуль (рис. 1). Найдите температуру воздуха около этой точки. Наружная температура равна $T=300$ К.

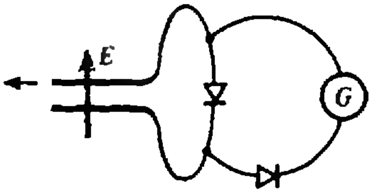


Рис. 2.

Ф1315. Для измерения напряженности (E) электростатического поля в опыте используют плоский конденсатор ($S=100$ см^2, $d=1$ мм), одна из пластин которого неподвижна (рис. 2). Другую пластину периодически с помощью специального механического устройства скачком убирают в сторону, резко уменьшая емкость конденсатора. Считая элементы измерительной цепи (диоды и гальванометр) идеальными, найдите показания гальванометра при $E=1000$ В/см и периоде механических толчков $T=0{,}01$ с. Подумайте, сильно ли зависит ответ от возможной неидеальности диодов и гальванометра.

З. Рафаилов

Ф1316. Полупроводниковый терморезистор имеет зависимость сопротивления от температуры вида $R=R_0(1-\alpha t)$. Когда терморезистор нагрет до температуры t, он рассеивает в окружающую среду мощность $P=B(t-t_{\text{окр}})$. Какой ток будет течь в цепи, если к терморезистору подключить источник с напряжением U?

А. Зильберман

Ф1317. К усилителю низкой частоты подключаем громкоговоритель и микрофон и устанавливаем их на расстоянии 0,5 м друг от друга. Плавно увеличивая усиление, добьемся того, что система «завоет». Оцените частоту звука при этом. Что изменится, если выводы громкоговорителя поменять местами? (Примечание: такой опыт легко проделать при помощи обычного магнитофона.)

Р. Александров

Решения задач

М1281—М1285, Ф1293—Ф1297

М1281. *Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4.*

У этой задачи есть много разных решений, использующих простые неравенства для двух положительных чисел:

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}, \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$$

и т. п.

Приведем четыре из них, предлагая читателю выбрать самое симпатичное на свой вкус.

1. Условие $ab>a+b$ запишем так:

$$(a-1)(b-1)>1.$$

Обе скобки должны быть положительными (ведь если $0<a<1$ и $0<b<1$, то $(a-1)(b-1)<1$). Тогда, согласно неравенству между средними арифметическим и геометрическим чисел $a-1$ и $b-1$ имеем

$$a-1+b-1 \geqslant 2\sqrt{(a-1)(b-1)} > 2.$$

Отсюда $a+b>4$.

2. Данное условие эквивалентно тому, что среднее *гармоническое* чисел a и b больше 2:

$$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2ab}{a+b} > 2.$$

Но среднее арифметическое не меньше среднего гармонического:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b}, \text{ т. к. } (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда $a+b>4$.

3. Поделив данное условие на a и на b, получаем

$$a > \frac{a}{b}+1, \quad b > \frac{b}{a}+1,$$

откуда

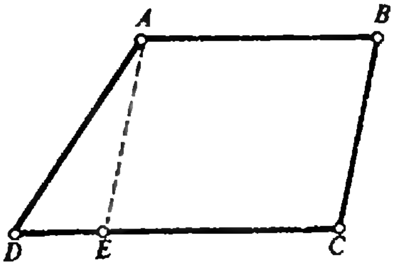
$$a+b > \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2 \geqslant 4.$$

4. Продолжив условие влево очевидным неравенством $\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab > a+b$, для $S=a+b$ получим $S^2/4>S$, или $S^2>4S$, откуда (поскольку $S>0$) $S>4$.

Н Васильев

М1282. *Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограммов) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.*

В любой трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований. В самом деле, если E — точка на большем основании CD трапеции $ABCD$ такая, что $ABCE$ — параллелограмм (см. рисунок), то



$$CD-AB=DE>|AD-AE|.$$

(Последнее неравенство — тот факт, что в треугольнике каждая сторона больше модуля разности двух других — следует из «неравенства треугольника», согласно которому каждая сторона меньше суммы двух других.)

Отсюда следует утверждение задачи.

В Произволов

М1283. *Квадрат 99×99 разбит на фигурки трех типов (рис. 1). а) Докажите, что фигурок первого типа не меньше чем 199.*
б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа ровно 199.

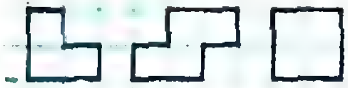
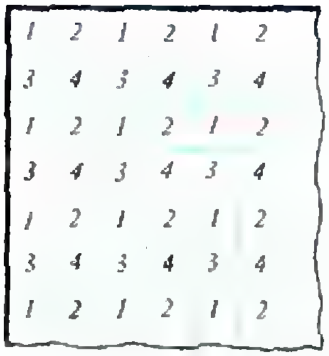


Рис. 1.



1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2

Рис. 2.

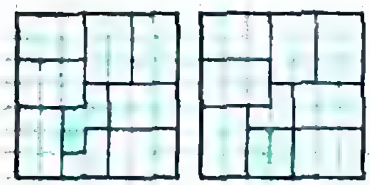


Рис. 3.

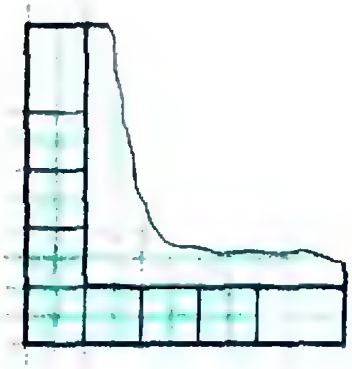


Рис. 4.

а) Докажем, что (для любого $n\geqslant4$) при заполнении квадрата $(2n-1)\times(2n-1)$ фигурками данных трех типов фигурок 1-го типа — уголков — будет не меньше $4n-1$. В частности, при $n=50$ получим нужную оценку 199.

Раскрасим клетки доски $(2n-1)\times(2n-1)$ в четыре цвета 1, 2, 3, 4, как показано на рисунке 2. Пусть a_i — число уголков, не содержащих клетку цвета i ($i=1, 2, 3, 4$), т. е. содержащих по одной клетке трех других цветов; b — общее число фигурок двух других типов, каждая из которых содержит по одной клетке разных цветов. Поскольку общее число клеток 1-го цвета равно n^2, 2-го, 3-го — по $n(n-1)$ и 4-го — $(n-1)^2$, то

$$a_2+a_3+a_4+b=n^2,$$
$$a_1+a_2+a_4+b=a_1+a_3+a_4+b=n(n-1),$$
$$a_1+a_2+a_3+b=(n-1)^2,$$

откуда

$$a_4-a_1=2n-1,\quad a_3-a_1=a_2-a_1=n$$

и (поскольку $a_1\geqslant0$) $a_2=a_3\geqslant n$, $a_4\geqslant2n-1$, так что

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant n+n+2n-1=4n-1.$$

Вот более короткое рассуждение, в котором участвует лишь общее число $a=a_1+a_2+a_3+a_4$ уголков и число b фигурок двух других типов. Поскольку $3a+4b=(2n-1)^2$ и в каждой фигурке содержится не более одной клетки 1-го цвета, то $a+b\geqslant n^2$, поэтому

$$4a\geqslant4n^2-4b=4n^2-(2n-1)^2+3a=4n-1\geqslant3a,$$

откуда

$$a\geqslant4n-1.$$

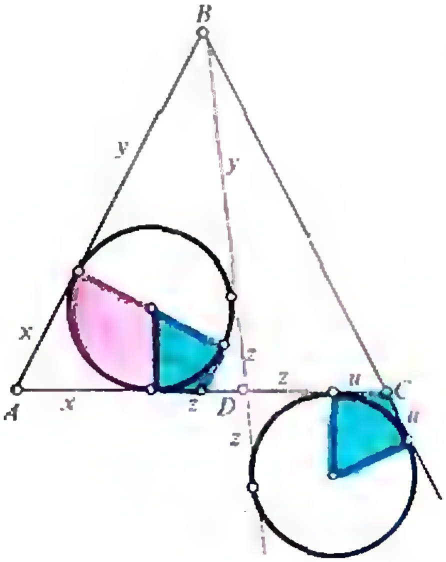
б) На рисунке 3 показано, как можно заполнить квадрат 7×7, используя одну фигурку типа 2 или 3 и $15=4\cdot4-1$ уголков*, а на рисунке 4 — как можно от заполнения квадрата $(2n-1)\times(2n-1)$ с $4n-1$ уголками перейти к заполнению квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ с $4(n+1)-1=4n+3$ уголками. (Заметим, что из наших оценок в пункте а) следует, что $b=n^2-a_2-a_3-a_4\leqslant n^2-4n+1$, а это число при $1\leqslant n<4$ отрицательно, поэтому заполнение возможно лишь начиная с $n=4$, т. е. с квадрата 7×7.)

Д. Фомин

---

* Прямоугольник 2×3 очевидным образом разбивается на два уголка.

М1284. *На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник ABD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков BC и BD и отрезка CD (вневписанная в треугольник BCD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.*



Пользуясь тем, что две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, обозначим их, как показано на рисунке 1 (здесь использовано также, что касательные, проведенные из точки D к каждой из двух равных окружностей, образуют равные углы, поэтому все они равны). Приравнивая две касательные, проведенные из вершины B треугольника к дальней окружности, и учитывая, что $AB=BC=x+y$, получим:

$$y+2z=y+x+u,$$

откуда

$$x+u=2z. \qquad (*)$$

Теперь решение можно закончить рутинной выкладкой, используя выражения площади треугольника через полупериметр p и радиус r вписанного круга, $S=rp$, а также через радиус r_a вневписанного круга, касающегося стороны a ($S=(p-a)r_a$): если h — высота, опущенная на боковую сторону треугольника ABC, а r — радиусы равных кругов, то площадь S_{ABC} равна

$$h\cdot\frac{x+u}{2}=S_{ABD}+S_{DBC}=$$

$$=r(x+y+z)+r\left(y+z+\frac{x+u}{2}-z-u\right)=$$

$$=r\left(x+y+\frac{x+u}{2}+y+\frac{x+u}{2}-u\right)=r(2x+2u).$$

Отсюда $r=h/4$.

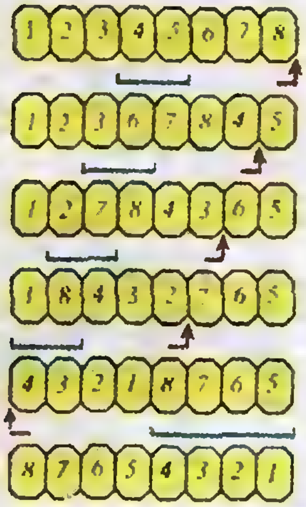
Однако это можно также доказать, используя равенство (*), чисто геометрически. Голубой четырехугольник с вершиной C (см. рисунок) можно приставить к розовому сектору так, что одна из его сторон u ляжет на основание AC треугольника, а другая — поскольку $x+u=2z$ — пойдет по его средней линии, которая, тем самым, касается вписанной в треугольник ABD окружности (один из голубых радиусов совпадает с красным, перпендикулярным основанию, а другой составляет продолжение красного радиуса, перпендикулярного боковой стороне, условие же (*) показывает, что C попадет в середину основания). Отсюда следует, что диаметр окружности $2r$ равен половине высоты h.

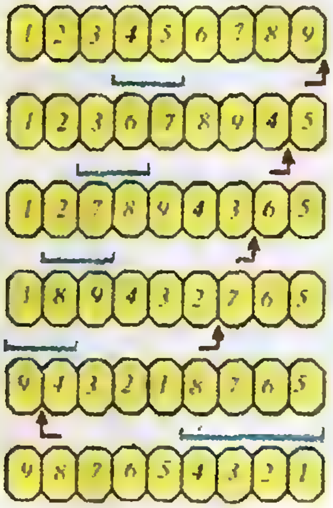
И. Шарыгин, Н. Васильев

М1285. *Имеется колода из n карт, сложенных по порядку: 1, 2, 3, ..., n. Разрешается взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или в конец). Пусть $M(n)$ — наименьшее число таких операций, необходимое, чтобы*

Примеры на рисунках показывают, что для перекладывания $n=8$ и $n=9$ карт достаточно $s=5$ шагов (операций). Точно так же для любого n достаточно $s=[n/2]+1$ шагов (т. е. $s=(n+1)/2$ для нечетного и $s=n/2+1$ для четного n). Ниже мы докажем, что это число — наименьшее возможное.

Легче доказать оценку $s\geqslant(n-1)/3$, в частности, что $s\geqslant17$ для $n=52$ карт. Будем считать, что между соседними картами в исходном порядке 1, 2, ..., n имеется «связь». Ясно, что при каждой операции разрушаются не более чем 3 связи: если мы выбираем отрезок b, ..., c из *сложить карты в обратном порядке. Докажите, что а) $M(9)\leqslant 5$, б) $M(52)\leqslant 27$, в)*$M(52)\geqslant 17$, г)*$M(52)\geqslant 27$ Найдите $M(n)$ для любого $n>2$.*





ряда ..., a, b, ..., c, d, ... и вставляем его между p и q, то разрушаются связи ab, cd и pq. Чтобы переложить карты в обратном порядке, нужно разрушить все $n-1$ связей. Отсюда для числа необходимых шагов s получаем оценку

$$3s\geqslant n-1.$$

Чтобы получить оценку $s\geqslant(n+1)/2$, будем рассуждать несколько иначе. Будем считать, что между соседними картами возможны связи двух типов: „$>$" или „$<$" («больше» или «меньше»), и за s операций все $n-1$ связи типа „$<$" должны превратиться в противоположные „$>$". Заметим, что на каждом шаге число связей „$>$" может возрасти не более чем на 2. В самом деле, сразу 3 связи „$<$" превратиться в „$>$" могли бы только при переходе от

$$...a,\ b,\ ...,\ c,\ d,\ ...,\ p,\ q,...$$

к

$$...a,\ d,\ ...,\ p,\ b,\ ...,\ c,\ q,...$$

в том случае, если

$$a<b,\ c<d,\ p<q,\ a>d,\ p>b,\ c>q.$$

Но эти шесть неравенств несовместимы: из них следует

$$a<b<p<q<c<d<a \text{ — противоречие.}$$

Далее, на первом шаге может превратиться из „$<$" в „$>$" лишь одна связь: ведь здесь либо $a<b<c<d<p<q$, либо $p<q<a<b<c<d$, а при этом выполняется лишь одно из трех неравенств

$$a>d,\ p>b,\ c>q.$$

Точно так же обстоит дело и на последнем шаге, после которого получается набор из $n-1$ связей „$>$" (вообще нетрудно видеть, что обратные переходы совершенно аналогичны прямым, лишь знаки „$<$" и „$>$" меняются ролями).

Итак, для числа s необходимых шагов получаем оценку

$$1+2(s-2)+1\geqslant n-1,$$

откуда

$$s\geqslant(n+1)/2.$$

С. Воронин

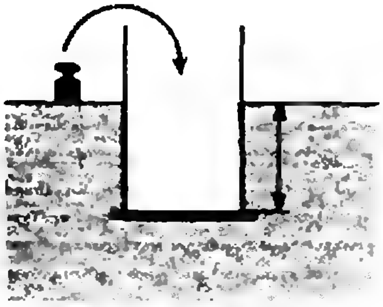
Ф1293. *Цилиндрический сосуд с легким и тонким приставным дном, плотно прилегающим к стенкам сосуда, опущен в воду так, что дно находится на глубине $H=4$ см, и удерживается неподвижно (см. рисунок). Гирю какой минимальной массы и куда надо поставить на дно, чтобы*

Гирю нужно поставить как можно ближе к стенке сосуда — при этом необходимая для отрыва дна масса будет минимальной.

Будем считать приставное дно жестким. Тогда сила, с которой дно давит снизу на сосуд (а значит, и сила, действующая со стороны сосуда на дно), будет приложена в точке касания с противоположной от гири стороны. Запишем уравнение моментов относительно этой точки:

$$\rho gH\frac{\pi D^2}{4}\frac{D}{2}=mgD,$$

оно отвалилось? Диаметр дна D=10 см, размеры гири считать малыми по сравнению с диаметром сосуда.



или

$$m=\frac{\pi}{8}\varrho HD^2=157\ \text{г}.$$

Это составит ровно половину массы вытесненной воды. Как только дно перестанет давить снизу на цилиндр и образуется небольшая щель — в нее войдет вода и дно отвалится.

Нужно сказать, что ответ сильно зависит от того, как «устроен» контакт дна с цилиндром — наша модель взаимодействия не единственная.

А. Зильберман

Ф1294. *Одна сторона тонкой металлической пластинки освещена Солнцем. При температуре воздуха T_0 освещенная сторона имеет температуру T_1, противоположная — T_2. Какими будут значения температур, если взять пластинку двойной толщины?*

Тепло излучается каждой стороной пластинки. Полная отдаваемая мощность составляет

$$W=a(T_1-T_0)+a(T_2-T_0)$$

(a — коэффициент пропорциональности). Такую же мощность пластинка получает от Солнца. Для пластинки вдвое большей толщины получим

$$W'=a(T_3-T_0)+a(T_4-T_0).$$

При тепловом равновесии поток тепла распространяется от освещенной стороны к противоположной так, что через любое поперечное сечение пластинки поток тепла одинаков и равен потоку, уносимому воздухом с неосвещенной стороны, т. е.

$$a(T_2-T_0)=k\frac{T_1-T_2}{d}$$

(k — коэффициент пропорциональности, d — толщина пластинки). Для пластинки двойной толщины —

$$a\,(T_4-T_0)=k\frac{T_3-T_4}{2d}.$$

После простых преобразований находим

$$T_3=T_0+(T_1+T_2-2T_0)(2T_1-T_2-T_0)/(2(T_1-T_0)),$$
$$T_4=T_0+(T_2-T_0)(T_1+T_2-2T_0)/(2(T_1-T_0)).$$

Е. Пономарёв

Ф1295. *К точкам А и Б подключена многозвенная резисторная цепь (см. рисунок). Каждое звено содержит два одинаковых резистора, сопротивления резисторов каждого следующего звена в два раза больше предыдущего. Каким будет сопротивление*

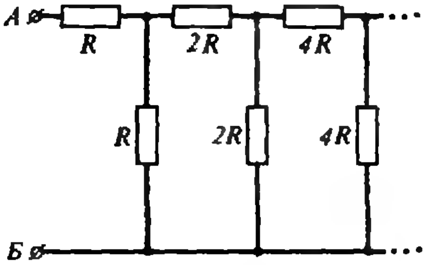
Обозначим искомое сопротивление R_x. Если мы отбросим первое звено, то оставшаяся цепочка будет очень похожа на исходную, только все значения сопротивлений в ней будут увеличены в 2 раза. Это означает, что сопротивление ее равно $2R_x$. Теперь можно записать:

$$R_x=R+\frac{R\cdot 2R_x}{R+2R_x},$$

или

$$2R_x^2-3RR_x-R^2=0.$$

между точками А и Б при очень большом числе звеньев? Резисторы в первом звене имеют сопротивление R.



Отсюда получаем

$$R_x = R\frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1,78R.$$

Нужно сказать, что при таком выборе чисел в задаче — возрастание сопротивлений в ячейках в 2 раза — вклад последующих ячеек очень быстро убывает, и приближенный (довольно точный!) ответ можно получить уже при 3—4 ячейках. При возрастании сопротивлений в большее число раз приближенный ответ будет еще точнее. Если же изменить условие — сделать так, чтобы сопротивления звеньев уменьшались, хотя бы даже в 2 раза, точность приближенного метода сильно ухудшится.

А. Зильберман

Ф1296. *В контуре LC происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе U, а ток через катушку I, замыкают ключ K, присоединяя параллельно контуру цепь, состоящую из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью 2L (рис. 1). Определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе.*

Катушки включены параллельно, поэтому напряжения, изменяющие токи в катушках после замыкания ключа, одинаковы, а изменения токов в катушках обратно пропорциональны величинам индуктивностей катушек:

$$\frac{I-I_x}{I_x} = \frac{2L}{L} = 2, \qquad (1)$$

где I_x — ток в каждой катушке к моменту окончания колебаний в контуре (рис. 2).

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{2L+L}{2}I_x^2 + Q, \qquad (2)$$

где Q — искомое количество теплоты, выделившееся на резисторе.

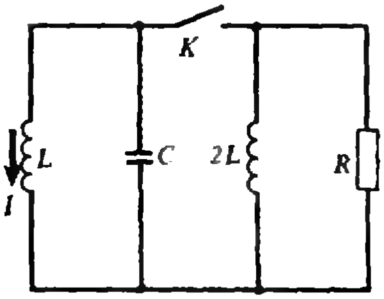


Рис. 1.

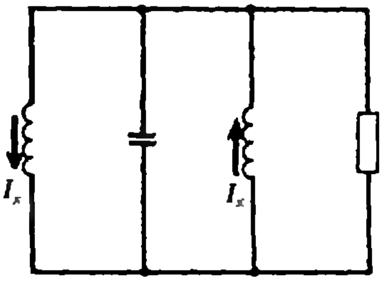


Рис. 2.

Из уравнений (1) и (2) находим

$$Q = \frac{1}{2}\left(CU^2 + \frac{2L^2}{3L}I^2\right) = \frac{1}{2}\left(CU^2 + \frac{2L}{3}I^2\right).$$

О. Савченко

Ф1297. *Параллельно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F движется точечный источник света. На каком расстоянии от линзы он окажется в тот момент, когда скорость изображения его в линзе будет равна по величине скорости источника? Расстояние от главной оптической оси линзы до источника $H=F/4$.*

Обозначив расстояние от источника до линзы через d, а расстояние от линзы до изображения через f, запишем формулу линзы:

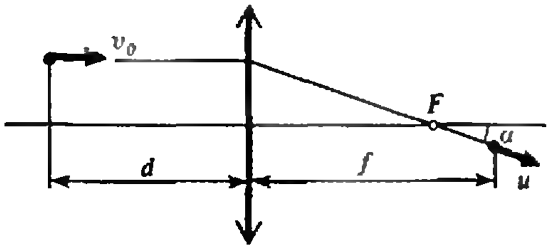
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

За очень малый промежуток времени Δt расстояние от источника до линзы уменьшится на $\Delta d=v_0\Delta t$, а от линзы до изображения — увеличится на $\Delta f=u\cos\alpha\times\times\Delta t$. Тогда (см. рисунок)

$$\frac{1}{d-v_0\Delta t}+\frac{1}{f+u\cos\alpha\cdot\Delta t}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

или

$$\frac{v_0\Delta t}{d^2}=\frac{u\cos\alpha\cdot\Delta t}{f^2}.$$



Скорость изображения u равна скорости источника v_0 при $f_1=d_1\sqrt{\cos\alpha}$. Учитывая, что $\cos\alpha=F/\sqrt{F^2+H^2}$, получаем

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1\sqrt{\cos\alpha}}=\frac{1}{F},$$

$$d_1=F\left(1+\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)=F\left(1+\sqrt[4]{1+H^2/F^2}\right)=$$

$$=F\left(1+\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right).$$

А. Зильберман

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1262—М1275, Ф1268—Ф1282, справились с задачами М1263, М1268, М1269, М1271. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

М. Абдуллаев (Баку) 66; *Ф. Абдуллаев* (Баку) 66; *Ю. Алексеенко* (Киев) 62, 64—66, 72—75; *А. Алиев* (Баку) 66; *Д. Антипов* (Киев) 62; *А. Асанов* (Чиликский р-н Алма-Атинской обл.) 62; *А. Ахмедов* (Баку) 62, 65, 66; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 62, 65, 66, 72—75; *Е. Беркович* (Киев) 62; *Л. Беркович* (Киев) 62; *А. Бородин* (Донецк) 62, 64—67, 72—75; *В. Бринюк*

(Донецк) 62, 64—67, 72—75; *О. Бурд* (Киев) 62, 66, 72, 74, 75; *П. Бусоргин* (Нолинск) 62, 65; *И. Бушмакин* (Евпатория) 62; *О. Ваисов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Б. Вайнер* (Киев) 62, 65—67, 72, 74, 75; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) 62; *Э. Вийсаллы* (Баку) 62; *И. Винарчук* (Киев) 75; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 62, 66, 72; *М. Волошина* (Москва) 62, 65, 74; *М. Воронецкая* (Ижевск) 66, 67, 72, 74, 75; *С. Гавриленко* (Гомель) 62; *О. Гайдай* (Львов) 62, 72, 74; *В. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 62; *С. Гетун* (Киев) 62; 64—66, 72—75; *Ю. Гордон* (С.-Петербург) 62, 72; *Ю. Горенбургов* (С.-Петербург) 66, 72—75; *А. Гревцев* (Москва) 62; *П. Григорьев* (Самара) 66; *А. Давыдов* (с. Елфимово Нижегородской обл.) 62, 74; *А. Джиоев* (Владикавказ) 62; *И. Доманов* (Донецк) 62; *Д. Дудко* (Киев) 62, 64—66, 74, 75; *Г. Дудьева* (Донецк) 62, 66, 72, 74; *А. Жуков* (Воронеж) 62; *Д. Жумабоев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 72; *Ж. Жумадинов* (Алма-Ата) 62, 72, 73; *А. Жученко* (Донецк) 66, 74; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 62, 64—66; *Л. Зайцева* (Киев) 62; *В. Замятин* (Киров) 72, 74; *А. Зимин* (Иваново) 62; *П. Зингершохер* (С.-Петербург) 72, 74, 75; *С. Зиновьев* (Харьков) 62, 66; *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) 62, 65—67, 72, 74; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65—67, 72—74; *Н. Исабаев* (Алма-Ата) 72, 73; *Г. Исабеков* (Алма-Ата) 72; *К. Исамбаев* (Алма-Ата) 62; *Х. Исламов* (Баку) 66; *Р. Исмаилов* (С.-Петербург) 62, 65, 72—75; *В. Казанцева* (Ижевск) 66, 74, 75; *Т. Карнаух* (Киев) 62, 65, 66, 72—75; *С. Климов* (Ижевск) 62, 64—67, 72—75; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 72; *П. Кожевников* (Калуга) 62, 64—67, 73—75; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 62, 65—67, 72, 74; *Е. Кошлякова* (Владикавказ) 62; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 66, 74; *С. Кузьмич* (Минск) 62, 64—67, 72—75; *В. Кулагин* (Харьков) 62, 65, 66; *И. Курляндчик* (С.-Петербург) 72—75; *Я. Лавренюк* (Киев) 62, 64—66, 72—75; *В. Лауринавичюс* (Кайшядорис) 62, 65; *И. Левин* (Москва) 62, 72, 74; *Н. Лисицын* (Ижевск) 62, 64—67, 72, 74, 75; *В. Луговской* (Черкассы) 66, 67, 72, 74, 75; *Э. Магеррамов* (Баку) 62, 66; *А. Малдаханов* (Новосибирск) 74; *Е. Малеко* (Нефтекамск) 62; *Т. Малышкина* (Владивосток) 72; *С. Марков* (Ижевск) 62, 64—67, 72—75; *Д. Мартынов* (Нижний Новгород) 62; *Е. Масков* (Владикавказ) 62; *А. Мирошников* (Владикавказ) 62; *К. Мишачев* (Липецк) 62, 65—67; *М. Мокляк* (Кременчуг) 62, 64, 66, 72, 74, 75; *А. Молдахинов* (Актюбинск) 62; *Э. Насиров* (Баку) 66; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 62, 64, 66, 67; *О. Науменко* (Фрязино) 62, 66; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) 72, 74; *С. Павличков* (Евпатория) 62, 64—66; *Д. Панов* (Москва) 62, 64—66, 72, 74, 75; *Е. Перельман* (С.-Петербург) 65, 66, 72—75; *А. Петросян* (Ереван) 62, 67, 72—75; *В. Пиковский* (Киев) 62, 64, 66, 72—75; *Е. Подзе* (Винница) 74; *Ю. Полонский* (Витебск) 62, 65—67, 72—75; *О. Потапов* (Москва) 74; *Н. Пошевенчук* (Пинск) 72; *О. Пушин* (С.-Петербург) 62, 65, 66; *Д. Рабинович* (Харьков) 62; *А. Рассказов* (Хабаровск) 62; *К. Рахимов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Д. Рекалов* (Киев) 62, 65, 66; *Ф. Рзаев* (п. Борадыгях АзССР) 62; *А. Руденко* (Киев) 62, 64—66; *А. Рымов* (Талды-Курган) 66, 72, 74; *З. Сабиров* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 62, 72; *Н. Сабурова* (Архангельск) 62; *Ю. Савицкий* (Донецк) 66, 74; *С. Сагадатов* (Уфа) 72; *Садыков* (Андижан) 62; *А. Сарсембаев* (Алма-Ата) 66, 72, 74; *В. Севриновский* (Москва) 67, 74; *Я. Семенович* (Ташкент) 62, 64; *С. Сикорский* (с. Вузловое Львовской обл.) 72; *О. Синица* (Владивосток) 62, 72, 73, 75; *Г. Сироткин* (Харьков) 62, 64—66; *А. Солодушкин* (Томск) 62, 66, 72—74; *С. Срымов* (Алма-Ата) 62; *Д. Старовойтов* (Гомель) 62; *А. Суров* (Москва) 72, 75; *А. Таратин* (Северодвинск) 62, 66, 72; *А. Тлеубаев* (Алма-Ата) 62; *М. Тройников* (Ижевск) 62, 66, 67, 72, 74; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 73, 74; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 66, 72—74; *К. Удод* (Донецк) 66, 74; *А. Уханов* (Евпатория) 66, 72, 74, 75; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65—67, 72—75; *Д. Филевич* (с. Яструбичи Львовской обл.) 62, 65, 72, 74; *У. Ходжаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 62; *Д. Хайкис* (Ижевск) 62, 64—67, 72, 74, 75; *Е. Хасанов* (Хорезмская обл.) 62; *М. Хасин* (Донецк) 62, 64—67, 72—75; *К. Хвенкин* (Минск) 62, 64, 66, 67, 72—75; *Р. Ходжаниязов* (Хорезмская обл.) 62; *Ю. Ходзинский* (Киев) 62, 66, 72, 74, 75; *А. Худяков* (Витебск) 62, 65; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 62, 65, 67; *В. Шейко* (Минск) 66; *Н. Шкардюк* (Пинск) 62; *Д. Шкляров* (Харьков) 66; *О. Шпырко* (Киев) 72, 74; *Е. Яворская* (Пинск) 72; *В. Яновский* (Харьков) 62, 66, 67.

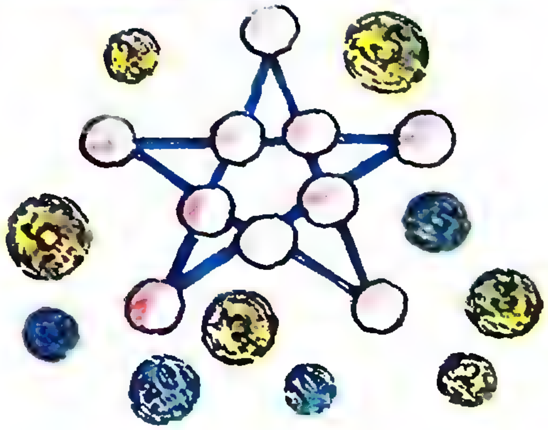
Физика

Р. Авезов (Ургенч) 73; *Е. Аксенова* (С.-Петербург) 69, 73; *М. Аллаберганов* (Ургенч) 73; *Д. Антипов* (Киев) 68, 69, 73, 78—80; *Д. Апальков* (Харьков) 73, 74, 77—81; *Г. Арутюнян* (Ереван) 78, 80; *А. Ахметбеков* (Алма-Ата) 78; *Я. Бабкин* (Киев) 69, 73, 78—80; *С. Базылько* (Северодвинск) 69, 74; *Д. Белобрагин* (Тула) 80; *К. Блиох* (Харьков) 73, 76, 77; *Д. Боднарь* (Винница) 78, 79; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 78, 80, 82; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 78; *С. Булавенко* (Белая Церковь) 78, 79; *Е. Буривцов* (Уфа) 80; *В. Быцюк* (Мамоновка Черкасской обл.) 78, 80; *С. Васильев* (Горловка) 69, 70, 73, 78; *О. Весельева* (Старооскольский р-н Белгородской обл.) 73; *А. Ветров* (Северодвинск) 78; *М. Волович* (Москва) 73; *М. Волошина* (Москва) 78, 79; *П. Волынец* (Брест) 74, 78, 79; *И. Воскобойник* (Киев) 68, 69, 73, 74, 77, 78, 80; *А. Вылугин* (Донецк) 69, 78, 80, 81; *А. Гаврилов* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Гайдай* (Львов) 78; *А. Галанин*

(Сергиев Посад) 73, 74, 77—80, 82; *А. Гаппоха* (Киев) 78, 79, 82; *П. Гвоздев* (Котельнич) 69, 78, 79; *А. Георгадзе* (Нальчик) 78—80; *В. Глазков* (Коломна) 74, 78—80; *С. Готин* (Осиповичи) 69, 78, 80; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 69, 73, 78, 80, 82; *А. Гревзев* (Москва) 78—81; *Т. Григорян* (Ереван) 74, 78, 79; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 78—80; *Н. Гуляев* (Н. Новгород) 68—82; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 78—80, 82; *А. Денисов* (Могилев) 69, 74, 77; *С. Дубров* (Киев) 68, 69, 73, 74, 77, 78, 82; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 69, 78, 80; *О. Дымар* (Каменец) 69; *М. Дьяк* (Владимир) 69, 70; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 70, 73; *А. Ельников* (Донецк) 69, 74, 77—80; *А. Ермошко* (Орша) 78, 80; *А. Ефимов* (Алма-Ата) 78, 80; *Н. Ефремов* (Екатеринбург) 69, 73, 74, 78, 79; *С. Жак* (Тернополь) 68, 70, 73, 76, 78, 80; *В. Железняков* (Вольск) 78, 80; *А. Жуков* (Воронеж) 70; *В. Жукова* (Кузнецовск) 69; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 69, 73—75, 78, 80; *М. Заболотный* (Винница) 69, 73—75; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 73, 75, 77; *А. Зайцев* (Железногорск) 68—72; *С. Замобовский* (Винница) 69, 73—75; *С. Занкович* (Николаев) 70, 73—75, 77, 78, 80; *А. Земляков* (Ростов) 69; *И. Зозуля* (Одесса) 69, 73, 74, 78—80; *М. А. Иванов* (Тула) 68—74, 77; *М. Г. Иванов* (Тула) 68—70, 73, 74; *Е. Иванова* (Канев) 69, 70, 73, 74, 76, 78—80; *С. Ивленков* (Тольятти) 78, 79; *Н. Ивченко* (Киев) 69, 70, 72—74, 76—82; *М. Игнатьев* (Северодвинск) 68, 78, 80; *М. Ильин* (Владимир) 76; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 78; *Ш. Исмаилов* (Ургенч) 80; *Д. Кайрыев* (с. Гульча Ошской обл.) 77—79; *В. Каленский* (Ташкент) 79; *Д. Калинин* (Тамбов) 78; *Г. Каминский* (Киев) 69; *Ч. Камчибеков* (Арзамас) 78, 79; *И. Катеринчук* (Городок Хмельницкой обл.) 78, 80; *Н. Кеберле* (Запорожье) 73, 79, 80; *Н. Клембовский* (Николаев) 70, 73—75, 77, 78, 80; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 69, 73, 78, 80, 82; *М. Коваленко* (Симферополь) 69; *С. Коваль* (Гомель) 73, 77; *В. Кожевников* (Североморск) 74, 78—80; *К. Кожухов* (Кузнецовск) 78, 79; *В. Козлов* (Старый Оскол) 69, 73, 74, 77—81; *Т. Колесникова* (Вишневое) 80; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 69, 70, 72; *Д. Комиссаров* (Арзамас) 68—70, 73, 78; *В. Коновалов* (Старый Оскол) 78, 80; *П. Корешков* (Черкассы) 73, 75, 78—80; *А. Король* (Брест) 74, 78, 80; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 72; *Д. Кример* (Брест) 78, 80; *С. Кузьменко* (Киев) 69, 72; *С. Кук* (Николаев) 69; *Ю. Кулик* (Канев) 69, 70, 73, 74, 78—80; *У. Курязов* (Шават) 78; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 69, 70, 73—75; *В. Лель* (Усть-Каменогорск) 78, 80; *В. Линев* (Скопин) 78, 79; *И. Линчевский* (Брест) 80; *Э. Локшин* (п. Черноголовка Московской обл.) 69; *С. Любко* (Мукачево) 73; *К. Мазюкевич* (Кузнецовск) 73, 78, 80; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *И. Малеванный* (Тверь) 73, 75, 77; *Ю. Маравин* (Евпатория) 69, 70, 72—76, 78—80; *А. Матрунич* (Ужгород) 69, 70, 73—75, 77—80, 82; *М. Махмудов* (Исфара) 78, 80; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 73, 75, 78—80, 82; *В. Меркер* (Старый Оскол) 78, 80; *В. Мушик* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 78, 80; *А. Нежуренко* (Киев) 68—70, 73, 74, 77—80, 82; *М. Немировский* (Одесса) 68, 73; *Д. Немировский* (Черкассы) 79, 82; *В. Нукова* (Кузнецовск) 78, 80; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 68—70, 72, 74—76, 78—80; *И. Олимов* (Ходжент) 78, 80; *А. Ольховец* (Киев) 68—70, 73, 75, 77—80, 82; *Р. Онищенко* (Минск) 68—70, 73, 77; *Д. Островский* (С.-Петербург) 73, 77—81; *Х. Отоженов* (Ургенч) 78, 80; *М. Охрименко* (Черкассы) 78, 80; *Д. Пастухов* (Витебск) 68—75, 77, 78, 80—82; *Д. Петрайтис* (Вольск) 69, 70, 73, 74, 77, 78, 80; *В. Писляков* (Тверь) 68, 75, 78, 80; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 75, 76, 78; *М. Плетюхов* (Брест) 73, 77; *Ю. Полищук* (с. Птичья Ровенской обл.) 69, 70; *С. Польшин* (Харьков) 70—74, 76, 77; *В. Попов* (Жуковский) 78, 80; *А. Поташник* (Киев) 78, 80; *Д. Потишко* (Харьков) 73—78, 80, 82; *С. Рассадин* (Минск) 69, 70, 77; *Д. Розметов* (Ургенч) 73; *Е. Рослый* (Омск) 78, 80; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) 78; *В. Рыбачук* (Виниица) 75, 78, 79; *В. Рылов* (Свободный) 73, 74, 76, 77; *А. Свириденков* (Троицк Московской обл.) 78; *К. Селтнепесов* (Ашхабад) 73, 74, 78, 80; *В. Сергиенко* (Брест) 78—80; *В. Сиско* (Таллинн) 78, 80; *Д. Скотников* (Владимир) 69, 70; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 78, 80; *А. Снежко* (Киев) 69; *А. Соклаков* (Брест) 69, 77, 78, 80; *О. Сорока* (с. Верба Ровенской обл.) 69; *А. Стельмах* (Киев) 68, 69; *А. Столповская* (Днепрорудный) 68—70, 73, 77; *В. Сусиков* (Врест) 80; *В. Тамошюнас* (Внльнюс) 73, 75—77; *А. Таратин* (Северодвииск) 78, 80; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79; *А. Терентьев* (Канаш) 78—80; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 74, 78—80; *М. Тищенко* (Старый Оскол) 78; *В. Толпекин* (Одесса) 68, 78—80; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 77; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 69—72, 77; *С. Тумача* (Киев) 73, 77, 78, 80; *А. Тумашевский* (Северодвииск) 68; *А. Файзуллаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 78; *Д. Федорец* (Харьков) 68, 69, 72, 74, 80; *Д. Хаимов* (Баку) 73; *А. Хацкевич* (Брест) 78; *Д. Холмов* (Баку) 69; *О. Цыбульский* (Одесса) 77; *А. Чистый* (Брест) 69, 70, 73, 74, 77—80; *Д. Чичкан* (Барановичи) 74, 76, 78—80; *Е. Шабловский* (Могилев) 78; *А. Шилков* (Пермь) 74, 77, 78, 80; *И. Шимонис* (Норюнай; Литва) 78, 80; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 78, 80; *А. Шпагин* (Мариуполь) 68, 69, 73, 78—80, 82; *О. Шпырко* (Киев) 68, 69, 72—74, 76—80, 82; *И. Шуляк* (Киев) 69, 70; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 68—70, 72—74, 76—80, 82; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 69, 78, 80; *Д. Юдин* (Самара) 68, 70, 73, 74, 78, 79; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 73, 78, 80, 82; *А. Ямилов* (Донецк) 78—80; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 69, 78, 80, 82; *С. Ячунов* (Ростов) 74.

Задачи

1. В большой и дружной семье все мужчины носят одну фамилию, и разница в возрасте между любым отцом и сыном составляет 22 года. Правнука зовут Игорь Петрович. Его деда зовут Митрофан Тимофеевич. Как звали в детстве главу семьи и сколько ему лет, если Сереже — сыну Игоря, исполнилось 3 года?

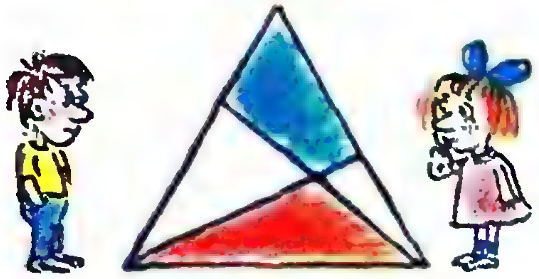


2. Найдите все числа, равные утроенной сумме своих цифр.

3. Имеется 10 монет: 2 по 2 копейки, 2 по 3 копейки, два пятака, два гривенника, один пятиалтынный и один двугривенный. Разместите их в кружках звезды (см. рисунок) так, чтобы сумма номиналов на каждой из пяти прямых была одна и та же.

4. Вот уже много лет барон Мюнхгаузен ежедневно ходит к озеру охотиться на уток. Начиная с 1 августа 1991 года он каждый день говорит своему повару: «Сегодня я подбил уток больше, чем два дня назад, но меньше, чем неделю назад». Какое наибольшее число дней барон может произносить эту фразу? (Не забывайте, что Мюнхгаузен никогда не лжет.)

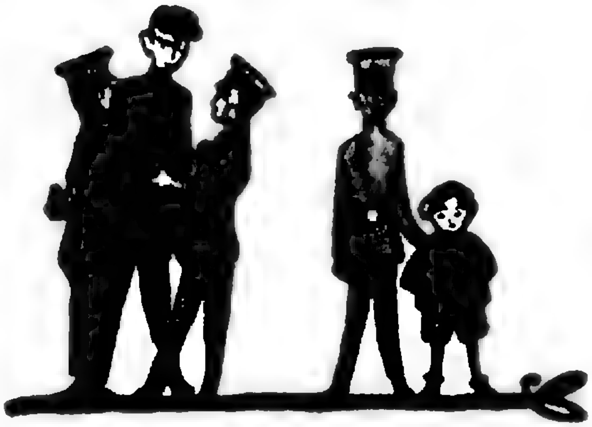
5. Два луча, выпущенные из вершин при основании равностороннего треугольника, разрезали его на четыре части (см. рисунок). При этом оказалось, что площадь красного треугольника равняется площади синего четырехугольника. Найдите угол между этими лучами.



Эти задачи нам предложили В. Тараканов, В. Попов, Ф. Назаров, А. Кимарцев и В. Произволов.

ЛИТЕРАТУРНО-ХУДОЖЕСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

И. АКУЛИЧ



Это особый класс задач различной сложности и на различные темы. Роднит их лишь одно: происхождение. Их ставят перед читателями авторы некоторых романов, повестей и рассказов, как правило — между делом, зачастую сами не обращая на это внимания. Но если читатель — любитель математики, от него такая задача не ускользнет! Он не упустит случая разобраться, что это там предложил писатель: разрешима задача или нет, сколько решений, можно ли обобщить и т. п.

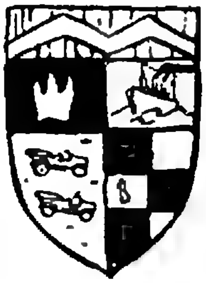
Иногда автор бывает столь любезен, что вместе с условием приводит и решение (как, например, широко известная задача про топоры и пилы из повести Н. Носова «Витя Малеев в школе и дома»). Но это явление редкое. Чаще всего дается лишь условие, да и то... Впрочем, перейдем лучше к конкретным примерам.

Задача 1. *Из двух городов выезжают по одному направлению два путешественника, первый позади второго. Проехав число дней, равное сумме чисел верст, проезжаемых ими в день, они съезжаются и узнают, что второй проехал 525 верст. Расстояние между городами — 175 верст. Сколько верст в день проезжает каждый?*

Л. Кассиль.
Кондуит и Швамбрания. Книга вторая,
глава «Задача с путешественниками».

Очень симпатичная задача. Ее можно было бы использовать даже на вступительных экзаменах в нынешние вузы. Решите ее. Если не сумеете, посмотрите ответ в конце номера.

Итак, читатель убедился, что первая из рассмотренных задач имеет вполне строгое и притом единственное решение. Но так бывает далеко не всегда.

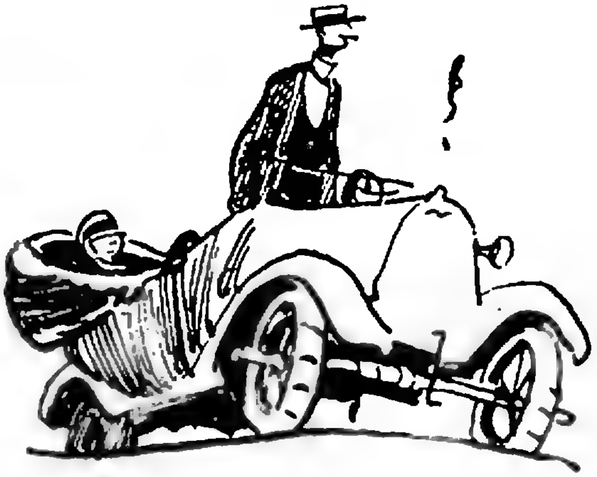


Чаще всего приходится вносить в обнаруженную задачу те или иные корректировки. Вот пример.

Задача 2. *Потом отец Федор подошел к комоду и вынул из конфетной коробки 50 рублей трехрублевками и пятирублевками. В коробке оставалось еще 20 рублей.*

И. Ильф, Е. Петров.
Двенадцать стульев. Глава III.

Здесь даже не сформулирован вопрос, но он напрашивается сам собой: сколько трех- и пятирублевок отец Федор взял и сколько оставил (если, конечно, денежных знаков иного достоинства в коробке не было)? Ну, а чтобы обеспечить единственность ре-



шения, добавим дополнительное условие: отец Федор взял с собой бо́льшую часть трехрублевок и бо́льшую часть пятирублевок. Как ни странно, этого вполне достаточно. А теперь найдите решение.

Следует отметить, что Ильф и Петров оказались весьма щедрыми на задачи. Вот еще одна.

Задача 3. *На трех станциях: Воробьево, Грачево и Дроздово было по равному количеству служащих. На станции Дроздово было комсомольцев в 6 раз меньше, чем на двух других, вместе взятых, а на станции Воробьево партийцев было на 12 человек больше, чем на станции Грачево. Но на этой последней беспартийных было на 6 человек больше, чем на первых двух. Сколько служащих было на каждой станции и какова там была партийная и комсомольская прослойка?*

И. Ильф, Е. Петров.
Золотой теленок. Глава IX.

И эта задача требует дополнительного условия, иначе решение не будет единственным. Давайте сформулируем его в виде вопроса: какое наименьшее число служащих на каждой станции надо задать, чтобы задача получила единственное решение? Найдите сперва это число, а затем, задавшись им, решите и саму задачу.

Задача 4. *Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 28, знаменатель равен $^{9}/_{2}$, третий член в $^{3}/_{2}$ раза больше знаменателя. Найти четвертый член.*

Г. Белых, Л. Пантелеев.
Республика Шкид.
Глава «Шкида влюбляется».

Шкидец Воробей с этой задачей не справился. И не мудрено: условие ее содержит противоречия. Чтобы привести ее к разрешимому виду, придется сделать два уточнения. Во-первых, будем считать, что одно из трех данных чисел задано неверно. Второе уточнение почуднее: третий член прогрессии в точности равен сумме в рублях, которую автор этой статьи заплатил недавно на рынке за картошку.

Вот теперь задача стала разрешимой. Итак, найдите четвертый член.

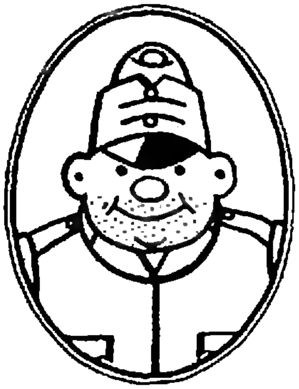
Задача 5. *Вот как звучит бой марсианского барабана:*
«Дрянь-дребедень-дребедень-дребедень,
Дрянь-дребедень-дребедень,
Дрянь-дребедень,
Дрянь-дребедень,
Дрянь-дребедень-дребедень».

Курт Воннегут.
Сирены Титана.
Глава четвертая.

Что ж, звук приятный, но где задача? Дребедень какая-то... Но представим себе, что «дрянь» и «дребедень» — некоторые цифры, причем «дрянь» не равна «дребедени». Тогда каждая процитированная строчка представляет собой зашифрованную запись какого-то числа. Пусть одно из этих чисел делится на сумму двух других. А теперь скажите: что больше — «дрянь» или «дребедень»?

Здесь для удобства имеет смысл обозначить: «дрянь»$=A$, «дребедень»$=B$. Тогда мы имеем дело с пятью числами: $\overline{ABBB}=1000A+111B$, $\overline{ABB}=100A+11B$ (2 шт.) и $\overline{AB}=10A+B$ (2 шт.) Правда, неясно, какое из них делится на сумму двух других (и каких именно), но эта трудность преодолима. Дело в том, что... нет, решайте-ка дальше сами.

И в заключение — едва ли не самая удивительная задача.



Задача 6. *Стоит четырехэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше — два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. В каком году умерла у швейцара бабушка?*

Я. Гашек.
Похождения бравого солдата Швейка.
Часть первая, глава III.

Эта задача кажется сродни пословице: в огороде бузина, а в Киеве дядька. Но давайте учтем, что Швейк поставил свою задачу в 1914 году, и добавим условие: год кончины бабушки равен произведению общего числа окон этого дома на число труб и на возраст (в 1914 году) одного из квартирантов, лично присутствовавшего на похоронах. Тогда решение вполне вырисовывается.

Вот и все. А в заключение — три предложения читателям:

1) Во все задачи (кроме первой) были внесены изменения и дополнения по сравнению с их исходным видом. Попробуйте внести другие, свои, изменения — возможно, они окажутся гораздо лучше и интереснее. Требование прежнее: чтобы решение было единственным.

2) При чтении художественной литературы Вам могут встретиться другие литературно-художественные задачи. Попробуйте привести их к удоборешаемому виду.

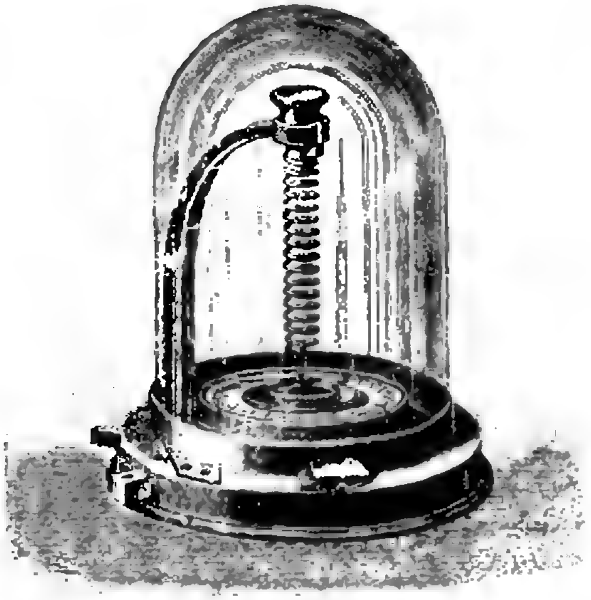
3) И наконец — поделитесь своими находками с редакцией журнала «Квант». Лучшие из них будут опубликованы.

Калейдоскоп „Кванта“

> *Мы должны принять как один из наиболее общих законов теплоты, что «все тела, свободно сообщающиеся друг с другом и не подверженные неравным внешним воздействиям, приобретают одинаковую температуру, что показывает термометр».*
>
> *Дж. Блэк*

А так ли хорошо знакома вам

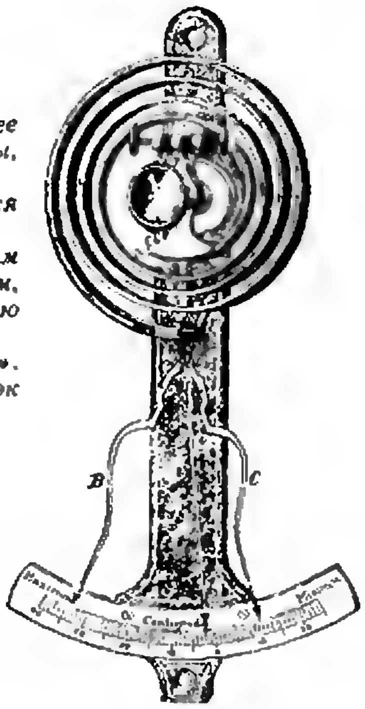
температура ?



Интуитивное представление о температуре складывается с первых дней нашей жизни. Однако задачи, встающие перед наукой, требуют все более точных толкований того, что мы постигаем чувствами. Так, важным этапом в развитии учения о тепловых явлениях было выявление различия между понятиями «количество теплоты» и «температура». Первым, кто четко сформулировал мысль о необходимости их различения, был шотландский ученый Дж. Блэк.

Интересна и познавательна история создания и применения приборов для измерения температуры — термометров. Сегодня известны термометры жидкостные и газовые, полупроводниковые и оптические. Да и разнообразие введенных ныне в науку температур велико: различают электронную и ионную температуру, яркостную и цветовую, шумовую и антенную и т. д.

Но не смущайтесь! В этом выпуске «Калейдоскопа» разговор пойдет о самой обычной, можно сказать, «школьной» температуре.



Вопросы и задачи

1. На горячей отопительной батарее лежит давно просохшее полотенце. Одинаково ли нагреты батарея и полотенце, если оценивать на ощупь? Одинаковы ли их температуры?

2. Понизится ли температура в комнате, если открыть дверцу работающего холодильника?

3. В кастрюле кипит вода, и в ней варятся макароны. Кипит ли вода в трубках макарон?

4. Как надо поступить, чтобы сильнее остудить горячий чай: сразу бросить в него сахар и затем подождать пять минут или, выждав пять минут, положить сахар и растворить его?

5. В колбу с узким горлышком налили керосин и отметили уровень его в горлышке. Если опустить колбу в горячую воду, то в первый момент уровень керосина опустится, в дальнейшем же он начнет повышаться. Почему?

6. На диске, вырезанном из медной пластинки, начертили отрезок прямой. Останется ли он прямым, если диск нагреть?

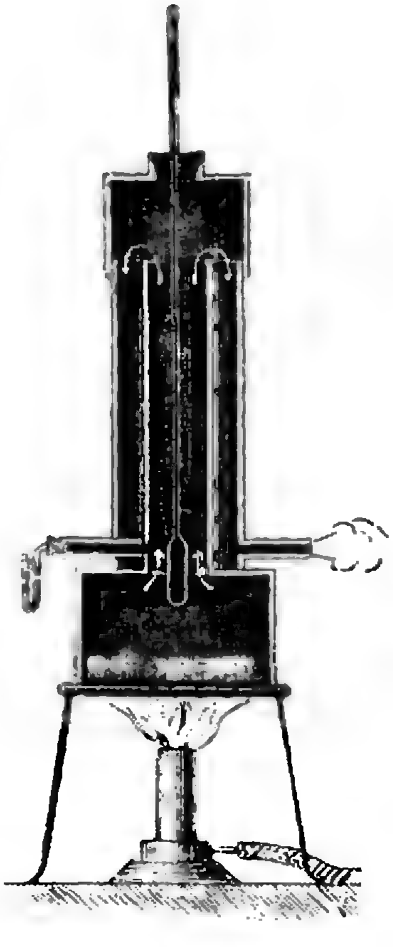
7. Как измерить медицинским термометром температуру тела человека, если температура окружающего воздуха равна 42 °C?

8. Можно ли пользоваться ртутным термометром в Антарктиде?

9. Имеются два непроградуированных термометра. Как определить, какой из них нагрет больше?

10. Что покажет термометр, который возьмет с собой космонавт, выходя в открытый космос?

11. Можно ли, не прибегая к помощи таблиц, сказать, выше или ниже комнатной критическая температура воды?



Микроопыт

Толстый гвоздь плотно оберните полоской бумаги и внесите его в пламя свечи. Загорится ли бумага?

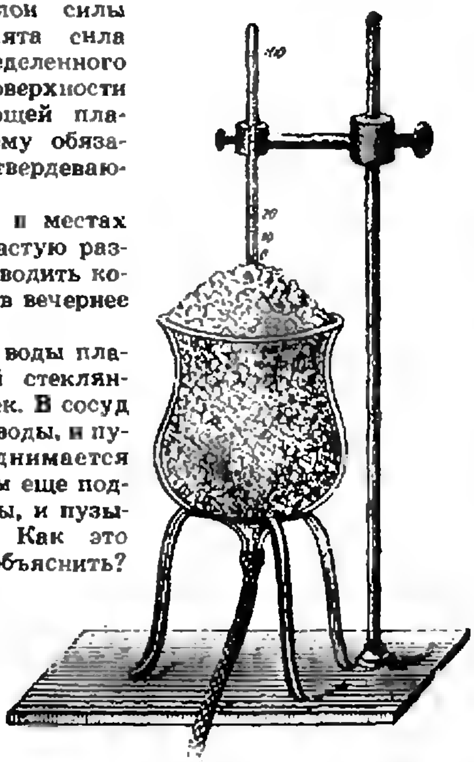
12. Одну из бутылок с водой положили на лед при 0 °С, вторую — опустили в воду при 0 °С. Замерзнет ли вода в какой-нибудь из них?

13. Равные количества соли растворяют в двух одинаковых сосудах с водой. В одном случае соль берут в виде одного большого кристалла, а в другом — в виде порошка. В каком случае температура раствора после полного растворения соли будет выше, если до растворения соль и вода находились в обоих случаях при одинаковых температурах?

14. За эталон силы света принята сила света определенного участка поверхности затвердевающей платины. Почему обязательно затвердевающей?

15. Почему в местах отдыха зачастую разрешают разводить костры лишь в вечернее время?

16. Внутри воды плавает полый стеклянный пузырек. В сосуд подливают воды, и пузырек поднимается вверх. Затем еще подливают воды, и пузырек тонет. Как это можно объяснить?



Любопытно, что...

...на самом деле шведский астроном и физик Цельсий предложил шкалу, в которой точка кипения воды была обозначена числом 0, а точка плавления льда — числом 100.

...Фаренгейт загорелся идеей самому сделать термометр, когда прочитал об открытии французского физика Амонтона, «что вода кипит при фиксированной степени теплоты».

...одно время в физических лабораториях пользовались для измерения температуры так называемым весовым термометром. Он состоял из полого платинового шара, заполненного ртутью, в котором было капиллярное отверстие. Об изменении температуры судили по количеству ртути, вытекавшей из отверстия.

...наши ощущения, обычно надежные, могут подвести при определении температуры. Например, известен опыт, когда одну руку опускают в холодную, а другую — в горячую воду. Если через некоторое время опустить сразу обе руки в теплую воду, то рука, которая до этого была в горячей воде, почувствует холод, бывшая же в холодной воде — жар.

...понятие температуры неприменимо к отдельной молекуле; о температуре, как о величине статистической, можно говорить лишь в том случае, если имеется достаточно большая совокупность частиц.

...сегодня методами магнитного охлаждения получены очень низкие, близкие к абсолютному нулю, температуры в несколько милликельвинов, а очень высокие — в миллионы кельвинов — достигаются в термоядерной плазме. В природе же сверхвысокие температуры в десятки миллионов кельвинов существуют в центрах звезд.

Что читать в «Кванте» о температуре
(публикации последних лет)

1. «Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда» — 1986, № 5, с. 26;
2. «Д. Фаренгейт и его термометры» — 1986, № 10, с. 26;
3. «Коротко о тепловом расширении» — 1988, № 8, с. 44;
4. «Абсолютная температура» — 1988, № 9, с. 60;
5. «Градусник для Солнца» — 1988, № 10, с. 40;
6. «Температура, теплота, термометр» — 1990, № 8, с. 10;
7. «О ледниках, скороварках и теореме Карно» — 1991, № 3, с. 39;
8. Калейдоскоп «Кванта» — 1986, № 1, с. 32; 1987, № 9, с. 32; 1989, № 10, с. 40.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 января 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

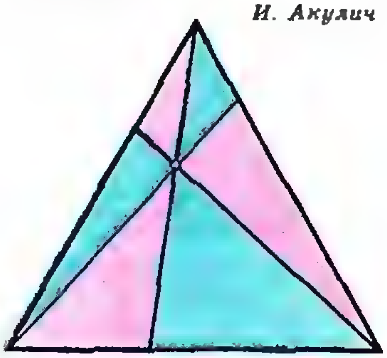
Задачи

4. Расставьте скобки в левой части равенства 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 7 так, чтобы оно стало верным.

С. Токарев

5. «Дорожная» шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Пусть имеется еще комплект домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на такой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?

И. Акулич



6. Через точку P внутри равностороннего треугольника проведены прямые, проходящие через его вершины. Эти прямые разбивают его на 6 треугольников (см. рисунок). Оказалось, что сумма площадей красных треугольников равняется сумме площадей синих треугольников. Докажите, что точка P лежит на одной из медиан этого треугольника.

В. Произволов

Победители конкурса «Математика 6—8»

Закончился первый конкурс «Математика 6—8», проводившийся журналом «Квант» совместно с болгарским журналом для школьников «Математика». Задачи конкурса публиковались с № 9, 1990 г. по № 5, 1991 г. Авторами задач были как советские, так и болгарские математики. Редакция подвела итоги конкурса по письмам, полученным нашим журналом.

По итогам конкурса призами журнала «Квант» и болгарского журнала «Математика» награждаются:

Советские школьники

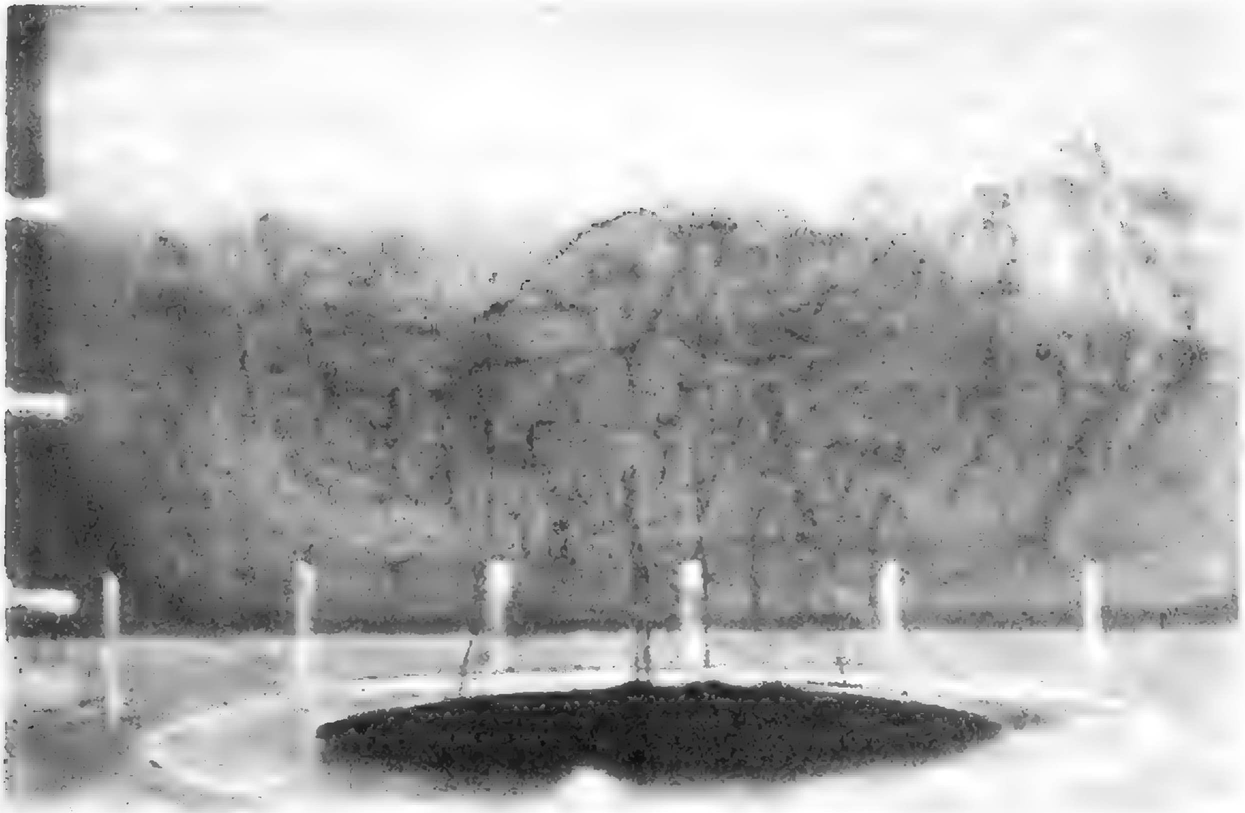
Денисов А.— С.-Петербург, с. ш. 11, 8 кл.
Щербицкая В.— Минск, с. ш. 53, 7 кл.
Лотоцкий Р.— Тернополь, с. ш. 15, 8 кл.
Гуков С.— Москва, с. ш. 265, 8 кл.
Бондарева Л.— Львов, с. ш. 73, 7 кл.
Зайцев Г.— Москва, с. ш. 444, 7 кл.
Мельник А.— Гайворон, с. ш. 2, 6 кл.
Хазанов А.— С.-Петербург, с. ш. 239, 8 кл.
Мантуров В.— Москва, с. ш. 281, 7 кл.
Карабаш И.— Донецк, с. ш. 147, 8 кл.
Шахов А.— Москва, с. ш. № 444, 8 кл.
Санников Ю.— Севастополь, с. ш. 8, 6 кл.
Бирюкова А.— Новосибирск, с. ш. 10, 8 кл.
Исаметдинов И.— С.-Петербург, с. ш. 261, 8 кл.
Рулева Ю.— Щелково
Игнатова Т.— Вильнюс, с. ш. 53, 8 кл.
Масальцев Д.— Харьков, с. ш. 104, 7 кл.
Курманалинин Х.— Алма-Ата, с. ш. 8, 7 кл.
Леонова Т.— Минск, с. ш. 149, 8 кл.
Тищенко И.— Гайворон, с. ш. 2, 8 кл.
Купавский А.— Ногинск, с. ш. 9, 8 кл.
Шалаев Д.— Павлоград, с. ш. 4, 8 кл.
Пак Е.— Душанбе, с. ш. 20, 7 кл.

Апальков Д.— Харьков, с. ш. 16, 7 кл.
Фатыхов Р.— Казань, с. ш. 95,7 кл.

Болгарские школьники

Тодоров Ивайло — Стара-Загора
Бойчев Камен — Стара-Загора
Димитрова Лада — София
Ангелова Милена — София
Шумкова Лора — София
Петков Минчо — София
Неделчева Мария — Шумен
Москова Александра — Велико-Тырново
Дончев Дилян — Стара-Загора
а также Школьный центр по математике и информатике города Стара-Загора

Жюри конкурса также отмечает успешное выступление на конкурсе следующих школьников:
Пахомов Д.— С.-Петербург, с. ш. 148, 8 кл.
Белокурова Е.— Москва, с. ш. 882, 8 кл.
Кулик А.— Канев, с. ш. 4, 6 кл.
Сидоренко Т.— Львов, с. ш. 50, 7 кл.
Бокий А.— Киев, с. ш. 98, 5 кл.
Безделин В.— Псков, с. ш. 18, 7 кл.
Гольдман И.— Москва, с. ш. 1207, 8 кл.
Исаакян О.— Москва, с. ш. 34, 8 кл.
Ханмагомедов А.— Дербент, с. ш. 19, 7 кл.
Кириллова Л.— Одесса, с. ш. 17, 7 кл.
Грищенко С.— Барнаул, с. ш. 123, 7 кл.
Томарадзе Г.— Кутаиси, с. ш. 1, 8 кл.
Мамедова Е.— Баку, с. ш. 257, 7 кл.
Минина Н.— Николаев, с. ш. 41, 7 кл.
Исавкян К.— Москва, с. ш. 34, 8 кл.
Кондратюк Т.— Львов, с. ш. 53, 8 кл.
Петренко И.— п. Дружный Пуховичского р-на Минской обл., с. ш. 1, 3 кл.
Лопатенко А.— Одинцово, с. ш. 67, 8 кл.
Фарукшин Р.— Бийск, с. ш. 20, 8 кл.
Зырянов Г.— Ташкент, с. ш. 91, 7 кл.
Трухачев Д.— С.-Петербург, с. ш. 67, 7 кл.
Кривошея К.— Винница, с. ш. 11, 8 кл.
Соловцов А.— Гомель, с. ш. 6, 8 кл.
Гавриков А.— Москва, с. ш. 8, 7 кл.
Старобинская А.— Москва, с. ш. 38, 7 кл.
Панкратов В.— Старый Оскол, с. ш. 16, 8 кл.
Гуляев Л.— Нижний Новгород, с. ш. 82, 6 кл.
Смирнова Е.— Дзержинск Нижегородской обл., с. ш. 11, 7 кл.
Соболь А.— Москва, с. ш. 243, 8 кл.
Панебратцев М.— Дубна, с. ш. 6, 6 кл.
Рогозова Н.— С.-Петербург, с. ш. 67, 7 кл.
Щербий И.— пгт Каменный Брод Житомирской обл., Каменобродская с. ш., 7 кл.
Селемир Д.— Арзамас, с. ш. 2, 7 кл.
Сенкевич О.— Иваново, с. ш. 22, 7 кл.
Гильфанова Р.— с. Иляксаз Сармановского р-на Татарской ССР, Иляксазовская с. ш., 6 кл.
Дипдаров М.— Ташкент, с. ш. 201, 7 кл.
Ногина О.— Челябинск, с. ш. 127, 7 кл.
Шувалов В.— Москва, с. ш. 2, 8 кл.
Шахпутов Е.— Целиноград, с. ш. 1, 8 кл.
Фейгенсон О.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 51, 8 кл.
Денисюк Н.— Пущино, с. ш. 2, 8 кл.
Демина С.— Конаково, с. ш. 3, 8 кл.
Бакалейник Л.— Бар, с. ш. 2, 7 кл.
Малютин А.— Сумы, с. ш. 12, 7 кл.
Сонин С.— Челябинск, с. ш. 37, 6 кл.
Колпакова О.— р. п. Чернышковский Волгоградской обл., с. ш. 2, 7 кл.
Хамхидько А.— Старый Оскол, с. ш. 16, 8 кл.
Нордноймер С.— с. Раздольное Вишневского р-на Целиноградской обл., Берсуатская с. ш., 7 кл.
Заболоцкий Е.— Дзержинск Нижегородской обл., с. ш. 24, 6 кл.
Власова Т.— Петровск-Забайкальский, с. ш. 6, 6 кл.
Ковалева А.— Киев, с. ш. 257, 7 кл.
Куксенко Д.— С.-Петербург, с. ш. 121, 8 кл.
Дериенко А.— Кременчуг, с. ш. 6, 7 кл.
Евчик Т.— Пинск, с. ш. 4, 7 кл.
Кулевцова Д.— Бишкек, Беш-Кунгейская, с. ш., 6 кл.
Моторенко Е.— Петровск-Забайкальский, с. ш. 6, 6 кл.
Прохоров Д.— Минск, с. ш. 19, 7 кл.
Еремеев Ю.— Целиноград, с. ш. 1, 8 кл.
Глушкова О.— Таганрог, с. ш. 9, 7 кл.
Рогозянская О.— Уральск, с. ш. 21, 7 кл.
Джафаров Р.— п. Порт-Ильич Ленкоранского р-на АзССР, с. ш. 2, 7 кл.
Иванов К.— Подольск, с. ш. 26, 6 кл.
Мамедов М.— с. Галалы Сальянского р-на АзССР, с. ш. 4, 8 кл.
Волков А.— Минск, с. ш. 36, 6 кл.
Ставицкий А.— Киев, с. ш. 136, 8 кл.
Боугашков Д.— Жуковский, с. ш. 3, 7 кл.



Лаборатория „Кванта"

«Грибы» под лампочкой и... война в заливе

Доктор физико-математических наук
Б. БУБНОВ

Одной из причин изменения климата в отдельных регионах земного шара является тепловой нагрев «грязной» атмосферы (некоторые аспекты этой проблемы обсуждались в статье «Поговорим немного о погоде...», опубликованной в «Кванте» в № 11—12 за 1988 год). За счет сильного загрязнения продуктами горения, которые образуются в результате природных или искусственных катаклизмов (извержения вулканов, пожары, выбросы пыли и земли при сильных взрывах), атмосфера становится непрозрачной для солнечного излучения, что существенно изменяет циркуляцию воздушных потоков. Так, пожары на нефтяных скважинах Кувейта, возникшие в ходе войны в Персидском заливе, изменили климат страны на долгое время, понизив среднюю температуру на 10 градусов.

Подобные «натурные» эксперименты, предлагаемые самой жизнью, вызывают необходимость в исследовании похожих явлений в лабораторных условиях. В период постоянного «перехода от дефицита к изобилию» предлагать эксперименты «эпохи застоя», в которых используются крахмал или подсолнечное масло, является садистским искушением. Отбросить это искушение автору помогло посещение магазина «Свет», в котором ничего не было, кроме сиротливо торчащих 500-ваттных лампочек. Вспомнились эксперименты по моделированию реакции атмосферы Земли на глобальные катастрофы, где использовались лампы большой мощности. Эксперименты были проведены выпускником средней школы П. Берловым. Используемое оборудование очень просто, и подобные эксперименты могут быть воспроизведены дома, для чего вам понадобятся банка с водой, черные чернила и лампочка большой мощности.

Первым делом надо создать «атмосферу» (или «океан»), в которой мы будем наблюдать конвективные потоки. Возьмите прозрачную банку или аквариум, желательно большого объема (форма безразлична). На дно банки установите полость, в которую затем будут налиты чернила. Если дно сосуда плоское, то такой полостью может служить кольцо, прикрепленное ко дну пластилином, в крайнем случае края полости можно сделать из пластилина. Не следует делать высоту полости больше 2—3 мм, так как большая высота приведет к значительному расходу чернил. От того, как установлена полость, во многом зависит успех эксперимента. Даже небольшой ее наклон может привести к тому, что чернила растекутся по сосуду.

Теперь заполним банку водой и дадим ей некоторое время отстояться.

Следующий шаг — заполнение полости на дне чернилами. Лучше брать черные чернила, которые ясно показывают конвективные движения и хорошо растворяются в воде. Понятно, что нельзя сначала налить чернила, а потом воду, так как чернила сразу перемешаются с водой. Лучше всего наливать чернила, температура которых ниже температуры воды. В этом случае плотность чернил больше плотности воды и чернила хорошо растекутся по дну полости. Так что сначала охладите чернила, затем наберите их шприцем или резиновой грушей через трубочку для коктейля, вытрите остатки чернил и, аккуратно подведя трубочку ко дну, медленно вылейте чернила в полость. Затем неспеша выньте трубочку из сосуда. В резуль-

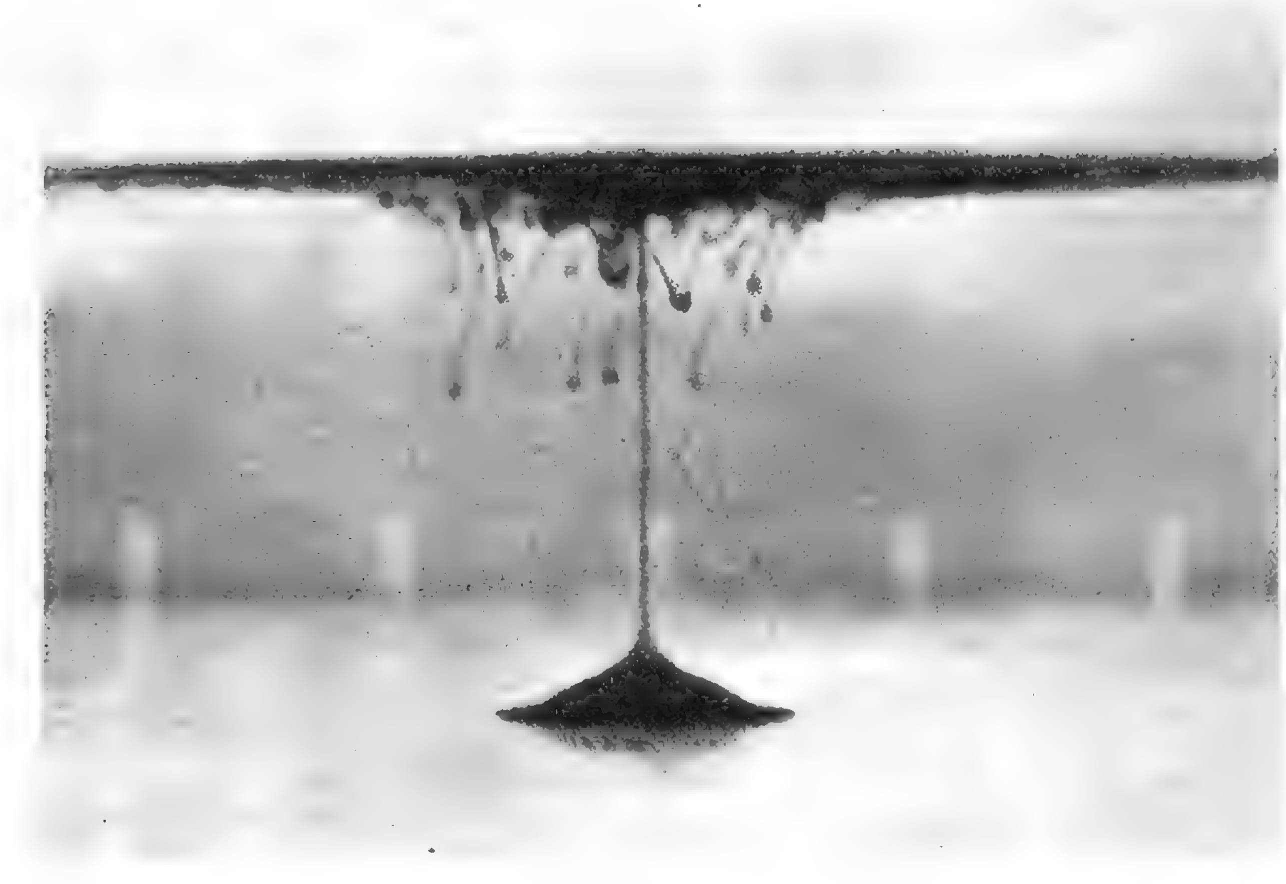


Рис. 1.

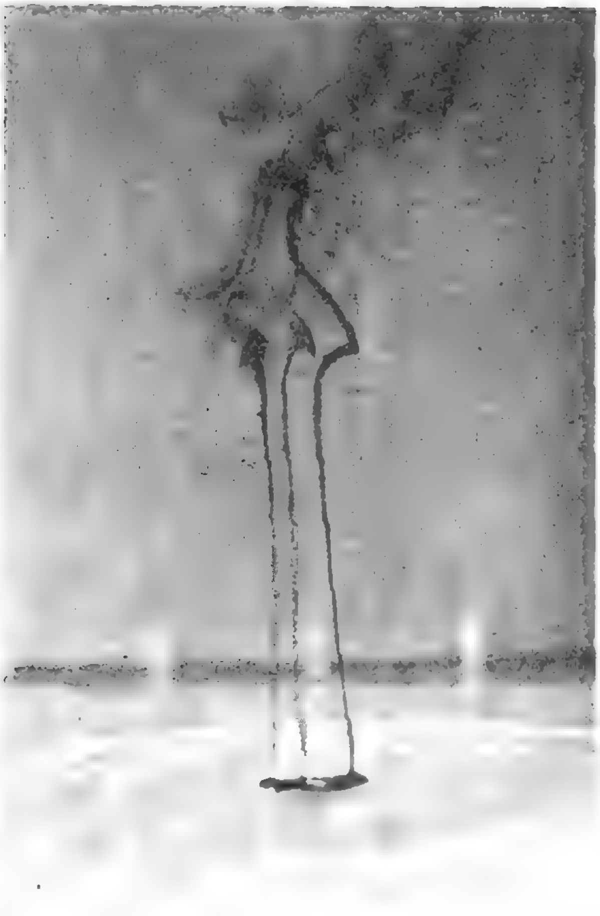


Рис. 2.

тате у вас окажется сосуд с водой, на дне которого находится полость, заполненная черными чернилами. (Чтобы достичь совершенной картины, нам потребовалось не один десяток раз повторить эту операцию, но, конечно, для того чтобы «просто посмотреть», достаточно двух-трех попыток.)

Теперь остается включить лампочку и наблюдать за возникающими движениями. Лампу следует поместить на расстоянии 3—5 см от поверхности воды, и во избежание взрыва внимательно следить, чтобы случайные капли воды не попали на нее.

Посмотрим, что же происходит в нашей банке. Под действием света чернила нагреваются, становятся теплее, чем вода, и стремятся подняться. Это — общий принцип так называемой свободной тепловой гравитационной конвекции. Картины конкретных возникших движений и их характеристики будут зависеть от многих параметров, главные из которых — интенсивность светового потока, глубина налитой жидкости и диаметр полости, в которую налиты чернила.

Рассмотрим основные виды движений, наблюдаемых в этих экспериментах, считая, что световой поток примерно постоянен. Если чернила занимают маленькую площадь на дне, то основное движение представляет собой интенсивный фонтан чернил (рис. 1), который при небольшом уровне жидкости в сосуде достигает ее поверхности. Если же уровень жидкости в сосуде велик, то этот одиночный фонтан становится неустойчивым, и на некотором расстоянии от дна образуется утолщение, из которого как бы вырастает новый кривой фонтан. Этот процесс напоминает падение капли чернил в воде. Падая в жидкости, капля чернил достигает некоторого положения, при котором движение прекращается или резко замедляется. Через некоторое время из этого положения возникает новое движение капли до следующего стационарного уровня. Если немного увеличить диаметр полости для чернил, то одиночный фонтан будет неустойчив, поднятие происходит двумя или тремя струями (рис. 2). При среднем диаметре полости возникает автоколебательный режим — грибообразное движение (рис. 3), при котором струи, составляющие ножку «гриба», то приближаются, то отдаляются от центра. Если площадь чернил на дне совсем большая, то наблюдается хаотическое поднимание отдельных искривленных струй чернил, обычно называемых термиками (см. рисунок на с. 44). Такое движение характерно для режима турбулентной конвекции в плоском слое.

Как это часто бывает, простые, с первого взгляда, эксперименты скрывают много непонятных и нерешенных проблем.

Эти эксперименты, с одной стороны, позволяют рассмотреть переход от ламинарных движений, образуемых на границах полости, к нерегулярным турбулентным движениям внутри кольца большого диаметра. С другой стороны, процессы, происходящие в пограничных слоях на кра-

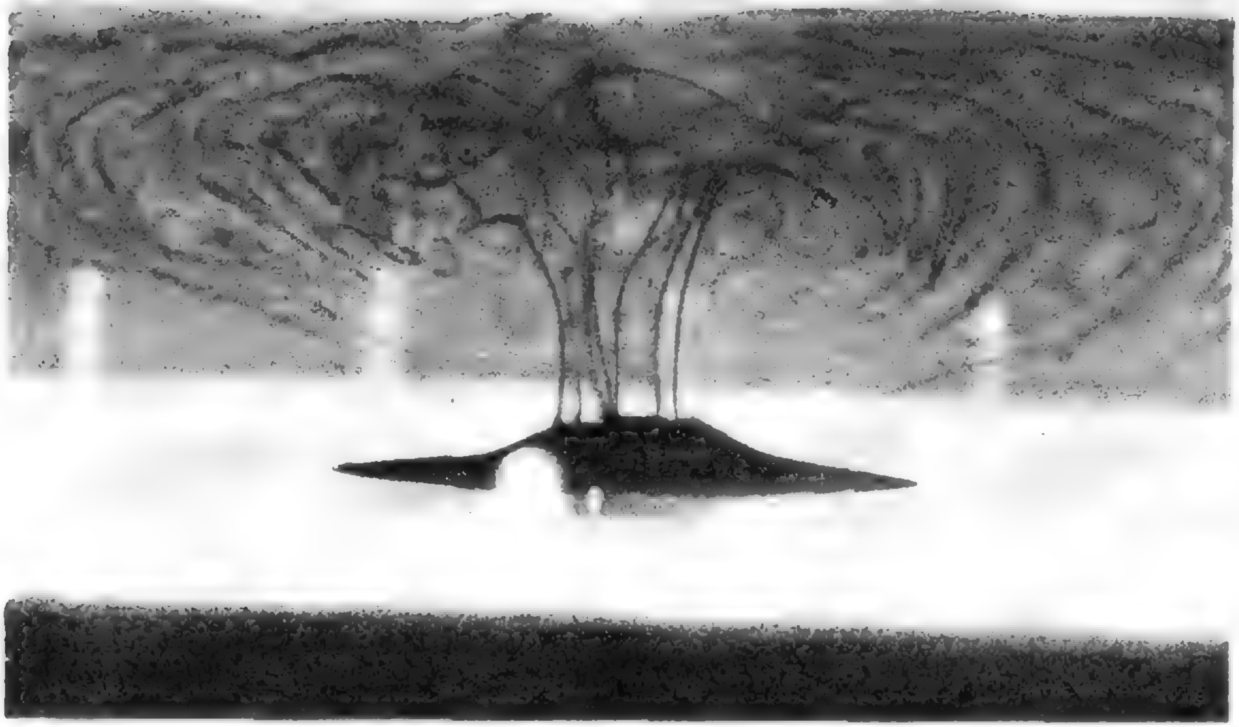
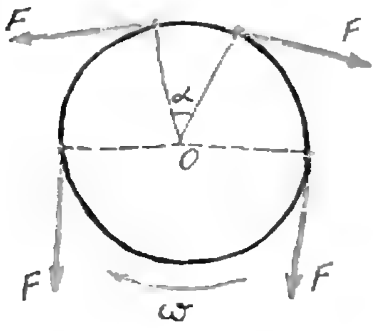


Рис. 3.

ях кольца, *«задают» движения и внутри* его, принципиальную роль играют также вторичные течения, обусловленные боковыми границами. С точки зрения квалифицированного экспериментатора, здесь больше вопросов, чем ответов. А с точки зрения неквалифицированного — просто красиво...

Нам пишут

В шестом номере «Кванта» опубликовано решение задачи Ф1277, в котором показано, как найти положение центра масс проволочной полуокружности, используя энергетические соображения. Тот же самый результат довольно просто получается и другим физическим методом — с помощью динамики вращательного движения.



Сначала возьмем целое проволочное кольцо массой m и раскрутим его вокруг оси O до угловой скорости ω. Найдем силу натяжения проволоки F, записав закон Ньютона для маленького элемента проволоки, соответствующего центральному углу α:

$$F\alpha = \frac{m\alpha}{2\pi}\omega^2 R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \frac{m\omega^2 R}{2\pi},$$

где R — радиус кольца.

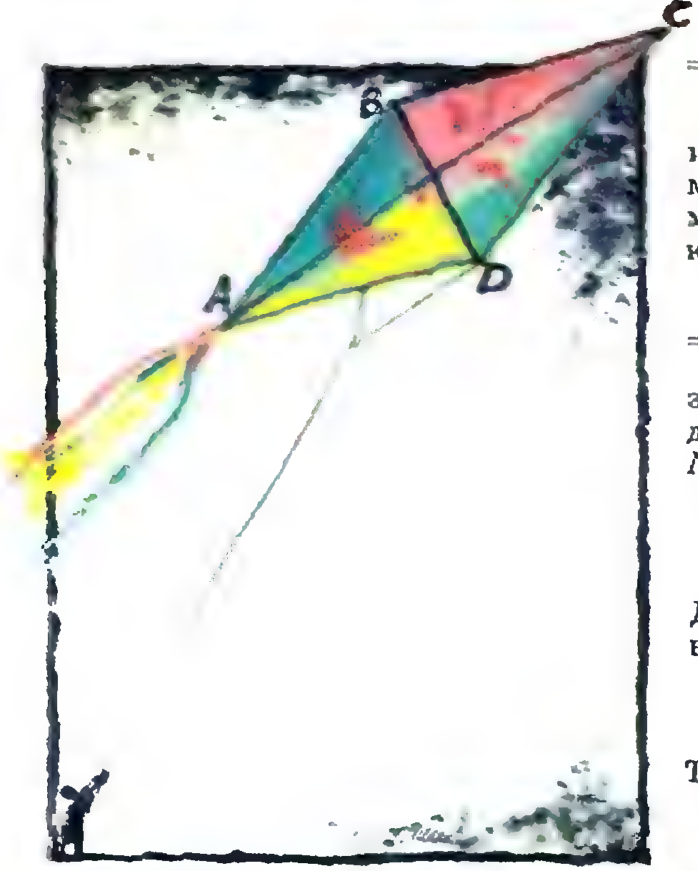
Теперь запишем закон Ньютона для полуокружности. Заметим, что ее центр масс движется по окружности радиусом $l_ц$ ($l_ц$ — искомое расстояние от центра масс полуокружности до ее центра), поэтому получаем

$$2F = \frac{m}{2}\omega^2 l_ц.$$

Отсюда, подставив выражение для F, находим

$$l_ц = \frac{2R}{\pi}.$$

И. Аљешин



Математический кружок

Гармонический четырехугольник

Кандидат физико-математических наук
Я. ПОНАРИН

В этой статье вы познакомитесь с одной из замечательных фигур планиметрии — особым видом вписанного в окружность четырехугольника. А прежде нужна небольшая

Подготовка

Напомним сначала, что такое отношение направленных отрезков (см. также статью В. Эрднеева, Н. Манцаева «Теоремы Чевы и Менелая» в третьем номере «Кванта» за 1990 год). Пусть даны два коллинеарных вектора: $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ (рис. 1). Их отношением назовем такое число λ, что $|\lambda| = \frac{AM}{MB}$, причем $\lambda > 0$, если векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ сонаправлены, и $\lambda < 0$, если их направления противоположны (вы можете легко убедиться, что с такими отношениями можно обращаться, как с обычными дробями).*)

Если даны точки A и B и $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \neq -1$, то тем самым точка M задана однозначно. Действительно, допустим что найдутся две точки M и N, такие что

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.$$

Добавим к обеим частям этого равенства по единице:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} + \frac{\overline{MB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} + \frac{\overline{NB}}{\overline{NB}}.$$

Тогда

$$\frac{\overline{AM}+\overline{MB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}+\overline{NB}}{\overline{NB}},$$

т. е.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{NB}},$$

значит,

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NB} \text{ и } M = N.$$

Принято говорить, что *точка M делит отрезок AB в отношении λ*. Заметьте, что точка может делить отрезок, находясь вне его!

При $\lambda > 0$ точка M принадлежит отрезку AB, при $\lambda < 0$ находится вне его на прямой AB. В частности, если $\lambda = 1$, то M — середина AB; если же $\lambda = -1$, это значит, что $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{MB}$, т. е. точки A и B совпадают. Поэтому случай $\lambda = -1$ нами исключен (при совпадении A и B точка M задана неоднозначно).

Определение. *Упорядоченная четверка точек прямой $(A, B; C, D)$ называется гармонической, если точ-*

---

*) Чтобы отличать отношение направленных отрезков от отношения их длин, будем ставить черточку над обозначением отрезка в знак того, что на нем задано направление.

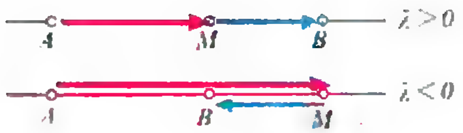


Рис. 1.

ки C и D делят отрезок AB в отношениях, отличающихся только знаком: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. *При этом пара точек A, B называется базисной, а пара C, D — делящей.*

Однако базисную и делящую пары можно поменять ролями, так как если $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$, то и $\frac{\overline{CA}}{\overline{AD}}=-\frac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$. Иными словами, если упорядоченная четверка (*A*, *B*; *C*, *D*) гармоническая, то будет гармонической и упорядоченная четверка (*C*, *D*; *A*, *B*).

Проверьте сами, что гармоничность четверки точек сохранится, если изменить порядок точек в базисной или делящей паре.

Гармонические четверки точек довольно часто встречаются, хотя, быть может, вы их и не замечали. Вот один из примеров. Пусть дан треугольник *ABC* и биссектрисы его внутреннего и внешнего углов при вершине *C* пересекают прямую *AB* в точках *M* и *N* (рис. 2). Тогда упорядоченная четверка (*A*, *B*; *M*, *N*) является гармонической, поскольку, как известно,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{AC}{BC} \text{ и } \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}=-\frac{AC}{BC}.$$

Упражнение. Докажите, что гармоническая четверка (*A*, *B*; *C*, *D*) полностью определяется тремя своими точками.

На рисунке 3 показан способ построения четвертой точки, *D*, по трем остальным. Здесь через точки *A* и *B* произвольным образом проведены две параллельные друг другу прямые, а через точку *C* — прямая, пересекающая их в точках *P* и *Q* соответственно. Точка *S* на прямой *BQ* такова, что *QB*=*BS*. Тогда точка пересечения прямых *PS* и *AB* — искомая.

Упражнение. Докажите, что построенная таким способом точка — действительно недостающая точка гармонической четверки.

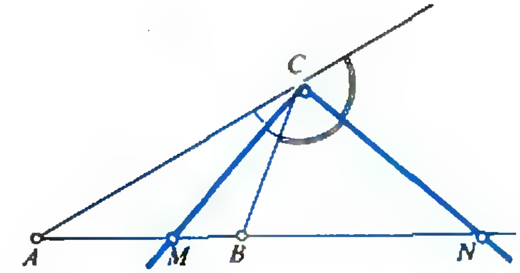


Рис. 2.

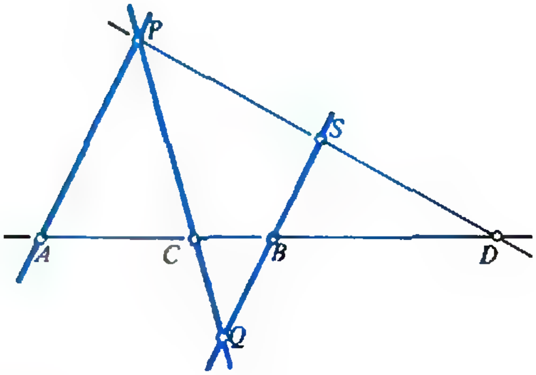


Рис. 3.

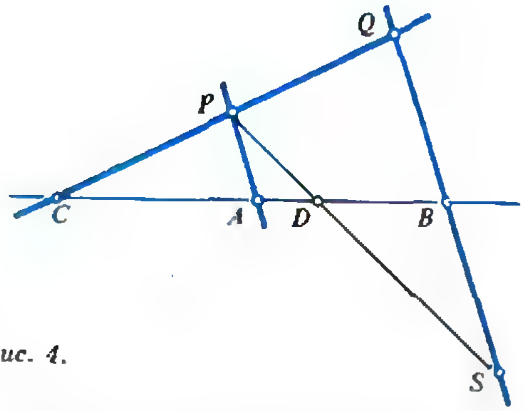


Рис. 4.

Такое же построение позволяет найти недостающую точку *D* и в том случае, когда точка *C* расположена вне отрезка *AB* (рис. 4).

Упражнение. Найдите пробел в описанном выше способе построения (**указание:** вспомните о том, что значение $\lambda=-1$ исключено).

Теперь все готово для того, чтобы представить вам

Гармонический четырехугольник

Определение. *Вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.*

Из этого определения пока не видно связи гармонического четырехугольника с гармоническими четверками точек. Ниже она выяснится.

Очевидным примером гармонического четырехугольника служит вписанный дельтоид (рис. 5) — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, одна из которых делит другую пополам. В частности, он может быть квадратом.

Другим частным видом гармонического четырехугольника является гармоническая трапеция (рис. 6). Ясно, что она равнобедренная. Пусть AB и CD — основания гармонической трапеции $ABCD$. Обозначим $AB=a$, $CD=b$, $AD=BC=c$, $AC=BD=d$. Согласно определению гармонического четырехугольника $ab=c^2$, т. е. *боковая сторона гармонической трапеции является средним геометрическим ее оснований.* Кроме того, во всяком вписанном четырехугольнике произведение длин диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон (**теорема Птолемея***)). Поэтому $d^2=ab+c^2$ и, значит, $d^2=2c^2$, откуда $d=c\sqrt{2}$, т. е. диагональ гармонической трапеции с боковой стороной c равна диагонали квадрата со стороной c. Если описанная окружность имеет радиус R, то $d<2R$, следовательно, $c<R\sqrt{2}$ (в случае равенства $c=R\sqrt{2}$ трапеция становится вписанным квадратом).

Таким образом, гармоническую трапецию можно задать двумя основаниями a и b, по которым просто строятся боковая сторона и диагональ. Ее можно задать также радиусом описанной окружности и боковой стороной, с помощью которых легко находятся все остальные элементы.

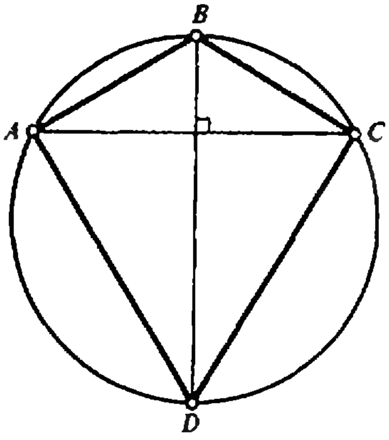


Рис. 5.

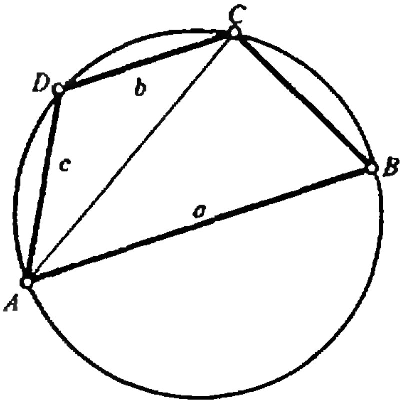


Рис. 6.

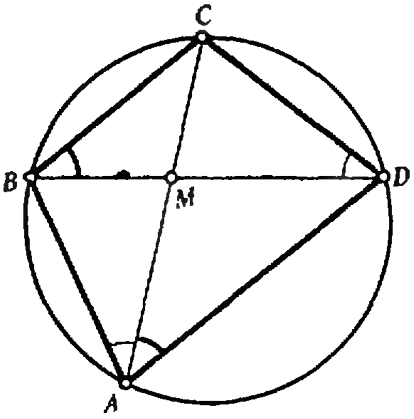


Рис. 7.

Рассмотрим теперь

Общие свойства гармонических четырехугольников

Условимся говорить, что в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и BC прилежат к диагонали AC. К ней прилежат также и стороны AD и DC.

Теорема 1. *В гармоническом четырехугольнике каждая из диагоналей делится точкой их пересечения в отношении квадратов прилежащих сторон.*

Действительно, рассмотрим гармонический четырехугольник $ABCD$. Пусть M — точка пересечения его диагоналей (рис. 7). Треугольники

---

*) См., например, «Квант», 1991, № 4, с. 42.

ABM и DCM подобны (почему?), значит,

$$AM \cdot MC = BM \cdot MD \text{ и } \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{CD}.$$

Из подобия треугольников AMD и BCM имеем также

$$\frac{MD}{MC} = \frac{AD}{BC}.$$

Перемножим полученные пропорции почленно:

$$\frac{BM \cdot MD}{MC^2} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}.$$

Но $AM \cdot MC = BM \cdot MD$, следовательно,

$$\frac{AM \cdot MC}{MC^2} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}.$$

или

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD \cdot AB}{BC \cdot CD}. \qquad (*)$$

Поскольку четырехугольник $ABCD$ гармонический, то $AD \cdot BC = AB \cdot CD$, откуда

$$CD = \frac{AD \cdot BC}{AB}.$$

Подставив это выражение в (*), получим

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD \cdot AB}{BC} \cdot \frac{AB}{AD \cdot BC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Аналогично

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AD^2}{DC^2} \text{ и } \frac{BM}{MD} = \frac{BC^2}{CD^2} = \frac{AB^2}{AD^2}.$$

Замечание. Известно, что прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая его противоположную сторону в отношении квадратов прилежащих сторон, симметрична медиане относительно биссектрисы угла при этой вершине. Она называется симедианой треугольника*).

Теорема 2. *Две противоположные вершины гармонического четырехугольника, точка пересечения его диагоналей и точка пересечения прямой, содержащей эти вершины, с касательной к описанной окружности в третьей вершине образуют гармоническую четверку точек.*

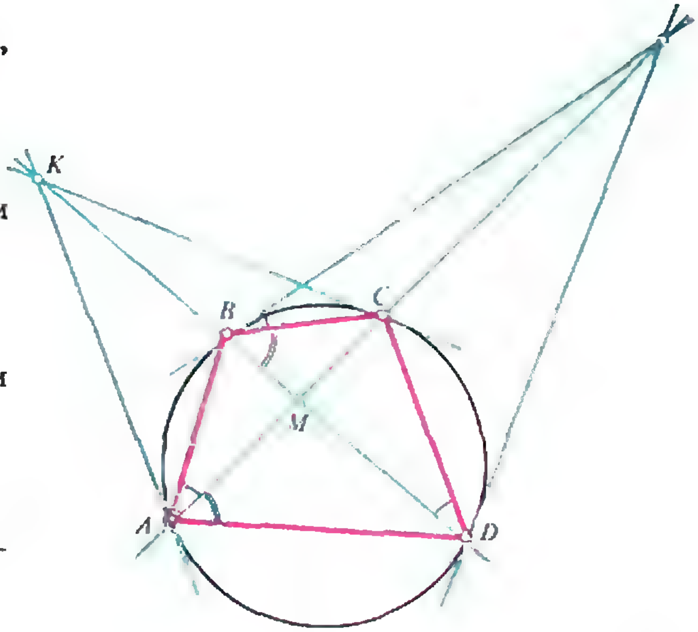


Рис. 8

В самом деле, пусть касательная в вершине B пересекается с прямой AC в точке P (рис. 8). Тогда $\angle BAC = \angle CBP$ (чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу); следовательно, треугольники BCP и BAP подобны. Поэтому

$$AP \cdot PC = BP^2$$

и

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{BC}.$$

Разделив обе части первого равенства на PC^2, получим

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BP^2}{PC^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

Если теперь привлечь теорему 1 для гармонического четырехугольника и учесть направление векторов, то получим окончательно: $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$. Точки M и P делят отрезок AC внутренним и внешним образом в равных по абсолютной величине отношениях.

---

*) Об этом вы можете подробнее прочитать в книге С. И. Зетеля «Новая геометрия треугольника» (Учпедгиз, 1962, с. 100—103).

Следствие. *Касательные к описанной около гармонического четырехугольника окружности в его противоположных вершинах пересекаются на прямой, содержащей его диагональ, или же параллельны этой диагонали.*

Действительно, если провести касательную в вершине D, то согласно теореме 2 она пересечет прямую AC в точке, которая вместе с теми же точками A, C, M составит гармоническую четверку. Но для трех данных точек четвертая точка гармонической четверки единственна. Это свойство, конечно, справедливо и для касательных в вершинах A и C. Параллельность касательных и диагонали имеет место в случае дельтоида.

Теорема 3. *Если касательные в концах одной диагонали вписанного четырехугольника пересекаются на прямой, содержащей вторую диагональ, или ей параллельны, то этот четырехугольник — гармонический.*

В самом деле, при доказательстве теоремы 2 получено равенство $\frac{AP}{PC}=\frac{AB^2}{BC^2}$, верное для любого вписанного четырехугольника $ABCD$. По условию, касательная в точке D пересекает AC в той же точке P, поэтому также $\frac{AP}{PC}=\frac{AD^2}{DC^2}$. Следовательно, $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$, т. е. четырехугольник $ABCD$ гармонический.

На этой теореме основан способ построения гармонического четырехугольника $ABCD$ по трем заданным вершинам A, B и C.

Около треугольника ABC опишем окружность и проведем к ней через вершину B касательную. Если отрезки AB и BC не равны, то она пересечет прямую AC в некоторой точке P. Достаточно теперь провести через P вторую касательную к нашей окружности, и мы получим недостающую вершину гармонического четырехугольника. Если же $AB=BC$ и касательная в точке B параллельна AC, это значит, что искомый четырехугольник — дельтоид, поэтому вершина D — точка пересечения срединного перпендикуляра к AC с окружностью. В общем случае можно поступить и несколько иначе: если K — точка пересечения касательных в заданных вершинах A и C, то вершина D является второй точкой пересечения прямой BK с окружностью.

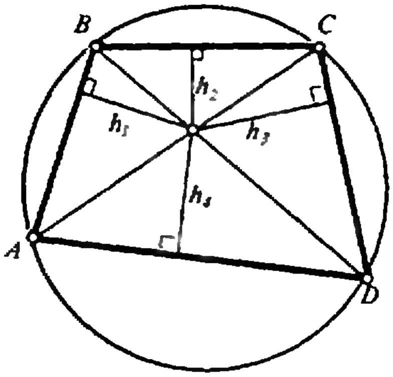


Рис. 9.

Теорема 4. *В гармоническом четырехугольнике расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон пропорциональны длинам этих сторон.*

Взгляните на рисунок 9. Обозначим расстояния точки M до прямых AB, BC, CD, DA соответственно h_1, h_2, h_3, h_4. Отношение площадей треугольников AMB и BMC равно $AM:MC$. С другой стороны, отношение этих же площадей равно $\frac{AB\cdot h_1}{BC\cdot h_2}$. По теореме 1 $\frac{AM}{MC}=\frac{AB^2}{BC^2}$ и, следовательно, $h_1:h_2=AB:BC$. Аналогично $h_2:h_3=BC:CD$ и $h_3:h_4=CD:DA$.

В заключение — еще одно

Замечание. *Четыре комплексных числа a, b, c, d образуют гармоническую четверку, если*

$$\frac{a-b}{b-c}=-\frac{a-d}{d-c}.$$

В седьмом номере нашего журнала за этот год опубликована статья Ю. Соловьева о комплексных числах, где, в частности, описано их геометрическое представление. Каждому из чисел a, b, c, d соответствует точка плоскости A, B, C, D. Если комплексные числа образуют гармоническую четверку, то $ABCD$ — гармонический четырехугольник, и наоборот.

Задачи на построение в тонких линзах

В. ВОЛКОВ

На устных вступительных экзаменах часто встречаются задачи на построение в линзе. Причиной тому — удобство для экзаменатора: задачу легко сформулировать, ничего не надо записывать, достаточно нарисовать картинку. Опыт показывает, что даже неплохо подготовленных абитуриентов такие задачи часто ставят в тупик — особенно нетрадиционные, не разобранные в учебнике. Я решил помочь абитуриентам и, начиная с простых и кончая достаточно нестандартными, разобрать несколько задач на построение в линзах.

Прежде чем вы начнете читать статью, возьмите в руки учебник и повторите основные определения: оптический центр, главная и побочная оптические оси, фокусное расстояние, фокальная плоскость. На рисунках 1—3 приведены три основных случая построения изображения точки предмета, лежащей вне главной оптической оси; в каждом построении используются три основных луча.

Перед тем как перейти к разбору задач, сделаем одно важное замечание. Для удобства и наглядности в рисунках к статье используются лучи, идущие под различными, в том числе большими углами к главной оптической оси. Однако надо помнить, что на самом деле речь идет только об узких приосевых пучках: именно такие лучи формируют четкое изображение.

Задача 1. *Точечный источник света находится в фокусе рассеивающей линзы. Постройте его изображение.*

В данном случае (рис. 4) все три «удобных» луча совпадают (луч SO).

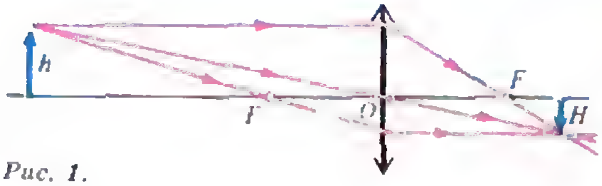


Рис. 1.

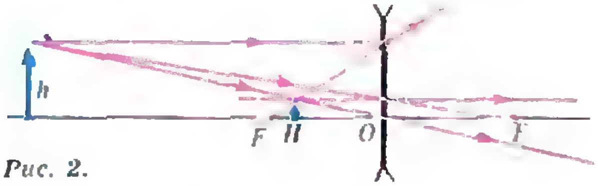


Рис. 2.

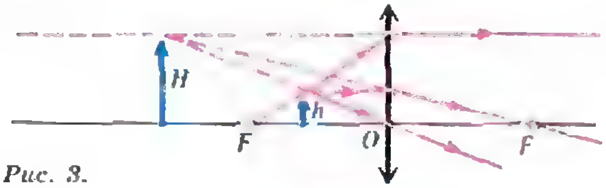


Рис. 3.

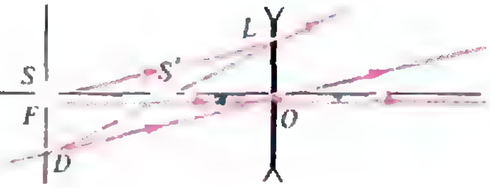


Рис. 4.

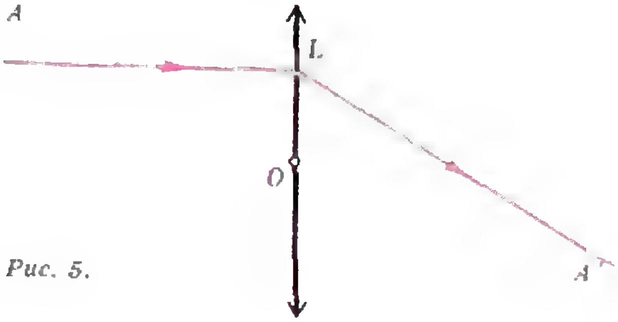


Рис. 5.

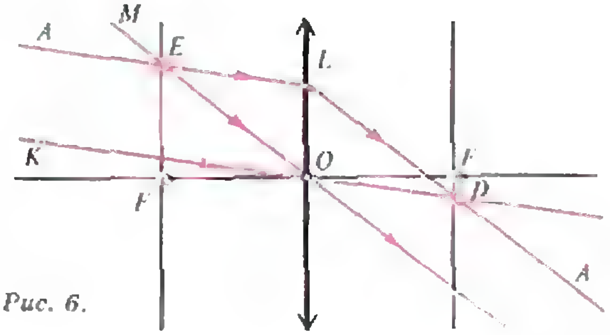


Рис. 6.

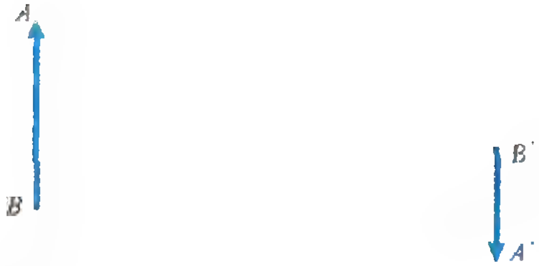


Рис. 7.

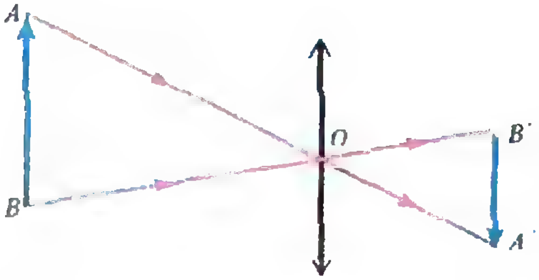


Рис. 8.

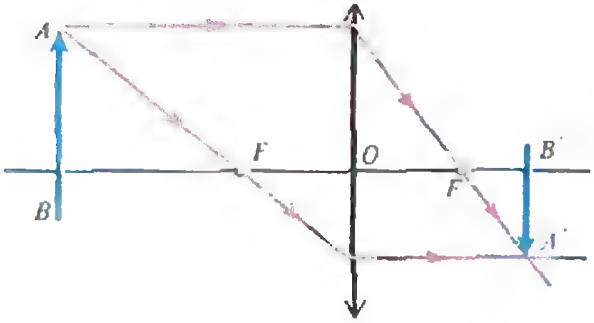


Рис. 9.

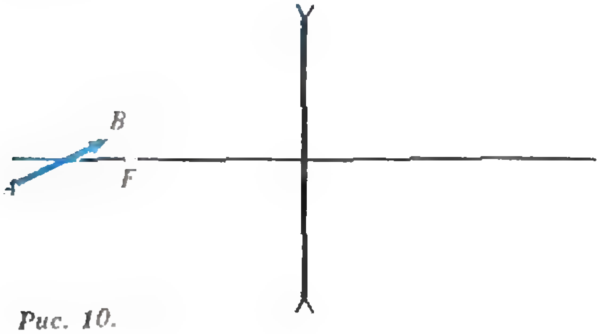


Рис. 10.

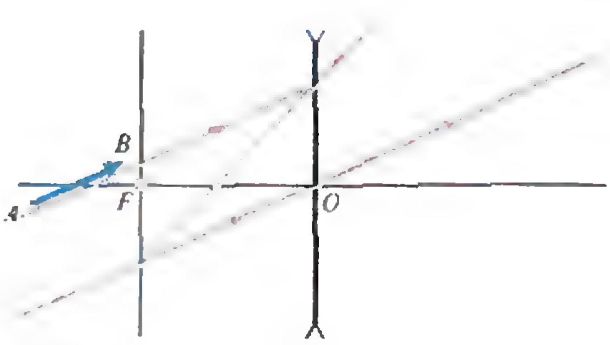


Рис. 11.

Поэтому проведем произвольный луч SL. После преломления в линзе его продолжение пройдет через ту же точку D в фокальной плоскости, что и параллельный ему луч, идущий, не преломляясь, через оптический центр линзы. (Заметим, что так как линза рассеивающая, то соответствующая плоскость находится перед линзой.) Точка пересечения продолжения преломленного луча с главной оптической осью даст искомое мнимое изображение S'. (Из равенства треугольников SLO и ODS, $S'OL$ и $S'SD$ следует, что $S'O=F/2$. Проверьте этот ответ с помощью формулы линзы.)

Задача 2. *Дан ход луча AL после преломления в тонкой линзе — луч LA'. Оптический центр линзы O (рис. 5). Построением определите положение главных фокусов линзы.*

Проведем луч KO, параллельный AL, через оптический центр линзы (рис. 6). Он пересечется с преломленным лучом в точке D задней фокальной плоскости. Восстановив фокальную плоскость, мы находим точку F — главный задний фокус. Проведем луч MO, параллельный лучу LA'. Он пройдет через ту же точку E в передней фокальной плоскости, что и луч AL. Восстанавливая фокальную плоскость, находим положение переднего фокуса.

Задача 3. *По положению предмета и его изображения (параллельные стрелки AB и $A'B'$ (рис. 7)) восстановите положение линзы и ее главных фокусов.*

Оптический центр линзы O находится на пересечении непреломляющихся лучей AA' и BB' (рис. 8). Плоскость линзы параллельна стрелкам. Главная оптическая ось перпендикулярна им. Далее, проводя через точки A и A' лучи, параллельные главной оптической оси (рис. 9), находим положение главных фокусов линзы.

Задача 4. *Постройте изображение стрелки AB в тонкой отрицательной линзе (рис. 10).*

Поскольку луч AB проходит через все «светящиеся» точки (рис. 11), соответствующий ему преломленный луч (точнее, его продолжение) будет про-

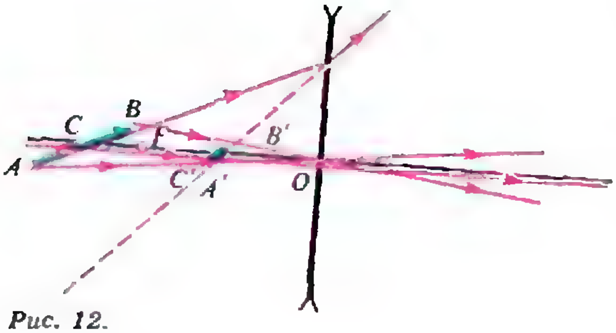


Рис. 12.

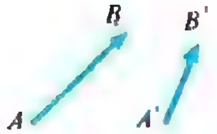


Рис. 13.

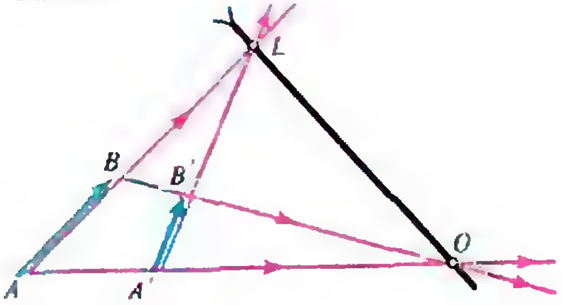


Рис. 14.

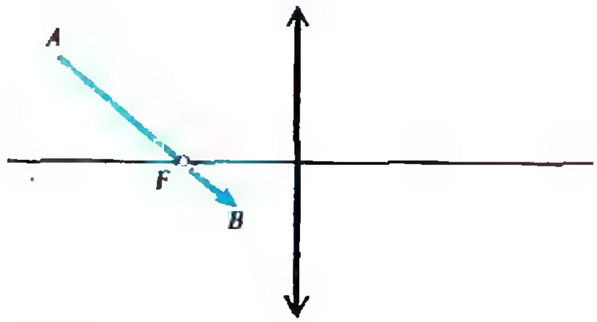


Рис. 15.

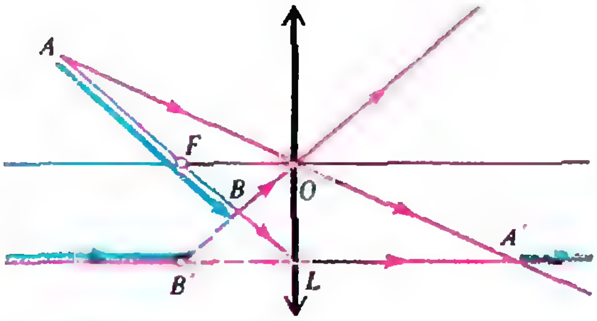


Рис. 16.

ходить через все точки изображения. Построив изображения A' и B' (используя непреломляющиеся лучи AO и BO), можно утверждать, что все точки изображения лежат между ними (рис. 12). Пример такой точки C' — изображение точки C.

Задача 5. *Восстановите положение линзы и ее главных фокусов по известным положениям предмета AB и его изображения $A'B'$ (рис. 13).*

После преломления в линзе луч AB (испускаемый всеми «светящимися» точками предмета) должен пройти через все точки изображения $A'B'$. Поэтому, очевидно, что точка L пересечения прямых AB и $A'B'$ (рис. 14) лежит на линзе. Через оптический центр линзы O проходят непреломляющиеся лучи, т. е. прямые, соединяющие «светящуюся» точку и ее изображение. Значит, оптический центр линзы находится на пересечении прямых AA' и BB'. Главная оптическая ось перпендикулярна «плоскости» тонкой линзы. Построение фокусов можно выполнить так же, как и в задаче 3. Проделайте это самостоятельно.

В данном примере линза оказалась рассеивающей. Придумайте сами такое расположение отрезков AB и $A'B'$, чтобы получилась собирающая линза.

Построение изображения предмета в собирающей линзе становится несколько более сложным, если предмет «пересекает» фокальную плоскость. В этом случае изображение предмета «разорвано»: часть изображения — действительные «светящиеся» точки за линзой, другая часть — мнимые изображения точек предмета перед линзой.

Задача 6. *Постройте изображение наклонной стрелки AB, проходящей через главный фокус собирающей линзы (рис. 15).*

Как и в предыдущих задачах, изображение стрелки лежит на прямой, содержащей луч, получающийся из луча AB после преломления в линзе (рис. 16). В данном случае эта прямая параллельна главной оптической оси линзы. Используя лучи AO и BO, найдем положения точек A' и B'.

Убедитесь сами, что отрезок AF

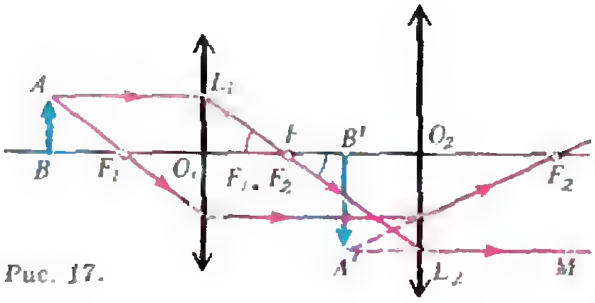


Рис. 17.

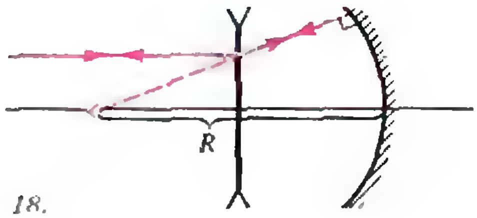


Рис. 18.

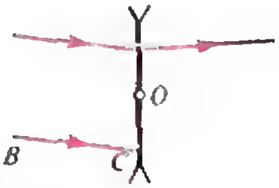


Рис. 19.

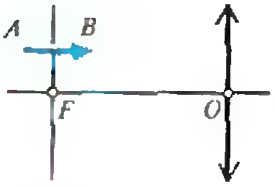


Рис. 20.

(верхняя часть AB) отображается в полупрямую, лежащую справа от A', а отрезок FB — в полупрямую, лежащую слева от B' (для этого постройте изображения каких-нибудь точек, принадлежащих этим отрезкам).

Задача 7. *Оптическая система состоит из двух собирающихся линз с общей оптической осью и фокусными расстояниями F_1 и F_2. Расстояние между линзами $l=F_1+F_2$. Определите поперечное увеличение этой системы.*

Рассмотрим увеличение стрелки AB, перпендикулярной главной оптической оси системы. Проведем из точки A луч, параллельный главной оптической оси линз. После преломления в первой линзе он пройдет через фокус первой линзы, а значит, и через фокус второй. Следовательно, после преломления во второй линзе луч пойдет опять параллельно главной оптической оси. Изображение A' точки A будет лежать на этом луче L_2M (или его продолжении; рис. 17), а точка B', очевидно, лежит на оптической оси (для построения изображения использован еще один луч — AF_1). Размер изображения $A'B'$ равен расстоянию между прямой L_2M и главной оптической осью, т. е. длине отрезка O_2L_2. Треугольники L_1O_1F и L_2O_2F подобны с коэффициентом подобия F_1/F_2. Следовательно,

$$A'B'=O_2L_2=O_1L_1\frac{F_2}{F_1}=AB\frac{F_2}{F_1},$$

т. е. увеличение равно $\Gamma=F_2/F_1$ и не зависит от положения предмета.

Задача 8. *За рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $F=11$ см расположено вогнутое зеркало. Эта система отражает лучи, параллельные главной оптической оси линзы, в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала, если расстояние между линзой и зеркалом $d=6$ см (рис. 18).*

После преломления в рассеивающей линзе луч, параллельный главной оптической оси, пойдет так, что его продолжение будет проходить через фокус линзы. После отражения от зеркала луч пойдет точно в обратном направлении и после второго преломления в линзе будет параллельным ее оптической оси, если падающий на зеркало луч перпендикулярен его поверхности, т. е. идет по радиусу зеркала. Это означает, что фокус линзы должен совпадать с центром кривизны зеркала, поэтому

$$R=F+d=17 \text{ см}.$$

Упражнения

1. Дан ход луча в тонкой рассеивающей линзе. Постройте ход луча BC (рис. 19).

2. Постройте изображение стрелки AB, пересекающей фокальную плоскость тонкой собирающей линзы (рис. 20).

3. Система из двух тонких линз, собирающей и рассеивающей, с одинаковым по модулю фокусными расстояниями F дает изображение точечного источника света. Главные оптические оси линз совпадают. Расстояние между линзами $L=3F$. Источник расположен на главной оптической оси на расстоянии $d=2F$ перед собирающей линзой. На сколько и в какую сторону сместится изображение источника, если ближайшую к источнику (собирающую) линзу сместить перпендикулярно оптической оси на $x=2$ см?

4. За положительной линзой с фокусным расстоянием $F=24$ см на расстоянии $d=4$ см расположено выпуклое сферическое зеркало. Эта система отражает лучи, параллельные главной оптической оси линзы, точно в обратном направлении. Определите радиус кривизны зеркала.

Олимпиады

XVII Всероссийская олимпиада школьников

В этом году заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике проходил в Петрозаводске, Белгороде, Уфе и Новосибирске.

Математика

Как обычно, состязания проводились в два дня, каждый день участникам предлагались 4 задачи. После формулировки каждой задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Найдите геометрическое место вершин парабол, имеющих уравнения $y=-x^2+bx+c$ и касающихся параболы $y=x^2$. (6)

2. На диаметре AB полуокружности с центром O взята точка C, отличная от A, B и O. Из точка C под равными углами к AB проведены лучи, пересекающие полуокружность в точках D и E. В точке D к лучу DC проведен перпендикуляр, вторично пересекающий полуокружность в точке K. Докажите, что если $K\neq E$, то KE и AB параллельны. (8)

3. Даны три различных положительных числа. Докажите, что их можно обозначить через a, b и c так, что будет выполняться неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}>\frac{a}{c}+\frac{c}{a}. \qquad (10)$$

4. На крайней левой клетке полоски $1\times\times100$, расчерченной на клетки 1×1, стоит фишка. Два игрока поочередно перемещают фишку, причем за один ход разрешается перемещение фишки на 1, 10 или 11 клеток вправо. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер? (12)

Второй день

5. Существуют ли два целых числа, сумма кубов которых равна 1991? (6)

6. На диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K и M, на диагонали BD — точки P и T так, что $AK=MC=\frac{1}{4}AC$, $BP=TD=\frac{1}{4}BD$. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AD и BC, проходит через середины отрезков PM и KT. (8)

7. Деревянная доска $n\times n$ поделена на клетки 1×1. Двое игроков поочередно делают пропилы лобзиком по следующим правилам: от края доски или от любого узла сетки, до которого уже сделан пропил, делается пропил единичной длины вдоль линии сетки. Проигрывает тот, после пропила которого доска распадается. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер? (10)

8. Каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ больше 1 и $|a_{k+1}-a_k|<1$ при $1\leqslant k\leqslant n-1$. Докажите, что сумма $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$ меньше $2n-1$. (12)

10 класс

Первый день

1. Найдите все натуральные числа p и q, такие, что уравнение $x^2-pqx+p+q=0$ имеет целые корни. (6)

2. Отрезки, соединяющие точку K с вершинами A и D прямоугольника $ABCD$, пересекают сторону BC. Перпендикуляры, опущенные из B и C на прямые DK и AK соответственно, пересекаются в точке M. Докажите, что если $M\neq K$, то MK и AD перпендикулярны. (8)

3. Город в форме многоугольника разделен улицами на кварталы-многоугольники. В вершинах многоугольников находятся площади. Каждая улица соединяет две площади и не проходит через другие площади. На каждой улице введено одностороннее движение так, что: а) на каждую площадь можно приехать; б) с каждой площади можно уехать; в) весь город можно объехать вдоль его границы.

Докажите, что в городе имеется квартал, который можно объехать по улицам, его ограничивающим. (10)

4. Таблица с 6 столбцами и n строками, $n\geqslant2$, заполнена нулями и единицами так, что все ее строки различны и вместе с любыми двумя строками $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_6)$ в ней содержится и строка $(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_6b_6)$. Докажите, что в каком-то ее столбце не менее половины нулей. (12)

Второй день

5. В каждой вершине куба сидит муха. Одновременно все мухи взлетают и снова садятся в каком-то порядке по одной в каждую вершину. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положениях располагаются в вершинах равных треугольников. (5)

6. Дан прямоугольник размерами 11×12. Докажите, что этот прямоугольник:

а) можно замостить неперекрывающимися прямоугольниками размерами 1×6 и 1×7, общее количество которых равно двадцати; (1)

б) нельзя замостить девятнадцатью такими прямоугольниками. (8)

7. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=12,\\ 5y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=4. \end{cases} \qquad (10)$$

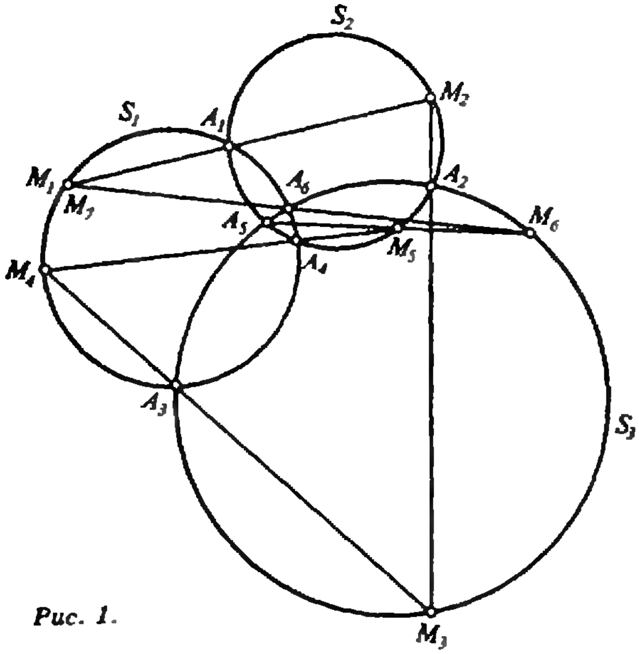


Рис. 1.

8. Делегаты съезда должны выбрать комиссию. Каждый делегат выбирает 10 человек из списка кандидатов. Назовем комиссию «хорошей» для делегата, если хотя бы один выбранный делегатом человек входит в комиссию. Оказалось, что для любых шести делегатов найдется комиссия из двух человек, которая является «хорошей». Докажите, что можно выбрать комиссию из 10 человек, «хорошую» для всех делегатов. (12)

11 класс

Первый день

1. Известно, что многочлен $2x^3-60x^2+ax$ принимает в трех последовательных целых точках три последовательные (в том же порядке) целые значения. Найдите эти значения. (6)

2. Высоты AD, BE, CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что площади четырехугольников $AEHF$ и $HECD$ равны. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (8)

3. Пусть a, b, c — положительные числа, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c). \quad (10)$$

4. Из n^3 единичных кубиков составлен куб с ребром n, n — четное число. Произвольным образом отмечены $\frac{3n^2}{2}$ единичных кубиков. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник, вершины которого лежат в центрах отмеченных кубиков и катеты которого параллельны ребрам куба. (12)

Второй день

5. Докажите, что при всех x и y справедливо неравенство

$$\cos x+\cos y+2\cos(x+y)\geqslant -\frac{9}{4}. \quad (6)$$

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_4, S_2 и S_3 — в точках A_2 и A_5, S_3 и S_1 — в точках A_3 и A_6. Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7$ такова, что каждая прямая M_kM_{k+1} содержит точку A_k, а точки M_k и M_{k+1} принадлежат окружностям, пересекающимся в этой точке, и точка M_{k+1} отлична от A_{k+1} (см., например, рис. 1). Докажите, что точки M_1 и M_7 совпадают. (9)

7. В пространстве даны три прямые a, b и c. На прямых a, b, c, a, b, c, a взяты соответственно точки T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 так, что $T_0T_1\perp b$, $T_1T_2\perp c$, $T_2T_3\perp a$, $T_3T_4\perp b$, $T_4T_5\perp c$ и $T_5T_6\perp a$. Оказалось, что точки T_0 и T_6 совпадают. Докажите, что точки T_0 и T_3 также совпадают. (9)

8. Имеется n^2+n уголков, каждый из которых составлен из двух металлических стержней длины 1, спаянных под прямым углом. Из этих уголков образована плоская квадратная решетка, состоящая из n^2 клеток 1×1. Докажите, что количество уголков, стороны которых направлены из вершины уголка вверх и вправо, равно количеству уголков, стороны которых направлены из вершины уголка вниз и влево. (12)

Публикацию подготовили
Н. Агаханов, Л. Купцов, С. Резниченко

Физика

В олимпиаде по физике приняло участие почти триста учеников 9—11 классов — победителей областных, краевых, республиканских (республик, входящих в состав Российской Федерации) олимпиад, конкурса «Кванта» и призеров предыдущей Всероссийской олимпиады.

По сложившейся традиции олимпиада включала в себя два тура. Теоретический тур прошел 26 марта. В каждом классе было предложено четыре задачи, на решение которых отводилось четыре часа*)

Теоретический тур

9 класс

1. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M при температуре $T=0$ °C и прочно прикрепили его ко дну (рис. 2). Затем залили этот лед водой такой же массы M. Вода полностью покрыла лед и достигла уровня $H=20$ см. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия уровень ее опустился на $h=0{,}4$ см. Плотность воды и льда равны соответственно $\rho_в=1000$ кг/м^3 и $\rho_л=920$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

2. Доска массой $M=120$ кг, длиной $L=5$ м и площадью поперечного сечения $S=300$ см^2

---

*) Часть задач теоретического тура публикуется в «Задачнике «Кванта».

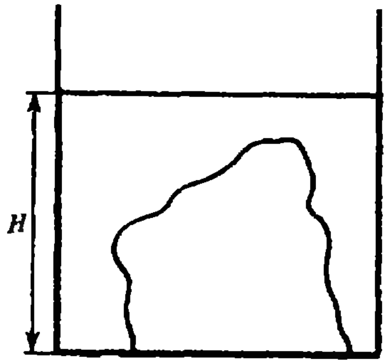


Рис. 2.

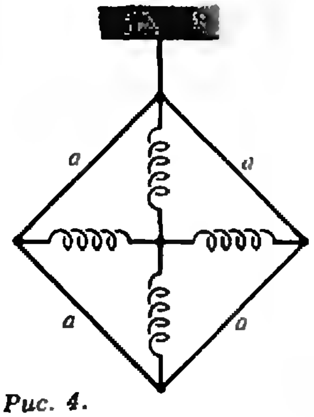


Рис. 4.

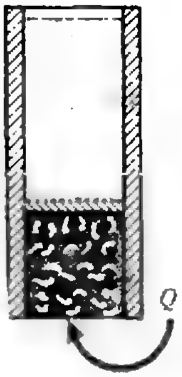


Рис. 5.

одним концом опущена в воду (рис. 3). Через другой конец проходит неподвижная горизонтальная ось *A*, вокруг которой доска может свободно вращаться в плоскости, перпендикулярной оси. На каком максимальном расстоянии от верхнего конца доски может стоять на ней человек массой $m=60$ кг, не замочив ног?

3. Машина скорой помощи, спешащая к больному с сердечным приступом, стоит у самого железнодорожного переезда, который станет свободным только через $t_0=29$ с из-за проходящего мимо поезда. Через какое минимальное время, считая от момента освобождения поездом переезда, врач может прибыть к больному? Расстояние от переезда до больного $l=330$ м, масса машины $m=1{,}8\cdot 10^3$ кг. Считать, что максимальные значения силы тяги и силы торможения у машины не зависят от скорости, численно одинаковы и равны $F=1{,}8$ кН.

4. Посередине большой круглой комнаты с высоким потолком стоит на ножках круглый стол радиусом $r=55$ см и высотой $H=1$ м. С какой минимальной скоростью надо бросить небольшой шарик с поверхности пола, чтобы он попал в центр стола, не ударяясь о стол перед этим? Какой будет ответ, если радиус комнаты станет $R=85$ см? Возможные удары шарика о стену считать упругими.

10 класс

1. Квадратная рамка, составленная из четырех одинаковых шарнирно скрепленных невесомых стержней длиной *a* каждый, подвешена за один из углов (рис. 4). К углам рамки прикреплены четыре одинаковые невесомые пружины жесткостью *k*, скрепленные друг с другом. В исходном состоянии пружины не деформированы. К нижнему углу рамки подвешивают груз массой *m*. Определите угол между стержнями в точке подвеса рамки при условии ее равновесия.

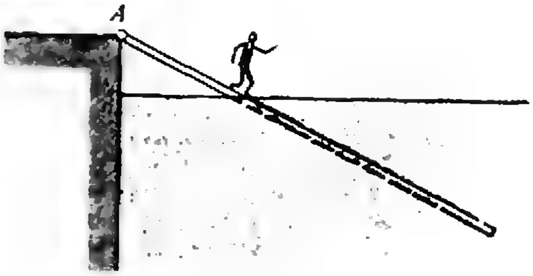


Рис. 3.

2. В вертикальном теплоизолированном цилиндре длиной 15 м и диаметром 20 см под тонким невесомым теплонепроницаемым поршнем находится 10 молей идеального одноатомного газа. На поршень до верхнего среза трубы налита вода, высота столба воды 10 м (рис. 5). Какое минимальное количество теплоты необходимо подвести к газу, чтобы поршень вытолкнул из трубы всю воду? До какой максимальной температуры в процессе вытеснения воды нагреется газ?

3. Определите сопротивление бесконечной проволочной сетки, изображенной на рисунке 6, между точками *A* и *B*, если сопротивление каждого отрезка проволоки равно *r*.

4. Человек массой 80 кг стоит в центре квадратного плота. Размеры плота 2×2×0,3 м, плотность материала, из которого он изготовлен, 900 кг/м^3. Человек начинает идти параллельно одной из его сторон. На какое расстояние от центра плота он отойдет в тот момент, когда вода начнет заливать плот?

11 класс

1. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время такого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по орбите такой же формы. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З=365{,}25$ суток, Марса — $T_М=$

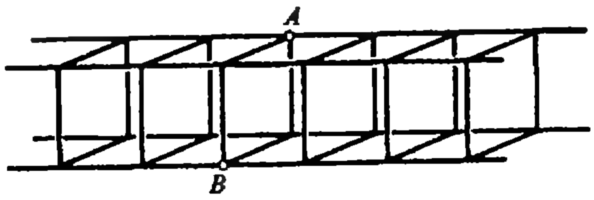


Рис. 6.

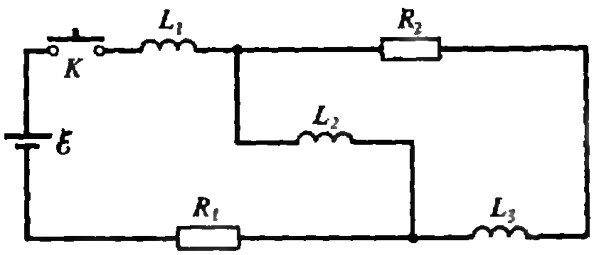


Рис. 7.

$=687$ суток. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

2. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда массой M и прочно прикрепили его ко дну. Затем залили этот лед водой такой же массы M и температуры $T_в=15\ ^\circ C$. Вода полностью покрыла лед, и ее уровень оказался на высоте $H=20$ см от дна сосуда. Определите, какова была начальная температура льда, если после установления теплового равновесия уровень воды поднялся на $b=0{,}4$ см (при этом вода по-прежнему полностью покрывает лед). Плотности воды и льда равны соответственно $\rho_в=1000$ кг/м^3 и $\rho_л=920$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг· К), льда — $c_л=2500$ Дж/(кг$\times$$\times$К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

3. Найдите, какой заряд протечет через сопротивление R_2 после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рисунке 7. Все элементы схемы считать идеальными, величины $\mathscr{E}$, R_1, R_2, L_1, L_2, L_3 — известными. (В некоторых зонах предлагалась другая задача по электричеству.)

4. Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $f=58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия объектива (диафрагмы) больше, чем $d=11$ мм, шторка затвора фотоаппарата прожигается. На какое расстояние должен быть наведен этот же объектив фотоаппарата с существенно бо́льшим диаметром диафрагмы, чтобы можно было исключить возможность прожигания шторки при направлении объектива на Солнце? Считать, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости. Видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha=9{,}3\times10^{-3}$ рад.

В тот же день, 26 марта, работы участников были зашифрованы, и жюри приступило к их проверке. По традиции, жюри в каждом городе состояло главным образом из представителей местных университетов, институтов, НИИ, школ. Вместе с ними в жюри работали и представители Центрального всероссийского оргкомитета, т. е. те, кто ежегодно составляет комплекты задач для заключительного этапа олимпиады. Надо отметить очень хорошую работу в жюри участников различных олимпиад прошлых лет, а ныне — студентов вузов. Пользуясь случаем, мы приглашаем принять в ней участие и выпускников этого года.

Работы внимательно проверялись членами жюри не менее двух раз. При этом одну и ту же задачу у всех участников проверяла одну и та же бригада жюри (как правило, 2—3 человека). Таким образом достигается максимальное единообразие критериев выставления баллов. Правильно решенная задача, независимо от способа решения, оценивалась по 10 баллов.

В ходе проверки выяснилось, что для девятиклассников сравнительно простыми оказались первые две задачи. В третьей лишь часть участников догадалась, что машине целесообразнее сначала отъехать от переезда. Правильную идею решения четвертой задачи высказало еще меньше школьников, и лишь несколько человек сумели правильно проанализировать вторую часть задачи, используя принцип зеркального отражения.

Печально, но в очень многих работах встречались арифметические ошибки. Не обошлось и без курьезов. Так, в нескольких (к сожалению неверных) решениях второй задачи «человеку идущему по доске», рекомендовалось надеть сапоги (в одном случае — галоши). А в одном из решений третьей задачи предлагалось врачу сразу же выйти из машины и, не дожидаясь открытия переезда, бегом устремиться к больному: «Мало того, что переезд почему-то закрыт перед скорой помощью и его открытия нужно ждать почти полминуты, так ведь еще и машина может заглохнуть от того, что водитель перенервничает!» В решении, правда, не указано, как врачу следует «преодолевать» движущийся поезд.

Наиболее сложным теоретический тур оказался для десятиклассников. Удивительно, но четвертую задачу полностью не решил никто, и лишь три человека получили приблизительно правильный ответ. Остальные три задачи решили от 15 до 60 процентов всех школьников.

Для одиннадцатиклассников наиболее простыми были вторая задача и половина первой. В то же время вторая, чисто кинематическая, часть первой задачи — о времени ожидания старта с Марса в обратный путь — вызвала большие затруднения. Немалые трудности вызвала и третья, по своему характеру типично олимпиадная задача. Четвертая задача, условно названная школьниками «про дырку в фокальной плоскости», по их мнению, является лучшей задачей олимпиады, хотя и ее решили немногие. А один из них даже выразил в своей работе благодарность составителям задач: «Теперь,— написал он в конце,— буду гораздо осторожнее обращаться с фотоаппаратом в солнечную погоду».

На следующий день проходил экспериментальный тур. Немало хлопот доставила его подготовка организаторам — практически везде «на местах» возникли сложности с оборудованием. Не так уж просто оказалось в наше время найти по 20—30 комплектов необходимых приборов. Но, к чести оргкомитетов, все проблемы были решены, и 27 марта школьники приступили к выполнению эксперимента. На решение двух задач им давалось четыре часа.

Экспериментальный тур

9 класс

1. В закрытом чехле находится пружина, часть витков которой перевязана нитью. Определите, какая часть витков перевязана.

Оборудование: пружина в закрытом чехле, штатив с муфтой и лапкой, набор грузов по 100 г, гиря массой 50 г, линейка.

2. Исследуйте в комнате процесс остывания воды, нагретой до 60 °C. Оцените часть количества теплоты, уносимую парами воды, по отношению к общей теплоотдаче.

Оборудование: внутренний и внешний стаканы калориметра, сосуд с водой, нагретой до 60 °C (общий на класс), листы плотной бумаги, термометр, часы.

10 класс

1. Исследуя колебания данной вам пластины с отверстиями, определите с максимально возможной точностью положение ее центра масс.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, пластина с отверстиями, просверленными вдоль прямой, проходящей через центр масс пластины, секундомер (часы с секундной стрелкой), линейка, гвоздь.

2. Исследуйте зависимость величины сопротивления данной вам лампочки от напряжения на ней. Объясните полученную зависимость.

Оборудование: источник тока, реостат, лампочка, ключ, амперметр, вольтметр, соединительные провода, миллиметровая бумага.

11 класс

1. Исследуйте зависимость критической силы, которую необходимо приложить к центру деформированной деревянной линейки (рис. 8), от ее начального прогиба. (Под критической силой следует понимать минимальную силу, при которой происходит резкое изменение формы линейки — потеря устойчивости.)

Оборудование: штатив с упором, динамометр, две линейки.

2. Определите показатель преломления выданной жидкости.

Оборудование: сосуд с жидкостью и пустой сосуд (оба непрозрачные), металлическая линейка.

Решение первой задачи для 9 класса предполагало построение графика зависимости удлинения пружины от веса подвешенных к ней грузов. Получаемый график имел два прямолинейных участка: на одном из них «работала» вся пружина, а на другом — лишь неперевязанные ее витки. По различию эффективных коэффициентов жесткости можно было найти, какая часть витков не перевязана. Увы, немногие справились с этой проблемой.

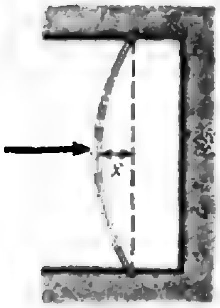


Рис. 8.

Некоторые школьники вообще засомневались в существовании нити. В частности, один из участников самокритично написал: «Если говорить честно, то я не знаю, как решать эту задачу. В школе мы этого явно не проходили. При помощи грузов и линейки можно, по-моему, измерить только жесткость пружины. Вероятно, я не прав, но мне кажется, что никакой нити нет и то, что мой прибор имеет 17-й номер, абсолютно ничего не значит». В Петрозаводске, например, проверить свои догадки участники смогли сразу же после окончания тура. Жюри предложило им «ликвидировать» ставший более ненужным чехол и убедиться в наличии нити.

Вторая задача требовала проведения двух экспериментов с охлаждением воды: в открытом калориметре и в калориметре, накрытом плотной бумагой. По соотношению скоростей остывания можно было оценить долю теплоты, уносимую парами. Задача оказалась несложной в идейном плане, но требовала немало времени и аккуратности. Были и предложения по улучшению постановки этой задачи. Например, А. Королев из Кинешмы предложил более эффективный метод устранения парообразования — покрыть воду в калориметре пленкой какого-либо жира.

Первую экспериментальную задачу для 10 класса следует признать явно неудачной. Вообще, всегда вызывают недоумение задачи, требующие определить что-либо существенно более сложными (и, главное, менее точными) методами, чем самые известные, традиционые. Именно поэтому многие участники сначала искали центр тяжести, уравновешивая пластину на каком-либо острие (например, на гвозде), точность при этом получалась не хуже 1 мм, а потом лишь проверяли этот результат экспериментами с колебаниями. Конечно, немногие прямо написали об этом. И, видимо, зря. Жюри с пониманием относилось к такому порядку проведения экспериментов, если, конечно, он был аргументирован.

Вторая задача была достаточно традиционной. Здесь важно было правильно и аккуратно провести эксперименты, грамотно объяснить полученные данные (в частности, причину нелинейности вольт-амперной характеристики).

Первая задача для 11 класса носила исследовательский характер. В техническом плане здесь важно было правильно собрать экспериментальную установку — так, чтобы свести к минимуму влияние упругости штатива и других деталей крепления линейки. При пренебрежении этим в опытах измерялись совсем не те величины. Грамотно снять зависимость и построить график (с учетом погрешностей) — вторая часть работы. Ну и третья — осмыслить результат, попытаться предложить какую-либо простую теоретическую модель системы. Вообще, разумная зависимость получалась у многих. Жюри считало правильными все решения, где правильным путем получены ха-

рактерные нелинейные зависимости. (Теоретически должна была получиться зависимость $F \sim x^3$. Экспериментально она получалась для малых x, если создать очень жесткую внешнюю конструкцию. При нежестких конструкциях преобладала зависимость $F \sim x^2$ — именно из-за упругости систем закрепления линейки — штатива, лапок и т. п.)

Вторая задача — простор для импровизаций. Существует очень много методов измерения коэффициента преломления жидкости, многие из них продемонстрировали участники. Лучшим был признан метод опускания металлической линейки в жидкость и одновременного наблюдения преломленных и отраженных лучей.

Что касается оценки экспериментальных задач в целом, то, как всегда на Российских олимпиадах, главными составляющими их оценки были правильный и обоснованный выбор метода проведения, качественное конструирование экспериментальной установки, грамотное выполнение эксперимента, проведение серии опытов для получения более достоверных результатов, правильная обработка результатов, оценка погрешностей (чем «старше» класс, тем больше это ценилось), объяснение полученных результатов.

На следующий день, после расшифровки работ, каждый участник (причем не только тот, кто хотел апеллировать) мог ознакомиться с оценкой своей работы, побеседовать непосредственно с проверявшими задачи членами жюри, а порой даже с авторами этих задач.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты и призы — как традиционные, так и специальные. За особо оригинальные решения жюри присудило особые призы: М. Кузьменко (Ухта) получил спецприз «За лингвистический анализ условий задач», С. Макаров (Усинск) — «За лучшее выполнение мысленного эксперимента», С. Таймаиов (Раменское) — «За народнохозяйственное осмысление экспериментальной задачи», а А. Королев (Кинешма) — «За открытие инвариантности физических законов относительно номера прибора».

Специальными грамотами Министерства образования Российской Федерации были награждены учителя, подготовившие призеров олимпиады. Следует также отметить школы, из которых сразу несколько учеников показали высокие результаты. Это с. ш. № 73 г. Тулы, ФТ лицей № 1 г. Саратова, с. ш. № 23 г. Владивостока, с. ш. № 25 г. Новосибирска, с. ш. № 40 г. Нижнего Новгорода, гимназия г. Смоленска.

Но, конечно, главными призами победителям стали путевки на XXV Всесоюзную олимпиаду, которая в этом году проходила в Ташкенте.

М. Гаврилов

V Иберо-американская математическая олимпиада

Иберо-американские страны — те, где население говорит по-испански или по-португальски. Олимпиада проводилась в Мадриде в сентябре 1990 года. Она проходила по регламенту международной олимпиады, а именно: на решение задач в каждый из дней давалось по

(Окончание см. на с. 65)

Алгоритмика простоты

Простые близнецы

Б. ТАРАСЕНКО

Нелегкий вопрос-то,
Но верь одному:
Все сложно и просто,
Считай, по уму!

В природе близнецами называют объекты, очень похожие друг на друга, отличающиеся едва заметным «чуть-чуть». В математике для простых чисел это «чуть-чуть» определено точно, постоянно и равно двум. Вот первые математические «двойники»: (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73), (101; 103), (107; 109) и так далее. Пара пар (3; 5), (5; 7) уникальна — она единственная из близнецов имеет общий элемент (единственность легко доказать, используя делимость на три).

Много ли простых чисел-близнецов? В первом десятке их две пары (а простых чисел — четыре), в первой сотне — восемь (при 25 простых числах). Существует гипотеза о том, что множество пар простых чисел-близнецов бесконечно. Эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута. Однако встречаются простые числа-близнецы явно реже просто простых чисел. Но насколько реже?

Чувствуете, в воздухе уже витает специфический дух козленка из известного мультфильма, который умел и хотел (с пользой для практики!) все сосчитать? Вы догадались. Мы действительно хотим дать вам в руки очередной программный инструмент: нарастающий счетный генератор простых числовых близнецов.

Тема близости или даже полной схожести в нем возникает не раз. Основная цель — поиск пар простых чисел, значит, программа должна дважды проводить проверку на простоту. В текстах песен в таких случаях экономят бумагу, приводя фрагмент один раз, а затем ссылаются на него одним словом: «припев». Например:

Было двенадцать разбойников,
Был Кудеяр-атаман,
Много разбойники пролили
Крови честных христиан.

Припев:
Господу богу помолимся,
Древнюю быль возвестим,
Нам в Соловках ее сказывал
Инок, честной Питирим.

Много богатства награбили,
Жили в дремучем лесу.
Вождь-Кудеяр из-под Киева
Вывез девицу-красу.

Припев

В программировании «припев» называется *подпрограммой*. При обращении к ней из основной программы этот «припев» исполняется, а затем управление передается обратно основной программе. Вот и мы сделали программу в виде «песни с припевом» — подпрограммой (шаги 33—55). Ее главную часть образует соответствующим образом видоизмененный наш серийный программный инструмент № 1. Возможность сделать две другие похожие части еще одной подпрограммой предоставляется читателям. Здесь могут получиться так называемые вложенные подпрограммы — «припев» к «припеву», а можно сделать одну удлиненную подпрограмму. Ожидаемый выигрыш от операции — три командных шага или более.

Еще можно выиграть шажок на командах индикации. Как — читатели знают. В остальном принципиальных новшеств нет.

Мы уже делали «сечения по сотням» после каждой степени десяти для простых. Не мудрствуя лукаво, сделаем то же самое для близнецов. Здесь после степени десяти в скобках указывается количество пар, затем

Программа № 5. Счетный нарастающий генератор прростых числовых близнецов

```
00        X→П    6   46   /+   Засылка из РгX в Рг6 стартового нечетиого числа
01        0          00   /+   Константа ноль
02        С/П        50   /+   Стоп—индикация нуля, приглашение к аводу номера
03    F   X=0        57   /+   Содержимое РгX не равно нулю?
04        02         02   /+   НЕТ, РгX=0, переход на шаг 02 (барьер против ввода нуля)
05        Ь→П    4   44   /+   ДА, введен ненулевой номер, засылка его в Рг4
06        БП         51   /+   Безусловный переход
07        10         10   /+   на шаг 10
08    К   П→X    6   Г6   /+   Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
09    К   П→X    6   Г6   /+   Добавление еще 1 к испытуемому числу
10        ПП         53   /+   Переход на подпрограмму
11        33         33   /+   по адресу 33 для проверки простоты нечетн. числа
12    F   X≠0        57   /+   Содержимое РгX не равно нулю?
13        08         08   /+   Нет, РгX=0, испытуемое число ие простое, переход на шаг 08
14        П→X    6   66   /+   Да, РгX≠0, испытуемое число простое, вызов его из Рг6 в РгX
15        X→П    a   4—   /+   Фиксация первого простого в РгA
16    К   П→X    6   Г6   /+   Добавление 1 к испытуемому числу в Рг6
17    К   П→X    6   Г6   /+   Добавление еще 1 к испытуемому числу
18        ПП         53   /+   Переход на подпрограмму
19        33         33   /+   по адресу 33 для проверки простоты числа в Рг6
20    F   X≠0        57   /+   Содержимое РгX ие равно нулю?
21        08         08   /+   Нет, РгX=0, испытуемое число не простое, переход на шаг 08
22        П→X    6   66   /+   Да, РгX=0, испытуемое число простое, вызов его из Рг6 в РгX
23        X→П    b   4L   /+   Фиксация второго простого в РгB
24        П→X    a   6—   /+   Вызов младшего близнеца из РгA в РгX
25        С/П        50   /+   Стоп—индикация младшего числа—близнеца
26        П→X    b   6L   /+   Вызов старшего близнеца из РгB в РгX
27        С/П        50   /+   Стоп—индикация старшего числа—близнеца
28        П→X    4   64   /+   Вызов в РгX содержимого счетчика порядкового номера пары
29        С/П        50   /+   Стоп—индикация порядкового номера пары близнецов
30    К   П→X    4   Г4   /+   Приращение на 1 счетчика Рг4 порядковых номеров
31        БП         51   /+   Безусловный переход
32        08         08   /+   на шаг 08
33        1          01   /+   Начало подпрограммы, константа 1
34        X→П    5   45   /+   Засылка 1 в Рг5=Д, Д — делитель
35    К   П→X    5   Г5   /+   Добавление 1 в счетчик Рг5
36    К   П→X    5   Г5   /+   Добавление еще 1 в счетчик Рг5
37        П→X    6   66   /+   Вызов в РгX текущего испытуемого числа И из Рг6
38        П→X    5   65   /+   Вызов в РгX текущего делителя Д из Рг5, И идет в РгX
39        ÷          13   /+   ЧАСТН=И/Д
40        Ь→П    9   49   /+   Засылка ЧАСТН в Рг9
41    К   П→X    9   Г9   /+   К=целая часть от ЧАСТН
42        П→X    6   66   /+   Вызов И в РгX
43        П→X    9   69   /+   Вызов К в РгX; И перемещается в РгY
44        П→X    5   65   /+   Вызов Д в РгX; РгY=К; РгZ=И
45        ×          12   /+   Д×К
46        —          11   /+   ОСТ=И—К×Д, остаток от деления
47    F   X≠0        57   /+   ОСТ≠0?
48        55         55   /+   НЕТ (т. е. ОСТ=0), выход из подпрограммы с нулем на шаг 55
49        П→X    9   69   /+   ДА (т. е. ОСТ≠0), вызов целого ЧАСТН
50        П→X    5   65   /+   Вызов Д из Рг5 в РгX
51        —     11   11   /+   РгX=ЧАСТН—Д
52    F   X<0        5C   /+   ЧАСТН—Д<0?
53        35         35   /+   НЕТ, переход на шаг 35 к новому значению Д
54        П→X    6   66   /+   ДА (множество Д исчерпано), вызов И в РгX
55        В/О        52   /+   Возврат в основную программу с нулем или простым числом
```

приводятся сами пары (для краткости у чисел, больших сотни, крайняя левая единица и все нули подряд правее нее опущены), а затем после точки с запятой — пара близнецов, выходящих за пределы ста.

10^0(8): (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73); (101; 103).

10^1(8): (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73), (1; 3), (7, 9); (137, 139).

$10^2(7)$: (1; 3), (7; 9), (37; 39), (49; 51), (79; 81), (91; 93), (97; 99); (227; 229).

$10^3(5)$: (19; 21), (31; 33), (49; 51), (61; 63), (91; 93); (151; 153).

$10^4(4)$: (7; 9), (37; 39), (67; 69), (91; 93); (139; 141).

$10^5(0)$: (151; 153).

$10^6(1)$: (37; 39); (211; 213).

$10^7(0)$: (139; 141).

$10^8(1)$: (37; 39); (167; 169).

Перейдем непосредственно к программе. Она работает на МК-61, пригодно и все программно совместимое семейство. Для ее запуска после ввода программы в ПМК необходимо вручную выполнить следующие операции.

Нажать клавишу В/О, набрать начальное нечетное целое положительное число, не меньшее 5. Затем нажать клавишу С/П. На индикаторе появится ноль. Это — приглашение к набору начального значения счетчика порядковых номеров близнецов. Можно набрать единицу. Если же вам точно известен порядковый номер стартовой пары близнецов, то в качестве начального нечетного числа набирайте меньший из близнецов, а потом, после С/П и появления нуля,— этот известный порядковый номер.

Затем нажимаете клавишу С/П, и, когда ПМК остановится, на индикаторе будет первое из чисел-близнецов. После нажатия клавиши С/П появится второе, а после следующего С/П — относительный порядковый номер этой пары близнецов. Новые нажатия клавиши С/П приведут к появлению новых пар близнецов и так далее.

(Начало см. на с. 62)

4,5 часа, каждая задача оценивалась в 10 баллов. После номера задачи в скобках указана страна, ее предложившая.

Первый день

1 (Аргентина). Пусть f — функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел, удовлетворяет двум следующим условиям:

1) если $n=2^i-1$ для $i=0,1,2,...$, то $f(n)=0$,

2) если $n\neq 2^i-1$ для $i=0,1,2,...$, то $f(n+1)=$ $=f(n)-1$.

а) Покажите, что для любого целого числа $n\geqslant 0$ существует целое число $k\geqslant 0$ такое, что $f(n)+n=2^k-1$.

б) Найдите $f(2^{1990})$.

2 (Колумбия). В треугольнике ABC точка I является центром вписанной в него окружности, а D, E и F — точки касания этой окружности со сторонами BC, CA и AB соответственно. Пусть P — другая точка пересечения прямой AD со вписанной окружностью, а M — середина отрезка EF. Покажите, что точки P, I, M и D лежат на одной окружности или прямой.

3 (Испания). Пусть $f(x)=(x+b)^2-c$ — многочлен, у которого b и c — целые. Докажите, что

а) если p — простое число, причем c делится на p, но не делится на p^2, то для всех целых n число $f(n)$ не делится на p^2,

б) если q — простое число, не равное 2, такое, что c не делится на q, а $f(n)$ делится на q при некотором целом n, тогда для любого целого числа r найдется целое число n' такое, что $f(n')$ делится на q'.

Второй день

4 (Венесуэла). Пусть AB — диаметр окружности c_1. Прямая t касается этой окружности в точке B. Пусть M — произвольная точка окружности c_1, отличная от A и B. Построим окружность c_2, касающуюся окружности c_1 в точке M и прямой t.

а) Найдите точку P касания окружности c_2 с прямой t, а также геометрическое место центров окружностей c_2, если точка M будет переменной.

б) Покажите, что существует окружность, ортогональная ко всем окружностям c_2.

5 (Мексика). Пусть A и B — противоположные вершины доски размером $n\times n$, разделенной на единичные квадраты ($n\geqslant 1$). В каждом из квадратов проведена диагональ, параллельная прямой AB, в результате чего доска разбивается на $2n^2$ равных треугольников. Фишка движется вдоль отрезков на этой доске от A до B, при прохождении стороны треугольника в него кладется зерно. Каждый отрезок проходится не более одного раза. По окончании пути оказалось, что в каждом из $2n^2$ треугольников находится ровно по 2 зерна. При каких значениях n возможна такая ситуация?

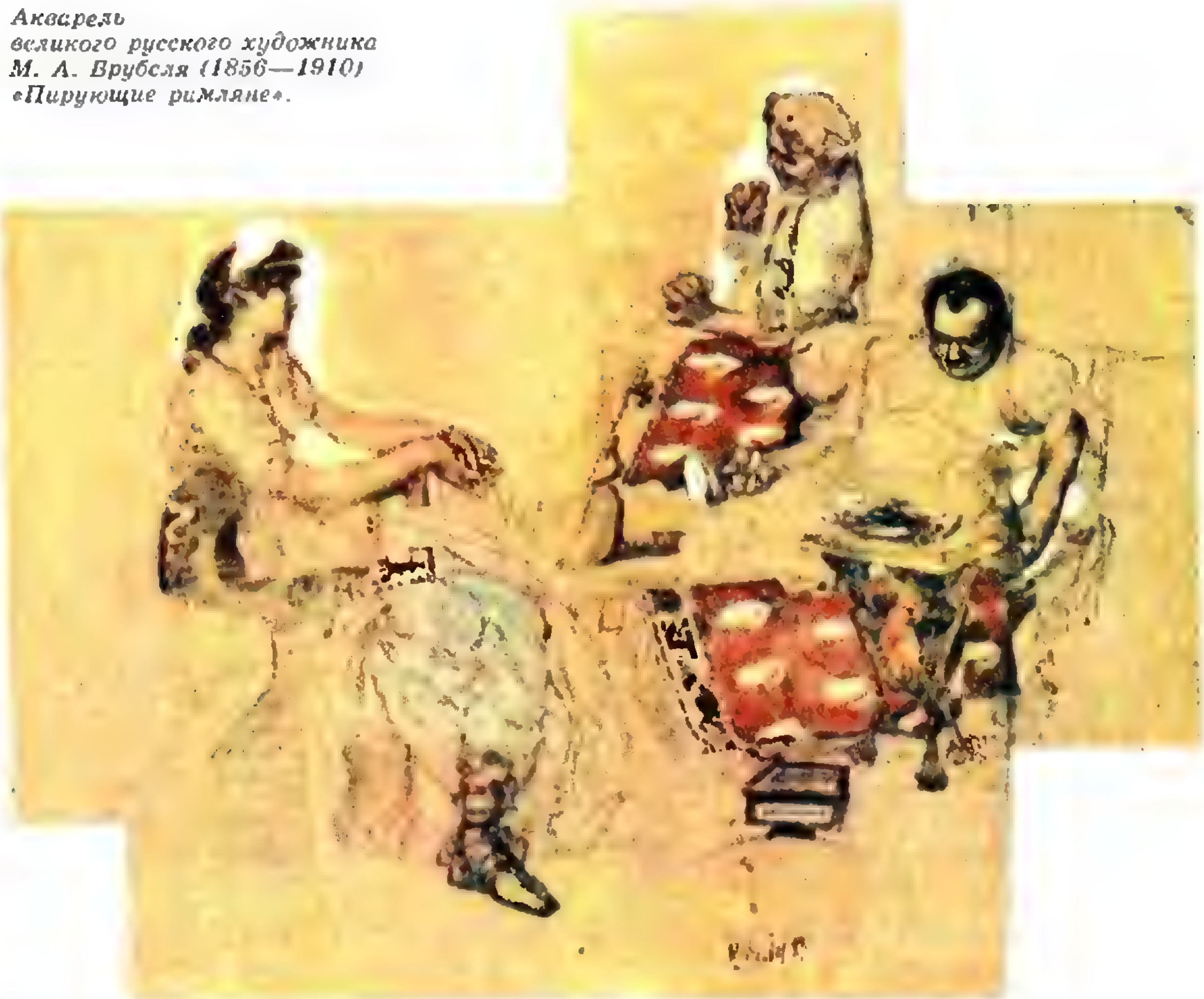
6 (Уругвай). Пусть $f(x)$ — многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами. Покажите, что если график функции $f(x)$ касается оси абсцисс, то все три корня многочлена $f(x)$ рациональны.

Публикацию подготовил А. Савин

Философская беседа — украшение обеда

В 1990 году в серии «Литературные памятники» вышла книга Плутарха «Застольные беседы». Известный всем со школьной скамьи великий историк античности был, оказывается, чрезвычайно любознательным человеком: он интересовался всем на свете. Вот темы некоторых из бесед, которые вели за пиршественным столом Плутарх и его друзья: «Почему люди старшего возраста лучше разбирают буквы издали», «Древнейшее ли из гимнастических состязаний борьба», «Горяч или холоден по своей природе вино», «Почему Гомер называет яблоню «яснотплодной», а Эмпедокл яблоки — «пышносочными», «Какой смысл вложил Платон в утверждение, что бог всегда остается геометром», «По какой причине различают три разряда мелодий»... Мы нашли в этом сочинении главы и физического, и математического содержания. Многие рассуждения восхищают своей глубиной, некоторые же — просто очень забавны: древние были жизнерадостными людьми и за обедом не занудствовали.

Акварель великого русского художника М. А. Врубеля (1856—1910) «Пирующие римляне».



По какой причине зачерпнутая в колодце вода, если оставить ее на ночь в воздухе того же колодца, становится холоднее

Участники беседы: приезжий гость и Плутарх

Среди гостей был приезжий, большой любитель холодного питья, и наши рабы приготовили для него особо охлажденную воду: подняв из колодца ведро воды, они оставили это ведро на ночь подвешенным в том же колодце так, что оно не касалось поверхности воды, и поданная к обеду вода из этого ведра была холоднее свежезачерпнутой. Приезжий был человек с филологическим образованием. Он сказал, что заимствовал это у Аристотеля, который приводит и соответствующее объяснение. Заключается оно в том, что вода, предварительно согретая, после остывания оказывается холоднее прежнего.

На этом основано приготовление воды для царей: ее нагревают до вскипания, а затем сосуд с этой водой обкладывают большим количеством снега, и вода сильно охлаждается. Так и наше тело после горячей ванны больше прохлаждается: разгоряченное, оно разрыхляется, становится многопористым и воспринимает больше внешнего воздуха, что и производит в нем резкую перемену. Так и вода, зачерпнутая в колодце, нагревшись на воздухе, быстро охлаждается.

Мы одобрили гостя, так тщательно все запомнившего, но усомнились в правильности приведенного рассуждения. Если воздух, окружающий подвешенное ведро, холоден, то как он нагревает воду? Если же он тепел, то как вода, наоборот, охлаждается? Невозможно ведь, чтобы одно и то же от одного и того же испытывало, без какой-либо происшедшей перемены, противоположные воздействия.

Так как гость молчал, не зная, что ответить, то я сказал, что относительно воздуха нельзя сомневаться: ощущение говорит, что он холоден, и более всего — в глубине колодца. Поэтому невозможно допустить, что холодный воздух согревает воду.

Скорее, этот холодный воздух не может остудить всю толщу воды в колодце, а в небольшом количестве зачерпнутой воды производит такое действие.

По какой причине в начале обеда гостям бывает тесно, а позднее — просторно

Участники беседы: дед Ламприй и другие

После этой речи*) возник вопрос, по какой причине в начале обеда гостям бывает тесно, а позднее — просторно, тогда как, принимая во внимание объем съедаемой пищи, можно было бы ожидать обратного. Тут некоторые из нас указывали как причину этого способ возлежания за столом**): во время обеда мы занимаем такое положение, чтобы каждому было удобно протягивать правую руку к столу; а закончив еду, мы поворачиваемся боком, телу придается заостренная фигура, и мы занимаем место, измеряемое, так сказать, линейно, а не по площади. Подобно тому как игральные кости, выпав стоймя, занимают меньшую площадь, чем лежа, так и каждый из нас в начале обеда наклоняется вперед лицом к столу, а потом принимает другое положение, направляясь более вверх, чем вбок. Другие говорили о том, что подстилка на ложах постепенно уминается и освобождает больше места, подобно тому как тесная обувь мало-помалу разнашивается и, раздвигая свои поры, предоставляет ноге большую свободу движений. А наш дед, подшучивая, сказал, что на каждом пиршестве присутствуют два несхожих между собой начальника и распорядителя: сначала выступает голод, которому совершенно чужды предписания тактики, а позднее Дионис***), по общему признанию лучший из всех стратегов. «И вот, подобно тому, как Эпаминонд****), когда неопытные стратеги завели фалангу в теснины, где она пришла в замешательство, принял на себя командование и восстановил воинский строй, так и бог, носящий имена Лизя и Хорея*****), восстановляет у нас веселый порядок и дружелюбие, после того как мы, движимые собачьим голодом, набросились друг перед другом на еду».

---

*) Обсуждался вопрос, надо ли приглашать на обед много гостей.

**) Как известно, греки и римляне не сидели за столом, как мы, а возлежали.

***) Бог вина.

****) Беотийский полководец, основатель Фиванского союза.

*****) Лизй — «разрешитель», «освободитель»; Хорей — «хороводный», «плясовой».

Ташкентская линейка

Пять лет назад, в разгар всеобщего увлечения «Кубиком Рубика», редакция получила письмо от читателя из Ташкента В. Христинкова с описанием новой головоломки. Автор просил назвать ее «ташкентской линейкой». К сожалению, не предлагалось конструкции такой линейки, и в редакции наши «головоломщики» также не смогли придумать ничего хорошего. Отправить материал «в корзину» было жалко, поскольку эта головоломка, на наш взгляд, интересна уже тем, что является простейшей из так называемых «пермутационных» головоломок — тех, где элементы сначала переводятся в новые положения, а потом допустимыми ходами требуется вернуть их обратно.

Так и пролежало это письмо 5 лет в столе, пока мы не получили письмо из Евпатории от М. Красиловского, который предложил нам ту же головоломку, назвав ее «кубик — МК» и дав ей неожиданную реализацию.

Итак, что же такое «ташкентская линейка», она же «кубик — МК»? Пусть у нас имеется шесть квадратиков, расположенных в одну линию. Чтобы их различать, раскрасим их в разные цвета, или, еще лучше, занумеруем (рис. 1). Разрешим теперь производить следующую операцию: выберем четверку рядом стоящих квадратиков (это можно сделать тремя способами), а потом поменяем между собой местами крайние квадратики, а также средние квадратики этой четверки, что эквивалентно повороту этой части линейки на 180° (рис. 2). Вот и все. Теперь «запутаем» линейку серией таких ходов и предложим кому-либо вернуть ее в исходное положение, совершая лишь описанные нами ходы.

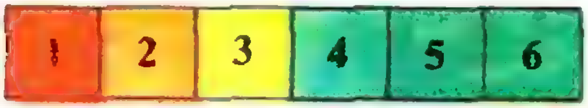


Рис. 1.

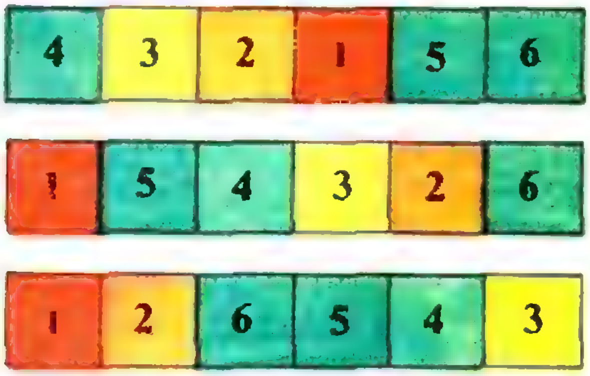


Рис. 2.

Как вы думаете, в скольких различных положениях может находиться «ташкентская линейка»? Оказывается, всего в 360 положениях, что до смешного мало по сравнению с 43252003293878272000 возможными положениями «кубика Рубика». Почему в 360? Заметим, что 6 квадратиков можно уложить в одну линию 6!=720 способами. Действительно, на первое место можно положить любой из 6 квадратиков, на второе — любой из оставшихся 5 (получаем 6 · 5=30 способов), затем любой квадратик из оставшихся четырех и т. д. Однако с помощью разрешенных операций мы сможем реализовать лишь половину возможностей. Объяснить причину этого поможет нам понятие транспозиции. Транспозицией в последовательности чисел или других элементов называется операция, в которой ровно два элемента меняются местами. Можно доказать, что если одна расстановка элементов получается из другой с помощью четного количества транспозиций, то нельзя проделать то же самое с помощью нечетного числа транспозиций, и наоборот, расстановка, полученная из другой с помощью нечетного числа транспозиций, не может быть получена из нее с помощью четного их числа.

В нашем случае каждая операция содержит ровно две транспозиции, поэтому мы можем получить только расстановки, соответствующие четному числу транспозиций, что составляет половину всех расстановок. Подумайте, почему.

А теперь подумаем об алгоритме, с помощью которого можно было бы перевести «ташкентскую линейку» в исходное положение из любого допустимого. Если вы немного поупражняетесь с линейкой, то без труда всегда сможете перевести квадратик 1 на первое место, а квадратик 2 — на второе. Посчитаем, сколько возможных позиций может получиться после

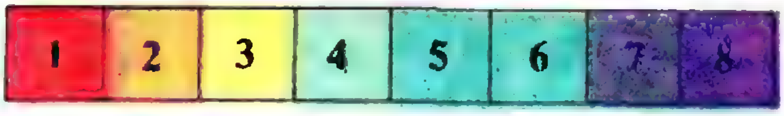


Рис. 3.

этого. На третьем месте может оказаться любой из четырех оставшихся квадратиков, на четвертом — любой из трех, итого 12 возможностей. Последние два квадратика мы можем поставить двумя способами, но полученные расстановки будут отличаться на одну транспозицию, следовательно, при одной расстановке последних двух квадратиков мы получим расстановку с четным числом транспозиций, а при другой — с нечетным. Поэтому последние два места определяются однозначно, если установлены все предыдущие. Итак, оказывается достаточным рассмотреть всего 12 расстановок. Это число мы сейчас еще уменьшим.

Выпишем эти 12 расстановок, сгруппировав их попарно:

123456	123564	123645
126543	124653	125463
124365	125346	126354
125634	126435	124536

В каждой паре расстановки отличаются всего одной операцией переворачивания последних четырех цифр. Поэтому, если мы научимся переводить в исходное положение верхнюю расстановку, то сможем сделать то же самое и с нижней. Кроме того, верхняя расстановка в первой паре — требуемая, ее уже не нужно переводить. Осталось 5 расстановок, например, верхних в оставшихся парах. Можно для них выписать процедуры перевода в исходное положение. Вот как предлагает это сделать В. Христинков:

123564	123645	124365	125346	126354
532164	632145	163425	143526	362154
534612	641235	165243	534126	364512
516432	645321	256143	536214	315462
512346	623541	253416	512634	312645
321546	621453	214356	514362	346215
345126	654123	216534	563412	345126
154326	145623	235614	562143	154326
123456	126543	234165	126543	123456
	123456	143265	123456	
		145623		
		126543		
		123456		

Итак, решение получено, но осталось еще много вопросов. Например, можно ли сократить последовательность операций, указанную В. Христинковым? Из каких позиций переход к исходной требует максимального числа операций? Чему равно это число? Сколько различных позиций может получиться за данное количество ходов? Сколько из них не может быть получено за меньшее число ходов?

Чтобы ответить на эти вопросы, конечно, хотелось бы иметь обещанную реализацию «ташкентской линейки» — «кубик — МК», придуманный М. Красиловским. Оказывается, что те, кто имеют программируемый микрокалькулятор, имеют и обещанную реализацию, поскольку требуемую перестановку цифр может осуществить на индикаторе микрокалькулятора соответствующая программа. Правда, программа М. Красиловского рассчитана на линейку не в 6 чисел, а в 8 (рис. 3), но никто не мешает, например, оставить в покое последние две цифры, а с другой стороны, любопытно решить поставленные здесь задачи и для этой более длинной линейки. Мы не приводим этой программы, содержащей 66 шагов, в надежде, что кто-нибудь предложит более экономную программу. Желаем вам успехов в этом деле. М. Красиловский предложил также еще две головоломки «кубик — МК-2» и «кубик — МК-3», в которых реализуются другие способы перестановки элементов. Попробуйте и вы создать другие типы линеек и программы их реализации на микрокалькуляторе.

В заключение хотим напомнить о головоломке «Двумерный кубик Рубика», опубликованный в № 8, 1991 г. Там ситуация очень похожа на описанную здесь — головоломка не имеет материального воплощения, а существует лишь на дисплее компьютера. В нашем случае оказалось достаточным иметь лишь микрокалькулятор.

Публикацию подготовил А. Савин

1234
1 0 1
0 1
1 2 3 4

ИНВАРИАНТНЫЙ

(фантастический рассказ)

Дж. Д. ПИРС

Вам, разумеется, в основном известно все, что касается Хомера Грина. Значит, мне нет нужды рассказывать об этом. Я и сам многое знал, но тем не менее, когда мне довелось, одевшись по-старинному, попасть в этот необыкновенный дом и повстречаться с Грином, я испытал странное чувство.

Сам дом, пожалуй, не назовешь таким уж необыкновенным — не больше, чем его изображения. Зажатый между другими зданиями XX века, он, вероятно, хорошо сохранился и не выделяется на фоне окружающих его старинных домов. Но несмотря на предварительную психологическую подготовку, когда я вошел, ступил на ковер, увидел кресла, обитые ворсистой тканью, и принадлежности для курения, услышал (и увидел) примитивный радиоприемник (хотя мне было известно, что он воспроизводит старые записи) и, наконец, самое удивительное — смог взглянуть на разожженный в камине огонь, меня охватило ощущение нереальности.

Грин сидел на своем обычном месте, в кресле, у огня. У его ног лежала собака. Я не мог забыть, что он, судя по всему,— один из ценнейших людей на Земле. Но чувство нереальности происходящего, навеянное окружающей обстановкой, владело мною по-прежнему, и сам Грин тоже казался мне нереальным. Я почувствовал острую жалость к нему.

Ощущение нереальности не исчезло и потом, когда я представился. Сколько людей побывало здесь? Конечно, это можно было бы узнать заранее, из отчетов.

— Я Кэрью, из Института,— сказал я.— Мы с вами никогда не встречались, но мне сказали, что вы будете рады меня видеть.

Грин встал и протянул мне руку. Я с готовностью пожал ее, хотя этот жест был для меня непривычен.

— Да, я рад вас видеть,— сказал Грин.— Я тут чуть-чуть вздремнул. Вся эта процедура вызывает что-то вроде легкого шока. Поэтому я и решил немного передохнуть. Надеюсь, что мой препарат будет действовать вечно. Садитесь, пожалуйста,— добавил он.

Мы расположились у камина. Собака, вставшая было при моем появлении, снова улеглась и прижалась к ногам хозяина.

— Вам, наверное, хотелось бы проверить мои реакции? — спросил Грин.

— Да нет, это не к спеху, можно и позже,— ответил я.— У вас здесь так уютно.

Отвлечь Грина было легче легкого. Он расслабился и стал смотреть в огонь.

Не буду подробно излагать содержание нашей краткой беседы. Она воспроизведена в моей диссертации «Некоторые аспекты двадцатого века». (см. приложение А) и была, как известно, весьма непродолжительной. Мне очень повезло, что я получил разрешение на встречу с Грином.

Как я уже упоминал, беседа, приведенная в приложении А, продолжалась недолго. Материалы, сохранившиеся от XX века, намного более насыщенны, чем память Грина, содержание которой давно и подробно изучено. Как известно, рождению новых мыслей способствует не сухая информация, а личный контакт, безгра-

---

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Практичное изобретение» (М: Мир, 1974).

ничное разнообразие возникающих ассоциаций и человеческая теплота, которая оказывает стимулирующее воздействие.

Итак, я был у Грина и имел в своем распоряжении целое утро. Грин, как всем известно, ест три раза в день, а в перерывах между едой к нему допускается только один посетитель. Я испытывал к нему чувство благодарности и симпатии, но все же был несколько не в своей тарелке. Мне хотелось поговорить с ним о том, что ближе всего его сердцу. Разве это не естественно? Я записал и эту часть нашей беседы, но не стал ее публиковать. В ней нет ничего нового. Возможно, она тривиальна, но для меня она значила очень много. Разумеется, это глубоко личное воспоминание. И все-таки мне кажется, что и для вас это будет небезынтересно.

— Что послужило толчком к вашему открытию? — спросил я его.

— Саламандры,— ответил он без тени сомнения,— саламандры.

Отчет о его опытах, связанных с полной регенерацией тканей, как известно, давно опубликован. Сколько тысяч раз Грин повторял свой рассказ? Но клянусь, в моей записи есть некоторые отклонения от опубликованного отчета. Все-таки число возможных комбинаций практически бесконечно! Но каким образом явление регенерации оторванных конечностей у саламандр навело его на мысль о полной регенерации частей человеческого тела? Почему бы, скажем, не добиться того, чтобы на месте зажившей раны появился не шрам, а точная копия первоначальной ткани? Как при нормальном метаболизме добиться регенерации тканей, причем без изменений, происходящих при старении организма? Как в точности восстановить первоначальную форму, и притом всегда и во всех случаях? Вам демонстрировали это на животных при прохождении обязательного курса биологии. Помните цыпленка, у которого с помощью метаболизма замещаются ткани, но они всегда остаются неизменными, инвариантными? Страшно представить, что то же самое может быть и у человека. Грин выглядел молодо, он казался моим ровесником. А ведь он родился в двадцатом веке...

Рассказав о своих опытах, включая и последнюю прививку, которую он сделал накануне вечером самому себе, Грин стал пророчествовать.

— Я уверен,— сказал он, что действие препарата будет вечным.

— Да, доктор Грин,— заверил я его,— действительно, это так.

— Не к чему торопиться,— заметил он,— прошло слишком мало времени...

— А вам известно, какое сегодня число, доктор Грин? — спросил я.

— Одиннадцатое сентября тысяча девятьсот сорок третьего года, если вам угодно,— ответил он.

— Доктор Грин, сегодня четвертое августа две тысячи сто семидесятого года,— сказал я ему серьезно.

— Бросьте шутить,— сказал Грин,— если бы так было на самом деле, я был бы одет иначе, да и на вас была бы другая одежда.

Разговор зашел в тупик. Я вынул из кармана коммуникатор и начал демонстрировать прибор, показав напоследок объемное изображение со стереозвуком. Грин наблюдал за моими манипуляциями со все возрастающим удивлением и восторгом. Сложное устройство, но человек эпохи Грина мог ожидать от будущего такого развития электронной техники. Казалось, Грин забыл о разговоре, из-за которого мне пришлось достать коммуникатор.

— Доктор Грин,— повторил я,— сейчас две тысячи сто семидесятый год. Мы в двадцать втором веке.

Он растерянно оглядел меня, но уже без недоверия. На его лице отразился ужас.

— Несчастный случай? — спросил он.— У меня выпадение памяти?

— Никакого несчастного случая не было,— сказал я.— Ваша память в полном порядке, только... Выслушайте меня. Сосредоточьтесь.

И я рассказал ему обо всем коротко, в общих чертах, так чтобы он мог поспевать за моей мыслью. Он с тревогой смотрел на меня, по-видимому, его мозг работал напряженно. Вот что я ему сказал:

— Сверх всяких ожиданий, ваш эксперимент удался. Ваши ткани получили способность восстанавливаться полностью без всяких изменений. Они стали инвариантными.

Фотографии и точнейшие измерения показывают это с полной очевидностью, хотя прошло уже много лет, прошли века. Вы точно такой же, каким были двести лет назад. За это время с вами происходили несчастные случаи. Но любые раны — и незначительные, и глубокие — залечиваются на вашем теле, не оставляя ни малейших следов. Ваши ткани инвариантны, и мозг ваш тоже инвариантен, точнее, инвариантны его клеточные структуры. Мозг можно сравнить с электрической сетью. Память — это сеть, катушки, конденсаторы, их соединения. Сознание — процесс мышления — не что иное, как распределение напряжений в этой сети и текущие в ней токи. Этот процесс сложен, но он носит временный характер. Выражаясь языком электротехники, это переходный процесс. Память же изменяет саму структуру мозговой сети, влияя на все последующие мысли, то есть на распределение токов и напряжений в сети. В вашем мозгу сеть никогда не изменяется. Она тоже инвариантна.

Иными словами, можно провести аналогию между мыслительными процессами и работой реле и переключательных устройств в вашем XX веке, сравнить память со схемой соединения отдельных элементов. В мозгу всех остальных людей схемы соединения элементов с течением времени изменяются, элементы соединяются и разъединяются, появляются новые соединения, соответствующие изменениям в памяти. В вашем же мозгу схема соединений никогда не меняется. Она инвариантна.

Другие люди могут приспосабливаться к новому окружению, узнавать, где лежат необходимые вещи, изучать расположение комнат, адаптироваться к внешней среде, но вы этого не можете, потому что ваш мозг инвариантен. Вы связаны привычками с этим домом, он остался точно таким же, как в тот день, когда вы испытали на себе свое средство. Ваш дом вот уже двести лет как держат в полном порядке, подновляют, чтобы вы могли в нем жить, не испытывая никаких неудобств. Вы здесь живете постоянно, с того самого дня, как ваш мозг стал инвариантным.

Не думайте, что вы ничем не отвечаете на заботу о вас. Вы, быть может, являете собой самую большую ценность в мире. Утром, днем и вечером — три раза в день — вас разрешают посещать тем немногим счастливцам, которые заслужили эту честь или нуждаются в вашей помощи.

Я изучаю историю. Я пришел, чтобы увидеть двадцатый век глазами интеллигентного человека этого столетия. Вы необыкновенно умный, блестящий человек. Ваш разум изучен лучше, чем любой другой. Трудно найти человека, превосходящего вас по силе мысли. Мне бы хотелось, чтобы ваш могучий мозг, соединенный с огромной наблюдательностью, помог мне в исследовании XX века. Я пришел поучиться у вашего мозга — свежего источника, не заблокированного, не измененного прошедшими годами, оставшегося точно таким же, каким он был в тысяча девятьсот сорок третьем году.

Но речь не обо мне. К вам приходят выдающиеся исследователи-психологи. Они задают вам вопросы, затем повторяют их, слегка изменив, и внимательно наблюдают за вашими реакциями. При этом каждый последующий эксперимент не искажается вашими воспоминаниями о предыдущем. Когда цепь мыслей у вас прерывается, в вашей памяти не остается никакого следа. Ваш мозг по-прежнему инвариантен. Поэтому психологи, которые в других случаях могут делать только самые общие выводы из простых опытов на многих индивидуумах, сильно отличающихся друг от друга, неодинаково подготовленных и по-разному реагирующих на раздражители, в вашем случае наблюдают изменения реакций при малейших изменениях стимулов. Кое-кто из этих ученых доводил вас до шока, но вы не в состоянии сойти с ума. Ваш мозг не может измениться. Он инвариантен.

Вы представляете такую ценность, что, кажется, без вашего инвариантного мозга человечество вообще не смогло бы прогрессировать. И все-таки мы больше никому не предложили произвести на себе такой эксперимент. На животных — пожалуйста. Взять хоть вашу собаку. Вы пошли на это сознательно, но ведь вы не представляли, каковы будут последствия. Вы оказали человечеству громадную услугу, не сознавая этого. Но мы уже не имеем права повторять такой опыт.

Голова Грина опустилась на грудь. Лицо его было озабоченным. Казалось, он искал утешения в тепле, идущем от камина. Собака, лежавшая у его ног, зашевелилась, и Грин взглянул на нее, неожиданно улыбнувшись. Я знал, что ход его мыслей был прерван. Переходные процессы затухали в мозгу. Наше свидание начисто исчезло из его памяти.

Я встал и тихонько вышел, не дожидаясь, пока он поднимет голову.

Перевод с английского В Кона

Ответы, указания, решения

Литературно-художественные задачи

1. Если второй до встречи проехал 525 верст, то первый — $525+175=700$ верст. Так как время в пути одинаково, то отношение скоростей путешественников равно отношению пройденных ими расстояний, то есть $x/y=700/525=4/3$, где x и y — скорости путешественников (верст в день). По условию $y(x+y)=525$, т. е. $y(4y/3+y)=525$, откуда $y=15$ и $x=20$.

2. Сначала ответим на вопрос: что такое «бо́льшая часть»? Из повседневной жизни известно, что это понятие означает: «больше половины, но не все». А раз так, то в коробке должны остаться и трех-, и пятирублевки. Но 20 рублей можно представить в виде суммы ненулевого количества трех- и пятирублевок единственным способом: 5 трехрублевок+1 пятирублевка.

Пусть отец Федор взял из коробки x трехрублевок и y пятирублевок (причем, как мы уже знаем, $x>5$, $y>1$). Тогда $3x+5y=50$ и $x=5(10-y)/3$. Так как $y>1$, то $x<5(10-1)/3=15$. Итак, $5<x<15$. Но из выражения для x видно, что x делится на 5. Поэтому $x=10$. Тогда $y=4$.

Ответ: отец Федор взял 10 трехрублевок и 4 пятирублевки, а оставил 5 трехрублевок и 1 пятирублевку.

3. Так как на ст. Воробьево партийцев на 12 больше, чем на ст. Грачево, то общее число служащих на ст. Воробьево (и вообще на каждой станции) не может быть менее 12. Попробуем сначала именно это наименьшее возможное значение: вдруг решение окажется единственным? Итак, пусть на каждой станции было по 12 служащих. Тогда на ст. Воробьево все 12 — партийцы, и ни комсомольцев, ни беспартийных нет. На ст. Грачево соответственно нет партийцев. По условию, на ст. Дроздово комсомольцев в 6 раз меньше, чем на остальных двух. Но так как на ст. Воробьево комсомольцев нет совсем, то отсюда следует, что на ст. Грачево комсомольцев в 6 раз больше, чем на ст. Дроздово. Поэтому число комсомольцев на ст. Грачево делится на 6, т. е. равно 6 или 12. Партийцев на ст. Грачево нет, поэтому число беспартийных там соответственно равно 6 или 0. Но последнее значение противоречит тому условию, что на ст. Грачево беспартийных на 6 больше, чем на двух остальных. Итак, на ст. Грачево 6 комсомольцев и 6 беспартийных, на ст. Дроздово комсомольцев в 6 раз меньше, т. е. 1, а беспартийных нет (поскольку на станциях Воробьево и Дроздово вместе взятых число беспартийных на 6 меньше, чем на ст. Грачево, т. е. равно 0). Остальные неизвестные определяются элементарно. Ответ удобно оформить в виде таблицы:

Станция	Партийцев	Комсомольцев	Беспартийных
Воробьево	12	0	0
Грачево	0	6	6
Дроздово	11	1	0

4. Из трех данных чисел два верных. Выбрать два из трех можно тремя способами, каждый из которых рассмотрим отдельно. Предварительно обозначим n-й член прогрессии через a_n, а знаменатель через q.

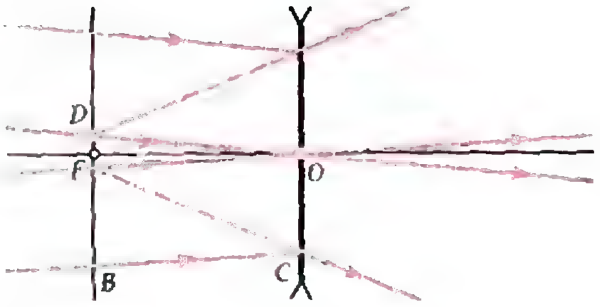


Рис. 1.

1) $a_1+a_2+a_3=28$, $q=9/2$. Так как $a_2=a_3/q$ и $a_1=a_3/q^2$, то $a_3(4/81+2/9+1)=28$, откуда $a_3=2268/103$.
2) $a_1+a_2+a_3=28$, $a_3=3q/2$. Тогда $a_2=a_3/q=3/2$ и $a_1=a_2/q=3/(2q)$. Поэтому $3/(2q)+3/2+3q/2=28$, откуда $q=(53\pm\sqrt{2773})/6$ и $a_3=3q/2=(53\pm\sqrt{2773})/4$.
3) $q=9/2$, $a_3=3q/2=27/4$.
Призовем на помощь странное условие о том, что a_3 — заплаченная сумма в рублях. Оно позволяет отсеять первые два случая, так как ни 2268/103 рублей, ни тем более $(53\pm\sqrt{2773})/4$ рублей заплатить невозможно. А вот $27/4=6$ руб. 75 коп.— вполне корректное значение. Итак, $a_3=27/4$, $q=9/2$ и $a_1=a_3q=243/8$.

5. Ясно, что число, делящееся на сумму двух других, должно быть больше каждого из них. Поэтому возможны лишь 4 принципиально различных способа выбрать делимое и два числа, дающих в сумме делитель. Рассмотрим их по порядку:
1) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{ABB}+\overline{ABB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $200A+22B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 5, то разность, равная B, тоже должна делиться на делитель, а это возможно только если $B=0$. При этом A может принимать любое ненулевое значение.
2) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{ABB}+\overline{AB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $110A+12B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 9, то разность, равная $10A+3B$, тоже должна делиться на делитель. Но $0<10A+3B<110A+12B$, поэтому деление нацело невозможно.
3) $\overline{ABBB}$ и $(\overline{AB}+\overline{AB})$, т. е. $1000A+111B$ делится на $20A+2B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 50, то разность, равная $11B$, тоже должна делиться на делитель. Во-первых, это возможно при $B=0$ (тогда A — любая ненулевая цифра). Если же $B\neq 0$, то должно выполняться равенство: $11B=k(20A+2B)$ (k — натуральное). Отсюда $(11-2k)B=20kA$. Здесь $A\neq 0$, т. к. иначе было бы $B=0$. Следовательно, т. к. A и B — натуральное, и $A/B\geqslant 1/9$, то $(11-2k)/20k\geqslant 1/9$, откуда $k\leqslant 2$. Таким образом, $k=1$ или 2. Если $k=1$, то $9B=20A$, и B делится на 20, что невозможно. Если же $k=2$, то $9B=40A$, и B делится на 40, что также невозможно.
4) $\overline{ABB}$ и $(\overline{AB}+\overline{AB})$, т. е. $100A+11B$ делится на $20A+2B$. Если из делимого вычесть делитель, умноженный на 5, то разность, равная B, тоже должна делиться на делитель, а это возможно только если $B=0$. При этом A может принимать любое ненулевое значение.
Таким образом, если одно из чисел делится на сумму двух других, то $B=0$ и $A\neq 0$, т. е. всегда $A>B$, и, значит, «дрянь» больше «дребедени».

6. Пусть возраст квартиранта равен N. В доме имеется на этажах $4\times 8=32$ окна и плюс 2 слуховых окна на крыше — всего 34 окна (не упустили ли вы эти два окна в своем решении?). Труб в доме 2, и потому год смерти бабушки равен $34\times 2\times N=68N$. Задача предлагалась в 1914 году. Ближайшее меньшее, делящееся на 68 — это $68\times 28=1904$, а предшествует ему $68\times 27=1836$. Последнее значение (и все еще меньшие) не дает возможности квартиранту лично присутствовать на похоронах. Итак, бабушка умерла в 1904 году.

Задачи на построение в тонких линзах

1. Находим построением фокальную плоскость (точка D), после чего строим ход луча BC (рис. 1).
2. См. рис. 2.
3. На 1 см в ту же сторону, что и линза.
4. $R=F-d=20$ см.

XVII Всероссийская олимпиада школьников

Математика

9 класс

1. Парабола $y=\frac{x^2}{2}$. **Указание.** Если параболы $y=x^2$ и $y=-x^2+bx+c$ касаются, то урав-

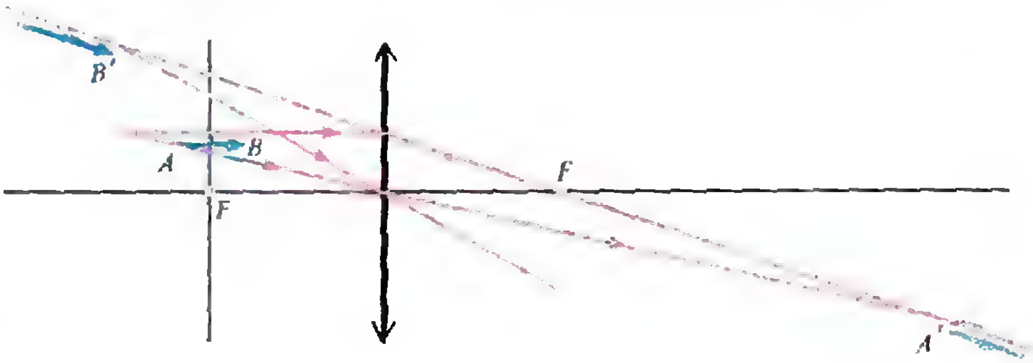


Рис. 2.

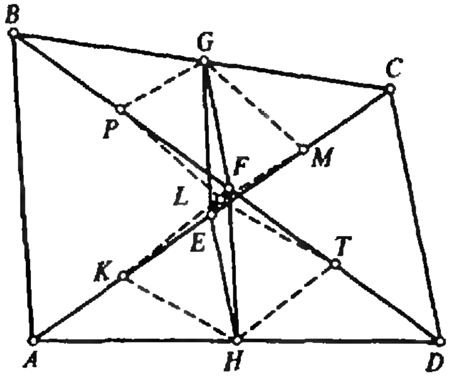


Рис. 3.

нение $x^2=-x^2+bx+c$ имеет единственный корень. Поэтому $c=-b^2/8$. а вершина параболы

$$y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$$ — это точка $(b/2,\ b^2/8)$.

2. Указание. Рассмотрите окружность с диаметром AB и на ней точку F, симметричную точке E относительно AB. Точки D, C и F лежат на одной прямой. Поэтому KF — диаметр окружности и $\angle KEF=90°$.

3. Указание. Если $b>a>c$, то утверждение задачи следует из цепочки неравенств

$$a^2c+ab^2-a^2b-bc^2>a^2c+ab^2-a^2b-abc=$$
$$=a(b-a)(b-c)>0.$$

4. Выигрывает начинающий. Указание. Пронумеруем клетки полоски числами от 1 до 100. Назовем клетку выигрышной, если игрок, делающий ход из этой клетки, выигрывает, и проигрышной в противном случае. Всякая клетка, из которой можно пойти только в выигрышную клетку, является проигрышной. Наоборот, клетка, из которой хотя бы один ход ведет в проигрышную клетку, будет выигрышной. Теперь будем рассуждать «с конца». Клетка 100 — проигрышная. Поэтому клетка 99 — выигрышная, 98 — проигрышная, 97 — выигрышная и т. д. через одну клетку до 91-й. Все клетки от 81-й до 90-й выигрышные. Аналогично, выигрышные клетки от 71-й до 80-й чередуются, подобно клеткам от 91-й до 100-й, а все клетки с номерами 61—70 — выигрышные, и так далее. В итоге получим, что 1-я клетка — выигрышная.

5. Не существует. Указание. Докажите, что сумма кубов двух целых чисел не может при делении на 7 давать в остатке 3.

6. Указание. Решение основано на следующей лемме: если точки X, Y, Z, U — середины последовательных звеньев замкнутой ломаной $A_1A_2A_3A_4A_1$, то четырехугольник $XYZU$ — параллелограмм (докажите!).

Пусть E, G, F, H — середины отрезков AC, BC, BD и AD (рис. 3). По лемме, четырехугольники $EGFH$, $PGML$ и $KLTH$ — параллелограммы. Отсюда и следует утверждение задачи.

7. При четном n выигрывает начинающий, при нечетном n — его партнер. Указание. Назовем узел, лежащий внутри доски, свободным, если ни одна из входящих в него линий сетки еще не распилена. Каждый новый пропил ликвидирует ровно один свободный узел. В начале игры имеется $(n-1)^2$ свободных узлов. Докажите, что проигрывает игрок, делающий $((n-1)^2+1)$-й ход.

8. Указание. Если $a_k\leqslant a_{k+1}$ при $1\leqslant k<n$, то $\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\leqslant 1$. При $a_k>a_{k+1}$ из условия следует, что $a_k<a_{k+1}+1$, т. е.

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}<1+\frac{1}{a_{k+1}}<2.$$

Итак, если неравенство $a_k>a_{k+1}$ выполняется при p значениях k, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leqslant p+2(n-1-p).$$

В то же время

$$\frac{a_n}{a_1}=\frac{(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1}{a_1}<1+p,$$

откуда и следует, что $S<2n-1$.

10 класс

1. $p=2,\ q=3$; $p=3,\ q=2$; $p=q=2$; $p=1,\ q=5$; $p=5,\ q=1$. Указание. Корни x_1 и x_2 данного уравнения (если они есть) положительны. По теореме Виета

$$x_1+x_2=pq,\quad x_1x_2=p+q,$$

откуда следует, что $(x_1-1)(x_2-1)+(p-1)\times\times(q-1)=2$. Осталось рассмотреть 3 возмож-

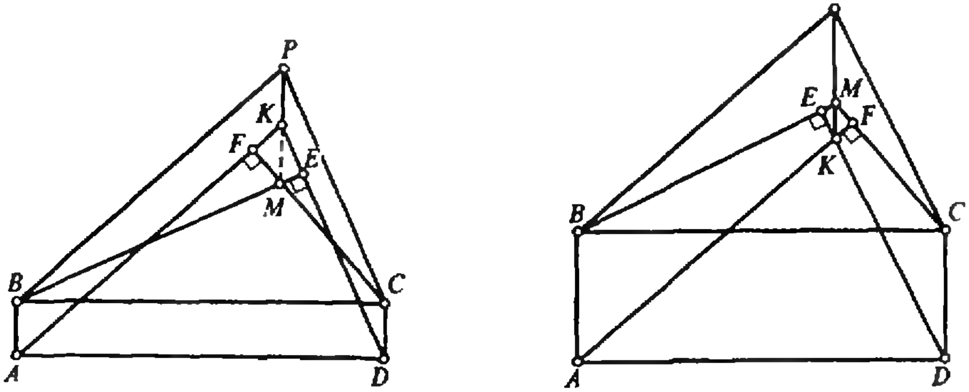


Рис. 4.

ных случая представления числа 2 в виде суммы двух целых неотрицательных слагаемых.

2. **Указание.** Пусть при параллельном переносе, переводящем точку A в точку B, а точку D — в точку C, точка K переходит в точку P. Пусть также точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C соответственно на KD и AK (рис. 4). Докажите, что M — точка пересечения высот треугольника BPC.

3. Проведем индукцию по числу кварталов n. При $n=1$ утверждение верно. Пусть оно верно для любого числа кварталов, меньшего k. Рассмотрим город, в котором k кварталов. Выберем площадь на границе города, из которой можно проехать внутрь города (если такой нет, то поменяем первоначальные направления движения на всех улицах на противоположные). Будем двигаться с этой площади по улицам, соблюдая направления движения, до тех пор, пока либо вновь не окажемся на границе города, либо не приедем на площадь, на которой уже побывали. В обоих случаях в городе выделяется район менее чем с k кварталами, который можно объехать вдоль его границы. По предположению индукции в нем найдется искомый квартал.

4. При $n=2$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $n>2$. Пусть в таблице есть строчка, содержащая ровно один нуль. Можно считать, что эта строчка имеет вид (011111). Тогда вместе с каждой строчкой $(1, a_2, \ldots, a_6)$ таблица содержит и строчку $(0, a_2, \ldots, a_6)$, т. е. в первом столбце не менее половины нулей. Предположим, что в таблице есть строчка ровно с двумя нулями — строчка (001111). Обозначим через b_{00} количество строчек таблицы, начинающихся с двух нулей. Аналогично определяются числа b_{10}, b_{01} и b_{11}. Как и в первом случае, $b_{00}\geqslant b_{11}$. Выберем из двух чисел b_{01} и b_{10} большее: пусть $b_{10}\leqslant b_{01}$. Теперь в первом столбце $b_{00}+b_{01}$ нулей и $b_{10}+b_{11}$ единиц, и $b_{00}+b_{01}\geqslant b_{10}+b_{11}$.

Пусть теперь в каждой строчке, кроме, быть может, строчки (111111), не менее трех нулей. Во всех них по три нуля быть не может. Действительно, так как $n>2$, то найдутся две различные строчки с тремя нулями, и их произведение будет содержать более трех нулей.

Вычеркнем из таблицы, если нужно, строчку (111111). Тогда в оставшейся таблице $(n-1)\times 6$ более половины клеток заняты нулями. Значит, есть столбец, в котором количество нулей больше $(n-1)/2$. Но тогда оно не меньше $n/2$, и утверждение доказано.

5. **Указание.** Пусть две мухи (назовем их A и B) сидят в концах одной диагонали куба. Если после перелета мухи A и B снова окажутся на одной диагонали, то в качестве третьей мухи C можно взять любую из остальных мух; если A и B окажутся в концах разных диагоналей, то за C можно принять муху, которая сядет на одну диагональ с мухой A.

6. а) См. рисунок 5. б) **Указание.** Каждый из прямоугольников 1×6 и 1×7 покроет не более одной из двадцати красных клеток, показанных на рисунке 6.

7. (2; 1), (2/5; —1/5).

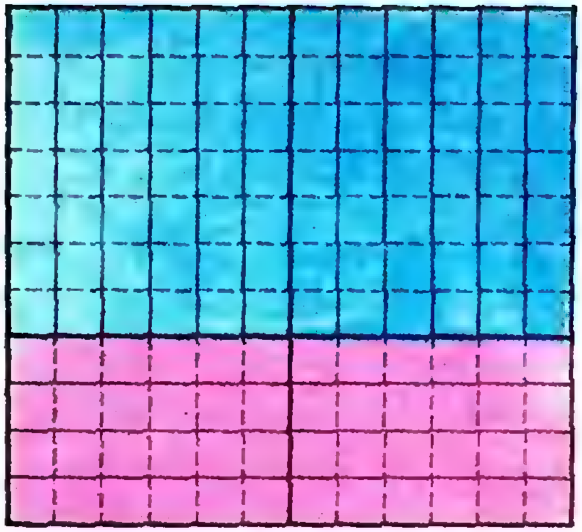


Рис. 5

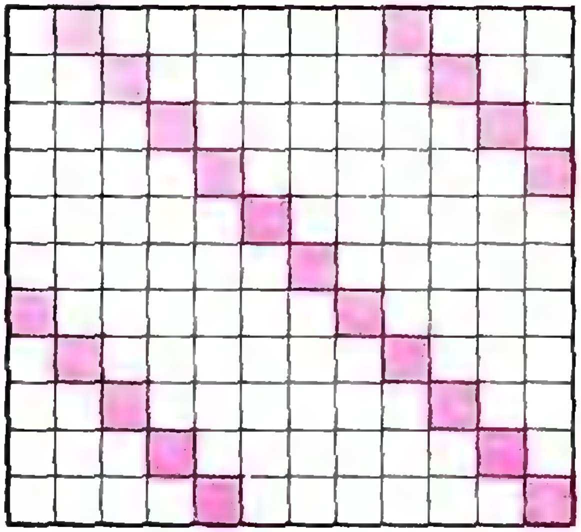


Рис. 6.

Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{12}{5x}-1,\\[2mm] \dfrac{1}{x^2+y^2}=1-\dfrac{4}{5y},\end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}=\dfrac{6}{5x}-\dfrac{2}{5y},\\[2mm] 1=\dfrac{6}{5x}+\dfrac{2}{5y}.\end{cases}$$

Перемножив ее уравнения, сможем выразить y^2 через x^2. (Это решение предложено Романом Завражновым из Тамбова.)

8. Пусть a — произвольный делегат, A — множество из 10 выбранных им кандидатов. Пусть комиссия A не является «хорошей» для всех делегатов съезда. Это значит, что найдется делегат b такой, что множество B выбранных им

кандидатов не пересекается с A. Разобьем множество A на два подмножества A_1 и A_2 по 5 человек, а множество B — на два подмножества B_1 и B_2 тоже по 5 человек.

Докажем, что одна из четырех комиссий $A_i \cup B_j$, состоящих из 10 человек каждая, является «хорошей» для всех делегатов съезда. Предположим, что это не так. Это значит, что для каждой комиссии $A_i \cup B_j$ найдется делегат c_{ij}, для которого эта комиссия не является «хорошей». Пусть D — комиссия из двух человек, «хорошая» для шести делегатов a, b, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} (такая комиссия существует согласно условию задачи). Комиссия D является «хорошей» для делегатов a и b. Поэтому в ней есть один человек из комиссии A и один человек из комиссии B. Но комиссии A и B не пересекаются. Следовательно, один член комиссии D входит в A, другой — в B. Но тогда комиссия D содержится в одной из комиссий $A_{i_0} \cup B_{j_0}$, и, следовательно, не является «хорошей» для делегата $c_{i_0 j_0}$, что противоречит выбору D. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение не имеет места, т. е. среди четырех комиссий $A_1 \cup B_1$, $A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$, $A_2 \cup B_2$ имеется комиссия, «хорошая» для всех делегатов съезда.

11 класс

1. 1989, 1990, 1991.

Пусть $n-1$, n, $n+1$ — последовательные целые значения переменной x, при которых данный многочлен принимает целые значения $m-1$, m, $m+1$ соответственно:

$$\begin{cases} 2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)=m-1, \\ 2n^3-60n^2+an=m, \\ 2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1)=m+1. \end{cases}$$

Складывая первое и третье уравнения и вычитая удвоенное второе, после очевидных преобразований получаем, что $n=10$. Подставим $n=10$ в первые два уравнения системы. Вычитая получающиеся уравнения, находим $a=559$ и затем $m=1990$.

2. Докажем, что $AB=BC$. Предположим противное: пусть, например, $AB>BC$. Тогда $AE>EC$ и $AH>HC$. Следовательно, $S_{AEH}>S_{HEC}$ и $S_{AHE}>S_{HCD}$ (треугольники AHF и HCD подобны). Поэтому

$$S_{AEHF}=S_{AEF}+S_{AHF}>S_{HEC}+S_{HCD}=S_{HECD}.$$

Противоречие.

3. Так как $a+b+c=1$, то $1+a=(1-b)+(1-c)$. Отсюда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, получаем, что $1+a \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. Аналогично, $1+b \geqslant 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$ и $1+c \geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$.

Перемножив полученные три неравенства, приходим к требуемому неравенству.

4. Проведем из центра одного из отмеченных кубиков три попарно перпендикулярные прямые, параллельные ребрам куба. Затем проведем еще три прямые из центра другого отмеченного кубика. Очевидно, что по крайней мере две прямые не совпадут с проведенными ранее. Теперь проведем аналогичные прямые из центра третьего отмеченного кубика. Либо хотя бы две из них ранее не проводились, либо получим искомый треугольник. Продолжая описанный процесс, получим в итоге либо искомый треугольник, либо проведем как минимум

$$8+2\left(\frac{8}{2}n^2-1\right)=3n^2+1$$ различных прямых,

параллельных ребрам куба. Этого не может быть, так как параллельно каждому из трех направлений можно провести только n^2 различных прямых, т. е. количество всех таких прямых равно $3n^2$. Следовательно, возможен только первый случай.

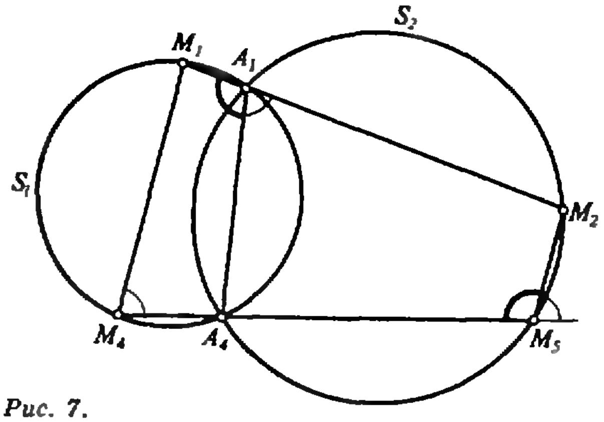


Рис. 7.

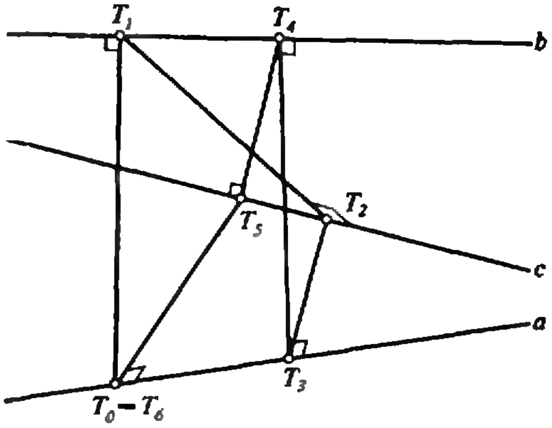


Рис. 8.

5. **Первое решение.** Пусть $t=\cos\frac{x+y}{2}$.

Тогда исходное неравенство перепишется так:

$$4t^2-2t\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}=$$
$$=\left(2t-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\cos^2\frac{x-y}{2}\right)\geqslant 0.$$

Второе решение. Для любых трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ справедливо неравенство $|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}|^2 \geqslant 0$, или

$$|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos x+$$
$$+2|\bar{b}|\,|\bar{c}|\cos y+2|\bar{c}|\,|\bar{a}|\cos(x+y)\geqslant 0,$$

где x — угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, y — угол между $\bar{b}$ и $\bar{c}$, $x+y$ (или $2\pi-x-y$) — угол между

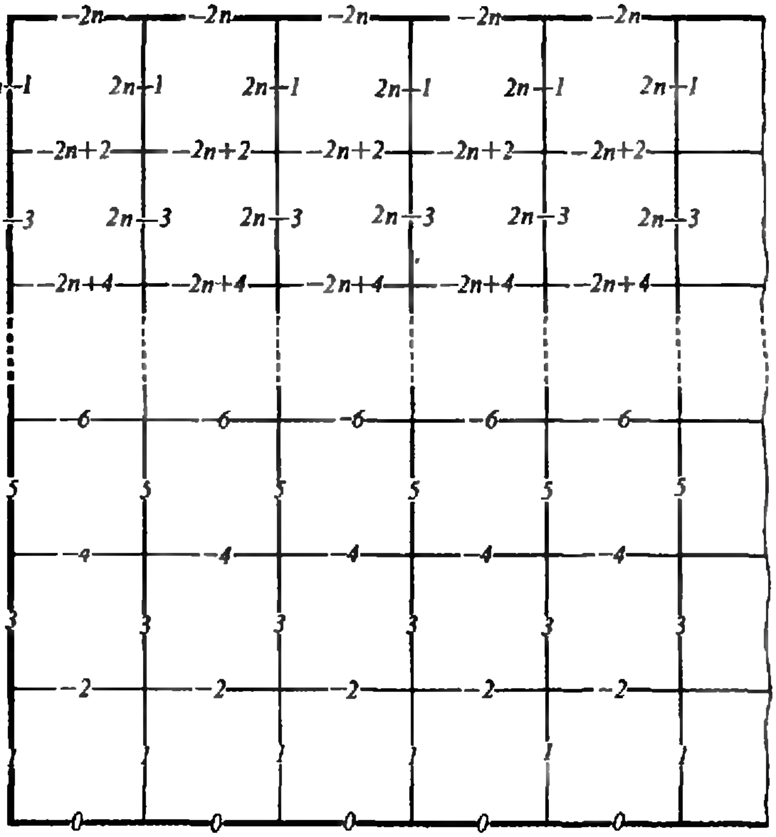


Рис. 9.

с и *а*. Взяв векторы a, b, c, образующие между собой (с точностью до периода) углы x, y, $x+y$ и такие, что $|\bar{a}|=|\bar{c}|=1$, $|\bar{b}|=\frac{1}{2}$, получим требуемое неравенство. (Это решение предложено *Евгением Цыгановым из Белорецка.*)

6. Рассмотрим окружности S_1 и S_2 (рис. 7). На этих окружностях расположены концы звеньев M_1M_2 и M_4M_5 нашей ломаной. Так как $\angle M_1M_4A_4=\angle A_4A_1M_2=180^\circ-\angle A_4M_5M_2$, то $M_1M_4 \parallel M_2M_5$. Аналогично, $M_5M_2 \parallel M_6M_3$ и, наконец, $M_6M_3 \parallel M_7M_4$, т. е. $M_1M_4 \parallel M_7M_4$ и, значит, M_1 совпадает с M_7.

7. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. Пусть P' и Q' — основания перпендикуляров, опущенных из точек P и Q на прямую l. Тогда $PQ \geqslant P'Q'$, причем равенство имеет место только в случае, когда прямые PQ и l параллельны.

Доказательство. Очевидно, что отрезки $P'P$ и $Q'Q$ лежат в плоскостях, перпендикулярных прямой l. Эти плоскости параллельны, расстояние между ними равно $P'Q'$. Следовательно, расстояние между точками P и Q не меньше $P'Q'$, причем $PQ=P'Q'$ только в случае, если отрезок $PQ \parallel l$. Лемма доказана.

Обратимся к поставленной задаче. Предположим противное: пусть точка T_3 отлична от T_0 (рис. 8). Тогда, согласно лемме, имеем: $T_3T_6 \leqslant T_2T_5 \leqslant T_1T_4 \leqslant T_3T_0$. Точки T_6 и T_0 совпадают, поэтому все неравенства обращаются в равенства. Это возможно лишь в случае, когда прямые a, b и c параллельны. В этом случае все построения осуществляются в одной плоскости, перпендикулярной этим прямым и имеющей с прямой a только одну общую точку T_0, совпадающую и с точкой T_6 и с точкой T_3.

8. Подсчет показывает, что каждое ребро решетки принадлежит ровно одному уголку. Каждому ребру решетки присвоим «вес» — целое число, указанное на рисунке 9. Под «весом» уголка будем понимать сумму «весов» ребер, образующих этот уголок. Из рисунка 9 видно, что «вес» любого уголка вида └ и ┘ равен 1, а «вес» любого уголка вида ┌ и ┐ равен —1. Сумма «весов» всех ребер решетки равна нулю. Поэтому, если число уголков вида └, ┘, Г ┌, ┐ равно x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно, то $x_1+x_2=x_3+x_4$. Повернув решетку на 90° против часовой стрелки (при этом └ → ┘, ┘ → ┐, ┐ → ┌, ┌ → └), аналогично предыдущему получаем равенство $x_2+x_4=x_1+x_3$. Сложив найденные два равенства, получаем, что $x_2=x_3$. (Это решение предложено Львом Мельниковским из Долгопрудного.)

Физика

9 класс

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1289 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.

2. $l_{\min}=1$ м.
3. Решение аналогичной задачи — см. задачу Ф1283 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.
4. $v_{\min}=\sqrt{g(r+2H)}\approx 5$ м/с; при изменении размеров комнаты ответ останется прежним.

10 класс

1. $\alpha=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\,mg/(ka)+1)$.
2. $Q_{\min}={}^5/_2(p_кV_к-p_нV_н)+{}^1/_2(p_к+p_н)\times$ $\times(V_к-V_н)\approx 71$ кДж, где $p_к$, $V_к$ — конечные, а $p_н$, $V_н$ — начальные значения давления и объема газа; $T_{\max}\approx 589$ К.
3. $R_{AB}=3^{-1/2}\,r$.
4. Решение этой задачи — см. задачу Ф1285 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.

11 класс

1. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».
2. Решение аналогичной задачи — см. задачу Ф1289 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.
3. $Q=L_1\mathscr{E}^2/(R_1R_2)$.
4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Площадь квартиры равна 16 м^2.
2. Д=6, В=3, А=1.
3. Разговор происходил в 1991 году.
4. Диме могло быть 10, 12 или 15 лет.
5. Соединим вершину A с точкой G — серединой стороны (рис. 10). Из симметрии следует, что углы EAG и EDF равны. Но углы EKC и EAG также равны, поскольку прямые FC и AG параллельны. Следовательно, угол EKC равен углу FDE.

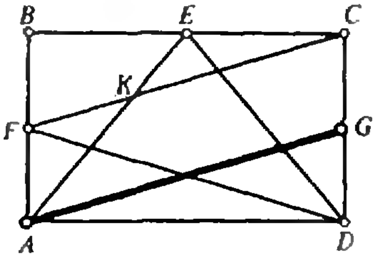


Рис. 10.

Квант

Главный редактор
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин,
Э. Назаров, Л. Тишков, Г. Шиф,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор [illegible] Потапенкова
Зав. редакцией С. Давыдова
Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.07.91. Подписано к печати 18.09.91.
Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,58.
Тираж 87 306 экз. Заказ 1208. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственной ассоциации предприятий, объединений
и организаций полиграфической промышленности
«АСПОЛ»
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ВО ВРЕМЯ МАТЧА

Матч на первенство мира между Г. Каспаровым и А. Карповым — крупнейшее событие в шахматном мире, и сильнейшие компьютеры не отказали себе в удовольствии посетить его. Они были не только зрителями, но и провели свои собственные турниры.

В Нью-Йорке, где проходила первая половина матча, состоялся 21-й чемпионат Северной Америки, мало чем отличающийся от чемпионатов мира среди суперкомпьютеров — те же «Дип сот», «Хайтек», «Мефисто» и еще шесть программ. Пять туров по швейцарской системе вывели на первые места двух корифеев — суперчемпиона «Дип сот» и микрочемпиона «Мефисто» — по 4 очка. «Дип сот» обыграл «Мефисто», тот взял верх над «Хайтек», который в свою очередь победил «Дип сот». И только одна лишняя ничья «Хайтек» внесла ясность в распределение мест. В турнире было сыграно немало интересных партий. Схватка двух будущих чемпионов состоялась во втором туре.

«Дип сот» — «Мефисто»
Дебют ферзевых пешек

1. Кf3 d5 2. e3 Кf6 3. c4 e6 4. Сe2 Кc6 5. d4 Сb4+ 6. Сd2 0—0 7. С:b4 К:b4 8. a3 Кc6 9. 0—0 Кa5 10. c5 b6 11. b4 Кc6 12. Кc3 bc 13. bc Фe7 14. Лb1 Сd7 15. Сb5 Лfb8 16. Фa4 Кd8 17. С:d7 К:d7 18. Фa5 Лc8 19. Кb5 a6 20. Кc3 Фf6 21. Лb3 Фg6 22. Лfb1 f6 23. Л1b2 h6 24. Крh1 Фd3 25. Кe2 Фd1+ 26. Кfg1 Кc6 27. Фa4 Кdb8 28. Кf4 Крf7 29. Кd3 Лh8 30. Лb1 Фd2 31. Кf3 Фa5.

Игра протекала несколько скучновато — позиционная борьба с некоторой инициативой у белых. К тому же сейчас, похоже, размениваются ферзи, и вместе с ними и шансы сторон на перевес. Однако «Дип сот» проводит мощный тактический удар, сразу меняющий обстановку на доске. Комбинация столь эффектна, что попала в число лучших в 50-м, юбилейном выпуске «Шахматного информатора», самого популярного издания среди квалифицированных шахматистов.

32. Кde5+!! fe. Черные, может быть, и не хотят принимать жертву коня, но у них нет выбора. **33. К:e5+ Крf6.** Единственный ход: в случае 33...Крe7 решает 34. К:c6+, а если король отступает на крайнюю горизонталь, то после размена ферзей теряется конь b8.

34. Ф:a5 К:a5 35. Л:b8! Лh:b8 36. Л:b8 Л:b8 37. Кd7+ Крe7 38. К:b8 Кc4. Вторую пешку белым выиграть не удается, однако и одной вполне достаточно для победы — слишком велика разница в силе коней.

39. К:a6 Крd8 40. a4 Кb2 41. Крg1 К:a4 42. Крf1 Крd7 43. f3 Кc3 44. Кb8+ Крc8 45. Кc6 Крd7 46. Кe5+ Крe7 47. Крe1 g5 48. Крd2 Кb5 49. Крc2 Крf6 50. Крb3 Кa7 51. Крb4 h5 52. Крa5 Кc8 53. g4 hg 54. fg Кe7 55. Крa6 Кg8 56. Крb7 Крe7 57. Кр:c7 Кf6 58. c6 Кe8+ 59. Крc8 Крd6 60. Крb7. Черные сдались.

А теперь посмотрите, как переиграл «Дип сот» ветерана компьютерных шахмат, третью чемпионку мира программу «Белл».

«Белл» — «Дип сот»
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 d5 3. ed Ф:d5 4. Кf3 Кc6 5. d4 Сg4 6. Сe2 cd 7. cd e6 8. Кc3 Фa5 9. 0—0 Кf6 10. h3 Сh5 11. a3 Сe7 12. Сe3 Лd8 13. Сb5. Слабый ход, в духе позиции было 13. b4 Фc7 14. Фb3 с инициативой у белых. Вместо этого они теряют несколько темпов, чтобы... отдать своего хорошего слона.

13...0—0 14. С:c6 bc 15. g4 Сg6 16. Кe5 Фa6 17. f3 c5 18. Фe2. У белых ослаблен и королевский фланг, и центр, но в случае размена ферзей на e2 они могут рассчитывать на уравнение. Однако чемпион мира делает мастерский ход, разменивая ферзей в более выгодной для себя ситуации.

18...Сd3! 19. Ф:d3 Ф:d3 20. К:d3 cd 21. С:d4 Л:d4 22. Лfd1 Лfd8 23. Кf2 Сc5 24. Крf1 Лd2 25. Л:d2 Л:d2 26. Кce4 К:e4 27. К:e4 Лh2 28. Лd1 Сb6 29. Лd2 Л:h3 30. Крg2 Лh4. Черные выиграли пешку, осталось только освободить ладью.

31. Лd7 f5! 32. Кg5 fg 33. К:e6 gf+ 34. Кр:f3 g6 35. Лg7+ Крh8 36. Лe7 h5 37. Кf4 Лg4, и черные легко реализовали свой перевес в эндшпиле.

В Лионе, где игралась вторая половина матча, заодно был проведен юбилейный, 10-й по счету чемпионат мира среди микрокомпьютеров. Двенадцать роботов выясняли свои отношения в семи турах по швейцарской системе. «Мефисто» сделал всего одну ничью и, набрав 6,5 очков из семи, без труда завоевал — уже в седьмой раз подряд! — чемпионский титул. Вот быстрый разгром, учиненный «Мефисто» сопернику в последнем туре.

«Мефисто» — «Чесс симулятор»
Каталонское начало

1. d4 Кf6 2. c4 e6 3. g3 d5 4. Сg2 dc 5. Фa4+ Кbd7 6. Ф:c4 a6 7. Кf3 b5 8. Фc6 Лa7 9. 0—0. Черные сыграли здесь 9...Сc5, рассчитывая забрать неприятельского ферзя. Однако многократный чемпион мира считает лучше своего неискушенного партнера. **10. dc! Сb7 11. Ф:b7 Л:b7 12. c6 Лb6 13. cd+ Ф:d7.** Три фигуры за ферзя — слишком много в такой ситуации. **14. Сe3 Лb8 15. Кe5 Фd6 16. Сf4 Фc5 17. Лc1 Фd4 18. Кc3 Лb6 19. Кc6 Фd7 20. Лd1 Фc8 21. Сe3 Кd7 22. С:b6 cb 23. Кe4 Фc7 24. Кd6+ Крf8 25. Лac1 Кc5 26. Кe5 f6 27. Кef7 Лg8 28. b4.** Черные сдались.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

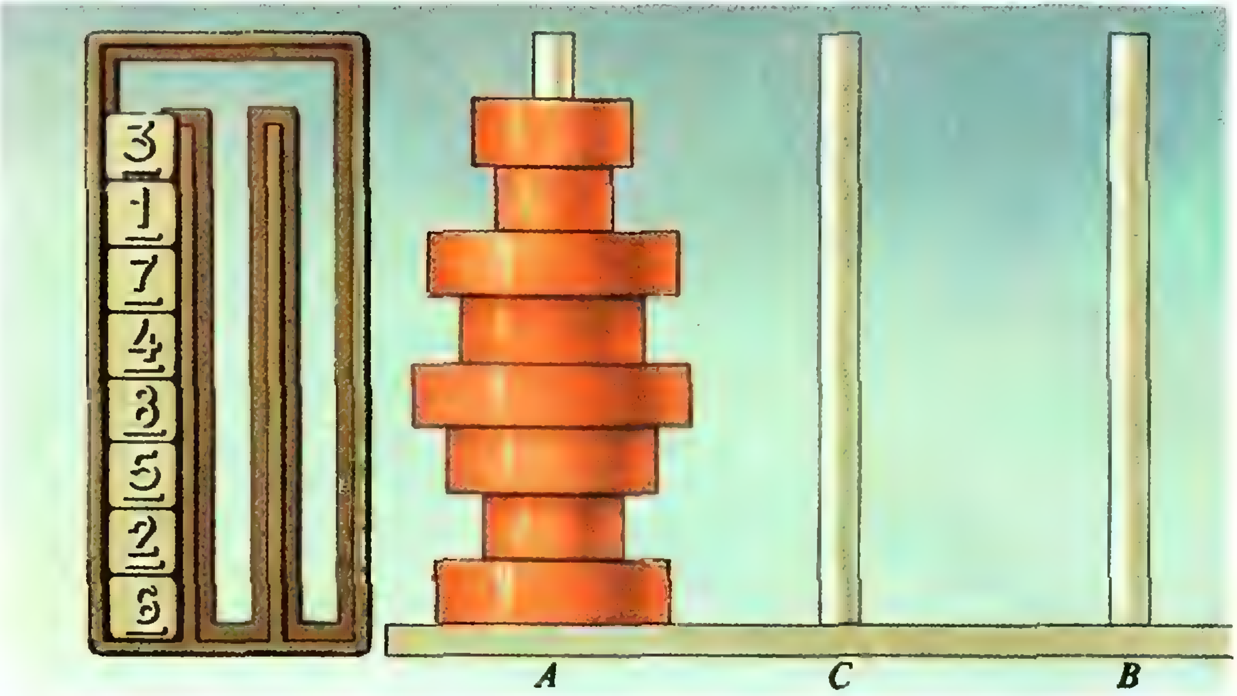
Многим читателям журнала хорошо известна головоломка «Ханойская башня», состоящая из обычной детской пирамидки и еще двух стержней. Разрешается перекладывать диски пирамидки с одного стержня на другой, соблюдая следующее правило: можно класть лишь меньший диск на больший. Требуется переложить все диски с первого стержня на третий, при условии, что они лежали в порядке убывания размера. Известно, что такое перекладывание можно сделать за 2^n-1 ходов, где n — количество дисков на первом стержне.

Сейчас в продаже имеется вариант этой головоломки, в котором стержни заменены прорезями, диски — квадратиками, а размер диска указывает цифра на квадратике.

Наш читатель В. Пинаев предложил немного изменить правила: пусть первоначально диски находятся на первом стержне не в порядке убывания, а в некотором произвольном порядке. Возможно ли в этом случае собрать диски на третьем стержне по правилам перекладывания? На рисунке дан один из вариантов размещения дисков на первом стержне в начальном положении.

Об этой и других разновидностях «Ханойской башни» читайте в одном из следующих номеров журнала.

А. П.



НОМЕР
11

Квант

11 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Панов.* Движение по поверхности и удар
10 *В. Сурдин, С. Ламзин.* Формула рождения звезд

Задачник «Кванта»

18 Задачи М1311—М1315, Ф1318—Ф1322
20 Решения задач М1286—М1290, Ф1298—Ф1302

«Квант» для младших школьников

27 Задачи
28 *Л. Крыжановский.* Загадка лейденской банки
30 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»
Физика 9—11:

31 Пока вода испаряется...
33 Как излучать радиоволны?
36 Избранные школьные задачи по физике

Математический кружок

38 *В. Залгаллер.* Индикатриса ширин и ее применение

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Практикум абитуриента

44 *П. Горнштейн, В. Полонский, М. Якир.* Необходимые условия и задачи с параметрами

Информатика и программирование

50 *Б. Тарасенко.* Алгоритмика простоты. В сто раз быстрее

Игры и головоломки

52 Ханойская башня

Олимпиады

55 XXV Всесоюзная олимпиада по математике
59 XXV Всесоюзная олимпиада по физике
65 IV Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

Информация

17 Заочная аэрокосмическая школа
68 Заочная биолого-математическая олимпиада
70 Конференция в Обнинске

71 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут *(30)*

Наша обложка

1 *Эмиссионная туманность Мессье 16, в которой газ разогрет новорожденными звездами. Если вас интересует формула рождения звезд, читайте статью на с. 10.*
2 *«Когда пробьет час» — так мы перевели название этой картины Р. Магритта ("Wenn Die Stunde Schlägt"). Когда пробьет час и на мир обрушится неведомый удар судьбы — будет он упругим или неупругим?.. Математическая сторона этого вопроса отражена в статье А. Панова (см. с. 2).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «куб Дениса».*

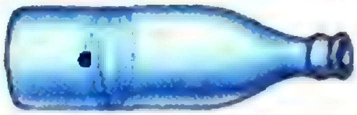
© «Квант», 1991

ДВИЖЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ И УДАР

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

Теория движения по поверхности и теория удара — два прекрасно дополняющих друг друга раздела механики. Изучением движения по поверхностям занимались такие гиганты как Эйлер, Лагранж, Гамильтон, Якоби. Выработанные ими представления составляют основу современной механики, математики и физики. Эксперименты по соударению шаров проводили Гюйгенс и Ньютон. Именно эти эксперименты позволили Гюйгенсу сформулировать закон сохранения количества движения*).

Здесь мы обсудим ряд конкретных экспериментов. Вот первый из них, который послужит образцом для всего остального. Внутрь стеклянной бутылки поместите небольшой стальной шарик и, встряхнув ее, заставьте шарик двигаться по внутренней поверхности бутылки. К сожалению, в этом эксперименте трудно внимательно проследить за движением шарика, поскольку оно быстро прекращается. Силы трения замедляют движение шарика, и сила тяжести на верхнем участке траектории отрывает медленно движущийся шарик от поверхности сосуда. Давайте поставим чистый эксперимент, считая, что мы находимся в условиях невесомости и рассматривая



Движение по абсолютно гладкой поверхности

Абсолютно гладкая поверхность — это такая поверхность, что при движении по ней на тело не действуют силы трения. Возьмем маленький шарик и толчком запустим его вдоль поверхности. Абсолютная гладкость означает, что абсолютная величина скорости шарика постоянна и что отсутствует боковой снос шарика вдоль поверхности, т. е. вектор ускорения направлен перпендикулярно поверхности. Дадим следующее определение:

кривая на поверхности называется геодезической, если вектор ускорения точки, равномерно движущейся вдоль этой кривой, всегда направлен перпендикулярно поверхности.

Таким образом, маленький шарик, движущийся вдоль абсолютно гладкой поверхности, движется по геодезической. Значит, изучение движения шарика сводится к изучению геодезических на этой поверхности.

Задача 1. *Докажите, что на сфере окружности наибольшего радиуса являются геодезическими.*

Указание. Пусть шарик движется в некотором направлении. Проведем окружность достаточно большого радиуса, касающуюся этого направления. Как вы думаете, когда шарик будет сворачивать с этой окружности, куда он повернет?

Геодезические относятся к числу важнейших понятий механики, математики и физики. Более того, геодезические и связанные с ними понятия составляют общую часть фундамента, на котором покоятся эти три науки.

Опишем еще одно характеристическое свойство геодезических. На поверхности зафиксируем две точки M и N. Их можно соединить различными кривыми, лежащими на поверхности. Среди этих кривых имеется кратчайшая. Оказывается, что эта кратчайшая является геодезической.

---

*) Об этом можно прочитать в статье В. Козлова «Соударение тел» («Квант» № 9 за 1988 год, с. 30).

Таким образом, геодезические можно описать как кратчайшие линии на поверхности, или более точно

кривая, лежащая на поверхности, будет геодезической, если ее любая достаточно малая дуга AB является кратчайшей, соединяющей точки A и B.

К сожалению, движение реального шарика внутри реальной бутылки идет отнюдь не вдоль геодезической. Рассмотрим два простых подхода, которые позволяют получить ясное представление о ходе геодезических.

Геодезические на поверхности вращения. Теорема Клеро

Большинство из тех поверхностей, по которым мы можем заставить двигаться шарик,— поверхность бутылки, банки, графина и так далее — все это поверхности вращения. У них есть ось вращения, при повороте вокруг которой на любой угол они совмещаются сами с собой. Как раз о геодезических на таких поверхностях идет речь в следующей теореме.

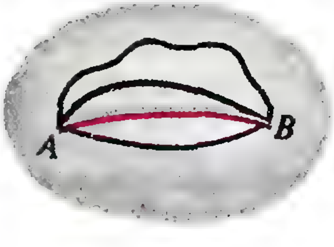
Теорема Клеро. *Рассмотрим геодезическую на поверхности вращения. Пусть точка A пробегает эту геодезическую и r — расстояние от точки A до оси вращения поверхности, а α — угол между геодезической и меридианом в точке A. Тогда величина $r \sin \alpha$ постоянна вдоль геодезической:*

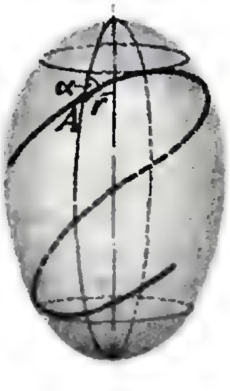
$$r \sin \alpha = c.$$

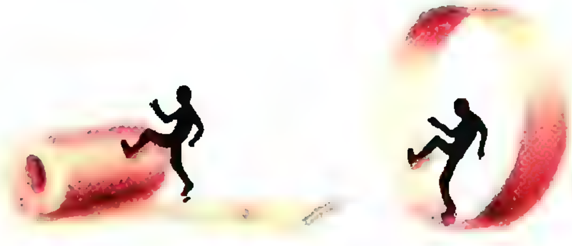
А вот что можно извлечь из этой теоремы. Пусть точка A движется вдоль геодезической в сторону убывания r. Тогда из соотношения $r \sin \alpha = c$ следует, что при уменьшении r синус угла α увеличивается. В момент, когда геодезическая касается параллели, т. е. $\alpha = \pi/2$, из теоремы Клеро получаем, что r достигает минимально возможного значения, равного c. После касания геодезическая отражается от параллели, r начинает возрастать до максимального, а потом опять убывает до того же самого минимального значения c. Таким образом, точка на геодезической движется в кольце между параллелями одного радиуса, попеременно касаясь их. Это описание дает ясное представление о ходе геодезических и, тем самым, о движении маленького шарика вдоль абсолютно гладкой поверхности вращения.

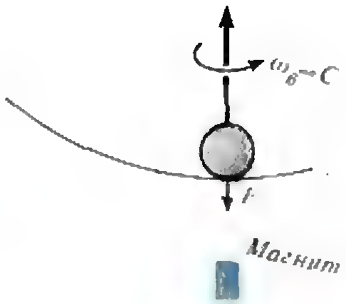
Машина для движения по геодезическим

Второй подход к изучению геодезических носит экспериментальный характер. Он применим не только к поверхностям вращения, но и вообще к любым поверхностям. Возьмите моток клейкой ленты, лейкопластыря или изоляции. Главное, чтобы лента была узкой и нерастягивающейся. Разверните эту ленту вдоль исследуемой поверхности, начиная с некоторой точки и в некотором направлении. Следите за тем, чтобы лента укладывалась на поверхность без морщин. Если лента достаточно узкая, то это возможно. Тогда лента ляжет вдоль геодезической. Таким образом, вооружившись мотком клейкой ленты, вы можете исследовать поведение геодезических на любых поверхностях. И это на самом деле увлекательное занятие. Ре-









комендуем проделать как можно больше таких экспериментов. Кстати, при помощи клейкой ленты вы можете проверить справедливость теоремы Клеро для поверхностей вращения.

Задача 2. *Изучите поведение геодезических на цилиндре.*

Указание. На цилиндр можно наложить не только полоску, но целиком плоскость. На листе кальки нарисуйте прямую и наверните этот лист на цилиндр.

Задача 3. *Изучите поведение геодезических на конусе.*

Указание. На том же самом листе кальки сделайте разрез и наверните лист на конус.

Давайте теперь отвлечемся на минуту и представим, что мы высадились на поверхность неизвестного планетоида. Наша задача — исследовать этот планетоид. В целях экономии времени мы хотим двигаться по кратчайшим путям, т. е. по геодезическим. В общем-то, мы уже знаем, как это можно сделать. Нужно взять с собой рулон линолеума и использовать его как показано на рисунке. Но можно предложить и более экономный вариант машины для движения по геодезическим. Это полый цилиндр, внутри которого находится движущийся человек. Если материал, из которого изготовлен цилиндр, обеспечивает хороший контакт с грунтом планетоида, то движение идет строго по геодезической.

Движение по абсолютно шероховатой поверхности

При движении вдоль абсолютно гладкой поверхности кинетическая энергия тела сохраняется, так как на него не действуют никакие силы трения. Здесь будет описан еще один классический тип движения, которое тоже идет без потери энергии.

Поверхность называется абсолютно шероховатой, если, во-первых, скорость точки контакта шарика с поверхностью в каждый момент времени равна нулю и сопротивление качению отсутствует. Во-вторых, сопротивление верчению тоже равно нулю. Первое требование означает, что шарик катится по поверхности без проскальзывания и без торможения. Чтобы разобраться со вторым условием, положим шарик на поверхность и закрутим его вокруг оси, перпендикулярной поверхности, с угловой скоростью ω_b. Тогда шарик так и будет все время вращаться с этой скоростью, какова бы ни была сила F, прижимающая его к поверхности. Величина ω_b называется угловой скоростью верчения.

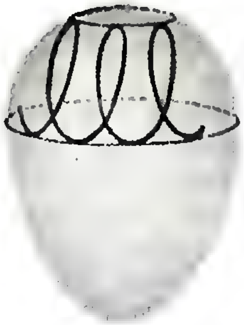
Для начала сравним движение шарика по абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой сферам. Мы уже знаем, что в случае абсолютной гладкости шарик движется по геодезическим, т. е. по окружностям максимального радиуса на сфере.

Задача 4. *Пусть сфера абсолютно шероховатая и пусть в начальный момент времени скорость верчения шарика ω_b равна нулю. Докажите, что и в этом случае движение тоже идет по окружности большого круга.*

Указание. Смотрите указание к задаче 1.

Если $\omega_b \neq 0$, то движение тоже пойдет по окружности, только по окружности меньшего радиуса.

Вообще же, при движении по любой абсолютно шероховатой поверхности вращения шарик все время будет оставаться в полосе между двумя

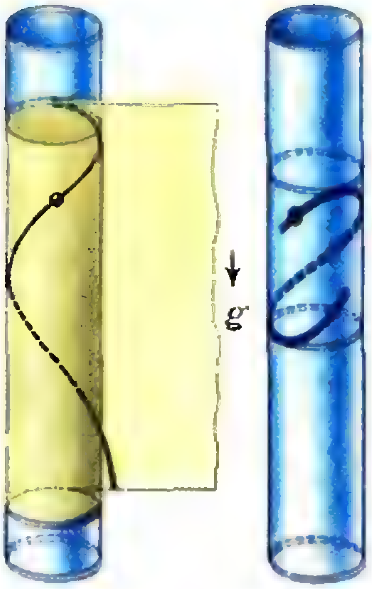


параллелями и будет попеременно касаться их. Это движение похоже на движение по геодезическим, но есть два существенных отличия. Во-первых, радиусы ограничивающих параллелей не обязательно равны. Во-вторых, касаясь противоположных параллелей, шарик может двигаться в противоположных направлениях.

Конечно, неплохо бы в дополнение к этому описанию иметь еще и инструмент, наподобие мотка клейкой ленты, который позволил бы наглядно представить траектории шарика на абсолютно шероховатой поверхности. И такой инструмент на самом деле имеется, но он немного в другом роде — это компьютер. В принципе, используя законы Ньютона движения тел и условие абсолютной шероховатости, не так уж и трудно рассчитать траекторию движения шарика.

Вдоль цилиндра

Только что мы подчеркнули сходство между движением шарика по абсолютно гладким и абсолютно шероховатым поверхностям вращения. А сейчас приведем пример, в котором проявляется поразительное различие между этими типами движения. Будем рассматривать движение шарика внутри цилиндра и на этот раз включим силу тяжести, направив ее вдоль оси цилиндра. Чтобы наглядно представить себе в этом случае движение шарика по абсолютно гладкому цилиндру, возьмите лист кальки и нарисуйте на нем параболу. Затем намотайте этот лист на цилиндр так, чтобы ось параболы совпала с одной из прямолинейных образующих цилиндра. Намотанная на цилиндр парабола — это и есть траектория шарика внутри абсолютно гладкого цилиндра. Сохраните этот лист кальки, он нам еще понадобится.



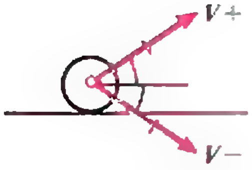
Все это выглядит достаточно естественным, но как только мы переходим к абсолютно шероховатому цилиндру, начинаются удивительные вещи. Оказывается, сила тяжести не может утащить шарик вниз — шарик будет все время двигаться по синусоидальной кривой, заключенной между двумя параллелями цилиндра. Это, конечно, неожиданный результат, и конечно, он ставит под сомнение реальное существование поверхностей, обладающих свойством абсолютной шероховатости. Но пока не будем спешить с выводами.

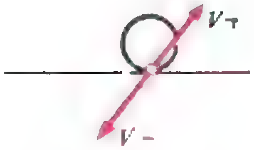
Между стенками

В своей предыдущей статье «Прыгающий мячик и теория удара»*) я рассказал о необычных свойствах известной детской игрушки — прыгающего мячика. Напомню некоторые факты оттуда. Соударение шарика с поверхностью называется абсолютно упругим, если при соударении абсолютная величина его скорости сохраняется ($|v_+| = |v_-|$) и угол падения равен углу отражения. Соударение называется сверхупругим, если при соударении скорость точки контакта шарика

---

*) См. «Квант» № 8 за 1990 год, с. 2.





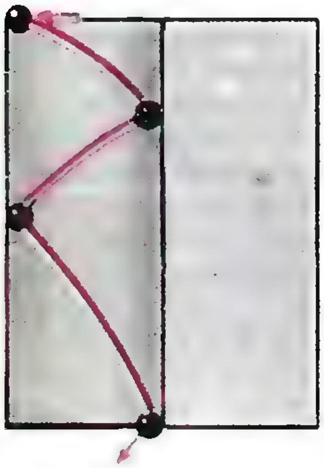
с поверхностью меняет свой знак на противоположный ($v_+ = -v_-$), а кинетическая энергия шарика сохраняется. Имеется определенная аналогия между абсолютной гладкостью и абсолютной упругостью, с одной стороны, и абсолютной шероховатостью и сверхупругостью, с другой стороны.

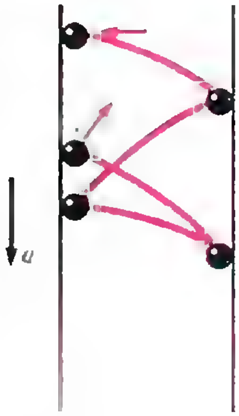
Рассмотрим случай, когда шарик движется между двумя параллельными вертикальными стенками, попеременно соударяясь с ними, и все соударения абсолютно упругие. Чтобы представить себе траекторию шарика в этом случае, проще всего воспользоваться тем самым листом кальки с нарисованной на нем параболой. Нужно только сложить этот лист гармошкой. Аналогия между этим движением и движением вдоль абсолютно гладкого цилиндра несомненна.

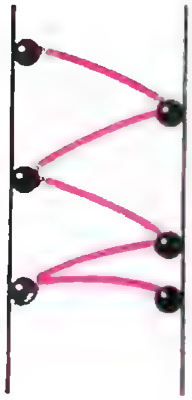
Пусть теперь все соударения сверхупругие. Траектория шарика в этом случае тоже состоит из кусков парабол, но на этот раз сила тяжести не может утащить шарик вниз. Вся траектория заключена в полосе, ограниченной двумя горизонтальными прямыми. И тут опять полная аналогия с движением внутри абсолютно шероховатого цилиндра. И опять возникает вопрос о существовании сверхупругих объектов. Так вот, на этот раз ответ положительный. Оказывается, что реальный прыгающий мячик обладает определенными сверхупругими свойствами. На рисунке изображена реальная траектория прыгающего мячика. Отчетливо видно, что после пятого удара скорость шарика направлена вверх. Это необычное явление подробно разобрано в статье «Прыгающий мячик и теория удара», где и показано, что прыгающий мячик — это почти сверхупругий объект.

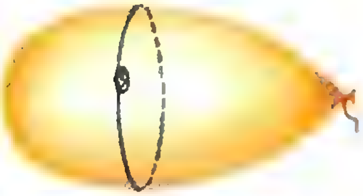
Воздушный шарик и монетка

Сейчас мы познакомимся еще с одним типом движения по поверхностям. Нам понадобится воздушный шарик и однокопеечная монета. Поместим монету внутрь шарика и надуем его. Взболтаем шарик, как взбалтываем наполненную бутылку. В какой-то момент монетка встанет на ребро и с легким шипением и свистом начнет кататься внутри шарика. Монета будет катиться достаточно долго (20—30 секунд) и пройдет порядка ста метров. За это время уже можно разобраться в ее поведении. Прежде всего, обращает на себя внимание тот факт, что уже после нескольких оборотов движение монеты стабилизируется, и она начинает двигаться по параллели максимального радиуса — мы считаем, что воздушный шарик представляет собой поверхность вращения.









Если резко изменить положение шарика, то все равно после нескольких оборотов монета возвращается на параллель максимального радиуса. Это стремление к движению по параллели максимального радиуса называется *асимптотической орбитальной устойчивостью*. Кстати, маленький стальной шарик, помещенный внутри воздушного шарика, движется точно так же, как монетка. Только он тормозится чуть быстрее.

Асимптотическая устойчивость — это совершенно новое качество, не свойственное движению ни по абсолютно гладкой, ни по абсолютно шероховатой поверхностям. И в том, и в другом случае движение по максимальной параллели — это одно из возможных движений. Однако рассмотрим следующую задачу.

Задача 5. *Докажите, что движение по максимальной параллели не обладает асимптотической орбитальной устойчивостью ни для абсолютно гладкой, ни для абсолютно шероховатой поверхностей вращения.*

Указание. Рассмотрите движение, идущее под небольшим углом к параллели максимального радиуса, и учтите, что оно все время будет происходить в полосе между двумя фиксированными параллелями.

Имеется еще один замечательный факт, который можно обнаружить в этом эксперименте. Будем сжимать воздушный шарик вдоль его оси. При некоторой степени сжатия теряется асимптотическая устойчивость движения по максимальной параллели — монета сходит с этой параллели и уже не стремится вернуться обратно. Можно предположить, что потеря устойчивости происходит в тот момент, когда в процессе сжатия шарик принимает форму сферы.

Задача 6. *Пусть монетка движется по окружности большого радиуса внутри воздушного шарика, имеющего форму сферы. Докажите, что это движение не обладает свойством асимптотической устойчивости.*

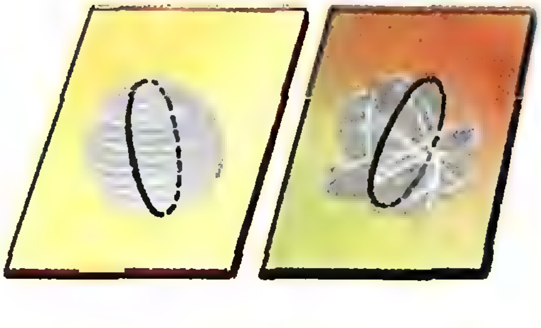
Указание. Движение по этой большой окружности ничем не лучше движения по любой другой большой окружности. В том числе и по окружности, идущей под небольшим углом к исходной.

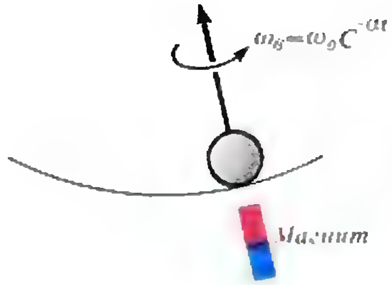
Итак, перед нами совершенно новый тип движения с необычным поведением траекторий. Чтобы дать его описание, аналогичное описанию абсолютно гладкого или абсолютно шероховатого движения, необходимо перейти от языка траекторий к языку взаимодействия монетки или стального шарика с резиновой пленкой.

Математическая модель

В нашем эксперименте монетка движется вдоль максимальной параллели без проскальзывания и достаточно долго, т. е. сопротивление ее качению мало. Поэтому, как и в случае абсолютной шероховатости, можно принять, что сопротивление качению равно нулю. Проведем дополнительный эксперимент: щелчком закрутим монеты на гладкой поверхности стола и на резиновой пленке от шарика. В первом случае монета вертится долго, во втором — буквально после нескольких оборотов падает. Это показывает, что мы уже не можем пренебречь трением верчения.

Наконец, для простоты заменим монетку стальным шариком, и модель взаимодействия с резиновой пленкой практически готова. А именно, можно считать, что при движении шарика по резиновой пленке, во-первых, шарик катится без проскальзывания и тор-



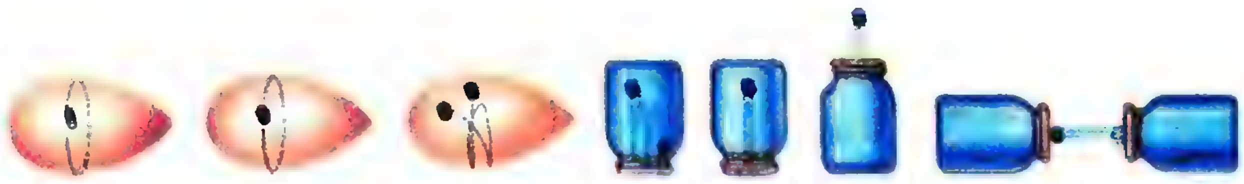


можения. Во-вторых, скорость верчения ω_b шарика, поставленного на резиновую пленку, быстро убывает, например по закону $\omega_b = \omega_0 e^{-\alpha t}$, где α — положительная постоянная. Простые расчеты показывают, что эта модель дает, по крайней мере, качественное согласие с экспериментом. Для вытянутых поверхностей движение по максимальной параллели действительно асимптотически устойчиво. А при переходе через сферическую поверхность к сплюснутым максимальная параллель резко меняет положение и теряет свойство асимптотической устойчивости.

Снова от движения к удару, или от монетки к лазеру

И в эксперименте с монеткой наблюдается удивительное сходство между движением по поверхности и ударом. Уже упоминалось о том, что замена монетки на маленький стальной шарик существенно не меняет характера движения. Однако, когда стальной шарик после потери скорости отрывается от поверхности, он начинает подпрыгивать, соударяясь с резиновой пленкой. И можно заметить, что потери энергии при этих соударениях достаточно малы — после удара шарик поднимается почти на ту же высоту, с какой он падал. Конечно, воздушный шарик, да еще когда его держишь в руках, это недостаточно жесткая конструкция. Чтобы уменьшить потери энергии при соударении, ее нужно заменить на более жесткую. В качестве такой конструкции я выбрал стеклянную банку с натянутой на нее резиновой пленкой. В самом деле, потери энергии резко уменьшились. К сожалению, многократно соударяясь с плоской пленкой, шарик быстро уходил от ее центра, натыкался на стенки и прекращал свое движение. Нашелся выход и из этого положения. Поскольку эти эксперименты происходили зимой, банка с натянутой пленкой и шариком внутри ставилась на батарею, воздух внутри нее расширялся и пленка выгибалась наружу. Выпуклая пленка оказывала фокусирующее влияние на движение шарика, и все соударения происходили вблизи ее центра. Однако совсем не обязательно слепо копировать первоначальный эксперимент и заставлять шарик двигаться внутри банки. Оказалось, что еще проще поставить банку на стол и бросать шарик на пленку сверху. Так эксперимент приобрел окончательный вид.

Итак, на стеклянную банку натяните кусок резиновой пленки. Продавите пленку, чтобы из-под нее вышло немного воздуха и она прогнулась внутрь. Зафиксируйте пленку на банке резиновым колечком. Отпустите теперь шарик с небольшой высоты по центру пленки. При соответствующем подборе банки, пленки и шарика соударения могут продолжаться очень долго — более минуты. Простые расчеты (опять смотрите «Прыгающий мячик...») показывают, что в этом случае потери энергии при каждом соударении составляют менее одного процента. Это очень малые потери. Они сравнимы, например, с потерями энергии при отражении светового потока

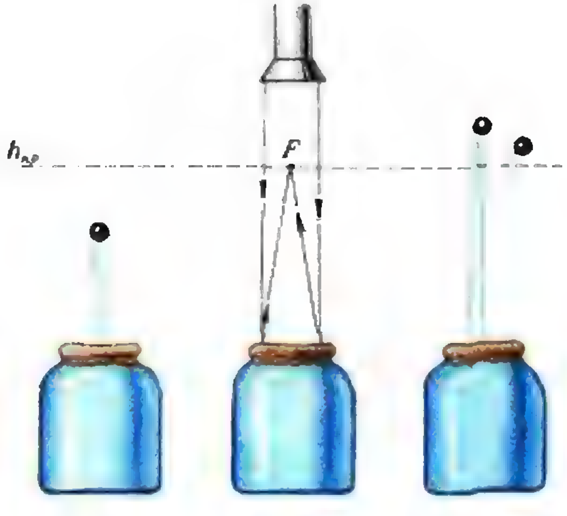


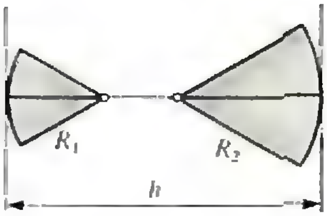
от специальных зеркал, применяемых в лазерной технике.

Наконец, последнее видоизменение эксперимента. Снова отключим силу тяжести, возьмем две такие банки, расположим их друг против друга и заставим шарик двигаться между ними. Это устройство очень точно моделирует работу лазерного резонатора, в котором световой поток движется между двумя отражающими зеркалами.

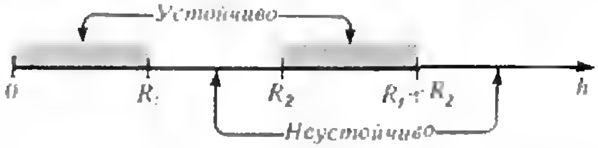
Устойчивость

В эксперименте с шариком, падающим на пленку, наблюдается замечательное явление. Если начальная высота h, с которой падает шарик, достаточно мала, то все соударения происходят вблизи центра пленки. Если же начальная высота h больше некоторой критической высоты $h_{кр}$, то движение шарика становится неустойчивым — после двух-трех соударений шарик выскакивает за пределы пленки. Используя модель абсолютно упругих соударений, можно рассчитать, что высота $h_{кр}$ совпадает с высотой «оптического фокуса» поверхности пленки. Это высота, на которой фокусируется после отражения пучок световых лучей, направленный вдоль оси пленки.





Та же самая задача об устойчивости возникает при анализе работы нашей механической модели лазерного резонатора. Будем считать, что отражающие пленки — это сферические поверхности с радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Тут нужно выяснить, для каких расстояний h между отражающими поверхностями шарик будет устойчиво двигаться вдоль их общей оси и для каких расстояний h он после нескольких соударений будет выбрасываться из пространства между пленками. Ответ довольно неожиданный.



Оказывается, что существуют две зоны устойчивости: если $0 \leqslant h < R_1$ или $R_2 < h < R_1 + R_2$. Если же $R_1 \leqslant h \leqslant R_2$ или $h \geqslant R_1 + R_2$, то движение будет неустойчивым.

Заключение

Несколько слов о том, о чем следовало бы сказать подробнее. Прежде всего о воздушном шарике и монетке. Мы далеко не исчерпали всех удивительных свойств этой потрясающей игрушки. Например, если раскрутить монетку и установить ось шарика вертикально, то, постоянно теряя скорость, монетка будет опускаться вниз. При этом возникают замечательные резонансные явления. При определенных положениях монеты (на определенных высотах) шарик начинает звучать. Причем четко выделяются узкие зоны, в которых это звучание происходит. Это явление несомненно нуждается в исследовании.

Теперь о другой игрушке — о механической модели лазерного резонатора. Задача об устойчивости резонатора и, вообще, задача о поведении шарика внутри резонатора относятся

(Окончание см. на с. 43)

ФОРМУЛА РОЖДЕНИЯ ЗВЕЗД

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН,
кандидат физико-математических наук
С. ЛАМЗИН

> *Тот, кто решается толковать об эволюции звезд, должен быть оптимистом и обладать чувством юмора. Астрономы и являются неисправимыми оптимистами.*
>
> Цецилия Пэйн-Гапошкина,
> американский астроном

Англия. Начало XX века. Джеймс Хопвуд Джинс (1877—1946), блестяще закончивший Кембриджский университет, в течение нескольких лет выполняет серию выдающихся работ по разным разделам теоретической физики: он публикует монографию по кинетической теории газов, исследования по молекулярной физике и теории излучения. В эти же годы под влиянием профессора астрономии и физики Кембриджского университета Джорджа Дарвина (1845—1912) — сына знаменитого биолога Чарлза Дарвина — Джеймс Джинс выполняет серию работ по теоретической астрофизике. Среди них была и фундаментальная работа «Устойчивость сферической туманности», опубликованная в 1902 г. в «Сообщениях Лондонского королевского общества».

Эта работа о поведении газовых уплотнений под действием собственной силы гравитации стала фундаментом современной теории гравитационной неустойчивости, которая объясняет происхождение практически всех структурных элементов Вселенной — от галактик и их скоплений до звезд, планет и их спутников. Характерные размеры и массы гравитационно-неустойчивых газовых уплотнений астрофизики называют теперь джинсовскими и отмечают индексом J (от James Jeans). Например, M_J — джинсовская масса, R_J — джинсовский радиус.

Вообще, Дж. Дарвин мог гордиться тем, что привлек внимание молодого Джинса к астрономии: его подопечный сделал очень многое для развития космогонии и звездной динамики. Но мог ли предполагать Дж. Дарвин, занимавший в 1899—1900 гг. пост президента Королевского астрономического общества в Лондоне, что через четверть века на эту почетную должность вступит Дж. Джинс и в память о своем наставнике учредит ежегодные Дарвиновские лекции? Впрочем, связь между Дарвином и Джинсом оказалась еще более глубокой. Дарвин, как известно, прославился изучением приливов и фигур вращающихся жидких тел. Джинс продолжил исследования космогонической роли приливных явлений и даже разработал приливную теорию происхождения Солнечной системы, очень модную в первой половине XX века. В этой теории рождение планетной системы рассматривается как редчайший факт, вызванный близким пролетом рядом с Солнцем другой звезды, вырвавшей из оболочки Солнца сгусток протопланетного вещества. И хотя в отношении Солнечной системы эту гипотезу вспоминают сейчас лишь как исторический факт, сам механизм приливного взаимодействия несомненно играет большую роль в мире галактик, звездных скоплений и, возможно, при формировании звезд — на так называемой протозвездной стадии их эволюции.

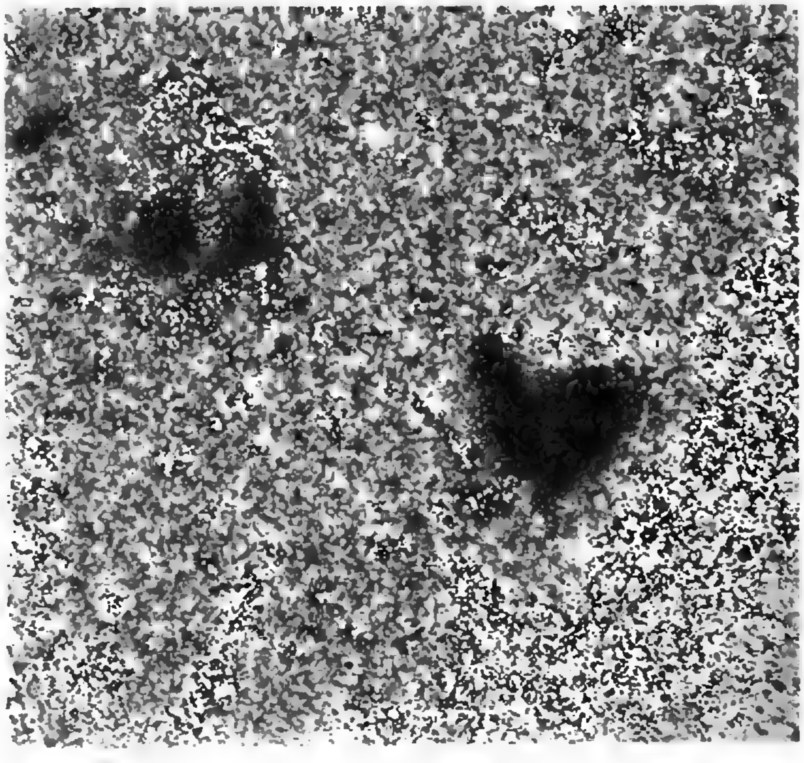
Вернемся к главному делу Джинса — к его теории гравитационной неустойчивости. После того как в начале XX века Дж. Джинс заложил ее фундамент, астрономам понадобилось еще 70 лет для обнаружения именно той компоненты межзвездной

среды, которая непосредственно связана с формированием звезд и в приложении к которой теория Джинса правильно предсказывает параметры новорожденных звезд. Для нынешней динамично развивающейся науки такая глубина теоретического предсказания необычайно велика. Давайте познакомимся с основами этой теории.

Она берет начало от Исаака Ньютона. Через 5 лет после того, как великий физик опубликовал свой закон тяготения, его друг — преподобный Ричард Бентли, стоявший тогда во главе Тринити-колледжа в Кембридже,— спросил в письме к Ньютону о том, не может ли быть только что открытая сила тяготения причиной образования звезд (вопрос, достойный того, чтобы считать Бентли соавтором теории гравитационной неустойчивости). Ньютон письмом от 10 декабря 1692 г. ответил ему следующее:

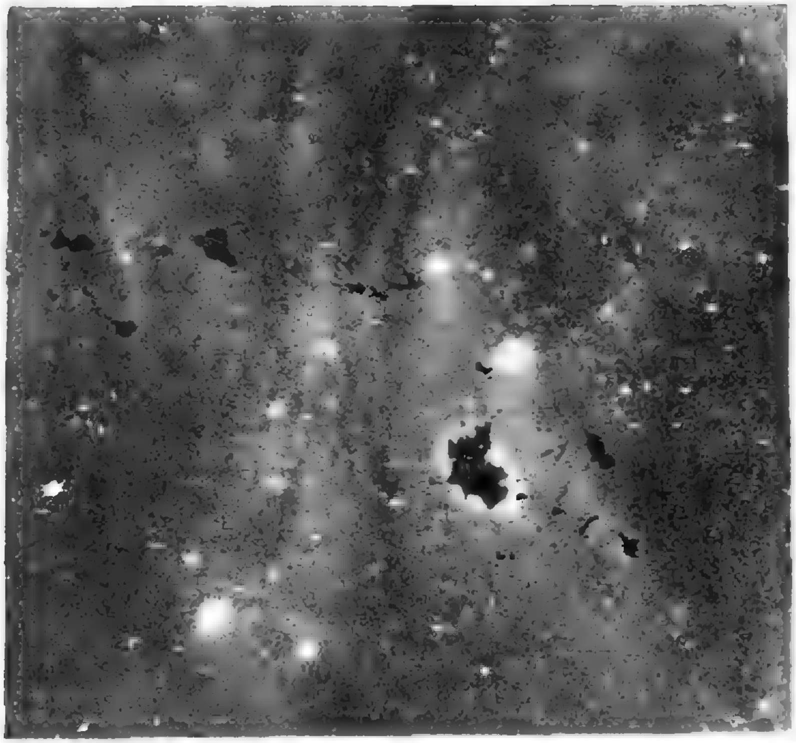
«Мне кажется, что если бы все вещество нашего Солнца и планет и все вещество Вселенной было бы равномерно рассеяно в небесных глубинах, и если бы каждая частица имела врожденное тяготение ко всем остальным, и если бы, наконец, пространство, в котором была бы рассеяна эта материя, было бы конечным, вещество снаружи этого пространства благодаря указанному тяготению влеклось бы ко всему веществу внутри и вследствие этого упало бы в середину всего пространства и образовало бы там одну огромную сферическую массу. Однако, если бы это вещество было равномерно распределено по бесконечному пространству, оно никогда не могло бы объединиться в одну массу, но часть его сгущалась бы тут, а другая там, образуя бесконечное число огромных масс, разбросанных на огромных расстояниях друг от друга по всему этому бесконечному пространству. Именно так могли образоваться и Солнце, и неподвижные звезды, если предположить, что вещество было светящимся по своей природе».

Как видим, Ньютон, развивая идею о гравитационной конденсации первичного вещества, предполагал это вещество совершенно инертным, холодным, не сопротивляющимся гравитации. Поэтому он считал, что любая неоднородность плотности должна прогрессивно сжиматься и уплотняться силой тяжести. К концу XIX века физики уже ясно понимали, что всякое вещество, в том числе и разре-



Великий исследователь звезд Вильям Гершель (1738—1822) называл эти темные беззвездные области «дырами в небесах». Теперь мы знаем, что это плотные облака межзвездного газа и пыли, сквозь которые не проникает свет далеких звезд.

На этой фотографии хорошо видно, что плотные темные облака межзвездного газа выделяются из разреженной, заполняющей все межзвездное пространство газообразной среды, которая светится под действием погруженных в нее горячих звезд.



женный газ, обладает упругостью: именно это свойство газа позволяет распространяться в нем звуковым волнам. Поэтому Джинс заключил, что гравитационное сжатие может начаться лишь в том случае, если сила тяжести победит силу газового давления.

Чтобы понять, при каких условиях это происходит, сделаем несколько простых физических оценок. Давайте рассмотрим, какие процессы происходят при небольшом случайном сжатии некоторого объема газа с характерным размером λ и плотностью ρ. С одной стороны, сила гравитации стремится продолжить это сжатие. Если бы газовое давление вообще отсутствовало, то все вещество этого облака упало бы к его центру за время свободного падения

$$t_{\text{п}}\sim(G\rho)^{-1/2},$$

которое, как видим, не зависит от размера возмущений.

Пояснить эту формулу можно с помощью третьего закона Кеплера. Падение любой частицы к центру облака происходит под действием силы притяжения к массе $M\sim\rho a^3$, где a — начальное расстояние от частицы до центра. Время падения представляет собой половину периода движения по очень узкому эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр облака. Но, по третьему закону Кеплера, период движения по эллипсу с большой осью a равен периоду движения вокруг массы M по круговой орбите с радиусом $a/2$. Период такого кругового движения легко вычислить из второго закона Ньютона.

С другой стороны, при отсутствии гравитации сила газового давления заставила бы облако расшириться за «динамическое время», которое можно оценить следующим образом:

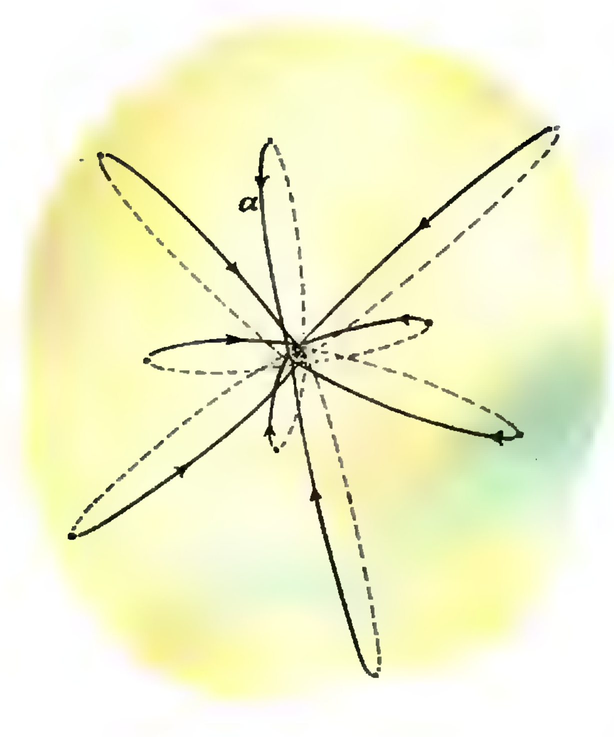
$$t_{\text{д}}\sim\frac{\lambda}{v_{\text{зв}}},$$

где $v_{\text{зв}}$ — скорость звука в газе, которая по порядку величины равна скорости движения молекул газа:

$$v_{\text{зв}}\sim\sqrt{\frac{RT}{\mu}}\ .$$

Ясно, что если $t_{\text{д}}\ll t_{\text{п}}$, то газовое давление успеет перераспределить вещество таким образом, чтобы воспрепятствовать его дальнейшему гравитационному сжатию. Наоборот, если $t_{\text{п}}\ll t_{\text{д}}$, то гравитационное сжатие произойдет быстрее, чем сработают силы газового давления. Найдем отношение $t_{\text{д}}$ и $t_{\text{п}}$:

$$\frac{t_{\text{д}}}{t_{\text{п}}}\sim\frac{\lambda}{(G\rho)^{-1/2}v_{\text{зв}}}=\frac{\lambda}{(RT/G\rho\mu)^{1/2}}\ .$$



Свободное сжатие облака под действием собственной гравитации можно представить как движение всех его частиц по сильно вытянутым эллиптическим орбитам, для которых справедливы законы Кеплера.

Видно, что возмущения малого масштаба ($\lambda \ll (RT/G\rho\mu)^{1/2}$) являются устойчивыми по отношению к случайному сжатию, а крупномасштабные возмущения ($\lambda \gg (RT/G\rho\mu)^{1/2}$) неустойчивы: случайно возникнув, они уже не смогут вновь расшириться.

Наши рассуждения позволили нам оценить и величину критического размера λ_J:

$$\lambda_J \sim \left(\frac{RT}{G\rho\mu}\right)^{1/2},$$

из которого легко получить оценку для критической массы M_J:

$$M_J \sim \rho\lambda_J^3 \sim \left(\frac{RT}{G\mu}\right)^{3/2}\rho^{-1/2}.$$

Последние две формулы представляют собой (с точностью до численных множителей) знаменитые формулы Джинса.

Чтобы лучше почувствовать смысл этих результатов, получим их еще раз из условия равновесия газового облака под действием сил давления и тяготения, которое, по определению λ_J и M_J, наступает как раз при $\lambda=\lambda_J$ и $M=M_J$. Характерное значение ускорения свободного падения в облаке равно по порядку величины

$$g \sim G\frac{M}{\lambda^2} \sim G\rho\lambda.$$

Давление газа должно уравновешивать силу тяготения; оно равно нулю на внешнем краю облака и должно достигать в его толще значения

$$p \sim \rho g\lambda \sim G\rho^2\lambda^2$$

(вспомните формулу для давления столба жидкости $p=\rho gh$). Выразив p из уравнения состояния:

$$p=\frac{\rho RT}{\mu},$$

получим для λ_J и $M_J \sim \rho\lambda_J^3$ такие же значения, как и раньше. Используя математику в большем объеме, несложно получить точные значения λ_J и M_J, которые здесь мы приведем без доказательства:

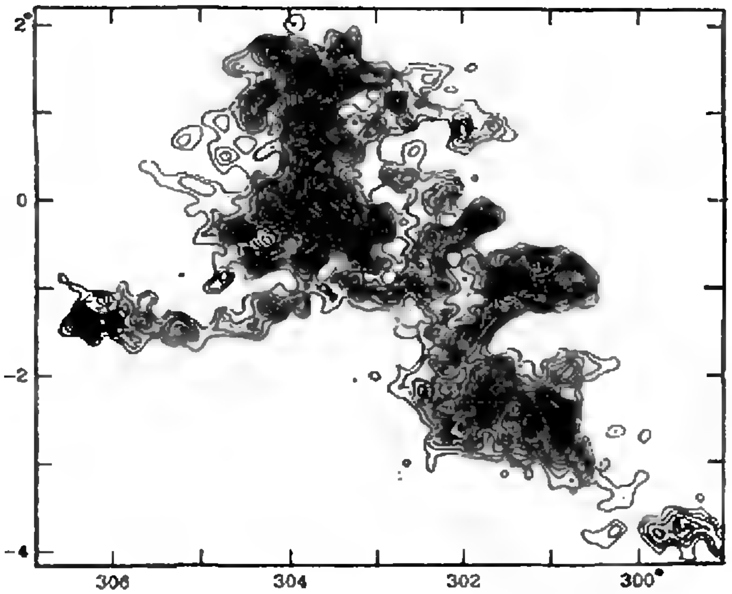
$$\lambda_J=\left(\frac{2RT}{G\rho\mu}\right)^{1/2}, \quad M_J=\left(\frac{RT}{2G\mu}\right)^{3/2}\rho^{-1/2}.$$

На этих простых формулах покоится теория гравитационной неустойчивости. Из нее следует, что если в газообразной среде в силу каких-то причин возникают возмущения плотности различного масштаба, то те из них, масса которых превышает M_J, должны неудержимо сжиматься и уплотняться. Обычно возмущения плотности малых масштабов по своему числу и плотности преобладают над крупномасштабными. Поэтому наиболее вероятно, что гравитационной неустойчивости в первую очередь подвергнутся возмущения с массой $M \approx M_J$.

Спустя 240 лет после письма Ньютона к Бентли другой англичанин — Джеймс Джинс, написал в своей книге «Звезды в их развитии» (в русском переводе — «Движение миров», М.: Гостехиздат, 1933):

«Предположим, что в начале времен все пространство было заполнено газом... Тогда можно доказать, что газ не оставался бы равномерно

Радиокарта огромного межзвездного облака, получившего за свою оптическую непрозрачность название Южный Угольный Мешок. Линии оконтуривают области равной плотности. Хорошо видно, что облако разделилось на множество плотных конденсаций, массы которых, как показывают вычисления, близки к джинсовской массе.



распределенным в пространстве, а немедленно стал бы собираться в шары. Мы можем вычислить, сколько газа потребуется для образования каждого шара».

К сожалению, Джинс немного преувеличил свои возможности: он не мог достаточно убедительно доказать работоспособность своих формул, поскольку в то время почти ничего не было известно о физических свойствах и составе межзвездного газа, из которого формируются звезды. Однако теперь мы можем это сделать.

Наблюдения астрономов показали, что химический состав звезд и межзвездного газа отличается большой стабильностью: на 1000 атомов водорода приходится около 100 атомов гелия и 2—3 атома других, более тяжелых элементов. В плотных холодных облаках, в которых формируются звезды, водород находится в форме молекул H_2 и его молярная масса $\mu\ (H_2)=2$ г/моль. А с учетом всех других химических элементов средняя молярная масса межзвездного газа составляет $\mu_{ср}=2{,}3$ г/моль.

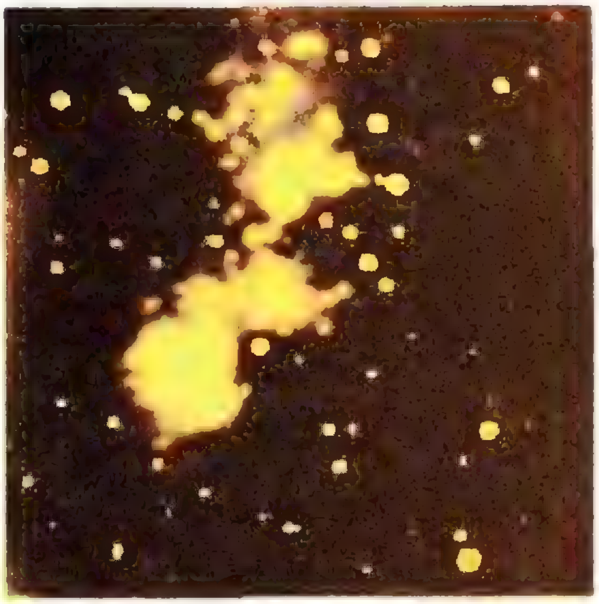
Плотность межзвездного газа $\rho=(\mu_{ср}/N_A)n$ астрономы предпочитают выражать через концентрацию молекулярного водорода $n(H_2)$. С учетом состава межзвездного газа получаем $n=1{,}1n(H_2)$. Подставляя ρ, n в формулы Джинса, перепишем их в более современном виде:

$$\lambda_J=3{,}2\cdot 10^4\,\text{а. е.}\left(\frac{T}{10\text{К}}\,\frac{10^4\ \text{см}^{-3}}{n(H_2)}\right)^{1/2},$$

$$M_J=0{,}3M_\odot\left(\frac{T}{10\text{К}}\right)^{3/2}\left(\frac{10^4\ \text{см}^{-3}}{n(H_2)}\right)^{1/2}$$

Здесь $M_\odot=2\cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, а. е.— астрономическая единица, равная расстоянию от Земли до Солнца (1 а. е.$=1{,}5\cdot 10^{13}$ см). В последние годы стало известно, что типичными местами формирования звезд являются мелкомасштабные конденсации в межзвездных молекулярных облаках, где температура $T=5$—20К и концентрация водорода $n(H_2)\approx 10^4$—10^6 см$^{-3}$. Для этих значений $M_J=(0{,}02$—$2)M_\odot$. Действительно, массы большинства звезд заключены в этом диапазоне. Теория Джинса верна!

Еще одним тестом для этой теории может служить размер облака — предка звезд. Для Солнечной системы этот размер оценивается из наблюдений в 10^4 а. е.: именно таков радиус плотной внутренней части облака Оорта, в котором сосредоточена основная масса кометных ядер. А что предсказывает на этот счет теория Джинса?

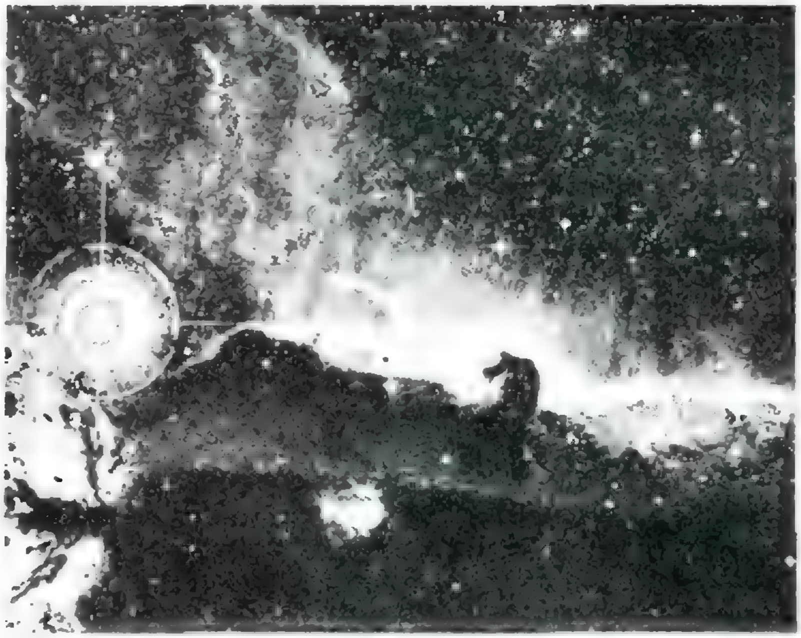


Инфракрасное изображение центральной части плотного облака в созвездии Ориона. Яркие точки — сжимающиеся протозвезды и очень молодые звезды, окруженные газопылевыми оболочками. Светлые размытые пятна — еще недостаточно уплотнившиеся газовые фрагменты.

Радиусом газового фрагмента в момент наступления его гравитационной неустойчивости естественно считать величину $R_J=\lambda_J/4$. Исходя из того, что масса фрагмента должна быть равна массе Солнца, и принимая $T\approx 20$ К, получим $n(H_2)=10^4$ см$^{-3}$ и $R_J=10^4$ а. е. Действительно, это исходный радиус облака Оорта! Нужны ли еще доказательства справедливости теории Джинса?

Разумеется, простые формулы Джинса не учитывают многих физических процессов, происходящих в межзвездной среде. Эти формулы верны для идеального покоящегося однородного газа, который в природе нигде не встретишь. Реальное межзвездное вещество пребывает в постоянном движении, скорость которого часто превосходит скорость звука; оно испытывает сильное влияние магнитного поля, притяжение к звездам Галактики и лучевое давление со стороны наиболее ярких из них. Поэтому многие физики после Джинса брались за уточнение и развитие теории гравитационной неустойчивости. Отметим среди них Е. М. Лифшица, С. Чандрасекара, Я. Б. Зельдовича и Дж. Силка. Сейчас эта теория развита вполне детально: она учитывает расширение и вращение газовой среды, ее взаимодействие с магнитным полем и с другими источниками гравитации. Важно, однако, что учет дополнительных физических факторов не изменил принципиально выводы теории: значения джинсовской массы и джинсовского радиуса до сих пор используются в большинстве работ по оценке эффектов гравитационной неустойчивости. Отчасти это связано с тем,

Знаменитая темная туманность Конская голова в созвездии Ориона. В нижней половине фотографий — темное облако (Конская голова — его часть). В верхней половине — молодые звезды и разогретые ими остатки газа, из которого эти звезды сформировались.



что из наблюдений редко удается получить иные характеристики протозвездной среды, кроме ее плотности и температуры.

Сам Дж. Джинс был чрезвычайно воодушевлен результатом своих исследований и, прежде всего, их наглядностью и простотой. Он писал: «...для нас ясно, почему все звезды имеют очень сходный вес; это потому, что все они образованы одинаковым процессом. Они, пожалуй, похожи на фабричные изделия, сделанные одною и тою же машиной». Зная сегодня, что звезды различаются по массе в тысячи раз, а условия в межзвездной среде — еще сильнее, мы вправе назвать оптимизм Джинса преждевременным. Да он и сам понимал, что пройден лишь первый рубеж и, предвидя грядущие трудности, с которыми столкнется теория формирования звезд и галактик, предупреждал: «При современном состоянии наших знаний любая попытка диктовать окончательные решения по основным проблемам космогонии была бы ни чем иным, как чистым догматизмом». За прошедший, без малого, век мы многое узнали о формировании звезд и, главное, убедились в том, что теория гравитационной неустойчивости Дж. Джинса выдержала проверку временем.

Газопылевой комплекс вблизи звезды ρ Змееносца, в котором хорошо видны яркие недавно родившиеся звезды, разогретый ими разреженный газ и несколько темных плотных конденсаций, которым еще предстоит стать звездами.

Информация

Заочная аэрокосмическая школа

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ), организованная Всесоюзным молодежным аэрокосмическим обществом (ВАКО) «Союз» и Московским физико-техническим институтом (МФТИ), проводит конкурсный набор учащихся в 10 и 11 классы на 1992—93 учебный год.

Пособия ЗАКШ подготовлены сотрудниками и аспирантами МФТИ и призваны помочь всем, кто собирается поступать в вузы, особенно аэрокосмического профиля. Программа школы охватывает следующие разделы науки и техники:

— Движение космических аппаратов
— Ракетная техника
— Движение в атмосфере
— Исследования Земли из космоса
— Исследования Космоса
— Перспективная космонавтика.

В течение года учащиеся ЗАКШ получают:

— шесть заданий школы, включающие теоретический материал, список литературы для дальнейшего знакомства с направлениями аэрокосмической физики и задачи для самостоятельного решения;

— «Космическую хронику ЗАКШ», состоящую из дневника наиболее значительных событий в космонавтике текущего года и информационных материалов по истории и современному состоянию космических исследований.

Полный курс обучения в ЗАКШ — 2 года. Учащиеся, поступающие в 11 класс, имеют возможность окончить школу по сокращенной программе.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие конкурса могут стать учениками по платной форме обучения. Кроме того, школа распространяет среди желающих «Космическую хронику ЗАКШ» текущего года за небольшую плату. Все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены при условии получения приемной комиссией решения вступительного задания.

Вступительное задание для участия в конкурсе (решение задач по физике) необходимо выполнить на русском языке

(Окончание см. на с. 37)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1311» или «Ф1318». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1311 — М1315 предлагались в этом году на Ленинградской городской олимпиаде по математике, задача Ф1320 — на физической олимпиаде Великобритании, а Ф1322 — на Всероссийской олимпиаде по физике.

Задачи

М1311 — М1315, Ф1318 — Ф1322

М1311. Треугольник имеет целые длины сторон x, y, z, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2+y^2+z^2$ — квадрат целого числа.

Д. Фомин

М1312. Поля доски $n\times n$ раскрашены в три цвета — синий, белый, красный, причем известно, что рядом с каждой синей клеткой есть (граничащая по стороне) белая, рядом с белой — красная и рядом с красной — синяя. Докажите для количества k клеток одного — скажем, красного — цвета оценки: а) $k\leqslant 2n^2/3$; б) $k\geqslant n^2/11$

Ф. Назаров

М1313. Найдите 8 натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_8 таких, что

$$\sqrt{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1-1}}+\sqrt{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_2-1}}+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{\sqrt{a_8}-\sqrt{a_8-1}}=2.$$

Л. Курляндчик

М1314. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а P и Q — центры вписанных окружностей треугольников ABM и CDM. Докажите, что

$$FD+CD<4PQ.$$

Ф. Назаров

М1315. На окружности расставляются целые числа. Разрешается стереть любое четное число, а вместо двух соседних с ним чисел записать их сумму (отчего количество чисел уменьшается на два). Такие операции проводятся, пока это возможно, т. е. пока не останется ни одного четного числа, либо останется одно или два числа. Докажите, что количество оставшихся чисел зависит лишь от исходной расстановки, но не от порядка действий.

Д. Фомин

Задачник „Кванта"

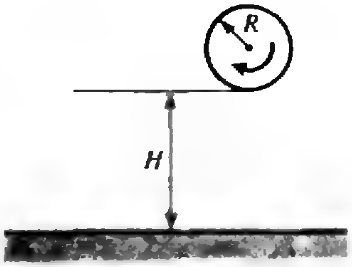


Рис. 1.

Ф1318. Велосипедное колесо, отпущенное с высоты $H=1$ м (рис. 1), подпрыгивает на высоту $h=0{,}8$ м. Закрутим теперь колесо до скорости $n=2$ об/с и отпустим с той же высоты. Под каким углом к вертикали оно отскочит от пола? А если увеличить скорость вращения в 2 раза? Еще в 2 раза? Коэффициент трения о горизонтальную поверхность $\mu=0{,}7$, радиус колеса $R=0{,}5$ м.

О. Кубинский

Ф1319. Стальную струну диаметром $d=1$ мм и длиной $l=1$ м натянули и закрепили ее концы на одной высоте. К середине струны прикрепили груз массой $M=1$ кг. Найдите «провис» струны. Каким он станет, если уменьшить температуру на $\Delta T=1$ К? Модуль Юнга для стали $E=2\cdot10^{11}$ Н/м^2, коэффициент линейного расширения $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$. Расстояние между точками подвеса не меняется.

З. Рафаилов

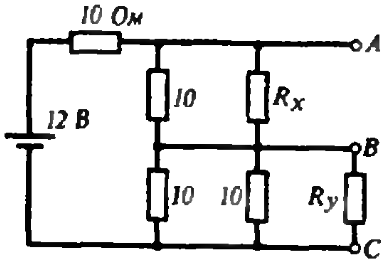


Рис. 2.

Ф1320. В схеме, изображенной на рисунке 2, батарея идеальная, а резисторы — кроме R_x и R_y — имеют сопротивления по 10 Ом. Напряжение между точками A и B составляет 4 В, а между B и C — 2 В. Найдите величины R_x и R_y.

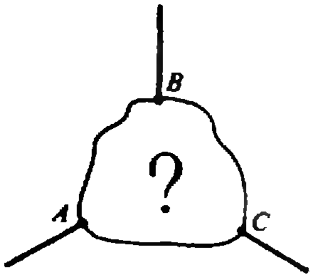


Рис. 3.

Ф1321. В «черном ящике» с тремя выводами (рис. 3) находится схема, состоящая из резистора сопротивлением $R=100$ Ом, катушки индуктивности и конденсатора. При измерениях на переменном токе ($\omega=1000$ с$^{-1}$) были определены значения сопротивлений $R_{AB}=75$ Ом и $R_{BC}=125$ Ом. Может ли индуктивность катушки быть равной 1 Гн? Ответ обоснуйте схемами и расчетом. На данной частоте катушку и конденсатор считайте идеальными.

А. Зильберман

Ф1322. Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время этого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З=365{,}25$ суток, Марса — $T_М=687$ суток. Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

М. Гаврилов

Задачник „Кванта"

Решения задач

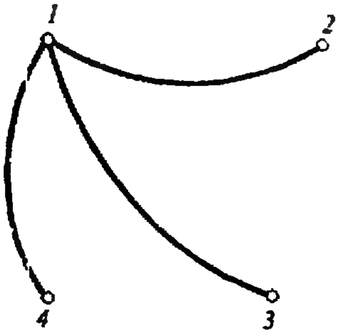
М1286 — М1290, Ф1298 — Ф1302

М1286. На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50-ти двухместных номерах так, что живущие в одном номере могут разговаривать между собой.

Докажем по индукции более общее утверждение — про $2n$ делегатов и n двухместных номеров, $n \geqslant 2$.

Естественно изображать ситуацию в виде графа — системы точек (изображающих делегатов), некоторые пары которых соединены ребром (а именно, те пары делегатов, которые могут разговаривать друг с другом).

Для 4-х делегатов ($n=2$) утверждение проверяется некоторым перебором. Если 1, 2, 3, 4 — делегаты (вершины графа), из которых каждый может поговорить хоть с одним из остальных, но при этом их нельзя поселить в двух двухместных номерах с соблюдением условий (т. е. в графе отсутствует одно из ребер 12 или 34, а также одно из ребер 13 или 24 и ребро 14 или 23), то остается возможным лишь случай, соответствующий графу, состоящему из трех ребер, выходящих из одной вершины (см. рисунок), что противоречит условию.



Переход от n к $n+1$ очевиден. Предположим, что для $2n$ делегатов утверждение доказано, и докажем его для $2n+2$. Можно выбрать любую пару из них, знающую общий язык, и поселить в один номер. А остальных $2n$ делегатов, по предположению индукции, можно расселить в n номерах в соответствии с условием задачи.

Д. Фомин

М1287. В параллелограмме ABCD диагональ AC больше диагонали BD. Точка M на диагонали AC такова, что около четырехугольника BCMD можно описать окружность. Докажите, что BD — общая касательная окружностей, описанных около треугольников ABM и ADM.

Чтобы доказать это утверждение для окружности, описанной около треугольника ABM, достаточно проверить равенство углов MBD и BAM. Но поскольку четырехугольник $BCMD$ вписан в окружность, $\angle BAM = \angle MCD = \angle MBD$. Для другой окружности доказательство аналогично.

Д. Фомин

М1288. Докажите, что число 235^2+972^2 — составное.

Эта сумма равна $1\,000\,009=3^2+1000^2$. Докажем такой общий факт. Если число m вида $4k+1$ (k — натуральное) можно представить в виде суммы двух квадратов не менее чем двумя разными способами, то m — составное.

Пусть

$$m=x^2+y^2=u^2+v^2, \tag{1}$$

где можно считать числа $x>u$ нечетными, а $y<v$ — четными. Тогда наибольший общий делитель чисел

$x-u$ и $v-y$ — четное число; обозначим его $2d$. Пусть

$$x=u-2da,\quad v=y-2db, \tag{2}$$

где a и b взаимно просты. Подставив выражения (2) в (1), получим после сокращений

$$au+da^2=by+db^2=abc. \tag{3}$$

Это число делится на a и на b, а значит, и на их произведение; частное мы обозначили через c. Таким образом, как следует из (3), $u=bc-ad$, $y=ac-bd$, откуда $x=u+2ad=bc+ad$ (здесь a, b, c, d — некоторые натуральные числа) и

$$m=x^2+y^2=(bc+ad)^2+(ac-bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Проделав эти выкладки для данных чисел, нетрудно найти соответствующее разложение и для числа 10^6+9.

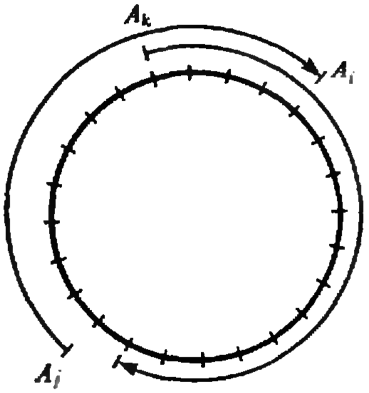
Можно доказать и более сильное утверждение: число $m=4k+1$ простое в том и только в том случае, если оно представляется в виде суммы двух квадратов единственным образом. Эйлер заметил, что этот признак удобен для проверки простоты больших чисел (перебор существенно сокращается, если использовать информацию о том, какие остатки могут давать квадраты при делении на небольшие числа*)).

Н. Васильев, Д. Фомин

М1289. *Сумма целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (написанных по окружности) равна 1. Для каждого k от 1 до n через N_k обозначим количество положительных среди n сумм (начинающихся с a_k):*

$$a_k,\ a_k+a_{k+1},\ \ldots,\ a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n+a_1+ +\ldots+a_{k-1}.$$

Докажите, что все N_k различны.



Будем считать, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ написаны возле точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, расположенных по часовой стрелке на окружности. Условимся говорить, что точка A_k мажорирует точку A_j, и записывать это в виде $A_k > A_j$, если сумма всех чисел от a_k до a_{j-1} по часовой стрелке положительна. (Разумеется, под a_0 понимается a_n.) Тогда из условия, что сумма всех чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1, вытекают два следующих свойства:

1) Если $A_k > A_j$ и $A_j > A_i$, то $A_k > A_i$. (Здесь нуждается в объяснении лишь случай, изображенный на рисунке, когда дуги A_kA_j и A_jA_i накладываются друг на друга. При этом сумма чисел на одной и другой дуге не меньше $1+1=2$, на всей окружности сумма равна —1, следовательно, сумма чисел на дуге A_kA_i не меньше 1.)

2) Для любых двух точек A_k и A_j либо $A_k > A_j$, либо $A_j > A_k$.

Остается заметить, что N_k — это число точек, которые мажорирует точка A_k. Отсюда следует, что все эти числа различны. В самом деле, если $A_k > A_j$ и A_j мажорирует N_j некоторых точек, то A_k можорирует согласно свойству 2) все эти точки и еще по крайней мере одну — A_j, поэтому $N_k > N_j$.

Д. Фомин

---

* Подробнее об этом написано, например, в замечательной книге «Энциклопедия элементарной алгебры и анализа» Г. Вебера, изд-во *Mathesis*, Одесса, 1906.

M1290. Квадратный лист прозрачной бумаги размерами 8×8 разграфлен 14 прямыми на 64 клетки 1×1 и произвольным образом сложен по этим линиям в книжечку размером 1×1 (из 64 листов). Листы книжки нумеруются по порядку числами 1, 2, ..., 64, а затем она вновь разворачивается. Пусть p — наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение p и при каком складывании оно достигается?

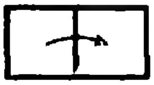
Ответ: наименьшее возможное значение p равно 15 и достигается при складывании гармошкой сначала в одном направлении, а потом — в другом.

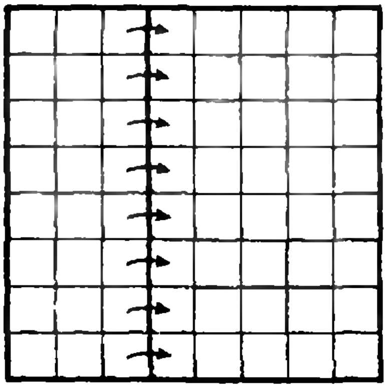
Докажем, что при любом складывании найдутся две соседние по стороне клетки с разностью номеров не менее 15.

Каждый из 14 отрезков длины 8, которыми квадрат поделен на клетки, при складывании перешел в отрезок (той же или меньшей длины); некоторые отрезки могут целиком совпасть и в дальнейшем складываются вместе.

Рассмотрим некоторый отрезок длины 8, который при складывании перешел в отрезок длины 1, по которому проводится последнее складывание — когда книжечка 2×1 складывается в одну клетку 1×1; причем выберем этот «красный» отрезок так, чтобы по одну и другую его стороны на квадрате лежали точки, находящиеся перед последним складыванием в двух разных клетках книжечки 2×1. Рассмотрим 8 пар клеток квадрата, разделенных красным отрезком (на рисунке они соединены голубыми дужками). При последнем складывании какая-то из этих пар окажется наружной: между соответствующими страницами будет не менее 14 других, поэтому разность их номеров не менее 15.

Н. Васильев





Ф1298. Тяжелый шарик подбросили вверх со скоростью v_0. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости шарика, найдите отрезок времени, через который шарик упадет в точку, откуда он был брошен. При скорости v_0 сила сопротивления $F=\alpha v_0 \gg mg$ (здесь α — коэффициент пропорциональности, m — масса шарика).

Обозначим максимальную высоту подъема шарика через h. По условию задачи, вязкое трение велико, поэтому будем считать, что падение происходит с установившейся скоростью

$$v_{\text{уст}}=mg/\alpha$$

и время падения

$$\tau_{\text{пад}}=\frac{h}{v_{\text{уст}}}=\frac{h\alpha}{mg}.$$

При движении вверх на шарик действует постоянная сила тяжести и изменяющаяся сила сопротивления. Поэтому ускорение шарика равно $a=g+\alpha v/m$ и направлено вниз. Пусть в какой-то момент скорость шарика равна v_i. Тогда малые приращения скорости и перемещения будут равны соответственно

$$\Delta v_i=a_i\Delta t_i=g\Delta t_i+\frac{\alpha v_i}{m}\Delta t_i,$$

$$\Delta h_i=v_i\Delta t_i.$$

Суммируя каждое из соотношений, получаем

$$\sum\Delta v_i=v_0=g\sum\Delta t_i+\frac{\alpha}{m}\sum v_i\Delta t_i,$$

$$\sum\Delta h_i=h=\sum v_i\Delta t_i,$$

или

$$v_0=g\sum\Delta t_i+\frac{\alpha}{m}h,$$

откуда время подъема

$$\tau_{\text{под}}=\sum\Delta t_i=\frac{v_0}{g}-\frac{\alpha h}{mg}.$$

Тогда окончательно найдем

$$\tau_{\text{общ}}=\tau_{\text{под}}+\tau_{\text{пад}}=\frac{v_0}{g}.$$

Получился интересный ответ: если вязкость достаточно велика, то время подъема — падения уже не зависит от вязкости и составляет ровно половину времени подъема — падения в случае отсутствия сопротивления. На самом деле ничего удивительного здесь нет — при увеличении вязкости уменьшается высота подъема.

А. Андрианов

Ф1299. *Черный шарик радиусом $r=1$ м подвешен на тонкой длинной нити длиной $l=1$ м. Вся система помещена в вакуумированную стеклянную трубку с аргоном при давлении $p_0=0{,}1$ Па. Шарик освещают горизонтальным пучком света, плотность потока энергии в котором равна $w_0=100$ Дж/(м$^2\cdot$ с). Оцените величину отклонения шарика от положения равновесия под действием света. Теплопроводностью шарика пренебречь. Учесть, что абсолютно черное тело, нагретое до абсолютной температуры T, излучает с единицы поверхности за единицу времени энергию, равную σT^4, где $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$ К^4). Температура газа в трубке постоянна и равна $T_0=293$ К. Молярная масса аргона $M=0{,}04$ кг/моль, плотность шарика $\rho=1$ г/см^3.*

Свет, падая на шарик с одной стороны, нагревает ее на некоторую величину ΔT ($\Delta T\ll T_0$). Шарик тепла не проводит, поэтому поступающая энергия идет, во-первых, на излучение, а во-вторых, на обмен теплом с окружающим газом.

Мощность, рассеиваемая при излучении с единицы поверхности, составляет

$$W_1=\sigma(T_0+\Delta T)^4-\sigma T_0^4\approx4\sigma T_0^3\Delta T.$$

Если с единицей поверхности шарика за одну секунду сталкивается N молекул газа и при каждом ударе отдается энергия ΔW, то всего в окружающую среду отдается мощность

$$W_2=N\Delta W.$$

Пусть к поверхности шарика движется 1/6 часть всех молекул, имеющих одинаковые скорости $v=\sqrt{3RT_0/M}$, а концентрация молекул в сосуде составляет $n=p_0/(kT_0)$. Тогда (сделаем верхнюю оценку)

$$\Delta W=\frac{3}{2}k(T_0+\Delta T)-\frac{3}{2}kT_0=\frac{3}{2}k\Delta T,$$

$$W_2=\frac{1}{6}nv\Delta W=\frac{1}{4}\frac{p_0v\Delta T}{T_0}$$

и

$$\frac{W_2}{W_1}=\frac{1/4p_0\Delta T\sqrt{3RT_0/M}/T_0}{4\sigma T_0^3\Delta T}\approx0{,}01.$$

Таким образом, получаем, что можно пренебречь теплообменом с газом и считать, что вся поступающая энергия идет только на переизлучение. Поэтому

$$\Delta T=\frac{W_{\text{пост}}}{4\sigma T_0^3}=\frac{w_0\pi r^2}{4\sigma T_0^3}=17{,}5\ \text{К}.$$

Давление газа на освещенную часть шарика больше, чем на неосвещенную, так как атомы при столкновении приобретают в среднем бóльшую скорость, а значит, и уносят больший импульс:

$$p=nkT_{\text{эфф}}=nk(T_0+(T_0+\Delta T))/2,$$

$$\Delta p=p-p_0=nk\frac{\Delta T}{2}=\frac{p_0\Delta T}{2T_0}.$$

Сила давления, действующая на шарик, равна

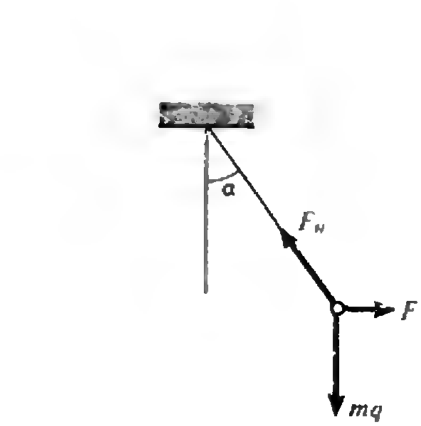
$$F=\Delta p\pi r^2,$$

сила тяжести —

$$mg={}^4/_3\rho\pi r^3,$$

отклонение шарика от положения равновесия —

$$x=l\frac{F}{\sqrt{m^2g^2+F^2}}\approx 0{,}2\ \text{мм}.$$



А. Семёнов

***Ф1300.** Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью E_0 напряженность поля вблизи точки А (рис. 1) оказывается равной $3E_0$, а вблизи точки Б — нулю. Определите напряженность поля вблизи точки В. Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере БАБ. Радиус сферы R.*

Есть несколько способов решения этой задачи. Мы разберем здесь один из них.

Сначала найдем распределение зарядов на сфере. Обозначим поверхностную плотность зарядов вблизи точки A через σ_0 и будем искать угловую зависимость $\sigma(\alpha)$ в виде $\sigma(\alpha)=\sigma_0 f(\alpha)$ (рис. 2). В силу симметрии функция $f(\alpha)$ четная, т. е. $f(\alpha)=f(-\alpha)$. Воспользуемся принципом суперпозиции — представим поле $\vec{E}_0$ (рис. 3) в виде суммы двух однородных полей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2 (E_1=E_2)$. Выразим плотность зарядов вблизи точки A через заряды, наведенные полями $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$:

$$\sigma_A=\sigma_0=\sigma(\vec{E}_1)+\sigma(\vec{E}_2)=\sigma_0\frac{E_1}{E_0}f(\alpha)+\sigma_0\frac{E_2}{E_0}f(\alpha).$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что константа σ_0 в распределении $\sigma(\alpha)$ пропорциональна внешнему полю:

$$\frac{\sigma_0(E_0)}{E_0}=\frac{\sigma_0(E_1)}{E_1}=\frac{\sigma_0(E_2)}{E_2}.$$

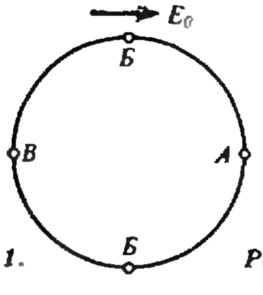


Рис. 1.

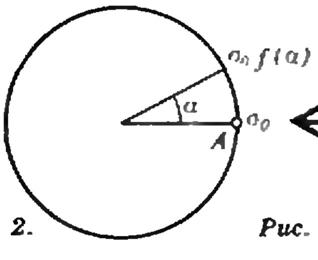


Рис. 2.

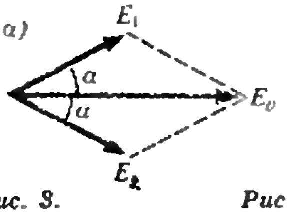


Рис. 3.

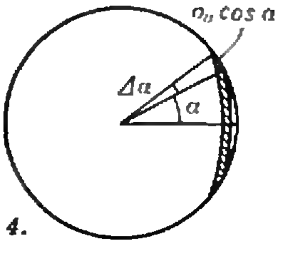


Рис. 4.

Но $E_1 = E_2 = E_0/(2\cos\alpha)$, значит,

$$f(\alpha) = \cos\alpha.$$

Теперь найдем значение σ_0. Для этого рассмотрим небольшой заряженный участок на сфере, включающий точку A. Если подойти к нему совсем близко, то он превратится в знакомый объект — бесконечную заряженную плоскость, которая создает однородное поле напряженностью $\sigma_0/(2\varepsilon_0)$, направленное в обе стороны от плоскости. Внутри сферы поле равно нулю, снаружи в непосредственной близости от точки A оно равно $3E_0$. Переход через выделенный нами участок дает скачок поля $3E_0$, значит,

$$\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\right) = 3E_0 \Rightarrow \sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0.$$

Заметим, что плотность зарядов в точке B равна $-\sigma_0$ (это видно из симметрии: впрочем, и из полученной нами формулы для функции $f(\alpha)$ это тоже следует). Следовательно, поле около этой точки такое же, как и около точки A, только направлено оно не от сферы, а к ней. Итак, искомая напряженность поля

$$\vec{E}_B = \vec{E}_A = 3\vec{E}_0.$$

Осталось найти полный заряд полусферы $БAБ$. Разобьем ее на тонкие кольца — одно из них выделено на рисунке 4. Заряд этого кольца равен

$$\Delta Q = \sigma_0 \cos\alpha \cdot \Delta S = \sigma_0 \cos\alpha \cdot 2\pi R \sin\alpha \cdot R\Delta\alpha.$$

Подставляя сюда значение σ_0 и суммируя заряды (интеграл получается совсем простой, но, если вам не хочется его считать, попробуйте выразить площадь проекции этого кольца на плоскость, проходящую через центр сферы и перпендикулярную $\vec{E}_0$), получаем

$$Q = 3\pi\varepsilon_0 R^2 E_0.$$

В. Можаев

Ф1301. *На тороидальном сердечнике симметрично расположены три одинаковые обмотки, образующие трансформатор. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр. Оказалось, что вольтметр в этом случае показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накоротко? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малыми, вольтметр и источ-*

Из условия ясно, что в первом случае поле создается только катушкой, включенной в сеть. Магнитный поток в этой катушке равен

$$\Phi_1 = LI_1,$$

где L — индуктивность катушки, I_1 — ток в ней. Очевидно, что поток в третьей катушке тоже пропорционален току I_1, т. е.

$$\Phi_3 \sim I_1, \text{ или } \Phi_3 = MI_1,$$

где M — коэффициент, который обычно называют взаимной индуктивностью катушек. Тогда для отношения напряжений на катушках получаем

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{\Phi_3'}{\Phi_1'} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{M}{L} = \frac{1}{2}.$$

Во втором случае токи есть в двух катушках — включенной в сеть и замкнутой накоротко. Поэтому *ник — идеальными, магнитную проницаемость сердечника — не изменяющейся при различных значениях магнитной индукции.*

запишем

$$\Phi_1^{\bullet}=LI_1^{\bullet}+MI_2^{\bullet},$$
$$\Phi_3^{\bullet}=MI_1^{\bullet}+MI_2^{\bullet},$$
$$\Phi_2^{\bullet}=MI_1^{\bullet}+LI_2^{\bullet}=0$$

(так как сопротивление цепи мало́). Отсюда получаем

$$I_2^{\bullet}=-I_1^{\bullet}\frac{M}{L}$$

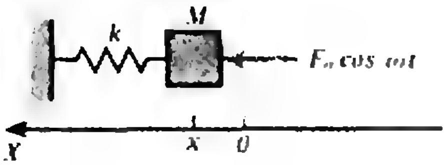
и

$$\frac{U_3^{\bullet}}{U_1^{\bullet}}=\frac{\Phi_3^{\bullet}}{\Phi_1^{\bullet}}=\frac{MI_1^{\bullet}+MI_2^{\bullet}}{LI_1^{\bullet}+MI_2^{\bullet}}=\frac{M-M^2/L}{L-M^2/L}=$$
$$=\frac{M}{L}\frac{1-M/L}{1-M^2/L^2}=\frac{M}{L}\frac{1}{1+M/L}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, вольтметр покажет теперь треть напряжения источника.

А. Андрианов

Ф1302. *На прислоненное к стенке тело массой M перпендикулярно стенке действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F=F_0\cos\omega t$. Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы амплитуда силы, действующей на стенку, отличалась от F_0 в 3 раза?*



Это — обычная задача на расчет вынужденных колебаний. Решение — уравнение колебаний груза с частотой вынуждающей силы (см. рисунок):

$$x=A\cos(\omega t+\varphi),$$

где A — амплитуда, φ — сдвиг фаз вынужденных колебаний.

Согласно второму закону Ньютона,

$$F_0\cos\omega t-kx=Ma,$$

или

$$F_0\cos\omega t-kA\cos(\omega t+\varphi)=-M\omega^2A\cos(\omega t+\varphi).$$

Видно, что сдвиг фаз φ равен либо 0, либо π. В обоих случаях амплитуду силы $T=kx$ можно записать в виде

$$T_{\max}=kx_{\max}=\frac{F_0}{|1-M\omega^2/k|}.$$

Нас интересуют значения k, для которых $T_{\max}=3F_0$ и $T_{\max}=1/3F_0$, поэтому запишем

$$1-\frac{M\omega^2}{k_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow k_1=3/2\,M\omega^2,$$
$$\frac{M\omega^2}{k_2}-1=\frac{1}{3}\Rightarrow k_2=3/4\,M\omega^2,$$
$$\frac{M\omega^2}{k_3}-1=3\Rightarrow k_3=1/4\,M\omega^2.$$

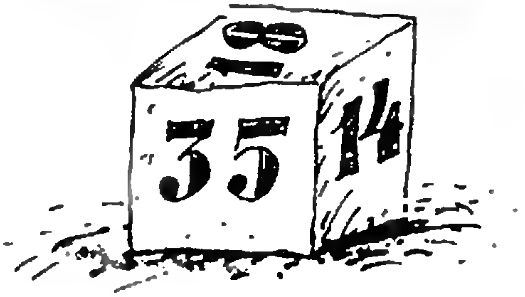
И. Воробьев

„Квант" для младших школьников

Задачи

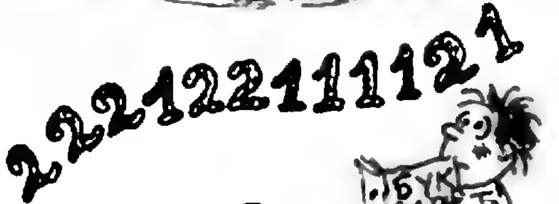
1. Некоторое трехзначное число состоит из различных цифр, следующих в порядке возрастания, а в его названии все слова начинаются с одной и той же буквы. Другое трехзначное число, наоборот, состоит из одинаковых цифр, но в его названии все слова начинаются с различных букв. Найдите эти числа.

2. На гранях кубика написаны 6 чисел. Те числа, которые не видны на рисунке,— простые. Какие это числа, если известно, что суммы чисел на каждой паре противоположных граней равны?

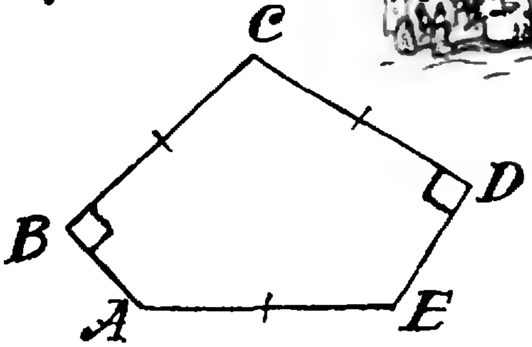


3. Несколько шахматистов в парке целый день играли в шахматы. Поскольку у них был лишь один комплект шахмат, то они установили следующий порядок игры: выигравший очередную партию пропускает две следующие партии, а проигравший — четыре. Сколько было шахматистов, если удалось это правило соблюсти? (При ничьей проигравшим считался тот, кто играл белыми фигурами.)

4. Если в некотором слове заменить буквы на номера этих букв в алфавите, получится число 222122111121. Какое это слово?



5. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы ABC и CDE равны по 90°, стороны BC, CD и AE равны по 1 и сумма сторон AB и DE равна 1. Докажите, что площадь пятиугольника равна 1.



Эти задачи нам предложили И. Акулич, Н. Антонович, С. Токарев, Х. Ахмедов и В. Произволов.

ЗАГАДКА ЛЕЙДЕНСКОЙ БАНКИ

Л. КРЫЖАНОВСКИЙ

Английский химик, физик и историк науки Джозеф Пристли (1733—1804) назвал лейденский опыт самым замечательным открытием в области электричества. Этот опыт, которым увенчалось изобретение первого конденсатора, был научной сенсацией XVIII века: всех восхищала длинная голубоватая искра и изумляло «электрическое потрясение» при разряде лейденской банки через тело экспериментатора; знатоки ценили способность лейденской банки накапливать большой заряд и долго хранить его.

В музее-усадьбе «Архангельское» под Москвой есть картина художника Шарля-Амедея Ван Лоо (1719—1795) «Электрический опыт» (1777 г.), рисунок с которой вы видите здесь на соседней странице. В чем же, собственно, состоит опыт, столь достоверно изображенный художником?

До изобретения «вольтова столба» (1799 г.) лабораторными источниками электричества служили только машины, основанные на электризации трением. Такая машина и изображена на картине — стеклянный шар, который при вращении трется о подушечку и вырабатывает заряд (раньше шар терся просто о руки ассистента). Девушка, изображенная в центре картины, стоит на изолирующей подставке. Стержень, который девушка держит в левой руке, почти касается вращающегося шара. Видны искры между шаром и стержнем. Тело человека — в общем неплохой проводник, поэтому другой стержень, который девушка держит в правой руке, также оказывается заряженным.

Главный участник опыта — бедняга-негритенок. В правой руке он держит сосуд с водой, куда погружен только что упомянутый стержень. Сосуд — это и есть лейденская банка в ее первоначальном варианте (1745 г.). В лейденской банке, изображенной на картине, диэлектриком служит стекло, внутренним электродом — вода, а внешним — ладонь экспериментатора. На картине изображен момент зарядки конденсатора. Пройдет мгновенье, негритенок приблизит свободную руку к стержню, между стержнем и рукой проскочит искра — и конденсатор разрядится через негритенка, который испытает электрический удар.

Одно из первых исследований лейденской банки провел американский ученый, просветитель и политик Бенджамин Франклин (1706—1790), который установил, в частности, что в лейденской банке одновременно накапливаются заряды, равные по величине и противоположные по знаку.

Франклин задался вопросом, где же, собственно, «сидят» заряды в лейденской банке. Для получения ответа на этот вопрос Франклин проделал такой опыт. Он зарядил лейденскую банку, а затем вынул из нее стержень и вылил «наэлектризованную» воду в другой сосуд. Лейденский опыт с этим сосудом не получился, зато, налив новой воды в первую лейденскую банку, Франклин разрядил ее через свое тело и испытал электрический удар практически такой же силы, как если бы он не выливал «наэлектризованную» воду. Франклин сделал вывод, что заряды «сидят» в стекле, а не в воде, как он сперва предположил.

Этот опыт описывается многими историками науки, которые при этом явно или неявно подтверждают справедливость вывода Франклина. К сожалению, осталось почти незамеченным исследование Адденбрука (1922 г.), в котором показана ошибочность вывода Франклина.

Адденбрук сделал разборный конденсатор, состоящий из трех цилиндров: одного стеклянного и двух металлических, плотно прилегающих к стеклянному изнутри и снаружи соответственно. Исследователь зарядил такой конденсатор, затем аккуратно разобрал его и ввел в соприкосновение друг с другом металлические цилиндры. Если цилиндры были заряжены, то они, естественно, должны *были при этом разрядиться.* Адденбрук снова собрал конденсатор. Как и в опыте Франклина, конденсатор оказался заряженным практически так же, как первоначально. Но Адденбрук не спешил подтвердить вывод Франклина. Он проделал подобный опыт с парафиновым цилиндром вместо стеклянного, и в этом случае получился результат, противоположный франклиновскому: восстановленный конденсатор был незаряженным, а заряды, как оказалось, «сидели» на металлических цилиндрах-обкладках (разумеется, до их соприкосновения).

Адденбрук сделал вывод, что «эффект Франклина» обусловлен водяной пленкой, которой в обычных *условиях всегда покрыто стекло. Дело в том, что заряды в состоянии* равновесия располагаются на поверхности проводника, роль которой как раз исполняет пленка воды. При удалении проводника (сливании воды, например) почти все заряды проводника остаются на этой пленке. Если тщательно просушить стекло и провести опыт в сухой атмосфере, то «эффект Франклина» не наблюдается.

Конечно, в опыте Франклина всегда имеет место «перетекание» ионов на стекло, но этот эффект незначителен. Несуществен в данном случае и электретный эффект*).

Следует заметить, что водяная пленка на ободке лейденского сосуда не препятствует его зарядке из-за малой подвижности ионов (разрядка конденсатора по пленке происходит гораздо медленнее, чем его зарядка).

Есть много школьных задач по физике, в которых речь идет о мысленных экспериментах с удалением и заменой диэлектриков конденсатора. *При этом молчаливо подразумевается,* что «эффект Франклина» отсутствует, т. е. заряжены только обкладки конденсатора. Как видим, в действительности дело обстоит сложнее.

---

*) Об электретном эффекте можно прочитать в статье «Электреты — диэлектрические аналоги магнитов», опубликованной в № 6 и 7 нашего журнала за этот год. *(Примеч. ред.)*

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Победители будут награждены призами журнала «Квант».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 1 февраля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

ВАСЕ ОТ ПЕТИ

ЗАДАЧИ

7. Число 1,5 интересно тем, что оно в 4 раза меньше суммы своих цифр. Найдите число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр.

М. Варга

8. На листе бумаги размером 3×4 сделали надрезы так, что он при этом не распался, но им стало возможно оклеить кубик 1×1×1 в два слоя. Как это сделали?

В. Произволов

9. Три школьника, у каждого из которых было несколько бумажных рублей, подошли к киоску с мороженым. Петя, имевший меньше всех — всего 1 рубль — купил две порции и ушел. Остальные двое решили купить как можно больше мороженого. Оказалось, что Коля смог бы купить 6 порций, а Вася — 11 порций. Если же они сложили бы свои капиталы, то на 18 порций им все равно не хватило бы. Сколько стоит порция мороженого в этом киоске?

И. Акулич

Нам пишут

С большим интересом я прочел статью «История одного неравенства» Л. Курляндчика и А. Файбусовича в журнале «Квант» № 4 за 1991 год. Я хочу рассказать о том, как с помощью элементарных вычислений можно доказать неравенство Шапиро для $n=3$, 4, 5 и 6.

В одном из недавних номеров журнала «Вюрцель» (ежемесячного математического журнала, рассчитанного на подготовленных школьников и старшекурсников) мы предложили неравенство Шапиро для $n=4$ как «задачу на приз». Наш читатель Кристиан Вей из Нейштадта-Доссе решил ее следующим образом. Рассмотрим $a_i=\sqrt{\dfrac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}}$ и $b_i=\sqrt{x_i(x_{i+1}+x_{i+2})}$. Применив к ним неравенство Коши, получим

$$(\Sigma x_i)^2\leqslant\left(\Sigma\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)\times$$
$$\times(\Sigma x_i(x_{i+1}+x_{i+2})).\quad(1)$$

Теперь достаточно показать, что

$$\frac{n}{2}\,\Sigma x_i(x_{i+1}+x_{i+2})\leqslant(\Sigma x_i)^2.\quad(2)$$

Для $n=4$ это есть просто переформулировка неравенства

$$(x_1-x_1)^2+(x_2-x_4)^2\geqslant 0.$$

В дальнейшем я обнаружил, что этот метод работает также для $n=3$ и $n=5$ (при тривиальном изменении выкладок) и даже для $n=6$. В последнем случае я использовал неравенство

$$\Sigma(x_i-x_{i+1}+x_{i+3}-$$
$$-x_{i+4})^2\geqslant 0,\quad(3)$$

из которого следует неравенство (2).

Я надеюсь, что это наблюдение вас заинтересует, так как я не нашел его в доступной мне литературе. Однако неравенства (1) и (2) не смогут оказаться полезными для $n>6$, так как в этом случае неравенство (2), очевидно, не имеет места.

Иоханнес Вальдман,
член редколлегии журнала «Вюрцель»,
Иена, Германия

Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Пока вода испаряется...» предназначена десятиклассникам, заметка «Как излучать радиоволны?» — одиннадцатиклассникам.
Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Пока вода испаряется...

Понаблюдаем за испарением воды в сосуде. Наполним водой небольшую кастрюльку или стакан и будем в течение дня следить за понижением ее уровня. Процесс этот достаточно медленный, и есть время поразмышлять и сделать некоторые оценки. В частности, попробуем оценить скорость испарения и сравним ее с нашими наблюдениями.

Каков же механизм процесса испарения? Вспомним, что для превращения некоторого количества воды в пар при неизменной температуре необходимо передать воде определенное количество теплоты — так называемую теплоту парообразования. Например, при комнатной температуре ($T=290$ К) теплота парообразования составляет 2,46 кДж на каждый грамм испаренной воды. Так как в 1 г воды содержится $1/18\ N_А$ молекул, где $N_А=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро, то получаем, что для удаления из жидкости одной молекулы надо затратить энергию $E_1=7{,}35\times10^{-20}$ Дж. В атомных расчетах принято выражать энергию в электронвольтах (эВ). Так как 1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж, то $E_1=0{,}46$ эВ.

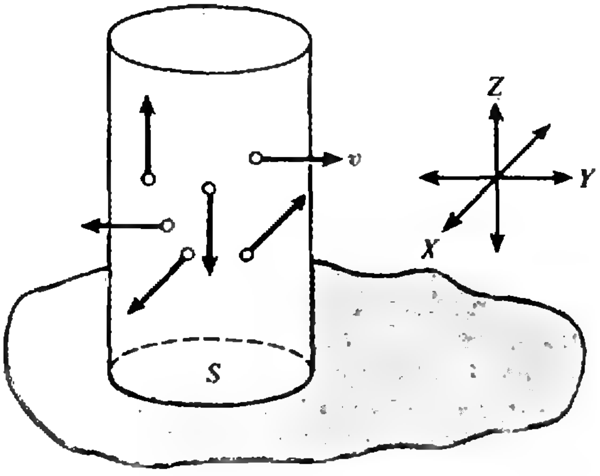
На что же идет затраченная энергия? Ответ почти очевидный — на преодоление силы притяжения, которая действует со стороны жидкости на вылетающую молекулу. Каждая молекула взаимодействует с окружающими ее другими молекулами. Сила взаимодействия на малых расстояниях ($r<r_0\sim10^{-8}$ см) имеет характер отталкивания, а на больших ($r>r_0$) — притяжения. В толще жидкости каждая молекула окружена другими такими же молекулами со всех сторон, и средняя результирующая сила равна нулю. В другом положении оказывается молекула, которая пытается покинуть поверхность воды и улететь в свободное пространство. Она притягивается к молекулам, расположенным на поверхности, и эта сила ничем не скомпенсирована. Поэтому, чтобы преодолеть притяжение и окончательно покинуть поверхность воды, молекула должна обладать достаточно большой кинетической энергией. Сравните: средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул воды, равная $(3/2)\,kT$, где $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, при $T=290$ К составляет 0,038 эВ, что на порядок меньше энергии E_1, которую необходимо сообщить молекуле для ее удаления из жидкости. Значит, покинуть поверхность могут лишь те немногочисленные молекулы, которые, находясь вблизи поверхности, в результате случайных столкновений приобрели энергию, на порядок бóльшую среднего значения.

Мы теперь можем несколько иначе взглянуть на теплоту парообразования. Конечно, поглощаемое водой тепло не передается непосредственно тем молекулам, которые вылетают с поверхности. Эти молекулы получают избыточную энергию случайным образом от своего окружения. Однако в результате того, что жидкость покидают не любые, а только самые «энергичные» молекулы, на каждую оставшуюся молекулу приходится уже несколько меньшая энергетическая норма. Если жидкость не «скомпенсирует» эту потерю, поглотив из окружающей среды достаточное количество теплоты, то ее температура будет уменьшаться. Чтобы этого не произошло, к жидкости надо подвести количество теплоты, как раз равное ее теплоте парообразования.

Иногда у школьников возникает неправильное представление о том, что вылетевшие быстрые молекулы обладают аномально большой энергией и поэтому пар должен быть горячей жидкости. Это, конечно, не так. Только в начале своего «свободного» движения молекула обладает избыточной энергией. Преодолевая силу притяжения, она теряет часть своей избыточной энергии, и средняя энергия вылетевших молекул оказывается равной средней энергии пара той же температуры.

Все это хорошо, скажете вы, но мы пока ни на шаг не продвинулись в оценке того, как быстро должна испаряться вода. Более того, стало понятно, что для проведения сколь-нибудь разумных оценок необходимо иметь гораздо более ясное количественное представление об «устройстве» жидкости и характере движения ее молекул. Но все же нам удастся проделать необходимые расчеты. И вот каким образом.

Оказывается, достаточно... мысленно поместить наш стакан с водой в закрытую банку. Через некоторое время в этой банке образуется насыщенный водяной пар, и процесс испарения прекратится. Точнее (и в этом суть!), испарение будет происходить так же, как и раньше, но количество вылетающих из жидкости молекул будет равно количеству молекул, попадающих в жидкость из пара. В таком случае говорят, что между жидкостью и паром установилось динамическое равновесие. Появляется возможность оценить интенсивность испарения косвенным путем, рассматривая не саму жидкость, а ее насыщенный пар. Выигрыш же состоит в том, что жидкость — объект очень сложный, а пар — достаточно простой. Во всяком случае, при проведении оценок насыщенный пар можно с хорошей точностью считать идеальным газом.



Проведем оценку, сделав некоторые упрощающие предположения. Будем считать, в частности, что все молекулы имеют одинаковую скорость v и что они могут двигаться не в произвольном направлении, а только в одном из шести направлений, задаваемых координатными осями (одна из осей вертикальна). За одну секунду на участок поверхности жидкости площадью S попадет 1/6 часть молекул, находящихся в цилиндре высотой v (см. рисунок):

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{1}{6}nvS,$$

где n — концентрация молекул (более детальный расчет дает множитель 1/4 вместо 1/6). Для оценки скорости v используем известное выражение для средней квадратичной скорости $v_{ср}=\sqrt{3kT/m}$ (здесь m — масса одной молекулы), концентрацию насыщенного пара n выразим через его давление $p_н$ с помощью уравнения состояния идеального газа $p_н=nkT$. Тогда для массы воды, «выпадающей» из насыщенного пара на площадку S поверхности за 1 с, получаем

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{1}{6}mnv_{ср}S=\frac{1}{2}p_н S\left(\frac{M}{3RT}\right)^{1/2},$$

где М — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная. Подставляя численные данные ($p_н$ при 17 °С составляет $0{,}02 \cdot 10^5$ Па), получим, что за 1 с на 1 см^2 поверхности из насыщенного пара поступает 0,16 г воды. Если предположить, что с такой же скоростью происходит испарение, то уровень воды в сосуде должен был бы опускаться на 1 см каждые 6 секунд!

Ясно, что это совсем не похоже на реальную картину. Мы потерпели очень поучительное поражение, и теперь необходимо разобраться в его причинах. Обсудим некоторые из них.

Первая причина кроется в самом эксперименте. Реальный процесс испарения существенно замедляется из-за того, что воздух в комнате не сухой, а влажный. Причем сама по себе влажность порядка 60—80 % приводила бы к замедлению процесса испарения всего в 3—4 раза. Но если не создавать потока воздуха возле поверхности воды (например, включив вентилятор), то влажность непосредственно возле поверхности оказывается достаточно близкой к 100 % и процесс испарения замедляется еще во много раз. Наша же оценка скорости испарения относится к идеальному случаю, когда обратное поступление молекул на поверхность полностью отсутствует.

Оказывается, однако, что и в этом идеальном случае мы ошибаемся примерно в 30 раз, но эта ошибка связана уже с самим расчетом. Дело в том, что только 3—4 % молекул, подлетающих к поверхности, захватываются этой поверхностью («прилипают») и попадают внутрь жидкости. Остальные же молекулы отражаются обратно.

Подведем окончательный итог. Если бы абсолютно сухой поток воздуха подхватывал все вылетевшие молекулы, поверхность воды в сосуде опускалась бы на 1 см не за 6 секунд, а за 3 минуты. Но все равно куда быстрее, чем можно было ожидать. Не правда ли?

М. Анфимов, А. Черноуцан

Как излучать радиоволны?

Прежде чем излучать радиоволны — электромагнитные колебания определенной частоты, нужно эти колебания получить. Это можно сделать при помощи генератора незатухающих колебаний. А вот как добиться того, чтобы о наличии колебаний можно было узнать вдали от генератора,— это и есть тема заметки.

Сформулируем задачу конкретнее: что нужно подключить к выходу генератора незатухающих колебаний, чтобы от него побежала электромагнитная волна? Вопрос этот не простой, зато можно легко догадаться, какие элементы на роль излучающей антенны явно не подходят. Вот, например, резистор. Если мы подключим его к выходу генератора, то вся энергия, которую он от генератора получит, полностью перейдет в тепло. Не подходит на роль антенны и конденсатор — средняя мощность, которую он получает от генератора, в точности равна нулю (сдвиг фаз между напряжением и током равен четверти периода). Значит, ему просто нечего излучать — ведь при излучении электромагнитных волн энергия должна передаваться от источника по всем направлениям. То же самое справедливо и для катушки индуктивности.

Таким образом, для того чтобы мощность отнималась от генератора, нужно изменить сдвиг фаз между током и напряжением — он не должен составлять четверть периода. Этого можно добиться, например, соединив последовательно конденсатор и резистор. Однако ничего полезного для нас при этом не произойдет: теперь цепь нагрузки (конденсатор и резистор) отнимает от генератора энергию, но вся эта энергия полностью переходит в тепло. Попробуйте в этом убедиться самостоятельно — для такой простой цепи это не вызовет трудностей. Оказывается, и для произвольных LCR-цепей (например, как на рисунке 1) выполняется это правило: вся мощность, которую цепь получает от источника, переходит в

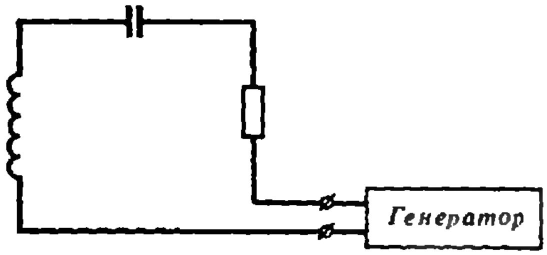


Рис. 1.

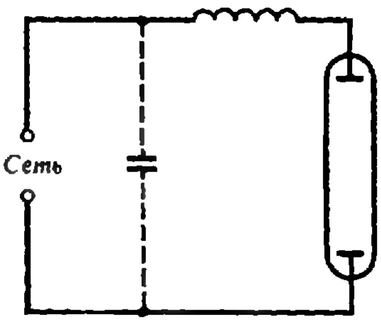


Рис. 2.

тепло. При этом зависимость мгновенной мощности от времени имеет вид

$$p=u(t)\,i(t)=U_0\cos\omega t\cdot I_0\cos(\omega t+\varphi),$$

где φ — сдвиг фаз между током и напряжением. После простых тригонометрических преобразований легко найти среднюю мощность, потребляемую от источника за период (а значит, и за большой промежуток времени):

$$P_{ср}=\frac{1}{2}U_0I_0\cos\varphi=UI\cos\varphi.$$

Это и есть в точности мощность, переходящая в тепло.

Заметим, кстати, что максимальное значение мгновенной мощности больше значения $P_{ср}$, причем при сдвигах фаз, близких к 90°,— во много раз. Это означает, что источник должен быть в состоянии развивать мгновенную мощность существенно более высокую, чем та, которую в среднем от него отнимают. Такое положение возникает часто в практической электротехнике — при подключении ламп дневного света, электродвигателей и т. п. С лампами дневного света это происходит потому, что ток через лампу задается последовательным подключением катушки индуктивности и сдвиг фаз получается близким к 90° (рис. 2). Излишняя нагрузка для электросети крайне нежелательна, так как приводит к дополнительным потерям в виде тепла и вынуждает применять провода с большим сечением. Положение можно поправить, подключив параллельно конденсатор подходящей емкости (тут нужна настройка в резонанс!). При этом катушка и конденсатор обмениваются между собой энергией во время всего периода — «лишняя» энергия перекачивается между ними, а сеть — источник поступающей в нагрузку энергии — отдает только то количество энергии, которое переходит в тепло.

Итак, цепи такого рода (*LCR*-цепи) не годятся на роль антенны. Проблема состоит в том, чтобы сделать сдвиг фаз между током и напряжением в цепи отличным от 90°, но не за счет выделения тепла, т. е. без резисторов. Оказывается, если размеры компонентов цепи нагрузки малы по сравнению с длиной волны, ничего нельзя сделать. А вот при больших размерах элементов нагрузки дополнительный сдвиг фаз можно получить за счет запаздывания распространения волны.

Пусть в качестве нагрузки использован конденсатор, сопротивление которого (для переменного тока заданной частоты) оптимально для данного генератора. Теперь начнем увеличивать запаздывание, изменяя габариты конденсатора. Но нельзя просто увеличить размеры пластин конденсатора — его емкость станет больше. Для сохранения емкости придется увеличить и расстояние между пластинами. Строго говоря, конденсатор больших размеров — это уже не конденсатор. Сдвиг фаз теперь соответствует другой цепи, и от генератора потребуется мощность, хотя резисторов тут нет и тепло не выделяется. Следовательно, энергия от генератора должна куда-то уходить, а именно — излучаться в пространство.

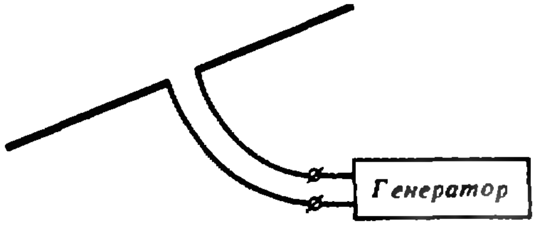


Рис. 3.

Для получения наибольшей излучаемой мощности нужно довести размеры и конфигурацию антенны до оптимума. Если такая антенна состоит, например, из двух стержней — длинных и тонких, то оптимальная длина каждого из них должна быть равна четверти длины волны, стержни нужно направить вдоль одной прямой, а выводы генератора незатухающих колебаний подключить так, как показано на рисунке 3. Такие антенны часто применяют в качестве приемных для телевизоров. В сущности приемные и передающие антенны не отличаются друг от друга (только для очень мощных передатчиков нужно делать специальные передающие антенны, с учетом высоких напряжений и больших токов, подаваемых на антенну для передачи).

Если размеры антенны выбраны правильно, то не создается «лишней» нагрузки для генератора радиопередатчика и отнимаемая от него энергия излучается в пространство. Однако эти пожелания легко удовлетворить только для стационарных радиопередатчиков и не очень низких частот передачи (для которых не слишком велика длина волны). Для переносных радиостанций это не всегда возможно — антенна получается намного короче, чем нужно для оптимального согласования с генератором.

В таком случае можно «облегчить участь» генератора, подключив последовательно с антенной катушку индуктивности (ее так и называют — удлинительной)— емкостное сопротивление короткого антенного провода будет скомпенсировано индуктивным сопротивлением катушки.

Антенна может состоять и из нескольких проводников — выбирая длину и положение этих проводников и подавая в них токи от генератора в нужных фазах, можно добиться того, чтобы излучение происходило преимущественно в заданном направлении («направленная» антенна). Это — пример использования интерференции в технических целях. Кстати, вовсе не обязательно подключать все проводники к генератору — вполне достаточным для наших целей может оказаться тот ток, который возникает в проводнике из-за того, что он находится в электромагнитном поле основной антенны. Все это относится и к приемной антенне, которая чаще всего включает основной проводник — «вибратор» (происхождение этого термина должно быть ясным) и несколько дополнительных, ни к чему не подключенных проводников строго определенных размеров и местоположения (их называют «директор» и «рефлектор», от их числа и точности подбора зависит направлениость антенны).

Оказывается, можно подобрать конфигурацию сложной антенны так, чтобы она работала удовлетворительно не только на строго определенной частоте, но и в целом диапазоне частот. Это совершенно необходимо, например, для приема телевидения — ведь не очень удобно иметь для каждого канала свою антенну. Однако, если частоты каналов сильно разнесены или антенна находится очень далеко от телецентра, приходится использовать несколько отдельных, хорошо настроенных антенн.

А. Рафаилов

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Три груза массой m каждый соединены невесомыми пружинками и подвешены на нити (рис. 1). Найдите ускорение каждого груза сразу же после пережигания нити.

2. Через невесомый блок, который может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси, перекинули идеальную нить, к концам которой подвесили два груза (рис. 2). При каком отношении масс этих грузов сила, действующая на ось блока, будет равна силе тяжести, действующей на груз большей массы?

3. К тяжелой веревке длиной l, лежащей на гладком горизонтальном столе, приложили силу $\vec{F}$, направленную вдоль веревки (рис. 3). Найдите натяжение веревки на расстоянии x от того конца, к которому приложена сила.

4. Коэффициент трения между бруском и наклонной доской (рис. 4) равен μ. Постройте график зависимости силы трения между бруском и доской от угла α наклона доски к горизонту. Масса бруска m.

5. В цирковом аттракционе мотоциклист едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $R=10$ м. При какой скорости велосипедиста это возможно, если коэффициент трения между колесами мотоцикла и поверхностью цилиндра $\mu=0,5$? Размерами мотоциклиста можно пренебречь.

10 класс

6. На какую высоту можно было бы поднять балку массой $M=1$ т, если бы удалось полностью использовать всю энергию, выделяющуюся при остывании стакана чая от $t_1=100$ °C до $t_2=20$ °C? На какую высоту можно поднять эту же балку с помощью энергии, которую необходимо затратить для испарения воды, находящейся в стакане? Масса воды в стакане $m=250$ г.

7. На сколько изменится температура каждого из двух одинаковых шаров в результате лобового удара, если скорость налетающего шара уменьшилась с $v_1=10$ м/с до $u_1=4$ м/с? Второй шар до удара покоился. Удельная теплоемкость материала шаров $c=300$ Дж/(кг · К).

8. На рисунке 5 изображены три процесса, в каждом из которых температура идеального газа изменяется на одну и ту же величину. В каком из этих процессов газ получает наибольшее количество теплоты?

9. Теплоизолированный от внешнего мира цилиндрический сосуд содержит подвижную перегородку, которая может перемещаться без трения. В начальный момент перегородка закреплена посередине сосуда, причем по одну ее сторону находится 1 моль некоторого идеального газа, а по другую сторону — 2 моля того же газа. Перегородка проводит тепло, поэтому оба газа имеют одинаковую температуру. Как изменится эта температура, если освободить перегородку?

10. В каком случае произойдет большее увеличение КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно,— при увеличении температуры нагревателя на 1К или при уменьшении на такую же величину температуры холодильника?

11 класс

11. Луч карманного фонарика отражается в зеркальной дверце шкафа. На какой угол повернется отраженный луч, если дверцу приоткрыть на угол α?

12. Какова кажущаяся глубина реки, если ее истинная глубина $h=1$ м? Дно рассматривают с мостика, глядя при этом вертикально вниз. Показатель преломления воды $n=4/3$.

13. Кубик из стекла с показателем преломления n ставят сверху на лист бумаги с текстом. При каком n текст нельзя будет увидеть через боковую грань кубика?

14. Параллельный пучок лучей падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_1=15$ см. На каком расстоянии от собирающей надо поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2=-9$ см, чтобы после прохождения двух линз лучи снова шли параллельным пучком?

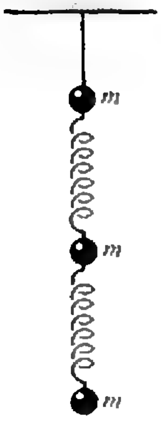


Рис. 1.

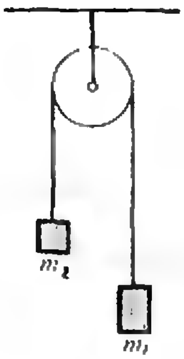


Рис. 2.

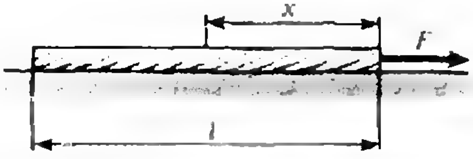


Рис. 3.

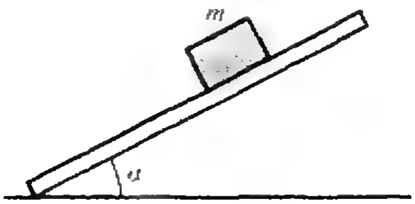


Рис. 4.

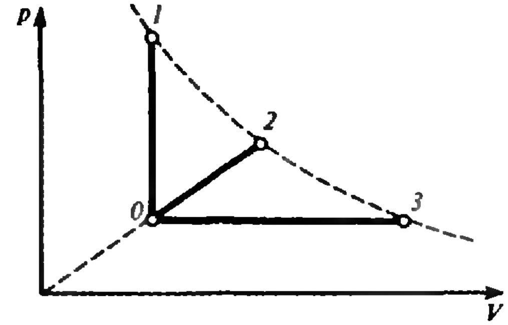


Рис. 5.

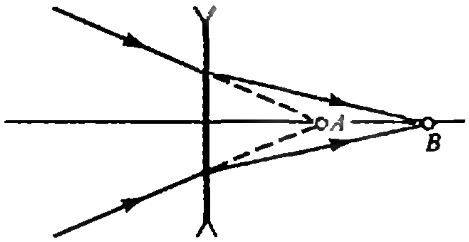


Рис. 6.

15. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу (рис. 6). В отсутствие линзы лучи сходились бы в точке A, расположенной на расстоянии $d=10$ см от линзы. После преломления в линзе лучи сходятся в точке B, удаленной от линзы на расстояние $f=15$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовил А. Черноуцан

(Начало см. на с. 17)

и оформить в отдельной школьной тетради — по одной задаче на листе, с сохранением порядка задач в задании.

На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сведения о себе (участие в олимпиадах, обучение в других заочных школах, членство в ВАКО «Союз», сведения о родителях).

Для получения решения приемной комиссии вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом. Тетрадь с выполненным заданием вышлите не позднее *1 февраля 1992 года* простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный, МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований, «Школа».

Вступительное задание обратно не высылается. Решение приемной комиссии будет сообщено в мае 1992 года.

Ниже приводятся условия задач вступительного задания в ЗАКШ. Задачи 1—6 предназначены поступающим в 10 класс, задачи 3—8 — в 11 класс. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Шар массой M плавает на поверхности жидкости, погрузившись в нее наполовину. Внутри шара имеется полость. Определите массу песка, которую необходимо засыпать в полость, чтобы шар плавал внутри жидкости.

2. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_1=25$ м/с. Через $t_1=1$ с брошен второй мяч так, что оба мяча достигают земли одновременно. Считая, что движение происходит вдоль одной прямой, найдите относительную скорость мячей за $t_2=1$ с до падения.

3. На участке цепи, состоящем из двух последовательно соединенных резисторов, сопротивления которых отличаются в 2 раза, выделяется мощность P. Определите, как следует изменить силу тока на участке цепи, чтобы при параллельном соединении этих резисторов выделяемая мощность увеличилась в 2 раза.

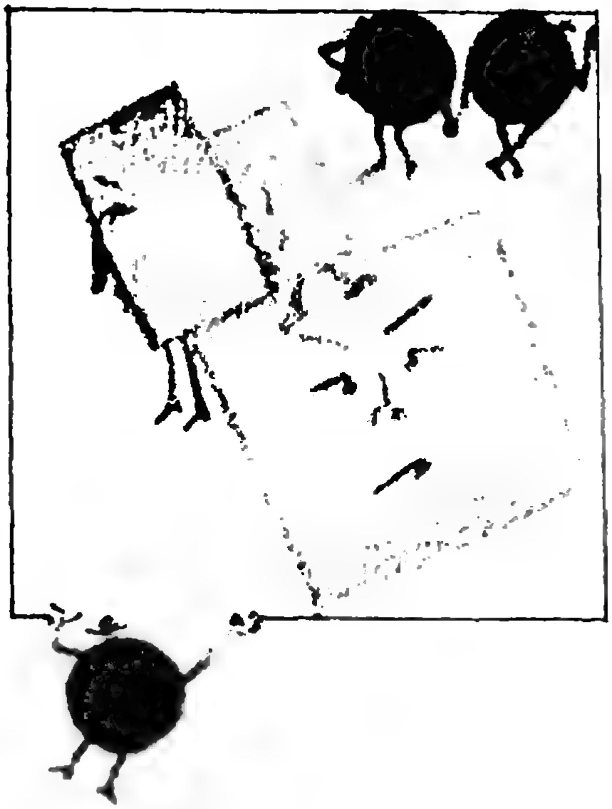
4. В сосуд с водой при $t=25$ °С опустили медный шарик массой $m=200$ г при температуре $t_0=300$ °С. В момент, когда температуры воды и шарика сравнялись, в сосуд опустили еще один такой же шарик. До какой температуры нагреется вода? Удельная теплоемкость меди $c_м=380$ Дж/(кг·К), воды $c_в=4200$ Дж/(кг·К). Масса воды $M=1$ кг.

5. Пушка установлена на платформе, движущейся с постоянной скоростью v. Скорость вылета снаряда относительно пушки $v_0=5v$. Определите угол, под которым необходимо выстрелить в направлении движения платформы, чтобы снаряд улетел на максимальное расстояние. Масса снаряда значительно меньше массы платформы.

6. На покоящийся шар налетает шар вдвое большей массы. В результате центрального неупругого столкновения шары разлетаются в противоположные стороны, причем скорость налетевшего шара оказывается в 3 раза меньше первоначальной. Определите, какая доля кинетической энергии перешла в тепло.

7. Пар совершает работу $A=15$ кДж по перемещению поршня площадью $S=200$ см^2. При этом давление пара убывает от $p_1=2$ МПа до $p_2=0{,}1$ МПа. Считая зависимость давления от объема линейной, определите расстояние, на которое переместится поршень.

8. Определите, как изменится заряд заземленного металлического шара радиусом R при перемещении точечного заряда q между точками, расположенными на расстояниях $2R$ и $4R$ от центра шара.



Математический кружок

Индикатриса ширин и ее применение

Доктор физико-математических наук
В. ЗАЛГАЛЛЕР

Начнем с задачи

Задача. *В квадрате 70×70 размещены без налеганий пять фигур: квадрат 30×30, прямоугольники 25×15 и 20×10 и два круга радиусами 5. Докажите, что найдется место, чтобы, не сдвигая имеющиеся фигуры, разместить еще один круг радиусом 5.*

Решение. Центр нового круга предстоит искать в квадрате Q размером 60×60, получающемся из квадрата 70×70 после исключения краевой каймы шириной 5 (рис. 1). При этом искомый центр должен быть удален не менее чем на 5 от уже размещенных фигур. Окружим каждую из пяти фигур каймой шириной 5 (рис. 2). Общая площадь этих «расширенных» фигур $2775+275\pi<3642$. Казалось бы, они могут исчерпать площадь Q. Но если места для искомого центра нет, то, в частности, таким местом не является ни одна из вершин Q, т. е. каждая из них покрыта одной из «расширенных» фигур. Тогда хоть одна из вершин Q покрыта именно кругом радиусом 10 (см. рис. 1).

Упражнение 1. Докажите, что площадь части круга, находящейся вне Q, не меньше площади двух 90-градусных сегментов этого круга, т. е. не меньше, чем

$$(\pi-2)\frac{10^2}{2}>57.$$

Остается заметить, что площадь покрытой нашими фигурами части Q не больше чем $3642-57<3600$. Итак, «расширенные» фигуры не могут исчерпать площадь Q.

Обобщение задачи

Теперь главное. Как вы подойдете к той же задаче, если вам предложат *доказать, что найдется место не только для одного, но и для двух кругов радиусами 5?*

Предложим план решения. В квадрате 70×70 разместим 16 центров возможных кругов, как указано на рисунке 3. (Эти центры служат узлами квадратной решетки с шагом 20.) Несложный физический эксперимент с бумажными шаблонами «расширенных» фигур подсказывает нам,

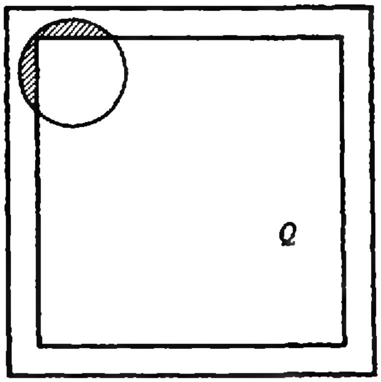


Рис. 1.

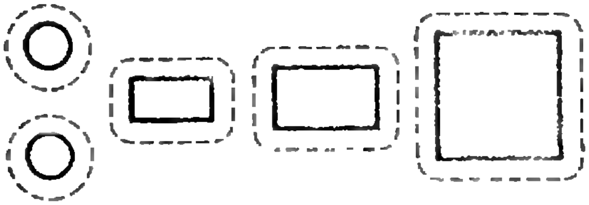


Рис. 2.

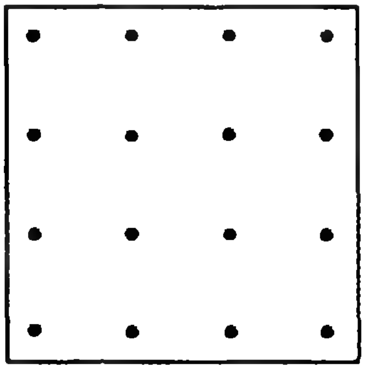


Рис. 3.

что квадрат 40×40 (открытый, т. е. без включения в него границы) не может покрыть одновременно более 5 узлов, открытые многоугольники 35×25 и 30×20 — соответственно не более 4 и 3, и открытые круги радиусами 10 — не более чем по одному. Итого, при любом размещении наших расширенных фигур, из 16 отмеченных центров удастся покрыть не более 14. Так что два заведомо останутся непокрытыми. Поэтому к размещенным фигурам можно будет добавить два круга, притом именно из числа указанных заранее 16 кругов.

Упражнение 2. Проделайте описанные выше эксперименты с шаблонами, вырезав их из бумаги.

Чтобы превратить эти «экспериментальные» соображения в строгое доказательство, обратимся к новым понятиям.

Ширина фигуры

Будем рассматривать только замкнутые (содержащие свои граничные точки) ограниченные фигуры Ф. Например, отрезки, треугольники, прямоугольники. Дадим три определения.

1. *Шириной* фигуры Ф *в направлении* $\vec{u}$ называют минимальную ширину замкнутой (т. е. включающей свои края) полосы, направленной перпендикулярно $\vec{u}$ и содержащей фигуру Ф.

2. Просто *шириной* фигуры Ф называют наименьшую из ширин Ф в разных направлениях.

3. Если от произвольно фиксированной точки Q в каждом направлении $\vec{u}$ отложить отрезок, длина которого равна ширине фигуры Ф в направлении $\vec{u}$, то эти отрезки (мы называем их «радиусами» индикатрисы) заполнят фигуру, которую будем называть *индикатрисой* ширин фигуры Ф.

Упражнения

3. Найдите ширину квадрата радиусом 1.

4. Докажите, что ширина треугольника равна наименьшей из его высот.

5. Убедитесь, что для отрезка длины d индикатриса ширин имеет вид двух касающихся в точке O кругов, каждый диаметром d (рис. 4).

6. Докажите, что индикатриса ширин прямоугольника совпадает с объединением индикатрис двух его диагоналей. (На рисунке 5 изображена индикатриса ширин прямоугольника 40×20. Пунктиром указан круг радиусом 40 и выделен угол, в пределах которого «радиусы» индикатрисы короче 40.)

7. Докажите, что индикатриса ширин треугольника совпадает с объединением индикатрис трех его сторон. (На рисунке 6 изображена индикатриса ширин равнобедренного треугольника T_1 с основанием 40 и высотой 40, а на рисунке 7 — равнобедренного треугольника T_2 с основанием $20\sqrt{2}$ и боковыми сторонами $20\sqrt{5}$. Как и на рисунке 5 указан пунктиром круг радиуса 40 и выделен угол, в пределах которого «радиусы» индикатрисы короче 40.)

При данных выше определениях очевидна справедливость следующих утверждений.

Чтобы замкнутую ограниченную фигуру Ф можно было покрыть открытой (не содержащей своих краев) полосой ширины h, необходимо и достаточно, чтобы ширина Ф была меньше h.

Чтобы замкнутую ограниченную фигуру Ф можно было покрыть открытым (не содержащим своего контура) квадратом со стороной a, не-

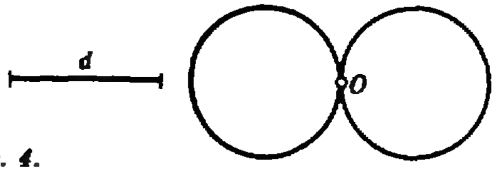
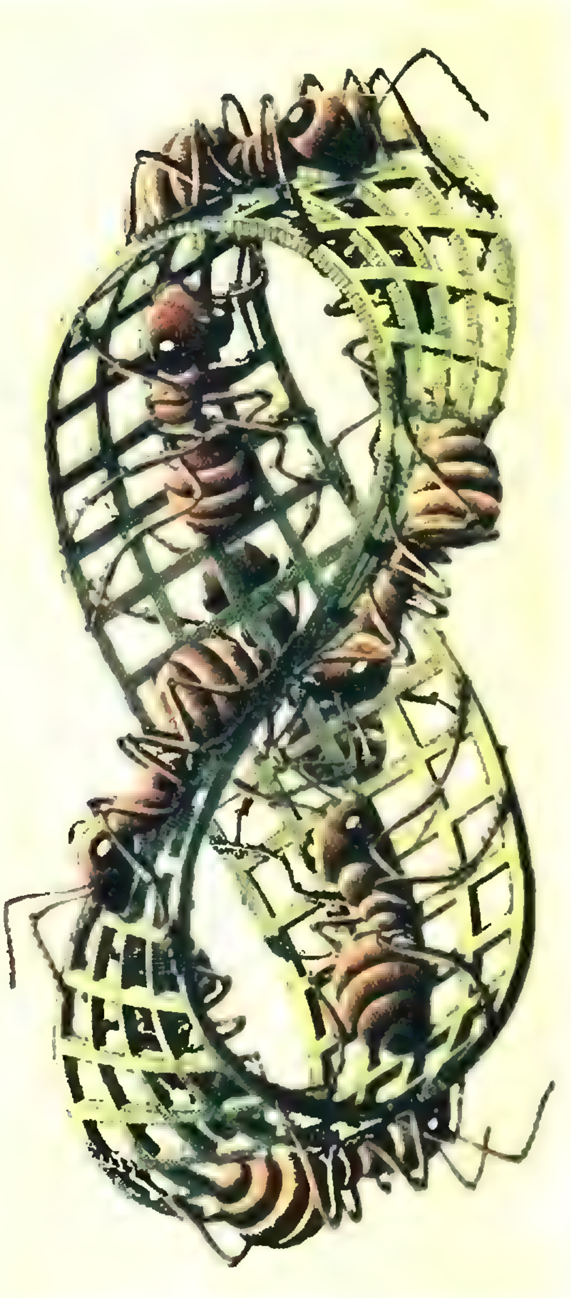


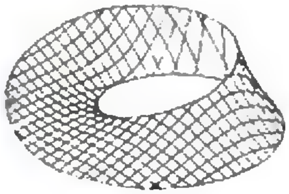
Рис. 4.

(Окончание см. на с. 42)

Лист Мёбиуса

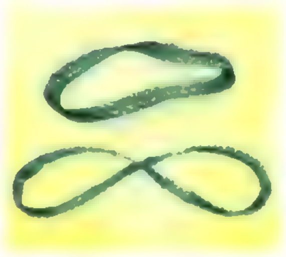
Лист Мёбиуса относится к числу «математических неожиданностей». Получить его очень просто: склейте из бумажной полоски кольцо, только перед склеиванием поверните один конец на 180°. Если полоска бумаги была длинной, то такой поворот мог произойти и случайно. Рассказывают, что открыть свой «лист» Мёбиусу помогла служанка, сшившая однажды неправильно концы ленты.





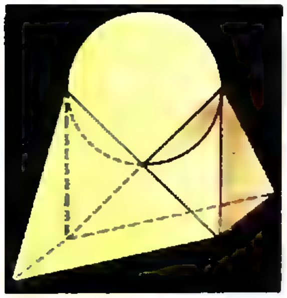
Как бы то ни было, но в 1858 году лейпцигский профессор Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868), ученик К. Ф. Гаусса, астроном и геометр, послал в Парижскую академию наук работу, включавшую сведения об этом листе. Семь лет он дожидался рассмотрения своей работы и, не дождавшись, опубликовал ее результаты. Одновременно с Мёбиусом изобрел этот лист и другой ученик К. Ф. Гаусса — Иоганн Бенедикт Листинг (1808—1882), профессор Геттингенского университета. Свою работу он опубликовал на три года раньше, чем Мёбиус,— в 1862 году. Что же поразило этих двух немецких профессоров? А то, что у листа Мёбиуса — всего одна сторона. Мы же привыкли к тому, что у всякой поверхности, с которой мы имеем дело (лист бумаги, велосипедная или волейбольная камера),— две стороны. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса несложно: начните постепенно окрашивать его в какой-нибудь цвет, начиная с любого места, и по завершении работы вы обнаружите, что весь он полностью окрашен.

Вторая неожиданность поджидает нас в тот момент, когда мы попробуем разрезать лист Мёбиуса по его средней линии. «Нормальное» кольцо при этом распалось бы на два куска, а лист Мёбиуса превратится в одно перекрученное кольцо. Чтобы можно было демонстрировать это свойство многократно, удобно соорудить лист Мёбиуса из застежки «молния». Еще удивительнее то, что полученное кольцо уже двустороннее.

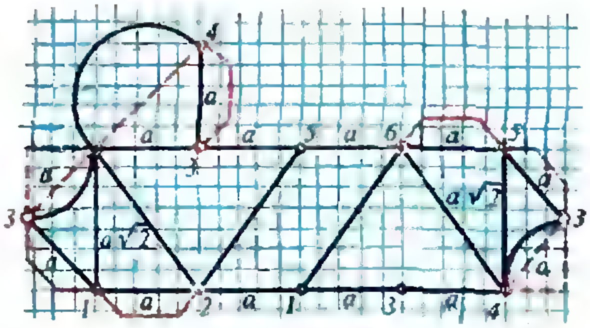


Неожиданность номер три: граница у листа Мёбиуса одна, и не распадается на две части, как у обычного кольца. Заметим, что свойство односторонности не исчезает у поверхности, если ее гнуть, растягивать, сжимать, но не склеивать и не рвать. Свойства геометрических объектов, которые не меняются при таких преобразованиях, изучает математическая наука — *топология*. (Любопытно, что это название ей дал Иоганн Листинг.)

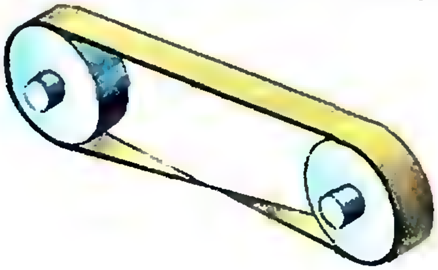
Лист Мёбиуса был одним из основных геометрических объектов, натолкнувших математиков на изучение, как теперь принято говорить, *топологических* свойств фигур. Московский математик К. Ливанов попробовал продеформировать таким образом лист Мёбиуса, чтобы его граница превратилась в окружность. И вот что у него получилось.



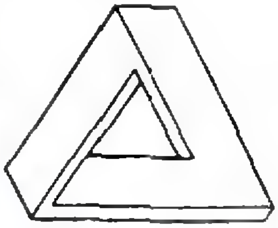
Для желающих склеить эту фигуру приводим ее развертку.



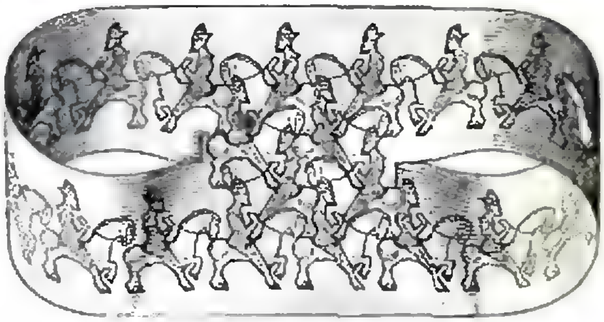
Свойство односторонности листа Мёбиуса было использовано в технике: если у ременной передачи ремень сделать в виде ленты Мёбиуса, то его поверхность будет изнашиваться вдвое медленнее, чем у обычного кольца. Это дает ощутимую экономию.



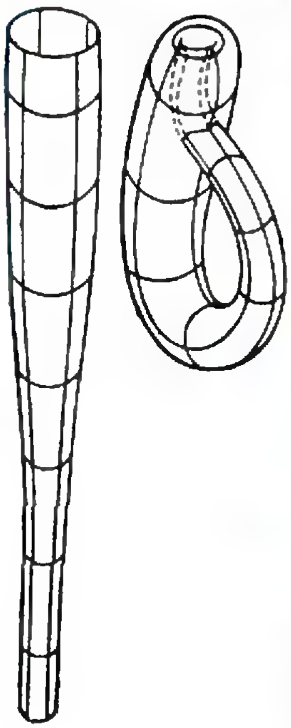
Возникшая недавно мода на рисунки «невозможных объектов» не обошла и лист Мёбиуса. Вот как его изобразил шведский художник О. Рутерсвард.



Лист Мёбиуса часто использовал в своих рисунках нидерландский художник М. Эшер. На предыдущей странице помещена его картина на эту тему, а вот еще один его рисунок.

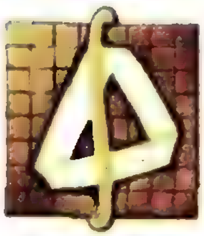


А что получится, если склеить границами два листа Мёбиуса? Представить себе это очень трудно, притом невозможно совершить такую операцию, если не разрешать поверхности пересекать саму себя. Если же разрешить это делать, то получим любопытную поверхность без границы (как, например, у сферы), которая называется «бутылкой Клейна» — в честь еще одного выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849—1925). Она изображена на рисунке внизу колонки.



В заключение стоит упомянуть о «двойном листе Мёбиуса». Получается он так: сначала склейте из бумажной полоски обычный лист Мёбиуса, затем возьмите полоску вдвое более длинную и оберните ею лист Мёбиуса. В результате концы этой полоски сойдутся, и их нужно будет склеить между собой. Эта лента двусторонняя — одна ее сторона обращена к листу Мёбиуса, а другая — наружу. Если эти ленты разнять, то они оказываются сцепленными, и сам двойной лист Мебиуса оказывается сильно закрученным, он соответствует обычной склейке ленты, но с поворотом одного из ее концов на 720°.

Конечно же, главная *ценность листа Мёбиуса* состоит в том, что он дал толчок новым обширным математическим исследованиям. Именно поэтому его часто считают символом современной математики и изображают на различных эмблемах и значках, как, например, на значке механико-математического факультета Московского университета.



обходимо и достаточно, чтобы у индикатрисы ширин фигуры Ф существовали два перпендикулярных «радиуса», каждый из которых был бы короче a.

Упражнение 8. Внимательно изучив рисунки 5, 6, 7, вычислите углы сектора, в пределах которого «радиусы» индикатрис короче 40, и на этом основании докажите, что открытым квадратом 40×40 нельзя покрыть замкнутый прямоугольник 40×20, а также нельзя покрыть равнобедренные треугольники T_1, T_2.

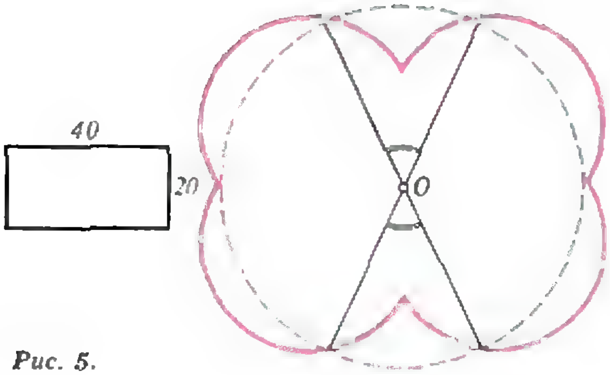


Рис. 5.

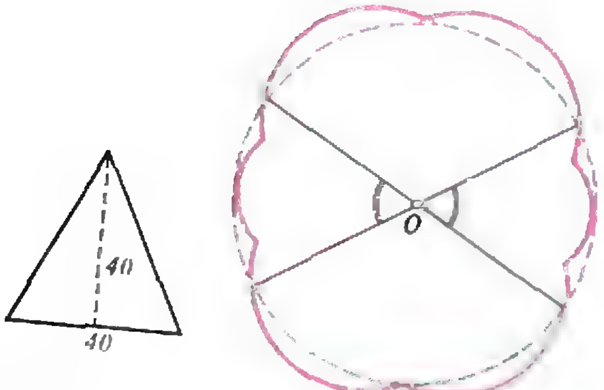


Рис. 6.

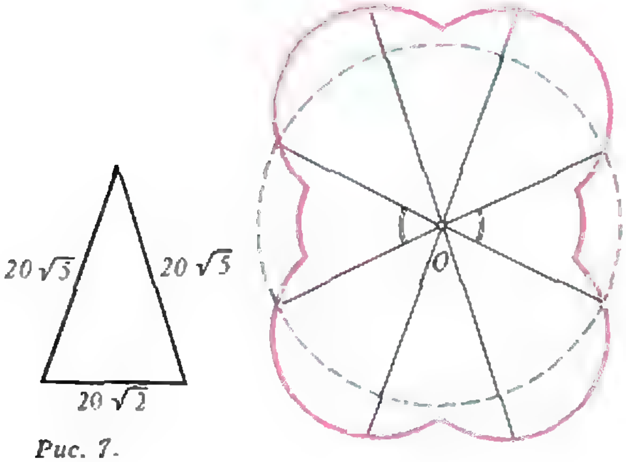


Рис. 7.

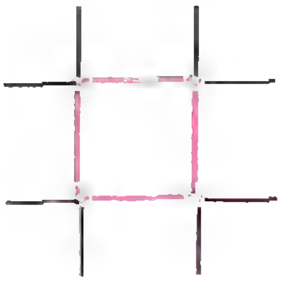


Рис. 8.

Решение задачи о двух кругах

Теперь мы готовы доказать экспериментально обнаруженные утверждения, высказанные ранее.

Прежде всего открытый круг радиуса 10 не может покрыть более одного узла решетки с шагом 20, поскольку расстояния между узлами не меньше 20-ти. Далее, у открытого прямоугольника 30×20 диагональ короче 40, поэтому он может накрывать узлы только из двух строк и из двух столбцов решетки. Таких узлов четыре (рис. 8). Если бы наш прямоугольник накрыл все эти четыре точки, то продолжающая его открытая полоса ширины 20 накрыла бы замкнутый квадрат со стороной 20, что невозможно. Значит, открытый прямоугольник 30×20 не может накрыть более 3 узлов решетки.

Поскольку у прямоугольника 35×25 диагональ короче 60, этот прямоугольник может покрывать узлы лишь из трех строк и трех столбцов решетки. Таких узлов девять (рис. 9). Занумеруем их. Допустим, что наш прямоугольник покрыл более 4 узлов. Если при этом не покрыт ни один из узлов 1, 3, 7, 9, то покрыты все остальные, в том числе — узлы 2, 6, 8, 4, образующие квадрат ширины $20\sqrt{2}$, большей 25, а такой квадрат нельзя покрыть полосой ширины 25. Значит, покрыт один из узлов 1, 3, 7, 9. Пусть это узел 1. Из того, что диагональ прямоугольника 35×25 короче $20\sqrt{5}$, следует, что при покрытом узле 1 заведомо не покрыты узлы 6, 8, 9. По предположению покрыто более четырех узлов. Значит, покрыт хотя бы один из узлов 3 или 7. Пусть по-

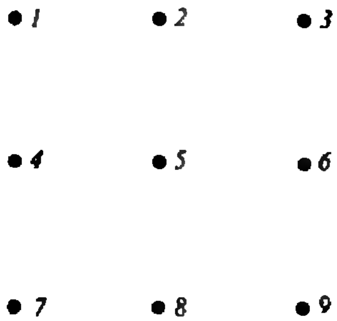


Рис. 9.

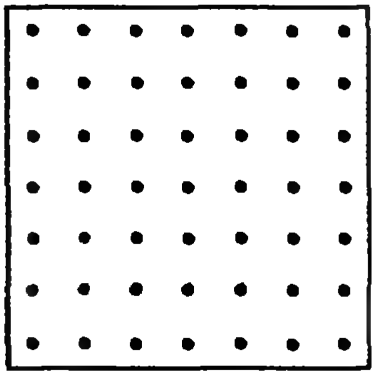


Рис. 10.

крыт узел 3, тогда не покрыты узлы 4 и 7. И узлов осталось всего четыре. Итак, даже замкнутый прямоугольник 35×25 не может покрыть более 4 узлов решетки.

Осталось проверить, что открытый квадрат 40×40 не может покрыть более пяти узлов. Диагональ этого квадрата короче 60, поэтому он может покрывать узлы только из трех строк и трех столбцов таблицы. Воспользуемся уже имеющимся рисунком 9. Допустим, что открытый квадрат покрывает более пяти из этих узлов. Тогда он покрывает хотя бы один из узлов 1, 3, 7, 9. Пусть именно узел 1. При этом заведомо не покрыт узел 9. Если не покрыты ни узел 3, ни узел 7, то покрыты все оставшиеся, в том числе 6 и 8. Но узлы 1, 6, 8 образуют рассмотренный выше треугольник T_2, который не может быть покрыт открытым квадратом 40×40. Значит, покрыт один из узлов 3 или 7. Пусть покрыт узел 3 (тогда узел 7 не покрыт). При покрытых узлах 1 и 3 узел 8 не может быть покрыт, так как узлы 1, 3, 8 образуют рассмотренный ранее треугольник T_1, который не может быть покрыт открытым квадратом 40×40. Остается считать, что покрыты точки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но они образуют замкнутый прямоугольник 40×20, который, как было показано не может быть покрыт открытым квадратом 40×40.

Закончим **гипотезой**. *Если в квадрате 70×70 разместить 49 центров (рис. 10), так чтобы они образовывали узлы решетки с шагом 10, то эксперимент с шаблонами подсказывает, что открытым квадратом 40×40 нельзя покрыть более 17 узлов, прямоугольником 35×25 — более 12, открытым прямоугольником 30×20 — более 7, открытым кругом радиуса 10 — более 4.*

Однако строгая проверка этой гипотезы неминуемо будет громоздкой, и поэтому мало интересна. Но если гипотеза верна, то в условиях исходной задачи хватает места даже не для двух, а для пяти кругов радиуса 5.

(Начало см. на с. 2)

к классу бильярдных задач. Типичный пример бильярдной системы — это шарик, движущийся внутри замкнутой оболочки и абсолютно упруго отражающийся от ее стенок. Обсуждению таких систем посвящена недавно вышедшая интересная книга Г. Гальперина и А. Землякова «Математические бильярды»*).

Конечно, слишком мало было сказано о главной героине этой статьи — о геодезической. Передо мной увлекательная книга Л. Люстерника «Кратчайшие линии»*). К сожалению, она не переиздавалась с 1955 года. Но если вам повезет и вы сможете достать ее, то обязательно прочтите — узнаете много интересного.

---

*) М.: Наука, 1990, Библиотечка «Квант».

*) М.: Гостехиздат, 1955.

Практикум абитуриента

Необходимые условия и задачи с параметрами

П. ГОРНШТЕЙН, В. ПОЛОНСКИЙ, М. ЯКИР

Любителям детективов хорошо знакома стандартная схема: круг подозреваемых постепенно сужается, и, наконец, великий мсье Пуаро обнаруживает преступника. Оказывается, подобный сюжет реализуется в целом классе математических задач. Вот пример.

Надо решить уравнение $f(x)=g(x)$. Сначала все множество действительных чисел подозревается в том, что они — корни уравнения. Исключим те, у которых есть очевидное алиби: корни нашего уравнения не могут встретиться за пределами областей определения функций f и g.

Если удалось установить, что все корни уравнения лежат в некотором множестве M, тем самым появляется необходимое условие, при котором осуществляется равенство $f(x)=g(x)$: если x — корень уравнения, то $x\in M$. Будем называть задачи, решаемые таким методом, задачами с поиском необходимых условий.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

Задача 1 (МГУ, 1983 г.). *Решите неравенство*

$$(\sqrt{x^2-5x+6}+1)\log_3\frac{2x}{5}+$$

$$+\frac{1}{x}\sqrt{10x-2x^2-12}\leqslant 0.$$

Областью определения этого неравенства является двухэлементное множество $\{2;\ 3\}$. Проверка показывает, что неравенству удовлетворяет только $x=2$.

Задача 2. *При каких значениях параметра a система уравнений*

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+1-|x|,\\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Очевидно, что если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы, то $(-x_0;\ y_0)$ также является ее решением. Поэтому условие $x=0$ — необходимое для существования единственного решения. Заметьте, что оно не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида $(0;\ y_0)$ или вообще не иметь решений.

Положим $x=0$. Тогда

$$\begin{cases} a=y+1,\\ y^2=1. \end{cases}$$

Отсюда $a=0$ или $a=2$.

Итак, искомые значения параметра надо выбрать в множестве $\{0;\ 2\}$. При $a=0$ получаем:

$$\begin{cases} y+1-|x|=0,\\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x|=y+1,\\ y^2+2y+1+y^2=1, \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} x=1,\\ y=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-1,\\ y=0, \end{cases}$$

$$\text{или}\quad \begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

Как видите, нашлось три решения системы, значит, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$ получим:

$$\begin{cases} 2x^4+|x|=y-1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Очевидно, $2x^4+|x|\geqslant 0$. Из первого уравнения имеем $y\geqslant 1$, из второго — $y\leqslant 1$. Следовательно, $y=1$, значит, $x=0$. Проверка показывает, что пара (0; 1) — решение, а в силу ограничения для переменной y($y\geqslant 1$ и $y\leqslant 1$) оно единственно.

Ответ: $a=2$.

Задача 3 (МГУ, 1990 г.). *При каких значениях параметра c уравнение $x^2-2c\sin(\cos x)+2=0$ имеет единственное решение?*

Очевидно, $x=0$ — необходимое условие для существования единственного корня данного уравнения.

При $x=0$ имеем

$$c=\frac{1}{\sin 1}.$$

Докажем, что это значение параметра — искомое.

Действительно, при $c=\frac{1}{\sin 1}$ получаем

$$x^2+2=\frac{2}{\sin 1}\sin(\cos x). \qquad (1)$$

Очевидно, $x^2+2\geqslant 2$. Рассмотрим функцию $f(t)=\sin t$. Для $t\in[-1;1]\subset[-\pi/2;\pi/2]$ функция f возрастает. Следовательно, $\sin(\cos x)\leqslant\sin 1$. Отсюда

$$\frac{2\sin(\cos x)}{\sin 1}\leqslant\frac{2\sin 1}{\sin 1}=2.$$

Значит, уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2+2=2, \\ \dfrac{2\sin(\cos x)}{\sin 1}=2, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $x=0$.

Ответ: $c=\frac{1}{\sin 1}$.

Задача 4 (МГУ, 1988 г.). *Найдите все значения параметра a, при которых эквивалентны системы*

$$\begin{cases} x+2y=2-a, \\ -x+ay=a-2a^2 \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12-6a=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (2) состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными. Она имеет единственное решение, если $a\neq-2$.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что при $a=-2$ система (2) не имеет решений.

Система (3) при $a=-2$ становится такой:

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2-11x+24=0. \end{cases}$$

Второе уравнение содержит квадратный трехчлен относительно x: $2x^2-11x+24$. Его дискриминант отрицателен, поэтому второе уравнение решений не имеет.

Таким образом, $a=-2$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь $a\neq-2$. В этом случае первая система имеет единственное решение, поэтому для эквивалентности систем (2) и (3) необходимо, чтобы и вторая система имела единственное решение. (Заметим, что достаточным условием их эквивалентности будет совпадение решений.)

Здесь, как и в задаче 1, условие $y=0$ является необходимым для существования единственного решения системы (3) (проверьте!). При $y=0$ вторая система примет вид

$$\begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ 2x^2+(a^2+2a-11)x+12-6a=0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x=1, \\ a^2-4a+3=0, \end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases} x=3, \\ a^2=1. \end{cases}$$

Следовательно, искомые значения параметра a, если они существуют, принадлежат множеству $\{-1;\ 1;\ 3\}$. При $a=-1$ система (2) такова:

$$\begin{cases} x+2y=3, \\ -x-y=-3. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение (3; 0). Вторая же система принимает вид

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0,\\ 2x^2+y^2-12x+18=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0,\\ 2(x-3)^2+y^2=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=3$, $y=0$. Поскольку решения систем совпали, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=1$ легко установить, что система (2) имеет единственное решение — (1; 0), а система (3) имеет два решения — (1; 0), (3; 0).

При $a=3$ система (2) имеет единственное решение $\left(\frac{27}{5};\ -\frac{16}{5}\right)$, не удовлетворяющее системе (3).

Ответ: $a=-2$ или $a=-1$.

Задача 5 (КПИ, 1989 г.). *При каких целых отрицательных n функция $f(x)=\cos nx \sin\frac{15x}{n^2}$ удовлетворяет условию $f(x+5\pi)=f(x)$ для всех $x\in R$.*

По условию задачи равенство

$$\cos n(x+5\pi)\sin\frac{15}{n^2}(x+5\pi)=$$
$$=\cos nx\sin\frac{15x}{n^2}$$

должно выполняться при любом действительном x, а следовательно, и при $x=0$.

В этом случае имеем

$$\cos 5\pi n\cdot\sin\frac{75\pi}{n^2}=0.$$

Так как $\cos 5\pi n\neq 0$, то $\sin\frac{75\pi}{n^2}=0$, т. е. $\frac{75}{n^2}=k$, где k — целое. Отсюда $n^2=1$ или $n^2=25$. Нас интересуют лишь отрицательные значения n, поэтому решения задачи следует искать в множестве $\{-1;\ -5\}$. Проверка показывает, что и при $n=-1$, и при $n=-5$ наше равенство выполняется при всех действительных x.

Ответ: $n=-1$ или $n=-5$.

Читатель, конечно, спросит, почему мы подставили в наше равенство именно $x=0$? Можно, разумеется, подставить какое-нибудь другое значение x: ведь равенство должно выполняться при любом x. Но $x=0$ гораздо удобнее в обращении и не дает громоздких формул. В подобных случаях выбор наиболее выгодных значений переменной часто основывается на интуиции и личном опыте.

Задача 6 (МГУ, 1989 г.). *Найдите все c такие, что при любом b система*

$$\begin{cases} (1+3x^2)^c+(b^2-4b+5)^y=2,\\ x^2y^2-(2-b)xy+c^2+2c=3.\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Данная система должна иметь хотя бы одно решение при любом b, а значит, и при $b=2$. В этом случае

$$\begin{cases} (1+3x^2)^c=1,\\ x^2y^2+c^2+2c=3,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x=0,\\ c^2+2c=3\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases} c=0,\\ x^2y^2=3.\end{cases}$$

Круг «подозреваемых» значений для переменной c сузился до множества $\{-3;\ 0;\ 1\}$.

При $c=-3$ получаем

$$\frac{1}{(1+3x^2)^3}+(b^2-4b+5)^y=2,$$
$$x^2y^2-(2-b)xy=0.$$

Очевидно, эта система имеет решение (0; 0) при любом b.

При $c=0$

$$(b^2-4b+5)^y=1,$$
$$x^2y^2-(2-b)xy=3.$$

Если $b\neq 2$, то решение первого уравнения $y=0$ не удовлетворяет второму уравнению. Но по условию система должна иметь решение при любых b, значит, $c=0$ придется исключить из списка «подозреваемых».

При $c=1$

$$\begin{cases} 3x^2+(b^2-4b+5)^y=1,\\ x^2y^2-(2-b)xy=0.\end{cases}$$

Очевидно, эта система имеет решение (0; 0) при любом b.

Ответ: $c=1$ или $c=-3$.

Задача 7 (МАИ, 1989 г.). *При каких x для любого y существуют z такие, что*

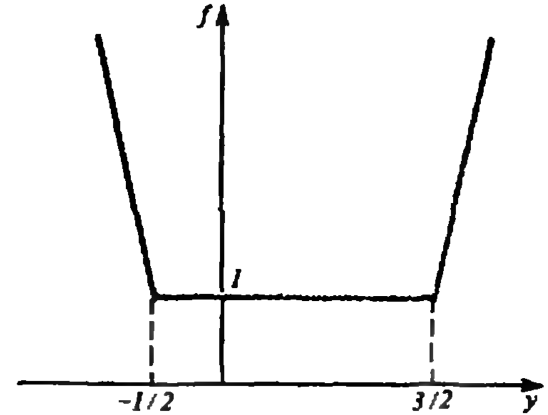


Рис. 1.

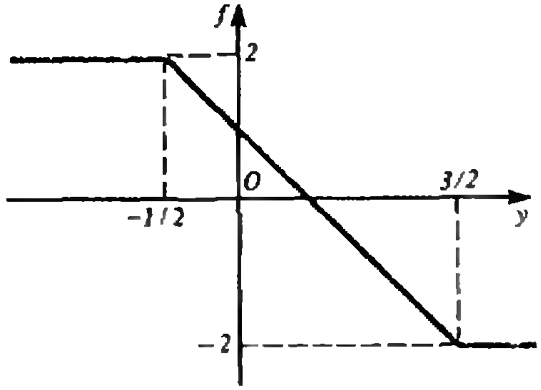


Рис. 2.

$$\sin(x+y+z)=$$

$$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\left|y+\frac{1}{2}\right|+\frac{|y-3/2|}{2\cos x}?$$

Подставим в уравнение $y=-1/2$. Тогда

$$\sin\left(x+z-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\cos x},$$

откуда $\cos x=1$ или $\cos x=-1$. При $\cos x=1$, т. е. $x=2\pi k$, k — целое, получим

$$\sin(2\pi k+y+z)=$$

$$=\cos\left(4\pi k+\frac{\pi}{3}\right)\left|y+\frac{1}{2}\right|+\frac{|y-3/2|}{2},$$

следовательно,

$$\sin(y+z)=\frac{|y+1/2|}{2}+\frac{|y-3/2|}{2}.$$

Имеем

$$|\sin(y+z)|\leqslant 1,$$

но

$$\frac{|y+1/2|}{2}+\frac{|y-3/2|}{2}\geqslant 1.$$

На рисунке 1 приведен график функции

$$f(x)=\frac{|y+1/2|}{2}+\frac{|y-3/2|}{2}.$$

Видно, что равенство из условия задачи при $x=2\pi k$ выполняется не для всех y, а лишь для $y\in[-1/2;\ 3/2]$.

При $\cos x=-1$, т. е. $x=\pi+2\pi k$, k — целое, получим

$$\sin(\pi+2\pi k+y+z)=$$

$$=\cos\left(2\pi+4\pi k+\frac{\pi}{3}\right)\left|y+\frac{1}{2}\right|+$$

$$+\frac{|y-3/2|}{2\cos(\pi+2\pi k)},$$

откуда

$$2\sin(y+z)=|y-3/2|-|y+1/2|. \qquad (4)$$

Поскольку

$$|2\sin(y+z)|\leqslant 2,$$

то должно выполняться неравенство

$$\big||y-3/2|-|y+1/2|\big|\leqslant 2.$$

На рисунке 2 изображен график функции

$$f(y)=\left|\left|y-\frac{3}{2}\right|-\left|y+\frac{1}{2}\right|\right|.$$

В этом случае для любого y можно подобрать z такое, что равенство (4) будет выполнено.

Ответ: $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 8 (МАИ, 1988 г.). *При каких значениях параметра a уравнения*

$$\sin 2x+a=\sin x+2a\cos x$$

и

$$2\cos 2x+a^2=5a\cos x-2$$

эквивалентны?

Легко видеть, что $x=\frac{\pi}{3}$ — корень первого уравнения при любом a. Для

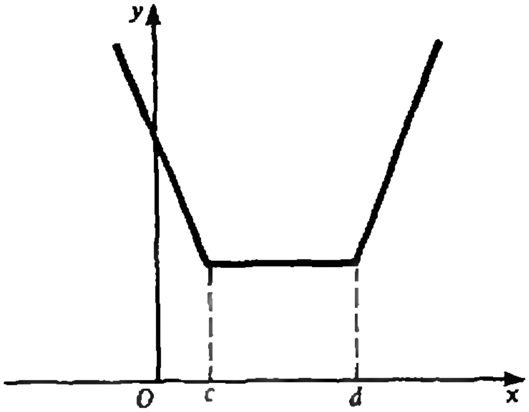


Рис. 3.

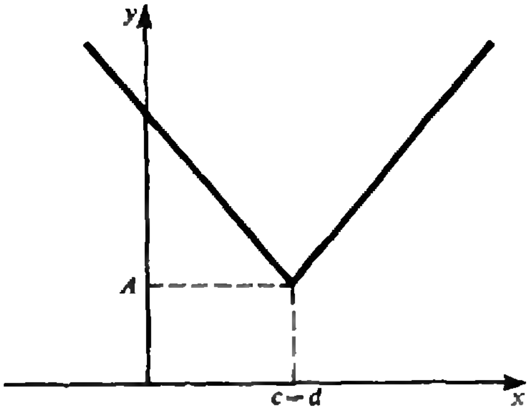


Рис. 4.

эквивалентности уравнений необходимо, чтобы он был также и корнем второго уравнения.

При $x=\frac{\pi}{3}$ получаем

$$-1+a^2=\frac{5a}{2}-2,$$

отсюда претенденты на ответ — $a=2$ и $a=1/2$.

При $a=2$ первое уравнение приобретает вид

$$\sin 2x+2=\sin x+4\cos x,$$

а второе —

$$\cos 2x-5\cos x+3=0.$$

Читатель легко убедится сам, что каждое из двух последних уравнений эквивалентно уравнению $\cos x=1/2$.

При $a=1/2$ первое уравнение становится таким:

$$\sin 2x+1/2=\sin x+\cos x,$$

а второе — таким:

$$2\cos 2x+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}\cos x-2.$$

Очевидно, что корень первого из них $x=-\frac{\pi}{3}$ не является корнем второго.

Ответ: $a=2$.

Во всех предыдущих задачах достаточные условия для искомых значений параметра устанавливались в результате проверки. Возможен, однако, и другой подход.

Поскольку каждое достаточное условие является необходимым, но не каждое необходимое условие является достаточным, ясно, что последовательным усилением необходимого условия можно в конце концов свести его к достаточному.

В заключение приведем пример, отражающий вышесказанное.

Задача 9 (МГУ, 1988 г.). *При каких значениях параметров a и b уравнение*

$$|x+\cos^2 4a-2\sin a\cos^4 4a|+|x+\sin^2 a|=b\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)$$

имеет единственное решение?

Рассмотрим функцию $f(x)=|x-c|+|x-d|+e$ (c, d и e — некоторые числа). Не нарушая общности рассуждений, положим $d>c>0$, $e>0$. График рассматриваемой функции схематично изображен на рисунке 3.

Очевидно, что уравнение $f(x)=A$ имеет единственный корень при $c=d$ (рис. 4).

Поэтому для того, чтобы уравнение $f(x)=0$ имело единственный корень, достаточно выполнения условий $c=d$ и $e=0$ (рис. 5).

Итак, для нахождения искомых значений параметров a и b достаточно решить систему

$$\begin{cases}\sin^2 a=2\sin a\cos^4 4a-\cos^2 4a,\\ b\left(a+\frac{3\pi}{2}\right)=0.\end{cases}$$

Рассмотрим первое из ее уравнений:

$$\sin^2 a-2\sin a\cos^4 4a=-\cos^2 4a.$$

Добавим к обеим его частям $\cos^8 4a$:

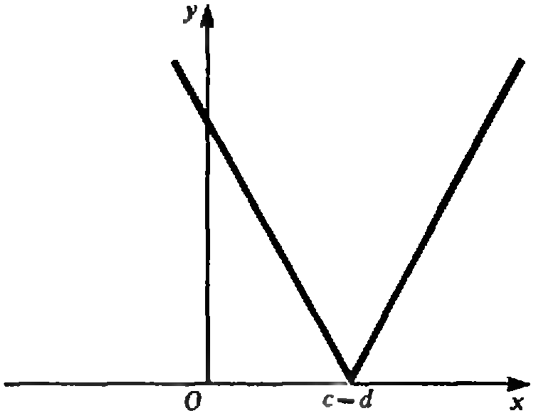


Рис. 5.

$$\sin^2 a - 2\sin a\cos^4 4a + \cos^8 4a = \\ = \cos^8 4a - \cos^2 4a.$$

Тогда

$$(\sin a - \cos^4 4a)^2 = \cos^8 4a - \cos^2 4a.$$

Правая часть полученного уравнения неположительна:

$$\cos^8 4a - \cos^2 4a = \cos^2 4a(\cos^6 4a - 1) \leqslant 0,$$

значит, уравнение имеет решение лишь при

$$\begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos 4a = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos^6 4a = 1. \end{cases}$$

Первая из этих систем дает $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое.

Из второй получим, что, с одной стороны, $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, а с другой — $a = \pi k$, но при целых k этого быть не может.

Тогда имеем

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ b\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ a = -\frac{3\pi}{2}, \\ b \text{ — любое.} \end{cases}$$

Ответ: $b = 0$, $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, k — целое, или $a = -\frac{3\pi}{2}$, b — любое действительное число.

Задачи для самостоятельного решения

1 (МГУ, 1990 г.). При каких значениях параметра b уравнение

$$2x^2 - b\,\mathrm{tg}\cos x + b^6 = 0$$

имеет единственное решение?

2 (МГУ, 1987 г.). Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3 (МИРЭА, 1983 г.). При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x+y)^2 - x - 2y - a, \\ x \geqslant (y-x)^2 - 3y + 2x + a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4 (МАИ, 1989 г.). При каких действительных значениях x, для любого действительного y, найдется такое z, что

$$\cos(2x - y + z) = \\ = |y^3 - 1|\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \frac{|y^3 + 1|}{2\sin x}?$$

5 (МГУ, 1978 г.). Найдите множество всех пар чисел $(a;\ b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a\sin x + b = \sin(ax + b).$$

6 (Уральский ГУ, 1976 г.). Найдите такие значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} \leqslant x + 3$$

и уравнение

$$2^{x+2} - |2^{x+1} - a| = 2^{x+1} + 1$$

равносильны.

7 (МГУ, 1974 г.). Найдите все действительные значения α, для каждого из которых существуют четыре целых числа $(x,\ y,\ u,\ v)$, удовлетворяющие равенствам

$$x^2 + y^2 = (107 - \alpha)(\alpha - 91),$$
$$54(u^2 - v^2) = \alpha(15u + 3v - \alpha).$$

Алгоритмика простоты

В сто раз быстрее

Б. ТАРАСЕНКО

> *Нелегкий вопрос-то*
> *Но верь одному:*
> *Все сложно и просто.*
> *Считай, по уму!*

Современный олимпийский девиз гласит: выше, быстрее, дальше. Компьютерный звучит почти так же. Можно, пожалуй, еще добавить: точнее, дешевле, чище, экономичнее, безопаснее, доступнее. Портативная карманная вычислительная техника достигает максимума по многим из этих критериев, так что за ее прогрессом стóит следить. Сегодня речь пойдет о микрокомпьютере «Электроника МК-85» (с алгоритмическим языком Бейсик). Он внешне достаточно привлекателен, надежен в работе, при умеренной цене в классе автономных портативных устройств обладает сравнительно широким набором вычислительных возможностей. Розничная продажа и круг пользователей МК-85 расширяются, поэтому мы предлагаем вашему вниманию Бейсик-программу № 6 «Реверсивный генератор простых чисел».

При первом знакомстве с чем-то новым лучше всего — сравнить новое со старым. Мы взяли простое число 100003, похожие по организации и назначению программы для МК-52, МК-85 (в нормальном и ускоренном режимах счета) и для HP-32S (США) и определили время *T*, требуемое каждому из них для подтверждения простоты этого числа. Тестовое простое число выбрано так, чтобы можно было спокойно засечь время работы «чемпиона» и не очень соскучиться, замеряя время «аутсайдера». Кроме того, мы провели краткое технико-экономическое сравнение: учли разрядность разных устройств, затронули и такой «параметр», как цена (карманные компьютеры-калькуляторы везде относительно доступны для массового потребителя). Говорят (особенно часто — в США), что время — деньги. С учетом этого принципа мы разрядность каждого устройства разделили на цену (на июнь 1991 г., курс доллара к рублю определим как 1 к 40) и на время работы, а потом разделили все на итоговый параметр самого медленного устройства (МК-52). Все характеристики и результаты вычислений вы видите в таблице.

	МК-52	МК-85 (н)	МК-85 (у)	HP-32S
T (с)	874	60	10	14
Разрядность	8	10	10	12
Цена	115 р.	270 р.	270 р.	82 $
Итого	1	7,8	46,3	3,3

Итак, МК-85, чемпион в рассматриваемой группе, работает существенно быстрее МК-52, даже HP-32S работает в полтора раза медленнее. С коммерческой точки зрения, если судить по ценам и нашим вычислениям, покупать МК-85 тоже выгодно.

Перейдем к чисто программной части. Предложенный вашему вниманию генератор простых чисел на Бей-

Программа № 6. РЕВЕРСИВНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

```
1 PRINT «ГЕНПРОСТЧИСЛ»
2 INPUT «H=», P
3 FOR D=3 TO P STEP 2
4 K=P/D: M=INT K
5 IF K=M THEN 8: IF D>K THEN 7
6 NEXT D
7 PRINT «P=»; P
8 P=P+2: GOTO 3
9 FOR D=3 TO P STEP 2
10 K=P/D: M=INT K
11 IF K=M THEN 14: IF D>K THEN 13
12 NEXT D
13 PRINT «P=»; P
14 P=P-2: GOTO 9
```

сике на самом деле содержит две программы: нарастающую, операторы 1—8, и убывающую, операторы 9—14. Обе они размещены в одном файле, для определенности — в PO (красный цвет на клавиатуре).

Чтобы запустить эту программу (например, первую), можно сделать следующие операции: ввести ее, например, в файл PO, затем нажать клавишу S (красную), затем PO (красную), на индикаторе появится ГЕНПРОСТЧИСЛ, нажать клавишу EXE, в ответ на запрос H=? набрать нечетное стартовое число (например, пять) и нажать EXE. На индикаторе появится P=5. При последующих нажатиях клавиши EXE на индикаторе будут появляться очередные простые числа: P=7, затем P=11 и так далее.

Другой способ запуска: S (красное), RUN (красное) 1, EXE, ГЕНПРОСТЧИСЛ и дальше — как в предыдущем примере.

Вторая ветвь программы (операторы 9—14) ищет простые числа, меньшие заданного. Чтобы ее запустить, надо сделать следующие операции: нажать клавишу S (красную), затем PO (красное), RUN (красное) 9, EXE и пойдут простые числа на уменьшение. При этом стартовое число вводится через «нарастающую» часть программы.

В заключение приведем простые числа на «подходе» к очередной степени десяти: 7, 97, 997, 9973, 99991, 999983, 9999991, 99999989, 999999937, 9999999967, 99999999977 и 299999999909. Последнее число — это технический предел HP-32S.

Примечания

Заманчиво убрать вспомогательные переменные K и M. Но в результате этого скорость работы упадет примерно вдвое. Если в строку 4 добавить оператор C=P—M*D и простоту числа определять по остатку, изменив соответствующим образом условные операторы в строке 5, то быстродействие падает на 25 %, но зато верхний предел работоспособности будет 9999999967. При работе у верхнего предела на поиск очередного простого числа уходит примерно час.

Для приведенной программы верхний предел работоспособности еще надо найти (он меньше). Это — наша маленькая хитрость: не без пользы для себя вы можете проделать все эти вычисления самостоятельно.

Тому, кто любит прекрасное

Прекрасные спектры вы сможете пронаблюдать,
если сделаете спектроскоп,
воспользовавшись нашими голографическими дифракционными решетками.
Для получения дифракционной решетки
и инструкции по сборке спектроскопа
вышлите почтовым переводом 6 рублей по адресу:

427600, г. Глазов, ул. К. Маркса, д. 27, а/я 76, МИП «Аргон».

На бланке перевода четко укажите обратный адрес.

Игры и головоломки

Ханойская башня

Эта головоломка известна уже довольно давно. Ее автором принято считать французского математика Э. Люка, создавшего ее на основе древних легенд. В русской литературе она впервые появилась, видимо, в 1902 году в книге Е. Игнатьева «В царстве смекалки». Об этой книге мы недавно рассказывали в нашем журнале («Квант» № 4, 1991 г.). Многие авторы книг по программированию, очарованные простотой и изяществом «ханойской башни», описывали алгоритм ее решения.

Что же представляет из себя эта головоломка, которую иногда именуют «Башней браминов», а Е. Игнатьев называет «Детской пирамидкой»? Если вы возьмете детскую пирамиду (диски располагаются в порядке возрастания: верхний — самый маленький, а нижний — самый большой) и еще два стержня от таких же детских пирамид, то головоломка уже у вас в руках (рис. 1).

Занумеруем стержни: тот, на котором находятся диски, получит номер I, другие — номера II и III. Задача состоит в том, чтобы перенести диски со стержня I на стержень III, используя стержень II, как промежуточный. При этом должны соблюдаться два условия: 1) за один ход можно переносить лишь один диск, 2) нельзя класть больший диск на меньший.

Существует легенда, что в индийском городе Бенаресе бог Брама поставил в одном из храмов на бронзовой площадке три алмазные палочки толщиной в корпус пчелы, на одну из них он надел 64 золотых диска, и с момента сотворения мира без устали, сменяя друг друга, жрецы переносят диски с одной палочки на другую в соответствии с описанными правилами. Когда жрецы перенесут все диски с первой палочки на третью,— гласит легенда,— наступит конец света.

Давайте разберемся, как же перенести диски с первого стержня на третий, а за одно выясним, скоро ли наступит обещанный конец света.

Если бы в пирамиде был только один диск, то решение очевидно — перенесем его на третий стержень, и дело с концом. Мы выполнили требуемое задание за один ход. А если бы было два диска? Тогда положим сначала меньший диск на второй стержень, затем положим второй диск на третий стержень, затем пренесем и меньший диск на третий стержень, положив его поверх второго. Все. За три действия мы смогли переложить оба диска на третий стержень. Отметим, что $1=2^1-1$, а $3=2^2-1$. Теперь предположим, что мы умеем перекладывать на третий стержень пирамиду из n дисков за 2^n-1 действие. Покажем, что в таком случае можно перенести на третий стержень и пирамиду из $n+1$ дисков, притом за $2^{n+1}-1$ действие.

Действительно, пусть на пирамиде лежит $n+1$ дисков. На время изменим нумерацию стержней: второй назовем треть-

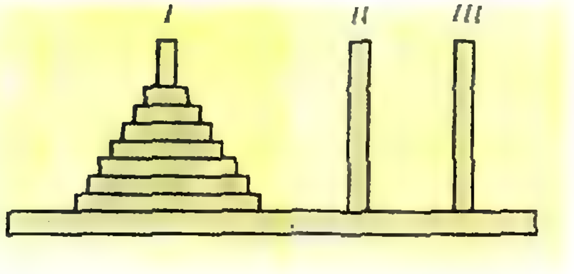


Рис. 1.

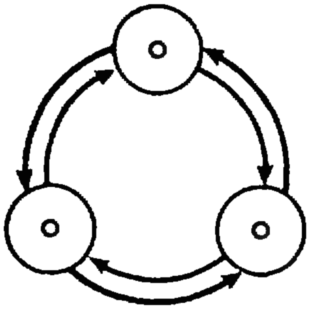


Рис. 2.

им, а третий — вторым. Теперь мы можем перенести n верхних дисков с первого стержня на третий, произведя $2^n - 1$ действие. На первом стержне остался лишь один диск. Перенесем его на свободный второй стержень. Снова перенумеруем стержни: вернем второму стержню номер три, первому дадим номер два, а третьему — номер один. Теперь у нас на первом стержне лежит n дисков, второй — свободен, а на третьем лежит самый большой диск. Осталось перенести с первого стержня на третий n дисков, что мы умеем делать за $2^n - 1$ операцию. Все. Мы собрали на третьем стержне все $n+1$ дисков, совершив $(2^n-1)+1+(2^n-1)=2^{n+1}-1$ действие.

Отсюда, в соответствии с принципом математической индукции, вытекает, что для любого натурального числа k можно, имея пирамиду с k дисками, перенести их с первого стержня на третий, соблюдая правила, за $2^k - 1$ действие.

Приведенное доказательство нетрудно оформить в виде алгоритма действий. Именно такой алгоритм и предлагается программистам в упомянутых книгах для его записи на том или ином алгоритмическом языке.

Нетрудно показать, что меньше чем за $2^k - 1$ действие перенести k дисков с первого стержня на третий невозможно. Поэтому легендарным жрецам понадобится $2^{64}-1$ действие, чтобы исполнить свою работу. Если тратить на каждое действие лишь по одной секунде, то понадобится 18 446 744 073 709 551 615 с, т. е. более 500 миллиардов лет.

Присмотримся повнимательнее к процессу переноса дисков. Для этого перенумеруем их в порядке возрастания: первый — самый маленький и т. д. Теперь начнем переносить диски в соответствии с алгоритмом и будем записывать номера переносимых дисков:

121312141213121512131214 1...

Любопытно, что каждый нечетный перенос — это перенос первого диска. Еще одно наблюдение: расположим стержни в вершинах равностороннего треугольника (рис. 2) и понаблюдаем за движением первого диска. Оказывается, что он движется по кругу в одну и ту же сторону; при этом, если начальное количество дисков четно, то по часовой стрелке, а если нечетно — против. Эти наблюдения позволили в 1961 году сформулировать следующий алгоритм переноса дисков:

сначала переносим первый диск, потом не первый, затем снова первый, потом не первый и т. д., причем первый диск переносится в одном направлении: по часовой стрелке в случае четного количества дисков и против часовой стрелки, в случае их нечетного количества.

Заметим, что указание «переносится не первый диск» полностью определяет, какой диск и куда следует переносить в данный момент, поскольку меньший диск всегда кладется на больший.

Недавно школьник из г. Перми *Миша Федоров* предложил еще один алгоритм, осуществляющий, как и только что описанный, перенос k дисков с первого стержня на третий за $2^k - 1$ действие.

Миша вводит понятие «пустой башни». Стержни с нанизанными на них дисками он называет башнями, а башню, которая не участвует в операции переноса диска в этот момент, называет пустой. Алгоритм М. Федорова формулируется очень коротко:

в процессе перекладывания пустая башня должна двигаться по кругу в одном и том же направлении: по часовой стрелке, если число дисков нечетно, и против часовой стрелки, если их число четно.

Свою работу Миша Федоров с успехом доложил на Всесоюзной научно-технической конференции школьников. Заметим, что если первый алгоритм приводит к необходимому результату по построению, то справедливость второго и третьего следует доказывать, и это не очень просто. Хотя на самом деле все три алгоритма являются просто различными записями одного и того же процесса переноса дисков.

Существенно другой процесс возникает в том случае, если еще усложнить правила переноса. Наш читатель *А. Тарасенко* предлагает найти алгоритм, позволяющий переносить диски с первого стержня на третий, в котором первый диск ни разу не оказывался бы на втором стержне. Он утверждает, что такая процедура возможна за $2\cdot 3^{k-1}-1$ действие. Если же запретить второму диску оказываться на втором стержне, то количество перекладываний становится равным $2^2\cdot 3^{k-2}-1$. И вообще, если запретить класть на второй стержень n-й диск, то понадобится $2^n\cdot 3^{k-n}-1$ действие.

Еще об одной модификации этой головоломки мы писали в предыдущем номере журнала (на 4 странице обложки). *В. Пинаев* предлагает рассмотреть вопрос: всегда ли возможно перенести диски с первого стержня на третий, если первоначально они лежали на первом стержне в произвольном порядке. Приводим доказательство того, что такое перекладывание всегда возможно.

Чтобы доказать возможность такого перекладывания, сначала разберемся с более простой задачей. Пусть требуется собрать пирамиду из дисков, нанизанных на два стержня, при свободном третьем, причем диски расположены на стержнях по возрастанию диаметров. Кроме того, предположим, что такую задачу мы уже умеем решать для любого меньшего количества дисков.

Пусть самый крупный диск находится на первом стержне, тогда чтобы собрать пирамиду на третьем стержне, необходимо сделать три операции:

1) собрать на втором стержне пирамиду без самого большого диска;

2) переместить самый большой диск на третий стержень;

3) переместить пирамиду со второго стержня на третий.

Все три операции мы можем сделать. Действительно, первую операцию мы можем сделать по предположению, вторая операция очевидна, а третья — обычное перемещение в головоломке «Ханойская башня», которое мы уже научились совершать.

Теперь вернемся к основной задаче. На первом стержне находятся диски в произвольном порядке, второй и третий стержни свободны. Постараемся разложить диски на втором и третьем стержнях в порядке возрастания. Начнем такое перекладывание и продолжим его, пока это возможно. При этом мы переложим не менее двух дисков. Если нам повезет, то мы сразу переложим все диски и перейдем к уже решенной задаче. А если не повезет? Пусть некоторый диск уже нельзя положить ни на второй, ни на третий стержень. Мысленно отделим на этих стержнях диски, меньшие рассмотренного диска. Соединим эти части вместе на втором стержне. Это мы уже научились делать. Теперь перенесем злосчастный диск на третий стержень и тем самым мы устраним возникшую трудность. Можем продолжать перекладывание. В результате все диски окажутся собранными на втором и третьем стержнях, а теперь собирать из них башню мы уже умеем. Итак, доказательство закончено.

Можно рассмотреть и такую задачу: все диски разложены в произвольном порядке на всех трех стержнях, требуется собрать их на одном. Эта задача также всегда разрешима.

В. Пинаев предлагает назвать свою головоломку *П*-башней, что же, можно согласиться с таким названием. Заметим, что идея этой головоломки идет от кубика Рубика: запутаем расположение частей головоломки, а потом постараемся привести ее к первоначальному виду с помощью разрешенных действий.

В литературе рассматриваются «Ханойские башни» и с бо́льшим количеством стержней, например, в недавно вышедшей книге Ж. Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990).

Публикацию подготовил А. Савин

Поправка

В «Кванте» № 9 за 1991 год на с. 73 в условии задачи № 4 Испанской математической олимпиады допущена опечатка. Вопрос задачи следует читать так: «Существует ли натуральное число m такое, что

$$\sum_{n=1}^{m} |a_n - a_{n+1}| = 1990?»$$

Приносим нашим читателям свои извинения.

XXV Всесоюзная олимпиада по математике

Доктор физико-математических наук
Д. МИТЬКИН,
кандидат физико-математических наук
С. РЕЗНИЧЕНКО

В этом году заключительный этап Всесоюзной олимпиады школьников по математике проходил в г. Смоленске с 17 по 24 апреля. На олимпиаду приехали команды всех республик (за исключением Грузии), команды городов Москвы, Ленинграда, физико-математических школ при университетах Ленинграда, Новосибирска, Киева, Еревана, Алма-Аты. Кроме того, в олимпиаде приняли участие учащиеся специализированных учебных центров при Московском государственном университете и Ленинградском дворце пионеров, учащиеся гимназии № 1 г. Риги, средней школы № 57 г. Москвы и команда г. Смоленска. Всего соревновались 175 школьников: 58 девятиклассников, 61 десятиклассник и 56 одиннадцатиклассников. Впервые участвовали в заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников по математике гости из-за рубежа: 6 учащихся Британской школы из Бельгии. Были приглашены также наблюдатели из Болгарии, Испании, Китая и Греции.

Как и в прежние годы, заключительный этап олимпиады проходил в два тура, в каждом из которых предлагалось решить 4 задачи. На выполнение задания одного тура отводилось 5 часов. Оценки полных решений задач в баллах, из которых исходило жюри при определении призеров, приведены в таблице 1 (баллы назначались с учетом трудности задачи и с таким расчетом, чтобы суммарное число баллов за все задачи в туре по каждому классу равнялось 30). В таблицах 2—4 приведены данные о числе соответственно 9-, 10- и 11-классников, решивших задачу полностью (+) или с некоторыми недочетами (±), а также данные о количестве работ, в которых решение содержало грубые ошибки (∓) или вовсе отсутствовало (—).

Победители заключительного этапа Всесоюзной олимпиады были награждены дипломами, грамотами, специальными призами и памятными подарками. Кроме того, оргкомитет олимпиады и жюри определили трех школьников, по одному из каждого класса, для назначения им стипендий из фонда «Филантропия». Лучших результатов на олимпиаде добились: в 9 классе — *Каукис Валдис* (гимназия № 1 г. Риги), в 10 классе — *Амбайнис Андрис* (средняя школа № 12 г. Даугавпилса), в 11 классе — *Перлин Александр* (специализированный учебно-методический центр при Ленинградском дворце пионеров). Учащиеся из Бельгии выполняли задания 9 класса. Наибольшего успеха из них добился *Маунтин Артур*. Он получил диплом III степени.

Определение призеров почти никогда не бывает однозначным. У жюри, состоявшего из 52 человек, были сложности при обсуждении этого вопроса. Однако окончательное решение жюри, работу которого возглавляли председатель член-корреспондент АПН СССР, профессор Московского физико-технического института Г. Н. Яковлев и его заместители профессор Смоленского пединститута М. Б. Балк и доктор физико-математических наук, доцент Московского государственного университета Ю. В. Нестеренко, было единогласным. Тем не менее, решение жюри подверглось критике на закрытии олимпиады и от имени участников олимпиады и, в кулуарах, со стороны некоторых руководителей команд.

По результатам уже ставшего традиционным опроса школьников, проводимого членами жюри среди участников олимпиады, в каждом классе были определены лучшие конкурсные задачи. В 9 классе лучшими были признаны задачи 7, 8 и 4, занявшие соответственно первое, второе и третье места. Первое место в 10 классе заняла задача 4, второе — четвертое места, лишь немного уступив ей, разделили задачи 6, 7 и 8. В 11 классе лучшей признана задача 7, второе и третье места разделили задачи 6 и 8.

Компьютерный турнир для желающих, вошедший было в традицию, на этот раз не проводился. Но традиционный «математический бой» и встреча с членами редколлегии журнала «Квант» состоялись и, как обычно, вызвали большой интерес у участников олимпиады.

Культурная программа включала обзорные экскурсии по Смоленску, посещение городской картинной галереи и музея С. Т. Коненкова, музея-усадьбы М. И. Глинки в Новоспасском и музея-усадьбы

Таблица 1

Задача / Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
9	6	7	а) 5 б) 5	7	а) 2 б) 5	6	8	9
10	5	6	9	10	6	7	8	9
11	5	6	7	а) 5 б) 7	5	9	8	8

Таблица 2
(9 класс)

Задача / Оценка	1	2	3	4	5	6	7	8
+	18	11	а) 1 б) 14	9	а) 47 б) 21	34	19	5
±	9	3	а) 3 б) 1	2	а) 0 б) 9	4	4	4
±	4	0	а) 3 б) 1	15	а) 1 б) 5	0	0	29
—	27	44	а) 51 б) 42	32	а) 10 б) 23	20	35	20

Таблица 3
(10 класс)

Задача / Оценка	1	2	3	4	5	6	7	8
+	48	38	13	8	41	27	19	14
±	2	1	3	2	3	3	3	2
∓	1	5	15	3	1	8	2	1
—	10	17	30	48	16	23	37	44

Таблица 4
(11 класс)

Задача / Оценка	1	2	3	4	5	6	7	8
+	36	39	13	а) 14 б) 4	34	а) 36 б) 9	7	18
±	10	5	24	а) 4 б) 1	2	а) 2 б) 0	13	3
∓	6	2	0	а) 2 б) 6	3	а) 7 б) 1	1	11
—	4	10	19	а) 36 б) 45	17	а) 11 б) 46	35	24

М. К. Тенишевой «Теремок», а также встречи участников олимпиады с учениками средних школ г. Смоленска. Ход олимпиады освещался по радио и в местной печати, был создан видеодневник олимпиады.

При всех объективных и необъективных трудностях олимпиада прошла успешно. И в этом немалая заслуга организаторов и хозяев олимпиады. Выражаем им свою благодарность, а всем участникам олимпиады желаем дальнейших успехов.

Ниже приводятся условия задач, предлагавшихся на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. Задачи, отмеченные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

ЗАДАЧИ

Первый день

9 класс

1. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xz-2yt=3, \\ xt+yz=1. \end{cases}$$

Ю. Нестеренко

2*. На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два числа, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньшее чем $1/n$.

Б. Берлов

3. На плоскости проведены четыре прямые так, что любые две из них пересекаются и никакие три не проходят через одну точку. На каждой из этих прямых три точки пересечения с остальными прямыми выделяют по два соседних отрезка. Всего образуется восемь отрезков. Могут ли длины этих отрезков равняться

а) числам 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8?

б) различным натуральным числам?

А. Берзиньш

4*. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участник лотереи во все клетки билета записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в соответствующей клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить участнику лотереи, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

А. Берзиньш

10 класс

1. Докажите, что для неотрицательных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geqslant a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}.$$

Д. Терешин

2. Существуют ли треугольники, у которых длины

а) всех трех медиан,

б) двух медиан

в целое число раз меньше длин сторон, к которым эти медианы проведены?

Н. Агаханов

3. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., n, где $n \geqslant 3$. За один ход разрешается заменить любые два числа p и q на числа $p+q$ и $|p-q|$. После нескольких ходов оказалось, что все написанные на доске числа равны k. Каковы возможные значения k?

Б. Меркулов

4. Фигура на рисунке разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата размером 2×2 клетки. Каково наименьшее возможное число таких многоугольников?

А. Анджанс

11 класс

1. По заданному натуральному числу a_0 строят числа a_n последовательно при $n=1, 2, \ldots$ по следующему правилу: если последняя цифра числа a_{n-1} не превосходит 5, то она отбрасывается, и получается число a_n (возможно, в результате ничего не останется — тогда построение заканчивается), в противном случае — $a_n=9a_{n-1}$. Может ли последовательность (a_n) оказаться бесконечной?

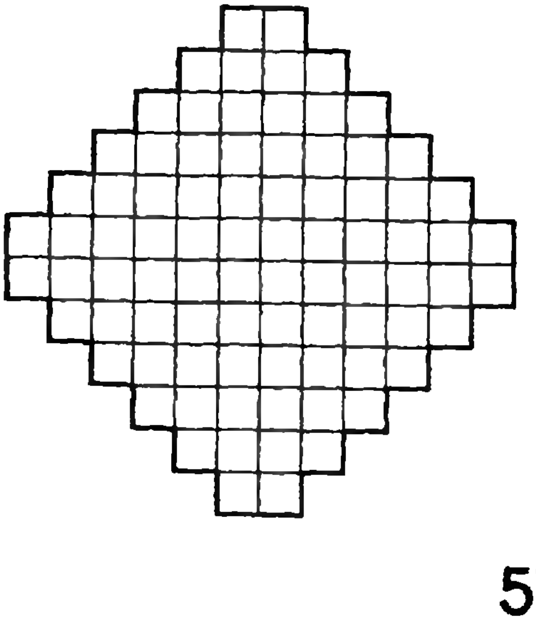
А. Азамов, С. Конягин

2*. Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,$$
$$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5.$$

Найдите $\alpha+\beta$.

Б. Кукушкин



3. На сфере выбраны точки A, B, C, D и E так, что отрезки AB и CD пересекаются в точке F, а точки A, C и F равноудалены от точки E. Докажите, что прямые BD и EF перпендикулярны.

Б. Чиник, И. Сергеев

4. Существует ли на плоскости

а) набор из четырех попарно неколлинеарных векторов, в котором сумма любых двух векторов перпендикулярна сумме двух других;

б) набор из 91 ненулевого вектора, в котором сумма любых 19 векторов перпендикулярна сумме остальных?

Д. Фомин

Второй день

9 класс

5. а) Найдите два натуральных числа x и y таких, чтобы $xy+x$ и $xy+y$ были квадратами различных натуральных чисел.

б) Можно ли найти такие x и y в пределах от 988 до 1991?

А. Анджанс

6. На сторонах AB, BC, CD, DA прямоугольника $ABCD$ соответственно взяты точки K, L, M, N, отличные от вершин. Известно, что $KL \parallel MN$ и $KM \perp NL$. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN лежит на диагонали BD прямоугольника.

Д. Терешин

7*. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые по существу возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие вопросы).

Следователь считает, что все ответы будут верными; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса.

Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос будет дан неверный ответ.

А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский

8. Дан квадрат размером 5×5 клеток. В одной клетке записан знак «—», в остальных — знак «+». За один ход разрешается менять знаки на противоположные одновременно во всех клетках любого квадрата с границами по линиям сетки, состоящего более чем из одной клетки. В каких клетках может быть расположен минус, чтобы за несколько ходов все знаки могли стать плюсами одновременно?

А. Грицявичюс

10 класс

5. Точка D — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность, проходящая через точки A, B и D, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MNC, равны.

Б. Чиник

6*. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезать его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

И. Воронович

7. Назовем минором $k\times l$ доски $n\times n$ пересечение некоторых k горизонталей с l вертикалями и его полупериметром — число $k+l$. Несколько миноров, каждый полупериметром не меньше n, вместе покрывают всю главную диагональ доски $n\times n$. Докажите, что они покрывают не менее половины клеток доски.

Д. Флаасс

8. Пусть $a_1, \ldots, a_{100}$, $b_1, \ldots, b_{100}$ — различные действительные числа. Таблица 100×100 заполнена числами по следующему правилу: в клетке на пересечении i-ой строки и j-го столбца записано число a_i+b_j. Известно, что произведение чисел в любом столбце равно 1. Докажите, что произведение чисел в любой строке равно -1.

Д. Фомин

11 класс

5. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и N соответственно так, что

$$AK\cdot AN=2BK\cdot DN.$$

Отрезки CK и CN пересекают диагональ BD в точках L и M. Докажите, что точки K, L, M, N и A лежат на одной окружности.

Д. Терешин

6. На Марсе 100 государств, враждующих между собой. Для поддержания мира решено образовать несколько военных блоков так, чтобы в каждом блоке было не более 50 государств и любые два государства состояли вместе хотя бы в одном блоке.

а) Каким наименьшим числом блоков можно обойтись?

б) Тот же вопрос при дополнительном требовании, чтобы в любые два блока входило в общей сложности не более 80 государств.

Д. Флаасс

7*. Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n\times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-ой строки и j-го столбца, записано число a_i+b_j. Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел одинаковы, то во всех строках — тоже.

Д. Фомин

8. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$|y_1-y_2|+\ldots+|y_{1990}-y_{1991}|,$$

если $y_k=\dfrac{x_1+\ldots+x_k}{k}$ при $k=1, \ldots, 1991$, а числа $x_1, \ldots, x_{1991}$ удовлетворяют условию

$$|x_1-x_2|+\ldots+|x_{1990}-x_{1991}|=1991?$$

А. Качуровский

XXV Всесоюзная олимпиада по физике

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Заключительный этап Всесоюзной физической олимпиады 1991 года прошел с 13 по 23 апреля в городе Ташкенте.

На теоретическом туре, как обычно, девятиклассникам были предложены четыре задачи на четыре часа, а остальным — пять задач на пять часов. Вот условия этих задач (часть из них опубликована в «Задачнике «Кванта»).

Теоретический тур

9 класс

1. У левого края тележки длиной $L=0{,}2$ м и массой $M=1$ кг лежит кубик массой $m=0{,}3$ кг (рис. 1). Кубику толчком придают горизонтальную скорость $v_0=1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как прекратится его проскальзывание относительно тележки. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu=0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.

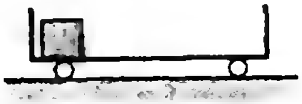


Рис. 1.

2. В кастрюлю наливают $M=0{,}3$ кг воды и опускают туда термометр и кипятильник, мощность которого можно менять. Оказалось, что при мощности $P_1=50$ Вт вода нагревается не выше $t_1=+50$ °С, при мощности $P_2=100$ Вт — не выше $t_2=+65$ °С. За какое время эта порция воды нагреется от комнатной температуры $t_0=+20$ °С до $t_3=+70$ °С при мощности нагревателя $P_3=200$ Вт? Оцените предельную температуру при этой мощности. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·град).

3. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов $l_1=10$ м ток через лампочку оказался равным $I_1=0{,}17$ А, при $l_2=20$ м — $I_2=0{,}13$ А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов $l_3=40$ м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от ее напряжения приведена на рисунке 2.

4. На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R=10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк, как Вы уже догадались,— на окружности (рис. 3). Заяц двигается по прямой с постоянной скоростью $v_0=2$ м/с. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения на льду $\mu=0{,}05$. Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая.

10 класс

1. См. задачу 4 для 9 класса.

2. На шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения $\mu=0{,}8$, образующей угол $\alpha=30°$ с горизонтом, лежит коробка длиной $L=0{,}2$ м (рис. 4). У верхнего ее края приклеен груз, масса которого равна массе коробки. Внутри коробки трения нет. В некоторый момент груз отклеивается и начинает скользить вниз. На какое расстояние сдвинется коробка? Считайте удары груза о стенки коробки абсолютно упругими.

3. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре $T_1=78$ К — точка *1* на *p*, *V*-диаграмме на рисунке 5. Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре — участок *1—2—3* на диаграмме. В точке *3* давление в сосуде становится равным $p_1=686$ мм рт. ст. Поршень закрепляют, и сосуд охлаждают до температуры $T_2=76$ К, давление при этом уменьшается

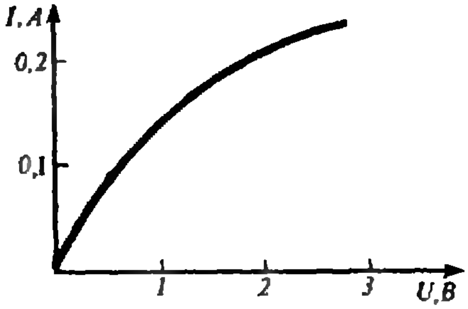


Рис. 2.

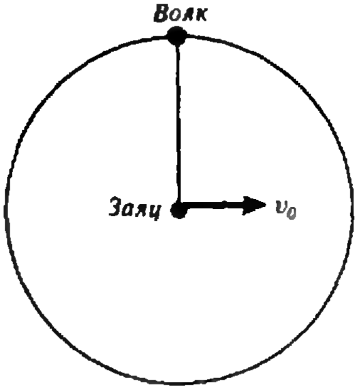


Рис. 3.

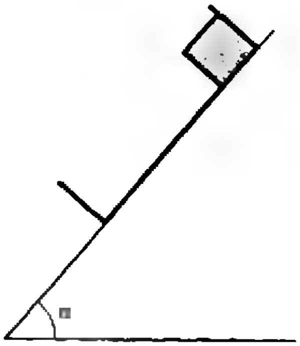


Рис. 4.

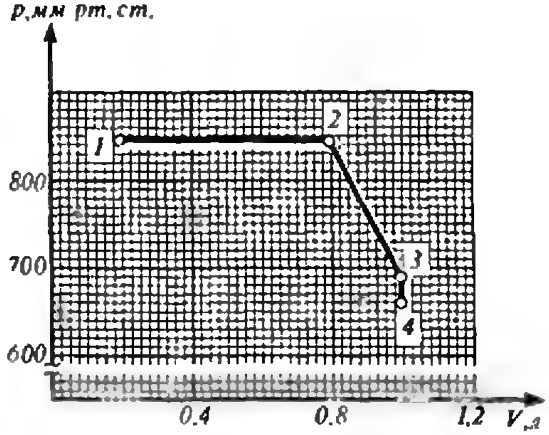


Рис. 5.

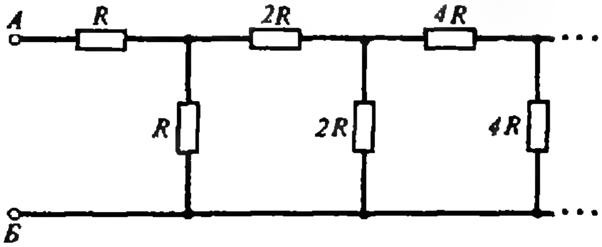


Рис. 6.

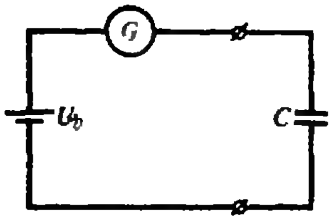


Рис. 7.

до $p_2=657$ мм рт. ст.— точка 4 на диаграмме. Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Пары азота считайте идеальным газом. Молярная масса азота $M=28$ г/моль, плотность ртути $\rho=13,6$ г/см^3.

4. Длинная цепочка из резисторов содержит очень большое число звеньев (рис. 6). Сопротивления резисторов в первом звене R и R, во втором — $2R$ и $2R$, в третьем — $4R$ и $4R$ и так далее — в каждом следующем звене в 2 раза больше, чем в предыдущем. Чему равно сопротивление всей цепочки, измеренное между точками *А* и *Б*?

5. В схеме на рисунке 7 напряжение батарейки $U_0=10$ В, емкость конденсатора $C=1$ мкФ, сопротивление гальванометра $R=1$ кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до $C'=1000$ мкФ? При данной частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.

11 класс

1. На рисунке 8 приведена фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол α и частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол α. *Смачивание считайте полным.*

2. КПД тепловой машины в цикле *1—2—3—1*, состоящем из изотермы *1—2*, изохоры *2—3* и адиабаты *3—1*, равен η_1 (рис. 9). В цикле *1—3—4—1*, состоящем из адиабаты *1—3*, изотермы *3—4* и изохоры *4—1*, КПД равен η_2. Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу *1—2—3—4—1*? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

3. Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью E_0, напряженность поля вблизи точки *А* оказывается равной $3E_0$, а напряженность поля вблизи точки *Б* становится равной нулю (рис. 10). Определите напряженность поля возле точки *В*. Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере *БАБ*. Радиус сферы R.

4. Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита (рис. 11) практически без ускорения. В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью и при токе в обмотке $I_1=0,41$ А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в об-

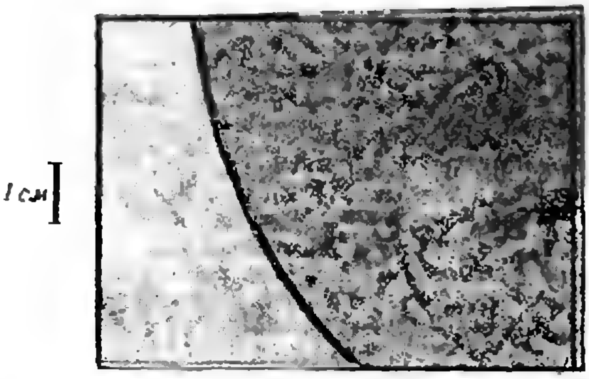


Рис. 8.

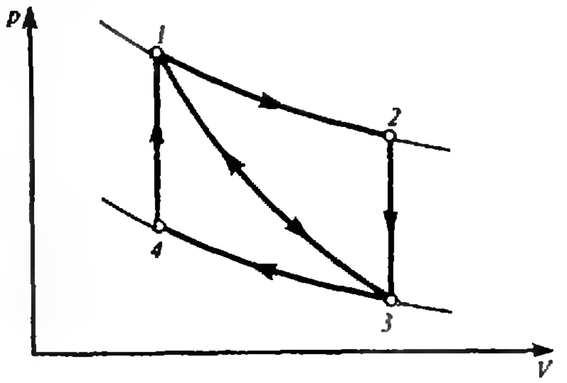


Рис. 9.

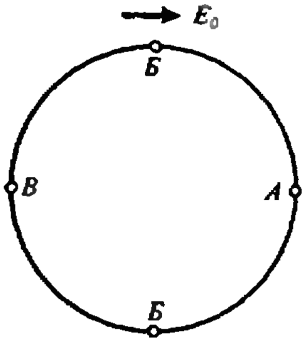


Рис. 10.

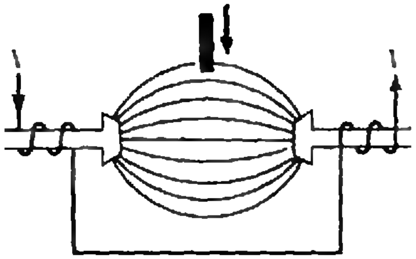


Рис. 11.

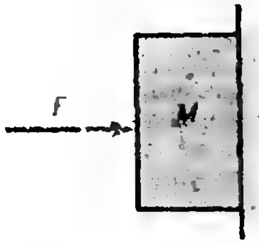


Рис. 12.

мотке $I_2=1{,}39$ А. При каком токе диск из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого материала сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе $I_3=$ $=0{,}29$ А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из таблиц.

5. На прислоненное к стенке тело массой M действует перпендикулярно стенке гармоническая сила $F=F_0 \cos \omega t$ (рис. 12). Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы величина силы, действующей на стенку, отличалась от F_0 в 3 раза?

К сожалению, в третьей задаче для 10 класса была допущена досадная ошибка в числовых данных (здесь она исправлена), что основательно испортило вторую часть задачи. Первым эту ошибку заметил — и доказал, что это ошибка,— руководитель команды из Литвы, однако было уже поздно. Несколько участников тоже заметили несоответствие числовых данных и сделали верные выводы — они и получили за эту задачу максимальный балл.

В целом уровень трудности задач теоретического тура был примерно таким же, как и в прошлые годы. Ни одна из задач не осталась нерешенной.

Задачи экспериментального тура готовили, по установившейся традиции, хозяева олимпиады — ученые вузов Ташкента, учителя школ. Им пришлось преодолеть массу трудностей (каждый, кто пытался в апреле купить, например, батарейку, хорошо понимает, о чем идет речь), однако в конце концов все устроилось.

Опишем коротко задачи экспериментального тура.

В девятом классе первая задача была по оптике. Нужно было определить коэффициент преломления неизвестной жидкости (раствор соли в воде, чуть подкрашенный, но участники этого не знали), используя лампочку на подставке, батарейку, тонкостенный цилиндрический стаканчик из прозрачного стекла, черную бумагу, резинку для крепления, линейку и миллиметровку. Авторы задачи предполагали красивое решение — обмотав стаканчик черной бумаги и оставив тонкую вертикальную щель, осветить ее лампочкой и наблюдать сверху. При этом хорошо видны два луча — один в воздухе, он не преломляется, а другой в воде. Дальше — немного геометрии и тригонометрии, и ответ готов. Участники придумали множество способов решения задачи, среди них были и весьма красивые — например, использовать стаканчик с водой как цилиндрическую линзу и расположить эту линзу, источник и экран так, чтобы линза была посередине, при этом геометрия получается совсем простой.

Вторая задача была про трение — нужно было измерить коэффициент трения небольшого куска фанеры о *горизонтальную* поверхность (альбом с бумажной обложкой). Еще давались две деревянные линейки. Была довольно прозрачная подсказка: на куске фанеры сверлом сделали лунку, куда удобно было упереть угол линейки и толкать фанерку, наклоняя линейку под разными углами. Можно было довольно легко найти такой угол, при котором фанерка уже не скользила (заклинивание), и измерить его с помощью второй линейки. Однако так почти никто не сделал, хотя способов решения было предложено великое множество, в том числе и довольно интересных.

Первая задача для десятого класса была вполне стандартной — нужно было измерить плотность сыпучего материала, а именно песка (точнее, как было специально отмечено в условии,— плотность материала, из которого состоят песчинки). Оборудование: бутылка с широким горлышком, пробирка, вода, нитка, миллиметровка. Простота этой задачи оказалась обманчивой — не так легко найти оптимальную методику, которая позволит исключить ошибки, связанные с толщиной стенок пробирки (ее трудно измерить сколь-нибудь точно, лучше исключить ее из ответа, придумав хороший способ измерений), с поверхностными явлениями и т. п.

Вторая задача — «черный ящик» с двумя выводами, содержащий источник. Нужно было найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника при помощи вольтметра (его сопротивление было вполне сравнимым с внутренним сопротивлением источника) и потенциометра сопротивлением 1 кОм. Нужно было придумать, как из этого потенциометра сделать два (а лучше — три) известных резистора. Один из способов — установить движок потенциометра примерно посередине и при помощи вольтметра подобрать положение поточнее, включая «половинки» поочередно. Теперь у нас есть резистор сопротивлением 500 Ом и еще один — сопротивлением 250 Ом, если соединить «половинки» параллельно. Дальше уже совсем просто — нужно составить несколько схем и рассчитать неизвестные ЭДС и внутреннее сопротивление источника (можно было взять схем больше, чем нужно для расчета, и проверить, нет ли в «черном ящике», скажем, диода). Впрочем, арифметика получалась не такая уж и простая — некоторые участники все сделали верно, но увязли в вычислениях, так и не добравшись до ответа — 4,5 В и 1 кОм (плоская батарейка, резистор).

В первой задаче для одиннадцатого класса — оптической — было необходимо измерить коэффициент преломления глицерина и неизвестного прозрачного вещества (кусочки плавленного кварца неправильной формы). Оборудование: прозрачная цилиндрическая кювета с параллельными торцами, лампочка на подставке, батарейка, вода, глицерин, миллиметровка. Идея понятна — «утопить» кусочки в такой смеси воды и глицерина, чтобы они были не видны. При этом можно считать, что оптические свойства смеси такие же, как и у кусочков, а остальное — понятно.

Во второй задаче нужно было найти температуру нити лампочки накаливания при заданном токе. Был дан температурный коэффициент вольфрама, и нужно было измерить сопротивления при комнатной температуре и в рабочей точке. Трудность состояла в том, что даже небольшой ток заметно нагревает нить накала, поэтому нужно было провести экстраполяцию характеристики нити в область малых токов.

По результатам Всесоюзной олимпиады этого года сформирована — предварительно — команда нашей страны для участия в Международной физической олимпиаде

Участники олимпиады, получившие дипломы I степени.

1992 года. В нее вошли 14 победителей Всесоюзной олимпиады по десятым классам и два девятиклассника — А. Ольховец (сильно обогнавший остальных девятиклассников) и О. Шпырко (выступавший среди десятиклассников).

Как всегда, среди специальных призов был и приз имени академика И. К. Кикоина. Его получил Анатолий Ольховец за лучшее решение задач экспериментального тура.

После обсуждения с руководителями команд принято решение опубликовать программу по физике для участников заключительного этапа Всесоюзной физической олимпиады (возможно, это будет сделано и на страницах «Кванта»). Она будет несколько шире обычной школьной программы (из которой постепенно исключаются все новые и новые разделы), однако не будет выходить за рамки факультатива по физике.

В настоящий момент еще нельзя с уверенностью назвать место проведения следующей Всесоюзной олимпиады по физике, но мы очень надеемся, что она состоится.

Желаем успехов всем участникам олимпиады.

Призеры XXV Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Бондаренко М.— Санкт-Петербург, с. ш. 239
Галеанс А.— Олайне, с. ш. 1,
Звонкин Д.— Москва, с. ш. 43,
Каукис В.— Рига, гимназия 1,
Линде Г.— Рига, гимназия 1,
Плотниекс Ю.— Рига, гимназия 1,
Федоров Р.— Москва, с. ш. 57;

по 10 классам —

Амбайнис А.— —Даугавпилс, с. ш. 12,
Аринкин Д.— Харьков, с. ш. 132,
Бурков А.— Киров, с. ш. 35,
Галеанс А.— Олайне, с. ш. 1,
Кожевников П.— Калуга, с. ш. 24,
Ногин А.— Москва, с. ш. 57,
Некрашевич В.— Киевская обл., Ковшеватская с. ш.;

по 11 классам —

Жуховицкий В.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Коган М.— Санкт-Петербург, с. ш. 566,
Малинникова Е.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Перлин А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Темкин М.— Москва, с. ш. 57.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Пермь, с. ш. 17,
Бринюк В.— Донецк, с. ш. 35,
Дудко Д.— Киев, с. ш. 61,
Кухта А.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 9,
Потапова Л.— Рига, гимназия 1,
Розенблюм Е.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Саприкин С.— Одесса, с. ш. 36,
Сосыка Е.— Краснодар, с. ш. 5,
Хазанов А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Черухин Д.— Керчь, с. ш. 1,
Ческидов А.— Усть-Каменогорск, с. ш. 25;

по 10 классам —

Аншмитс У.— Рига, гимназия 1,
Бородин А.— Донецк, с. ш. 17,
Изместьев И.— Кировская обл., Сунская с. ш.,
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Климов С.— Ижевск, с. ш. 30,
Корниенко А.— Днепропетровск, с. ш. 36,
Малютин А.— Санкт-Петербург, с. ш. 45,
Норвелис Я.— Рига, гимназия 1,
Никулин М.— Обнинск Калужской обл., гимназия 2,
Петросян А.— Ереван, ФМШ,
Рабинович М.— Москва, с. ш. 57,
Чиликов А.— Киров, с. ш. 35;

по 11 классам —

Андерсонс Г.— Рига, гимназия 1,
Балашов О.— Санкт-Петербург, с. ш. 45,
Волоченко К.— Донецк, с. ш. 17,
Гриншпон М.— Томск, с. ш. 32,
Жарков С.— Киев, с. ш. 145,
Мучник Р.— Винница, с. ш. 17,
Насыров А.— Москва, СУНЦ МГУ.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Беленов Р.— Нижний Новгород, с. ш. 40,
Брюхов Е.— Челябинск, с. ш. 31,
Гуреев А.— Новгород, с. ш. 1,
Казанцева В.— Ижевск, с. ш. 30,
Костин В.— Саратов, физико-технический лицей 1,
Лауд П.— Таллинн, с. ш. 9,
Порошенко Е.— Алма-Ата, РСФМШИ,

Смирнов А.— Вологодская обл., Березниковская с. ш.,
Степанов А.— Тверь, с. ш. 17,
Топчий А.— Омск, с. ш. 64;

по 10 классам —

Елсуфьев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Зайцев С.— Тула, с. ш. 73,
Крустс А.— Юрмала, с. ш. 1,
Кузьмич С.— Минск, МССШ при БГУ,
Майлыбаев А.— Москва, СУНЦ МГУ,
Певцова Ю.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Рымов А.— Алма-Ата, РСФМШИ,
Сибиченков А.— Смоленск, гимназия,
Теплинский А.— Каменец-Подольский Хмельницкой обл., с. ш. 7,
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82,
Хасин М.— Донецк, с. ш. 17,
Хвеюкин К.— Минск, МССШ при БГУ,
Чудинов К.— Пермь, с. ш. 17;

по 11 классам —

Барсуков С.— Краснодар, с. ш. 4,
Бродский Н.— Челябинск, с. ш. 31,
Вигулис Н.— Валмиера, с. ш. 4,
Дацук А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Днестранский А.— Рязань, с. ш. 2,
Карманный Р.— Унгены, с. ш. 4,
Каспяравичюте Р.— Вильнюс, с. ш. 7,
Козачко А.— Винница, с. ш. 17,
Копылов А.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82,
Кротов Д.— Новосибирск, с. ш. 25,
Кузьма Ю.— п. Протва Калужской обл., с. ш. 1,
Львов А.— Москва, с. ш. 43,
Мишачев К.— Липецк, с. ш. 14,
Наумович А.— Минск, с. ш. 19,
Полонский Ю.— Витебск, с. ш. 31,
Рябичева О.— Киров, с. ш. 8,
Солодов А.— Воронеж, колледж 1,
Страусс У.— Рига, гимназия 1,
Цыганон Е.— Белорецк, компьютерная ш.,
Шамсутдинов М.— Уфа, с. ш. 114,
Янсонс М.— Сигулда, с. ш. 1.

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Красновид А.— Гродно, с. ш. 19,
Ольховец А.— Киев, с. ш. 206,
Чигирев Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 566;

по 10 классам —

Арбатский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Базаров И.— Владивосток, с. ш. 23,
Горгадзе В.— Нальчик, с. ш. 19,
Гуляев Н.— Нижний Новгород, с. ш. 82,
Мотрунич А.— Ужгород, с. ш. 1,
Ращюс А.— Каунас, с. ш. Саулес,
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. 41;

по 11 классам —

Башинский С.— Стерлитамак, с. ш. 27,
Добровольский С.— Днепропетровск, с. ш. 111.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Малюгин В.— п. Ува (Удмуртия), с. ш. 1,
Рыбачук В.— Винница, с. ш. 26,
Цейтлин В.— Москва, с. ш. 57,
Якупов Р.— Кузнецовск, с. ш. 1;

по 10 классам —

Ганнох А.— Киев, с. ш. 61,
Ивченко Н.— Киев, с. ш. 145,
Лобанов А.— Алма-Ата, РСФМШИ,
Панков С.— Тула, с. ш. 73,
Фролов А.— Москва, с. ш. 303,
Чистый А.— Брест, с. ш. 1,
Шпырко О.— Киев, с. ш. 206, 9 кл;

по 11 классам —

Березняков А.— Саратов, лицей 1,
Вавилов М.— Екатеринбург, с. ш. 2,
Дементьев А.— Чебоксары, с. ш. 45,
Иванов М. Г.— Тула, с. ш. 73,
Ковтуненко Б.— Запорожье, с. ш. 28,
Литвак А.— Нижний Новгород, с. ш. 40,
Ляпин А.— Нальчик, с. ш. 9,
Пузынь П.— Гродно, с. ш. 19,
Тайманов С.— Раменское, с. ш. 4,
Шаракин С.— Москва, СУНЦ МГУ,
Ширяев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Бабурин Д.— Красноярск, с. ш. 41,
Беляев Л.— Петропавловск, с. ш. 1,
Бережнов А.— Казань, с. ш. 131,
Гвоздев П.— Котельнич, с. ш. 3,
Головатый А.— Ступино, с. ш. 9,
Квицинский А.— Киев, ФМШ при КГУ,
Кокорич М.— п. Агинское Читинской обл., с. ш. 2,
Малинова Е.— Санкт-Петербург, ФМШ при ЛГУ,
Сауничев К.— Бийск, с. ш. 18,
Седельников А.— Усть-Каменогорск, с. ш. 17,
Халапян С.— ст. Осколок, с. ш. 16;

по 10 классам —

Белиловский О.— Алма-Ата, РСФМШИ,
Булавенко С.— Киев, ФМШ при КГУ,
Иютин Б.— Тула, с. ш. 73,
Козлов К.— Глазов, с. ш. 14,
Кротов Д.— Тверь, с. ш. 17,
Маравин Ю.— Евпатория, с. ш. 6,
Овсицер Б.— Северодвинск, с. ш. 17,
Самойлиди С.— Новосибирск, СУНЦ НГУ;

по 11 классам —

Борковский А.— Богородчаны, с. ш. 1,
Денисов И.— Могилев, лицей,
Ненашев А.— Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Полищук И.— Москва, с. ш. 5,
Реачев М.— Винница, гимназия,
Сапаев У.— Шават, с. ш. 120,
Субботин Д.— Москва, с. ш. 57,
Тамошюнас В.— Вильнюс, с. ш. 45,
Третьяков Ю.— Алма-Ата, РСФМШИ,
Усольцев К.— Владивосток, с. ш. 23,
Харисов А.— Уфа, с. ш. 74,
Чарушин А.— Новосибирск, СУНЦ НГУ.

IV Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

В этом году заключительный этап IV Всесоюзной олимпиады школьников по информатике проходил с 17 по 24 апреля в Бишкеке — столице республики Кыргызстан. На сей раз в олимпиаде принимали участие 87 школьников из 11 союзных республик, а также городов Москвы, Санкт-Петербурга и Бишкека (как города-устроителя олимпиады). В общей сложности 16 команд представляли республики и различные регионы страны. Как всегда, самой многочисленной была команда РСФСР — 26 человек. Минимально возможным составом (3 участника) были представлены команды Казахстана, Кыргызстана, Латвии, Молдовы и Туркмении.

Кыргызстан встретил участников олимпиады своей неповторимой красотой. Все ребята сразу почувствовали, что они являются здесь желанными гостями. И даже солнце приветливо улыбалось участникам, желая успехов в этом трудном соревновании.

Красочным было торжественное открытие, которое состоялось в зале филармонии. Организаторы сделали все, чтобы передать собравшимся присущий республике национальный колорит и создать хорошее настроение на весь период проведения олимпиады.

Как и прежде, олимпиада проводилась в два тура, причем оба тура были компьютерные. Половина участников выбрала для соревнований персональные компьютеры IBM PC, а другая половина — «Ямаху».

Жюри Всесоюзной олимпиады возглавлял академик АН республики Кыргызстан В. П. Живоглядов. В состав жюри с правом решающего голоса входили представители всех участвующих республик, а также городов Москвы и Санкт-Петербурга. Пакет задач к олимпиаде был подготовлен научным комитетом во главе с членом-корреспондентом АН СССР Ф. Л. Черноусько и перед каждым туром жюри олимпиады отбирало из этого пакета одну задачу. Задачи были многоуровневые, что позволило проявить себя как очень сильным участникам, так и менее подготовленным. Следует отметить проблемную окраску предлагавшихся задач — она потребовала от ребят продемонстрировать не только умение составить алгоритм и работоспособную программу, но и формализовать поставленную проблему.

Приведем условия задач.

Задача I тура

(авторы А. Грудев, Ф. Черноусько)

На координатной плоскости задан робот-манипулятор, состоящий из двух последовательно соединенных звеньев, длины которых L1 и L2. Первое звено шарнирно закреплено в начале координат, второе шарнирно соединено с первым. В конце второго звена установлено сверло. Робот управляется путем поворота звеньев в первом и во втором шарнирах с угловыми скоростями, по абсолютной величине не превышающими ω1 и ω2 (рад/с) соответственно. Второе звено может вращаться относительно первого беспрепятственно.

Робот предназначен для сверления отверстий. Координаты точек сверления: (x1; y1), (x2; y2), ..., (xN; yN).

В начальный момент первое звено направлено вдоль положительной полуоси *OX*, а второе звено образует угол A, отсчитываемый от оси *OX* против часовой стрелки. Время операции сверления отверстия фиксировано и равно P.

Требуется составить программу, которая:

а) выдает какую-либо последовательность номеров точек сверления и требуемое для этого время;

б) выдает последовательность сверления заданных точек за наименьшее, по возможности, время работы робота и само это время;

в) для заданного интервала времени (0, T) выбирает максимальное количество просверленных отверстий и выдает их последовательность.

Примечания

1) Все исходные данные целочисленные.

2) Программа должна осуществлять ввод исходных данных либо из входного файла (A: ROBOT.DAT), либо с клавиатуры в виде последовательности: L1, L2, ω1, ω2, A, T, P, N, x1, y1, ..., xN, yN.

Задача II тура

(автор И. Волков)

Задается множество различных слов *A*=(a1, a2, ..., ak), k$\leqslant$10. Из слов множества *A* составляется зашифрованный текст — последовательность слов, записанных без разделителей-пробелов. Слова представляют собой непустые последовательности не более восьми заглавных латинских букв и могут встречаться в тексте произвольное количество раз. Необходимо дешифровать текст, т. е. разбить его на слова множества *A*. В дешифрованном тексте слова следует разделять пробелами.

Написать программу, которая:

а) определяет, существует ли для заданного множества *A* такой текст, который дешифруется не единственным образом;

б) если такой текст существует, то исключает из множества *A* минимальное количество слов так, чтобы любой текст дешифровался однозначно, и печатает исключаемые слова (если такой исключаемый набор не единственный, то выводит все варианты);

в) для введенного текста производит его дешифровку, используя первоначально введенное множество *A*, и если дешифровка не единственная, то выводит все варианты.

Последовательность операций ввода/вывода:

— ввод множества *A*:
"введите k" ⟨K⟩
"введите a1" ⟨a1⟩
. . . .
"введите ak" ⟨ak⟩
— вывод сообщения:
"неоднозначно дешифруемый текст существует"
или
"не существует"
— если текст существует, то вывод сообщения:
"выбросить" ⟨список слов⟩
— ввод текста длиной не более сорока символов в виде:
"текст" ⟨текст⟩
— вывод результатов дешифровки:
⟨текст⟩→⟨дешифрованный текст⟩.

Примеры

1) *A*=(B, C) — любой текст дешифруется однозначно.

2) *A*=(B, C, BC) — существует текст, который дешифруется двумя способами:

BBC→B BC

или

BBC→B B C.

Жюри олимпиады совместно с комиссией по проверке работ участников оценивало задачу каждого тура исходя из 100 баллов. При оценке результатов учитывалось умение школьников формализовать предложенное задание, умение алгоритмизировать, т. е. разрабатывать наилучший алгоритм и обосновывать его достоверность, умение программировать полученный алгоритм с использованием одной из систем программирования: Бейсик, Турбо-Паскаль, Турбо-Си. Кстати, большинство школьников программировало на Паскале.

Из двух предлагавшихся на олимпиаде задач наиболее сложной оказалась задача первого тура. При ее решении важно было выявить недоступные точки, указать неоднозначность перемещения робота из одной позиции в другую, а также обосновать необходимость полного перебора для получения правильного ответа. Кроме того, эта задача предполагает ряд интересных эвристик, существенно повышающих эффективность алгоритма при определенных сочетаниях исходных данных.

К сожалению, решить эту задачу в полном объеме никто из участников олимпиады не смог. Наилучших результатов здесь добились А. Гузеев из Перми (56 баллов), Д. Жуков из Москвы (56 баллов) и С. Герштейн из Екатеринбурга (52 балла). Только 30 % школьников получили за эту задачу 20 баллов и выше — как оказалось, многие участники просто плохо знают математику и физику, что не позволило им даже приступить к разработке алгоритма решения задачи.

Задача второго тура была более доступной для формализации, поэтому и результаты были лучше. Максимальное количество баллов — 72 — получил за эту задачу А. Суханов из Санкт-Петербурга. По 52 балла получили Д. Уваров из Новокузнецка и А. Скворцов из Юбилейного Днепропетровской области.

Конечно, относительно невысокие результаты, полученные участниками при решении задач этой олимпиады, можно отчасти объяснить их сложностью. Однако только этим объяснением ограничиваться не стоит. Во-первых, уровень сложности задач соответствовал международным олимпиадам, и наверное, было бы неправильно эту планку для нас опускать ниже. Во-вторых, в теоретическом плане многие участники нашли правильную идею решения каждой задачи. Не хватило времен на реализацию. Все это говорит о том, что интеллектуальные способности большинства участников достаточно высокие, однако отсутствие необходимой практики работы с персональными компьютерами не позволило им довести имеющиеся идеи до логического завершения, т. е. получить работоспособные программы.

Несмотря на все трудности, быстро пролетели дни соревнований, настало время подведения итогов. Как всегда, было много различных призов победителям олимпиады, кроме того, каждый участник получил от организаторов памятный подарок.

В этом году впервые подведение итогов осуществлялось раздельно по двум категориям: 8—10 классы и 11 классы. Лучше всех в общем зачете выступил на этой олимпиаде А. Суханов (122 балла), который получил в награду персональный компьютер «Корвет». За ним идут А. Гузеев (90 баллов) и Д. Уваров (89 баллов). Как и на прошлых олимпиадах, в командном зачете впереди оказались школьники из Санкт-Петербурга. Отрадно, что среди призеров оказались и девушки — А. Пратусевич и А. Косовская получили соответственно дипломы второй и третьей степени.

По результатам прошедшей олимпиады жюри рекомендовало включить в состав кандидатов на международную олимпиаду по информатике этого года А. Суханова и Д. Кима. Для подготовки к следующей международной олимпиаде, которая пройдет в 1992 году в Германии, кандидатами в сборную СССР включены все школьники невыпускных классов, получившие дипломы I и II степени. Они будут приглашены для участия в зимних сборах, которые состоятся в следующем году.

В заключение хотелось бы поблагодарить организаторов олимпиады, сделавших все возможное для проведения такого сложного в техническом отношении соревнования, а также пожелать всем участникам еще больших успехов на непростой ниве информатики.

Призеры IV Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

Гузеев А.— Пермь,
Жуков Д.— Москва,
Матлаш П.— Первомайск Николаевской обл.,
Скворцов А.— Юбилейный Днепропетровской обл.;

по 11 классам —

Герштейн С.— Екатеринбург,
Ким Д.— Темиртау,
Суханов А.— Санкт-Петербург,
Уваров Д.— Новокузнецк.

Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

Белый В.— Минск,
Кузнецов Е.— Москва,
Миериньш Э.— Рига,
Миронов И.— Санкт-Петербург,
Шульпин И.— Калининград;

по 11 классам —

Законов А.— Санкт-Петербург,
Иванов Д.— Грозный,
Лепихин В.— Волгоград,
Мельников В.— Лиски Воронежской обл.,
Пратусевич А.— Санкт-Петербург,
Свидерский В.— Могилев,
Хаменя В.— Гродно.

Дипломы III степени

по 8—10 классам получили

Вашкевич М.— Минск,
Веревкин П.— Курск,
Кретов М.— Ашхабад,
Офенбах И.— Омск;

по 11 классам —

Алтуев М.— Нальчик,
Дорош В.— Донецк,
Кабак В.— Сморгонь Гродненской обл.,
Косарев Т.— Москва,
Косовская А.— Санкт-Петербург,
Куцев С.— Бишкек,
Маркелов А.— Самара,
Яценко Р.— Москва.

Заочная биолого-математическая олимпиада

Всесоюзная заочная многопредметная школа (ВЗМШ) АПН СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова и научно-исследовательский сектор Московского института усовершенствования учителей проводят заочную биолого-математическую олимпиаду.

В последнее время математические приемы и модели становятся все более широко используемым средством в самых различных областях биологии. Синтез двух наук оказался не только интересным, но и весьма полезным подходом для описания и изучения биологических процессов (см., например, статью М. Беркинблита и Е. Глаголевой «Математика в живых организмах» в февральском номере «Кванта» за 1990 г.). Поэтому мы предлагаем испытать себя всем, кто интересуется математикой и биологией (возможно, одной из этих наук больше, а другой — чуть-чуть).

В олимпиаде могут принять участие школьники, учащиеся техникумов и ПТУ. Победители будут определяться отдельно по каждому классу (при общем наборе задач).

Как правило, в предлагаемых задачах требуется провести довольно глубокий анализ описанных систем, поэтому не расстраивайтесь, если в решении части из них вам не удастся довести дело до конца. В принципе, победителем олимпиады можно стать, решив хорошо лишь некоторые задачи.

Работа должна быть выполнена на русском языке в тетради. Решение каждой задачи начинайте с нового листа. На обложке тетради ответьте на следующую анкету:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Номер класса, школы (иного учебного заведения).
3. Полный почтовый домашний адрес с индексом.
4. Наиболее интересующие вас области биологии.

Работы высылайте по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, биолого-математическая олимпиада. Срок отправки работ — не позднее 1 февраля 1992 г. Победители награждаются призами, а их фамилии и анализ решений задач будут опубликованы в «Кванте».

Желаем успехов!

1. Кольцевая молекула ДНК состоит из 4000 пар нуклеотидов (п. н.). Биохимик обрабатывает ее рестриктазами (ферментами, расщепляющими ДНК в определенных местах) и разделяет фрагменты по их длине методом электрофореза. При обработке рестриктазой *A* получены полосы, соответствующие фрагментам в 1000 и 3000 п. н., при обработке рестриктазой *B* — полосы, соответствующие фрагментам в 300, 1700 и 2000 п. н. При обработке ДНК одновременно обеими рестриктазами электрофорез дал 4 полосы, но измерить их положение биохимик не успел, опаздывая в кино, а его коллеги выбросили препарат, решив, что он уже не нужен. Можно ли по имеющимся сведениям определить, какова была длина этих фрагментов?

2. В настоящее время известно около миллиона видов насекомых. Союз Профессиональных любителей насекомых составил описания всех этих видов, состоящие из 40 предложений каждое. Установлено, что на прочтение, осмысление каждого предложения и проверку того, имеется ли указанный в нем признак у данной особи насекомого, требуется примерно 3 минуты. Как должен быть устроен хороший определитель, позволяющий минимизировать среднее время, уходящее на определение неизвестного насекомого? Чему будет равняться это время?

3. На берегу озера стоят (по кругу) *N* фазенд. Каждый фазендейро каждый вечер ездит в гости к своему левому и правому соседям, причем за долгие годы у них выработался такой график поездок, что каждый гость застает хозяина дома. Но эта размеренная жизнь была нарушена. Как-то утром к одному из фазендейро зашел путник и заразил хозяина некоей болезнью.

а) Для болезни характерно следующее течение:

0-й день — заражение: человек здоров и незаразен;

1-й день — инкубационный период: человек внешне здоров, но заразен;

2-й и 3-й дни — человек болен и заразен;

4-й день — человек здоров и вновь может заразиться.

Фазендейро сохранили традицию и продолжали ходить в гости и к здоровым, и к больным соседям, если только не болели сами (на 2-й и 3-й дни заболевания). Опишите ход эпидемии, считая, что вероятность заражения при контактах — 100 %. Общением с рабами и домочадцами пренебречь.

б) Условия те же, что и в а), но на третий день болезни человек болен и незаразен. Опишите ход эпидемии.

в) Опишите ход эпидемии, выбрав какие-либо иные варианты течения болезни.

г) Смогут ли в задачах а) — в) один или несколько фазендейро, изменив свое поведение, остановить эпидемию? Если да — то как?

4. Способность чувствительных клеток органов зрения реагировать на свет описывается их спектральной характеристикой: зависимостью между длиной волны (L) и интенсивностью отклика клетки (S) на монохроматическое излучение единичной мощности с этой длиной волны. Отклик клетки на смесь нескольких монохроматических излучений с разными мощностями (I_1, I_2, I_3,...) является суммой откликов на каждое из них, т. е. I_1S_1+ $+I_2S_2+I_3S_3+\ldots$ (для излучения с непрерывным спектром клетка интегрирует функцию $I(L)\cdot S(L)$, но при решении нашей задачи применять это свойство не понадобится). Обычно клетки имеют колоколообразную спектральную характеристику. Обрабатывая информацию от разных рецепторов, мозг определяет цвет и яркость объектов.

а) Вам необходимо определить для монохроматического света любой мощности его длину волны. Какое минимальное число разных типов клеток для этого потребуется? Предложите какие-либо спектральные характеристики этих клеток и опишите способ определения длины волны. (На излучения с длинами волн менее 400 нм или более 700 нм вы, как и человеческий глаз, можете не реагировать.)

б) Вам необходимо для смеси двух монохроматических излучений определить их длины волн и мощности. Какое минимальное число разных типов клеток для этого потребуется?

5. Говоруны бывают желтые, синие и зеленые. Признак этот определяется одним геном. (О механизме наследования таких признаков вы можете прочитать в школьном учебнике общей биологии или в любом учебнике генетики.) Доминирование отсутствует — гетерозиготы зеленые (желтый+синий цвета). Спариваются только особи разных цветов, в остальном же пары образуются случайно.

В большой популяции поровну говорунов всех трех цветов. Как будет изменяться доля животных разного цвета, если представители разных поколений друг с другом не спариваются? Опишите также, что будет происходить с популяцией, в которой изначально доли животных желтого, зеленого и синего цвета составляют X, Y и Z.

Соотношение полов — 1:1. Рассмотрите отдельно два случая:

а) формирование постоянных пар;

б) пары образуются только для оплодотворения, причем партнера находят все самки.

6. У брякозавров выбору самки предшествует турнир, причем каждый самец участвует ровно в одном поединке. Среди самцов бывают «забияки» и «тихони». «Забияка» лезет в драку и сражается до конца. «Тихоня» хорохорится и может без драки напугать такого же «тихоню», а от «забияки» он бежит без борьбы. Пары турнирных боях образуются чисто случайно. Для любого «забияки» вероятность победы в драке с любым другим «забиякой» — 1/2; для любого «тихони» вероятность победы в поединке с любым другим «тихоней» — 1/2. Дети у отца-«забияки» — тоже «забияки», у отца-«тихони» — «тихони».

а) Самец-победитель имеет в среднем 4-х потомков. Находят пару и проигравшие. Самец, капитулировавший без борьбы, имеет 3-х потомков, а вот самец, потрепанный в неудачной для него драке,— лишь одного. Во всем остальном выживаемость и приспособляемость от темперамента не зависят.

Какова будет судьба «забияк» и их потомков, если несколько «забияк» попадут в большую популяцию «тихонь»?

Какова будет судьба «тихонь» и их потомков, если несколько «тихонь» попадут в большую популяцию «забияк»?

Может ли популяция на протяжении многих поколений состоять как из «забияк», так и из «тихонь»? Если нет, то почему, а если да, то каково в ней может быть соотношение этих двух типов?

б) Смешанная популяция брякозавров попала в новую местность, где вероятность дожить до брачного турнира у «забияк» в P раз выше, чем у «тихонь». Как изменится их соотношение?

в) Каковы будут ответы в задаче, если численности потомков при различных исходах турнира равняются X, Y и Z?

Публикацию подготовил С. Глаголев

Конференция в Обнинске

Уже несколько лет в городе науки Обнинске проходят научные конференции школьников. В последнее время на эти конференции съезжаются гости со всей страны. Так, на VI Обнинскую конференцию учащихся «Юность, наука, культура», которая проходила 2—6 апреля 1991 года, приехали 42 делегации из 34 городов Союза. Были представлены Астрахань, Арзамас, Барнаул, Владикавказ, Горно-Алтайск, Загорск, Днепропетровск, Екатеринбург, Иркутск, Йошкар-Ола, Калининград, Калуга, Кемерово, Киев, Краснодар, Курган, Львов, Минск, Москва, Новокузнецк, Новосибирск, Норильск, Обнинск, Омск, Пермь, Переславль-Залесский, Ростов-на-Дону, Сургут, Удомля, Уфа, Харьков, Чамзенка, Челябинск, Якутск.

Программа конференции была очень насыщена — это встречи с ведущими учеными, творческие бизнес-игры, экскурсии, круглые столы педагогов по обмену опытом работы и т. д. Но самое главное происходило на 15 секциях конференции: математической, программирования, физической, астрономической, химической и других. На секциях школьники выступали с докладами по итогам своей исследовательской работы.

Тематика докладов была весьма разнообразна и довольно интересна. Например, на математической секции вызвали интерес доклады обнинских учащихся из физико-технической школы при ИАТЭ и лицея «Духовное возрождение», выполненные под руководством Р. В. Плыкина, доктора физико-математических наук, профессора ИАТЭ, президента Обнинского НОУ. Это доклады учащихся 10 класса С. Горпинича «О реализации конечноточечных ультраметрических пространств в пространстве Лобачевского», Р. Гетманского «Решение уравнений 3 и 4 степени и задачи В. И. Арнольда», А. Изотова «О равновеликости и равносоставленности» и другие.

Из докладов гостей были отмечены работы С. Бахметьева (Новосибирск, УНЦ — ФМШ НГУ) «Проблема Альберта», Ю. Олиярника (Львов, с. ш. № 2) «Исследование центральной предельной теоремы и проверка закона больших чисел», Д. Кудрявцева (Новокузнецк, с. ш. № 44) «Преобразование координатных систем, связанных с различными кристаллографическими плоскостями кристалла», и т. д.

По сложившейся традиции лучшие работы школьников публикуются в сборниках трудов Обнинского научного общества учащихся, которое совместно с центром научного и технического творчества учащихся «Эврика» г. Обнинска является основным организатором научных конференций.

Следует отметить, что наиболее сильные работы представляют учащиеся из специализированных школ или классов, преподавателями или научными руководителями которых являются, как правило, преподаватели вузов или научные сотрудники НИИ.

Творческий, исследовательский характер носили и большинство работ, представленных на физической секции конференции. Это были доклады по теории относительности, ядерной физике, физике твердого тела, физике плазмы, другим областям экспериментальной и теоретической физики, а также по методике преподавания физики.

По итогам работы этой секции были отмечены работы учащихся ФТШИ при ИАТЭ (Обнинск) К. Хазанова «Пространственновременные характеристики в расширенной теории относительности», Т. Сапуновой «Наблюдаемые характеристики тел, движущихся с релятивистскими скоростями», А. Тимошина «Влияние эффектов релятивистской термодинамики на движение тел», А. Иванова «Эффект захвата мюона в реакции холодного термоядерного синтеза», а также С. Киселева (Днепропетровск) «Исследование температурной характеристики электронной компоненты низкотемпературной плазмы ацетиленокислородного пламени», Д. Короткова (Астрахань) «Исследование доменных структур магнитных пленок феррит-гранатов», Д. Суятина (Курган, с. ш. № 4) «Боратные лазерные стекла», А. Редько (Новокузнецк, с. ш. № 44) «Некоторые закономерности в колебательной структуре спектров излучения и поглощения бензофенола».

Обобщая мнение всех участников конференции, мы выражаем надежду, что традиция проведения Обнинских конференций учащихся «Юность, наука, культура» будет продолжена, тем более что и зарубежные делегации изъявили желание принимать участие в работе конференции.

Л. Ляшко,
зам. директора Центра НТТУ «Эврика»,
А. Тихоненко,
руководитель физической секции

Дорогие читатели!

Напоминаем вам,
что журнал «Квант» распространяется только по подписке.
Подписка принимается без ограничений во всех агентствах «Союзпечати»,
на почтамтах и в отделениях связи.
Подписаться на наш журнал можно начиная с любого номера,
но оформить подписку нужно до первого числа предподписного месяца.

Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465,
цена одного номера 1 р. 10 к.

Ответы, указания, решения

[illegible]ходимые условия и задачи [illegible]раметрами

1. $x=0$ — необходимое условие существования единственного решения. Ответ: $b=0$, $b=\operatorname{tg} 1$.
2. $x=0$ — необходимое условие. Ответ: $a=4/3$.
3. $x=0$ — необходимое условие. Ответ: $a=9/4$.
4. $y=1$ — необходимое условие. Ответ: $x=-\pi/2+2\pi k$, k — целое.
5. Необходимое условие для b при $x=0$: $b=\sin b$.
Ответ: $(-1;\ 0)$, $(0;\ 0)$, $(1;\ 0)$.
6. $x\geqslant-1$ — решение неравенства $\sqrt{x^2+4x+7}\leqslant x+3$.
Необходимое условие $x=0$. Ответ: $a=1$.
7. a делится на 9 или на 6. Ответ: $a=99$.

[illegible]анные школьные задачи по физике

1. До пережигания нити ускорения грузов равны нулю, а сила натяжения нити составляет $3mg$. В первый момент, пока грузы не успели сместиться, растяжения, а значит, и силы упругости пружинок сохраняют прежние значения, поэтому ускорения двух нижних грузов по-прежнему равны нулю. Результирующая сила, действующая на верхний груз сразу же после пережигания нити, равна $3mg$, следовательно, его ускорение направлено вниз и равно $3g$.

2. Обозначим бо́льшую массу через m_1, меньшую — через m_2. Запишем уравнения движения для блока и грузов

$$F-2T=0,$$

$$m_1g-T=m_1a,$$

$$T-m_2g=m_2a,$$

где a — ускорение грузов, T — натяжение нити, F — сила, действующая на блок со стороны оси. Учитывая, что по условию $F=m_1g$, исключаем из уравнений T и a и находим

$$m_1=3m_2.$$

3. Ускорение всей веревки $a=F/m$ (где m — масса веревки). На отрезок веревки, заключенный между выбранным сечением и свободным концом, действует только сила натяжения $F_н$ в этом сечении. Учитывая, что масса этого отрезка $m_1=m(l-x)/l$, получаем

$$F_н-m_1a=F(l-x)/l.$$

4. При небольшом угле наклона доски брусок находится в покое, и для силы трения покоя из второго закона Ньютона получаем

$$F_{тр\,п}=mg\sin\alpha.$$

Скольжение отсутствует при условии $F_{тр}<\mu N=\mu mg\cos\alpha$, или при $\operatorname{tg}\alpha<\mu$. Если $\alpha>\operatorname{arctg}\mu$, брусок будет соскальзывать с доски и

$$F_{тр\,ск}=\mu N=\mu mg\cos\alpha.$$

Поэтому график зависимости $F_{тр}(\alpha)$ состоит из двух участков (рис. 1).

5. На мотоциклиста, движущегося со скоростью v, действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Уравнения движения в проекциях на вертикальную ось и на горизонтальную ось, направленную к центру окружности, имеют вид

$$F_{тр}-mg=0,$$

$$N=mv^2/R.$$

Для того чтобы колеса не проскальзывали по поверхности цилиндра, должно выполняться условие

$$F_{тр}\leqslant\mu N.$$

Окончательно получаем

$$v\leqslant\sqrt{gR/\mu}\approx14\ м/с.$$

6. Количество теплоты в первом и втором случаях найдем по формулам

$$Q_1=c_вm\Delta t,\quad Q_2=rm,$$

где $\Delta t=|t_2-t_1|$, $c_в$ — удельная теплоемкость, а r — удельная теплота парообразования воды. Приравнивая каждое из количеств теплоты к потенциальной энергии балки Mgh, находим

$$h_1=8{,}6\ м,\quad h_2=57{,}7\ м.$$

Этот простой пример позволяет наглядно почувствовать масштаб энергий, «задействованных» в окружающем нас мире.

7. С помощью закона сохранения импульса

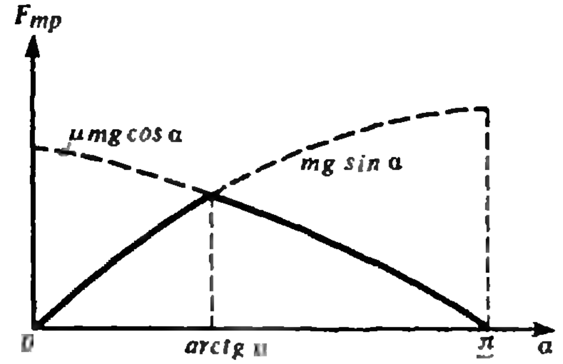


Рис. 1.

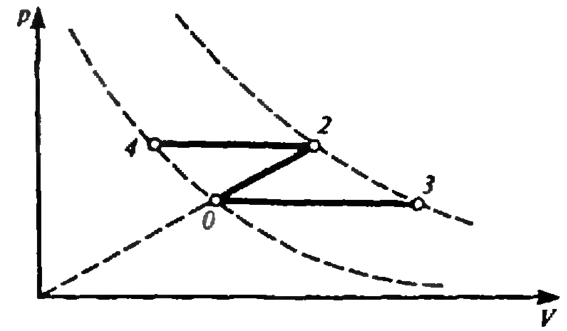


Рис. 2.

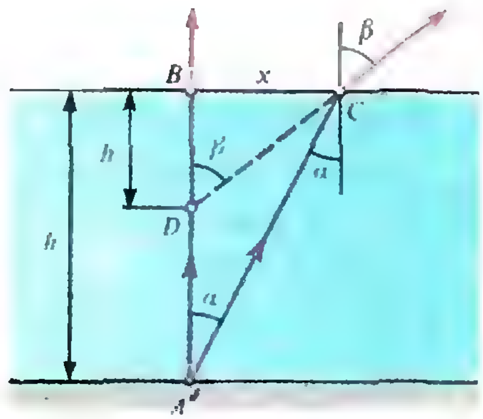


Рис. 3.

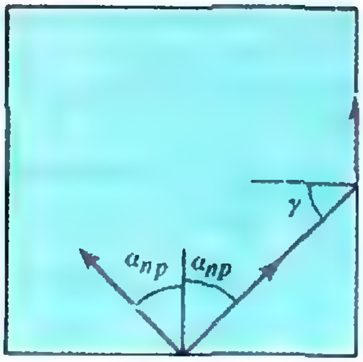


Рис. 4.

найдем конечную скорость второго шара u_2:

$$mv = mu_1 + mu_2 \Rightarrow u_2 = 6 \text{ м/с}.$$

Из условия задачи очевидно, что удар шаров неупругий, т. е. часть механической энергии системы при ударе переходит во внутреннюю энергию. Эта энергия распределяется между шарами поровну, приводя к повышению их температуры на одинаковую величину Δt (так как в процессе удара шары деформируются совершенно одинаково; это особенно хорошо видно в системе отсчета, связанной с центром масс системы). Получаем

$$mv_1^2/2 - (mu_1^2/2 + mu_2^2/2) = 2cm\,\Delta t,$$

откуда находим

$$\Delta t = 0{,}04 \text{ К}.$$

8. Так как внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, изменение внутренней энергии одинаково для всех трех процессов. Из первого закона *термодинамики* следует, что подведенное к газу количество теплоты будет тем больше, чем больше совершенная газом работа. В изохорном процессе *0—1* работа равна нулю, а в двух других она положительна, поэтому наименьшее количество теплоты подводится в первом процессе. Чтобы сравнить работу во втором и третьем процессах, обратим внимание на то, что работа газа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T$$

зависит только от изменения температуры. Поэтому можно заменить изобарный процесс *0—3* изобарным же процессом *4—2* (рис. 2), где точки *4* и *0* лежат на одной изотерме. После такой замены становится очевидным, что работа в изобарном процессе больше, чем в процессе *0—2* (площадь под отрезком *4—2* больше, чем под отрезком *0—2*). Итак, наибольшее количество теплоты было подведено в изобарном процессе *0—3*.

9. Так как перегородка в начале *и в конце* покоится, то полная работа газа над перегородкой равна нулю. Кроме того, по условию тепло не подводится к системе и не отводится от нее. Тогда из первого закона термодинамики следует, что внутренняя энергия газа не изменится. Значит, и температура газа тоже не изменится.

10. КПД идеальной машины Карно, у которой температура нагревателя T_1, а холодильника T_2, равняется $(T_1 - T_2)/T_1$. В обоих случаях числитель увеличивается (на 1 К), а знаменатель в первом случае (когда увеличивается T_1) возрастает, во втором (когда уменьшается T_2) остается неизменным. Значит, КПД возрастет больше во втором случае.

11. При повороте зеркала на угол α на такой же угол повернется нормаль к зеркалу. Так как падающий луч не меняет своего направления, угол падения изменится тоже на α. Угол отражения — это угол между отраженным лучем и нормалью; следовательно, отраженный луч повернется на угол 2α.

12. Построим изображение любой точки *A* дна, образуемое преломленными на поверхности воды лучами (рис. 3). Рассмотрим лучи *AB* и *AC* и найдем точку *D* их пересечения после преломления. Обозначив расстояние *DB* через *h'*, *расстояние BC через x, угол падения* луча *AC* через α, а угол преломления через β, получим

$$x/h = \operatorname{tg}\alpha,\ x/h' = \operatorname{tg}\beta,\ \sin\beta/\sin\alpha = n.$$

С учетом малости углов α и β можно считать, что $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha$, $\operatorname{tg}\beta = \sin\beta$. Тогда находим, что кажущаяся глубина реки

$$h' = h/n = 75 \text{ см}$$

не зависит от α, т. е. что точка *D* является изображением точки *A* (для лучей, идущих под малыми углами к вертикали).

13. Запишем закон преломления для лучей, идущих от текста и проникающих внутрь кубика:

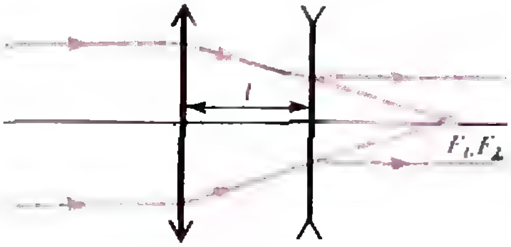


Рис. 5.

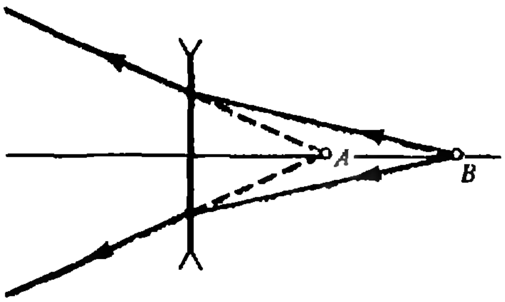


Рис. 6.

$$\sin\alpha/\sin\beta = 1/n,$$

где β — угол падения некоторого луча на нижнюю поверхность, а α — угол его преломления в кубике. Видно, что при любых β выполняется неравенство

$$\sin\alpha \leqslant 1/n,$$

т. е. что все вошедшие лучи лежат внутри конуса с углом $\alpha_{пр}$($\sin\alpha_{пр} = 1/n$), равным предельному углу внутреннего отражения (рис. 4). Самые благоприятные условия для выхода через боковую грань имеет луч, идущий по образующей конуса. Условие его полного отражения от боковой грани имеет вид

$$\sin\gamma > \sin\alpha_{пр}.$$

Так как $\sin\gamma = \cos\alpha_{пр}$, получаем, что ни один из лучей не выходит через боковую грань при условии $\cos\alpha_{пр} > \sin\alpha_{пр}$, т. е. при $\alpha_{пр} < \pi/4$. Отсюда находим

$$n = 1/\arcsin\alpha_{пр} > \sqrt{2}.$$

14. Расстояние между линзами (рис. 5)

$$l = F_1 + F_2 = 15\ см + (-9)\ см = 6\ см.$$

Убедитесь сами, что линзы могут стоять в любом порядке.

15. Рассмотрим обратный ход лучей, т. е. преломление в линзе лучей, исходящих из точки B (рис. 6). Получим, что изображение источника, помещенного в точку B, получится в точке A. Записав формулу линзы в виде $1/f - 1/d = 1/F$, находим ее фокусное расстояние:

$$F = -30\ см.$$

[redacted]V Всесоюзная пиада по математике

9 класс

1. (1; 0; 3; 1), (—1; 0; —3; —1), (—1, 0, —3, —1), (3, 1, 1, 0).

Указание. Из исходной системы получаем

$$(xz - 2yt)^2 + 2(xt + yz)^2 = (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11,$$

откуда либо $x^2 + 2y^2 = 1$ (т. е. $x^2 = 1$, $y = 0$), либо $z^2 + 2t^2 = 1$.

2. Решение этой задачи (см. задачу М1299) будет опубликовано позже.

3. а) Ответ: не могут. Указание. Отрезок

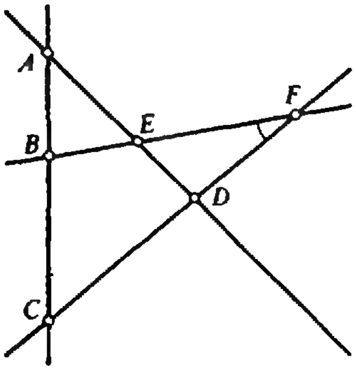


Рис. 7.

длины 1 не может быть стороной ни $\triangle ABE$, ни $\triangle EFD$ (см. рис. 7), поэтому либо $BC = 1$, либо $CD = 1$. Пусть для определенности $BC = 1$, но тогда $BF = CF$ (почему?) и $\cos\angle F = 1 - 1/(2BF^2)$. Применяя теорему косинусов к треугольнику EFD, получаем

$$ED^2 = EF^2 + FD^2 - 2EF \times FD + \frac{EF \times FD}{BF^2},$$

но в этой сумме последнее слагаемое — не целое!

б) Ответ: могут. См. рис. 8.

4. Решение этой задачи (см. задачу М1298) будет опубликовано позже.

5. а) Например, $x = 1$, $y = 8$.

б) Ответ: нельзя. Пусть $xy + x$ и $xy + y$ — квадраты различных натуральных чисел и $y > x$. Тогда $x^2 < xy + x < xy + y$. При этом $(xy + y) - (xy + x) = y - x > (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$. Откуда $y > 3x + 1$.

6. Пусть O — точка пересечения отрезков KM и LN (см. рис. 9). Поскольку $\angle NDM +$

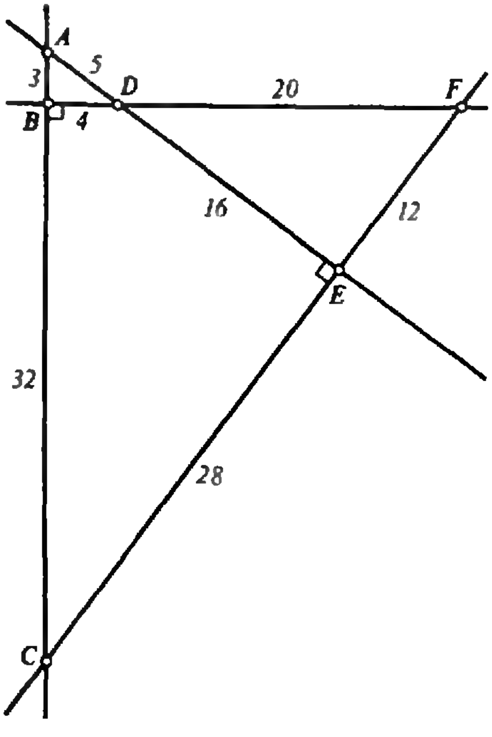


Рис. 8.

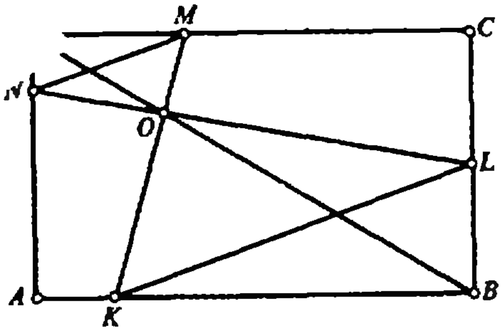


Рис. 9.

$+\angle MON=180^\circ$, вокруг четырехугольника $MDNO$ можно описать окружность. Поэтому $\angle NOD=\angle NMD$. Аналогично, $\angle LOB=\angle LKB$. А так как $LK\parallel MN$, $KB\parallel MD$, то $\angle NMD=\angle LKB$ и $\angle NOD=\angle LOB$, так что точки D, O и B лежат на одной прямой.

Второе решение (не использующее условие $KM\perp NL$). Поскольку $MN\parallel KL$, то $\angle MNO=\angle OLK$, $\angle NMO=\angle LKO$ и треугольники ONM и OLK подобны. Но тогда $MO/OK=NO/OL$ и четырехугольник $OMDN$ гомотетичен четырехугольнику $OKBL$ с центром O, и потому точки D, O и B лежат на одной прямой.

7. Решение этой задачи (см. задачу M1300) будет опубликовано позже.

8. **Ответ:** минус может быть расположен только в центральной клетке. Любой квадрат (рис. 10), состоящий более чем из одной клетки, содержит четное число отмеченных голубым клеток. Поэтому, если минус находится в отмеченной клетке, после каждого хода в отмеченных клетках окажется нечетное число минусов. Поворачивая отмеченные клетки на 90°, видим, что от минусов нельзя избавиться, если первоначально минус был не в центральной клетке. Если же минус находится в центральной клетке, то достаточно 5 ходов: перемена знаков в квадратах 3×3 в левом нижнем и правом верхнем углах, в квадратах 2×2 в двух остальных углах и во всем квадрате 5×5.

10 класс

1. **Указание.** Поскольку (неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух неотрицательных чисел):

$$a^2+bc\geqslant 2a\sqrt{bc},$$

$$\frac{ab+ac}{2}\geqslant a\sqrt{bc},$$

достаточно сложить 6 неравенств, получаемых из выписанных заменой букв.

2. **Ответ:** а), б) не существует. **Указание.** Для доказательства утверждения пункта б) достаточно заметить, что если отношение стороны к медиане не меньше двух, то соответствующий угол является тупым или прямым (его вершина лежит внутри или на границе круга с центром в середине стороны и радиусом, равным половине этой стороны).

3. **Ответ:** 2^s, где s — любое натуральное число, такое, что $2^s\geqslant n$.

После каждого хода на доске будут написаны целые неотрицательные числа. Если сумма и разность двух таких чисел делятся на нечетное число d, то и сами эти числа делятся на d. Поэтому, если бы число k делилось на нечетное число $d>1$, то и все первоначально написанные на доске числа делились бы на d, что невозможно, так как среди них есть 1. Поэтому у числа k нет нечетных простых делителей, т. е. $k=2^s$. Так как после каждого хода максимальное из написанных на доске чисел не уменьшается, то $k\geqslant n$. Докажем, что можно получить любое значение $k=2^s\geqslant n$. Одним ходом из пары $(2^a, 2^a)$ получается пара $(0, 2^{a+1})$, а из пары $(0, 2^c)$ — пара $(2^c, 2^c)$, поэтому если на доске написан набор из степеней двойки с показателями, не превосходящими s_0, такой, что среди чисел, входящих в набор, есть два равных числа, меньших 2^{s_0}, то за несколько ходов можно получить числа, все равные 2^{s_0}.

Индукцией по n покажем, что из набора $1, 2, \ldots, n$ всегда можно получить указанный набор из степеней двойки, причем в качестве s_0 можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2^{s_0}\geqslant n$. При $n\leqslant 8$ утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что оно верно при всех n, удовлетворяющих неравенствам $8\leqslant n\leqslant l$, и докажем его справедливость при $n=l+1$. Пусть $l+1=2^m+b$, где $1\leqslant b\leqslant 2^m$, $m\geqslant 3$. Применив указанное в условии преобразование к парам чисел $p=2^m+u$, $q=2^m-u$ при $1\leqslant u\leqslant b$ ($1\leqslant u\leqslant b-1$, если $b=2^m$), мы получим набор, состоящий из следующих трех групп чисел:

(1) $1, 2, \ldots, 2^m-b-1$	(эта группа не содержит ни одного числа, если $b=2^m$ и $b=2^m-1$).
(2) $2, 4, \ldots, 2b$	(получена из разностей $\lvert p-q\rvert$).
(3) $2^m, 2^{m+1}, \ldots, 2^{m+1}$	(получена из сумм $p+q$ и числа 2^m).

Если обе группы (1) и (2) содержат не меньше, чем по 3 числа ($3\leqslant b\leqslant 2^m-4$), то к ним применимо предположение индукции. Если же только в одной из них содержится не менее трех чисел, то предположение индукции нужно применить к этой группе и воспользоваться тем, что числа, образующие

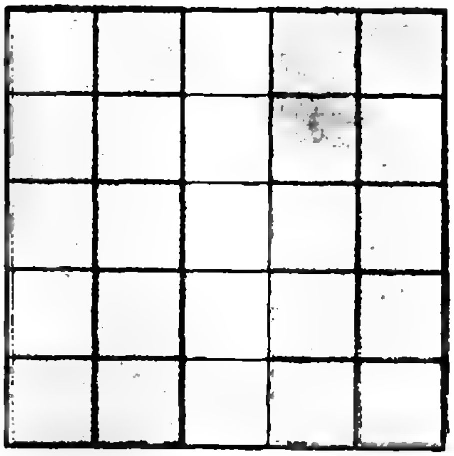


Рис. 10.

другую группу, уже являются степенями двойки. Случай, когда в обеих группах (1) и (2) содержится менее трех чисел, при $m \geqslant 3$ невозможен, так как если в группах (1) и (2) не более двух чисел, то $2^m - b - 1 \leqslant 2$ и $2b \leqslant 4$, откуда $2^m \leqslant 5$, $m \leqslant 2$.

Утверждение доказано.

4. Ответ: 12.

Через каждую из 36 точек, отмеченных на рисунке 11, должен проходить разрез, так как иначе квадрат размером 2×2 клетки с центром в отмеченной точке будет содержаться в некотором многоугольнике. Назовем *ребром* сторону клетки, не лежащую на границе фигуры, и будем считать, что длина ребра равна 1. Линиям разрезов должны принадлежать по крайней мере два из четырех ребер с концами в данной отмеченной точке. Всего ребер 144, поэтому не более чем по $144-2\cdot 36=72$ из них разрезы не проведены. Любой разрез по ребру увеличивает число n многоугольников, на которые разрезана фигура, не более чем на единицу. Поэтому, проведя разрезы по оставшимся ребрам, мы получим всего не более $72+n$ многоугольников. Но при этом фигура распадается на 84 отдельных квадрата 1×1, т. е. $72+n \geqslant 84$, откуда $n \geqslant 12$.

Данную фигуру можно разрезать на 12 прямоугольников с одной из сторон длины 1, проведя, например, разрезы по горизонтальным ребрам. Ни один из этих прямоугольников не содержит квадрата 2×2.

Второе решение. Среди 61 точки-узлов сетки, лежащих внутри фигуры на рисунке 11, имеются 36 отмеченных и 25 неотмеченных точек. Если фигура разрезана на многоугольники так, как это требуется в условии задачи, то каждая отмеченная и неотмеченная точки «задеты» разрезом (иначе найдется квадрат 2×2, который будет целиком принадлежать одному из многоугольников, на которые разрезана фигура).

Пусть мы провели разрез и при этом «задели» m отмеченных и n неотмеченных точек. Тогда либо $m=n$, либо $|m-n|=1$. Так как первоначально разность между числом отмеченных и неотмеченных точек равна 11, то отсюда следует, что потребуется провести не менее 11 разрезов, чтобы удовлетворить условию задачи. Но тогда фигура распадается не менее, чем на 12 частей.

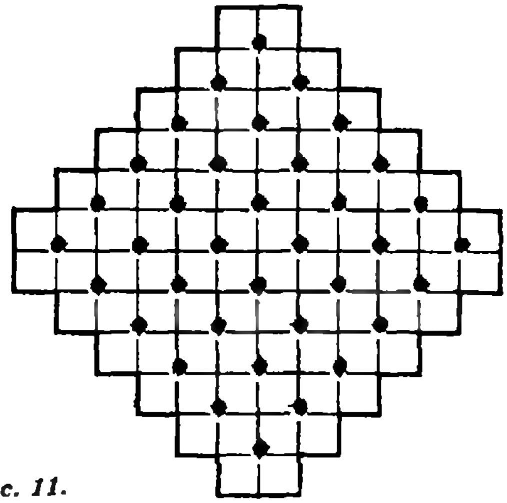


Рис. 11.

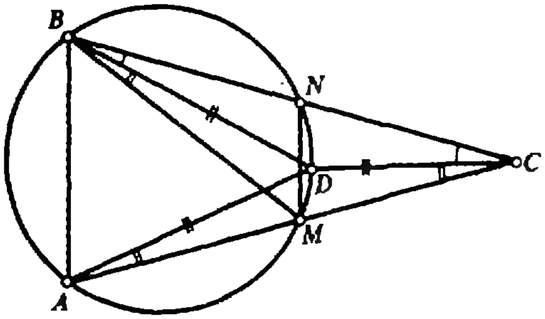


Рис. 12.

5. Согласно теореме синусов, радиус окружности, описанной около треугольника со стороной a и противолежащим этой стороне углом α, равен $a/(2\sin\alpha)$. Треугольники ABD и MNB вписаны в одну и ту же окружность, треугольники MNB и MNC имеют общую сторону MN, поэтому достаточно доказать, что $\angle MCN = \angle MBN$ (рис. 12). Так как $DB=DC$ и $DA=DC$, то $\angle DBN=\angle DCN$ и $\angle MAD = \angle MCD$. Углы MAD и MBD равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому и $\angle MBN=\angle MCN$.

6. Решение этой задачи (см. задачу М1296) будет опубликовано позже.

7. Докажем утверждение задачи по индукции. При $n=1$ и $n=2$ оно очевидно. Пусть $n>2$ и пусть для досок размером $m\times m$, где $m<n$, утверждение уже доказано. Возьмем какой-либо набор миноров на доске $n\times n$, удовлетворяющий условию задачи. Рассмотрим пары клеток, симметричных относительно главной диагонали. Всего таких пар $(n^2-n)/2$. Если в каждой паре покрыто не менее одной клетки, то всего покрытых клеток не меньше, чем $n+(n^2-n)/2 > n^2/2$, и утверждение верно. Пусть клетки (i,j) и (j,i) не покрыты. Вычеркнем из доски i-ю и j-ю горизонтали и i-ю и j-ю вертикали. Останется доска $(n-2)\times(n-2)$. Пересечение каждого из миноров с этой доской есть минор полупериметра не меньшего $n-2$. Действительно, у каждого минора вычеркнуты клетки, самое большее, двух строк, или двух столбцов, или одной строки и одного столбца, так как в противном случае он покрывал бы одну из клеток (i,j) или (j,i). Таким образом, диагональ оставшейся после вычеркиваний доски $(n-2)\times(n-2)$ покрыта минорами полупериметра не меньше $n-2$, и, следовательно, по предположению индукции не менее половины невычеркнутых клеток покрыто минорами. Рассмотрим теперь вычеркнутые клетки. Всего их $4n-4$. Полупериметр минора, покрывающего клетку (i,i), не меньше n, поэтому он покрывает не менее $n-1$ клеток в i-ых строке и столбце. Аналогично, минор, покрывающий клетку (j,j), покрывает не менее $n-1$ клетки в j-ых строке и столбце. Поскольку клетки (i,j) и (j,i) не покрыты, в этих четырех строках и столбцах покрыто не менее $2(n-1)$ клеток, т. е. не менее половины вычеркнутых клеток. Итак, миноры из рассматриваемого набора покрывают не менее половины клеток доски $n\times n$. Утверждение доказано.

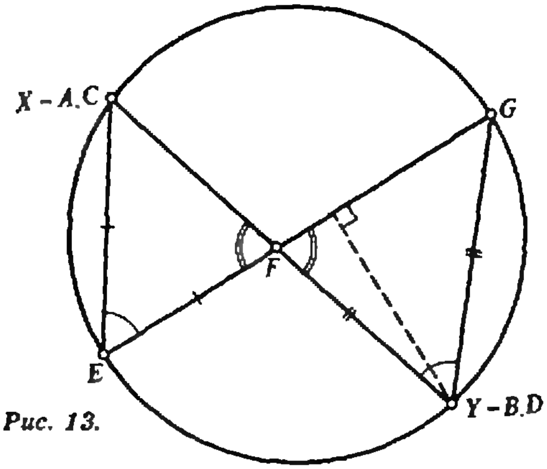


Рис. 13.

3. Решение этой задачи (см. задачу M1305) будет опубликовано позже.

11 класс

1. **Ответ:** нет.
Если последняя цифра α числа a_{n-1} не больше 5, то

$$10a_n = a_{n-1} - \alpha \leqslant a_{n-1}.$$

В противном случае последняя цифра числа $a_n = 10a_{n-1} - a_{n-1}$ не превосходит 5 и $10a_{n+1} \leqslant a_n = 9a_{n-1}$. Итак, при любом натуральном n либо $a_n < a_{n-1}$, либо $a_{n+1} < a_{n-1}$. Поэтому если бы последовательность (a_n) была бесконечной, то среди ее значений можно было бы выделить бесконечную убывающую последовательность натуральных чисел.

2. Решение этой задачи (см. задачу M1297) будет опубликовано позже.

3. Пусть G — точка пересечения луча EF со сферой, а XY — любой из отрезков AB и CD. Докажем, что точка Y (а с ней и прямая BD) лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку FG и проходящей через его середину. Действительно, точки X, E, Y, G лежат на одной окружности — сечении сферы плоскостью XEF. Треугольники XEF и GYF подобны по двум углам (рис. 13). Но коль скоро $XE = FE$, то $GY = FY$, что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остается справедливым и в том случае, если точка E не лежит на сфере.

4. **Ответ:** а) да; б) нет.

а) В правильном треугольнике ABC с центром O вписанной окружности и любой точкой P на окружности векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{PO}$ образуют нужную четверку, если только вектор $\overrightarrow{PO} = \vec{r}$ не коллинеарен остальным (рис. 14). Действительно, обозначив $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, имеем, например:

$$(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PO}) = (\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{r}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{r}) =$$
$$= (2\vec{r} - \vec{c})(2\vec{r} + \vec{c}) = 4|\vec{r}|^2 - |\vec{c}|^2 = 0.$$

б) Допустим, что указанный набор из 91 вектора существует. Тогда, если $\overrightarrow{OS}$ — их сумма, а $\overrightarrow{OX}$ — сумма любых 19 из них, то точка X лежит на окружности σ с диаметром OS.
Докажем, что из набора нельзя выбрать 5 векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, удовлетворяющих условиям $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2 \neq \vec{a}_3 \neq \vec{a}_1$, $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$. В самом деле, иначе можно взять еще 17 векторов с некоторой суммой $\vec{q}$ и образовать 6 векторов $\overrightarrow{OX}_{ij} = \vec{q} + \vec{a}_i + \vec{b}_j$ ($i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$), концы X_{ij} которых будут лежать на окружности σ. Но тогда 3 равных вектора $\overrightarrow{X_{i1}X_{i2}} = \overrightarrow{OX}_{i2} - \overrightarrow{OX}_{i1} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1$ будут образовывать 3 несовпадающих хорды, что невозможно.
Из доказанного сразу следует, что в нашем наборе нет пятерки различных векторов. Более того, в нем не набирается даже четверки различных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{t}$, так как иначе один из них, скажем $\vec{t}$, встречался бы дважды, и, опять же, нашлась бы пятерка $\vec{a}_1 = \vec{t}$, $\vec{a}_2 = \vec{x}$, $\vec{a}_3 = \vec{y}$, $\vec{b}_1 = \vec{z}$, $\vec{b}_2 = \vec{t}$. По той же причине, если векторы набора образуют ровно три различных вида, то лишь один из видов имеет более одного представителя.
Поскольку не все наши векторы одинаковы, их имеется ровно два или три вида. Пусть наиболее многочисленный вид $\vec{x}$ встречается $m \leqslant 89$ раз. Тогда найдутся еще векторы $\vec{y}$ и

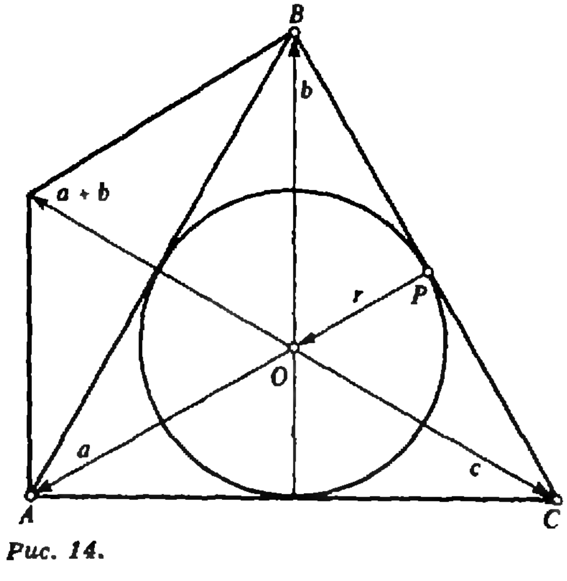


Рис. 14.

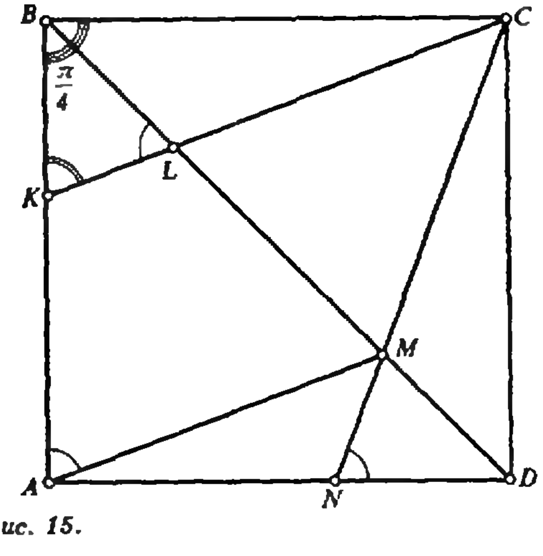


Рис. 15.

$\vec z$, отличные от $\vec x$ и образующие суммы

$$\overrightarrow{OY}_1=18\vec x+\vec y,\ \overrightarrow{OY}_2=18\vec x+\vec z,$$
$$\overrightarrow{OY}_3=17\vec x+\vec y+\vec z,\ \overrightarrow{OY}_4=19\vec x.$$

Из равенства

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OY}_1+\overrightarrow{OY}_2)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OY}_3+\overrightarrow{OY}_4)$$

следует, что середины хорд Y_1Y_2 и Y_3Y_4 совпадают. Однако сами эти хорды не совпадают (ибо $Y_3\neq Y_1$ и $Y_3\neq Y_2$), поэтому они — диаметры окружности σ, откуда $\vec y\neq\vec z$, $m=89$ и $\overrightarrow{OY}_1+\overrightarrow{OY}_2=\overrightarrow{OS}$, т. е.

$$36\vec x+\vec y+\vec z=89\vec x+\vec y+\vec z,$$

что невозможно.

Пусть, наконец, вектор $\vec x$ встречается $m=90$ раз, а $\vec y$ — один раз. Тогда, обозначив $\overrightarrow{OZ}_1=18\vec x+\vec y$, получаем, что хорды $\overrightarrow{OZ}_2=19\vec x$ и $\overrightarrow{SZ}_1=-72\vec x$ параллельны и симметричны относительно середины диаметра OS (обе они параллельны вектору $\vec x$), что опять невозможно.

5. Докажем сначала, что $\angle BKC+\angle DNC=3\pi/4$ (рис. 15). Действительно, считая сторону квадрата единичной, обозначаем

$$\alpha=BK=\operatorname{ctg}\angle BKC,$$
$$\beta=DN=\operatorname{ctg}\angle DNC$$

и получаем

$$(1-\alpha)(1-\beta)=2\alpha\beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\angle BKC+\angle DNC)=\frac{\alpha+\beta}{-1+\alpha\beta}=-1=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}.$$

Теперь имеем:

$$\angle BLK=\frac{3\pi}{4}-\angle BKL=\angle DNC=$$
$$=\angle BCM=\angle BAM,$$

поэтому $\angle KLM+\angle KAM=\pi$ и точки A, K, L, M лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки A, N, M, L лежат на одной (той же самой) окружности.

6. **Ответ**: 6.

Каждое государство должно входить не менее, чем в 3 блока (иначе оно состояло бы в одном блоке не с любым, а максимум с $49+49=98$ из 99 остальных государств). Поэтому число блоков не может быть меньше, чем $3\cdot100/50=6$.

а) Достаточно разбить все 100 государств на 4 группы по 25 и образовать блоки из пар групп всеми 6 возможными способами.

б) Достаточно разбить все государства на 10 групп

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5$$

по 10 государств и образовать блоки

$$a_1\cup b_1\cup b_2\cup b_3\cup a_3,\quad a_2\cup b_2\cup b_3\cup b_4\cup a_4,$$
$$a_3\cup b_3\cup b_4\cup b_5\cup a_5,\quad a_4\cup b_4\cup b_5\cup b_1\cup a_1,$$
$$a_5\cup b_5\cup b_1\cup b_2\cup a_2,\quad a_1\cup a_2\cup a_3\cup a_4\cup a_5.$$

7. Решение этой задачи (см. задачу М1305) будет опубликовано позже.

8. **Ответ**: 1990.

Из соотношений

$$|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{x_1+\ldots+x_k}{k}-\frac{x_1+\ldots+x_{k+1}}{k+1}\right|=$$
$$=\left|\frac{x_1+\ldots+x_k-kx_{k+1}}{k(k+1)}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|x_1-x_2|+2|x_2-x_3|+\ldots+k|x_k-x_{k+1}|}{k(k+1)}$$

при $k=1,\ldots,1990$ получим оценку

$$|y_1-y_2|+\ldots+|y_{1990}-y_{1991}|\leqslant$$
$$\leqslant|x_1-x_2|\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1990\cdot1991}\right)+$$
$$+2|x_2-x_3|\cdot\left(\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1990\cdot1991}\right)+\ldots$$
$$\ldots+1990|x_{1990}-x_{1991}|\cdot\frac{1}{1990\cdot1991}=$$
$$=|x_1-x_2|\cdot\left(1-\frac{1}{1991}\right)+|x_2-x_3|\cdot\left(1-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{1991}\right)+\ldots+|x_{1990}-x_{1991}|\cdot\left(1-\frac{1990}{1991}\right)\leqslant$$
$$\leqslant1991\cdot\left(1-\frac{1}{1991}\right)=1990.$$

Полученная оценка достигается при $x_1=1991$, $x_2=\ldots=x_{1991}=0$, поскольку все выписанные неравенства в этом случае обращаются в равенства.

сесоюзная олимпиада школьников форматике

I тур. Грамотное решение задачи (для всех трех заданий) должно предусматривать выполнение следующих действий:

1) проверка всех введенных данных на корректность;

2) выделение области недостижимых точек, определяемой значениями L1 и L2 (если $L1>L2$, то это точки, расстояние от которых до начала координат меньше $L1-L2$ или больше $L1+L2$);

3) перемещение сверла из одной точки в другую с учетом того, что в большинстве достижимых точек сверло может находиться при двух типах положения звеньев (Л, когда направление звена L2 получается из L1 поворотом вокруг общего шарнира против часовой стрелки на угол, не больший 180°, и П, когда L2 получается из L1 поворотом на тот же угол по часовой стрелке; всего получается четыре варианта: Л→П, П→Л, Л→Л, П→П);

4) вычисление времени перемещения сверла из одной точки в другую с использованием соотношения

$$t=\max\left\{\frac{\Delta\varphi_1}{\omega_1},\frac{\Delta\varphi_2}{\omega_2}\right\},$$

где

$$\Delta\varphi_1=\min_{k\in\{-1,0,1\}}|\varphi_1-\varphi_1'+2k\pi|,$$
$$\Delta\varphi_2=\min_{k\in\{-1,0,1\}}|\varphi_2-\varphi_2'+2k\pi|,$$

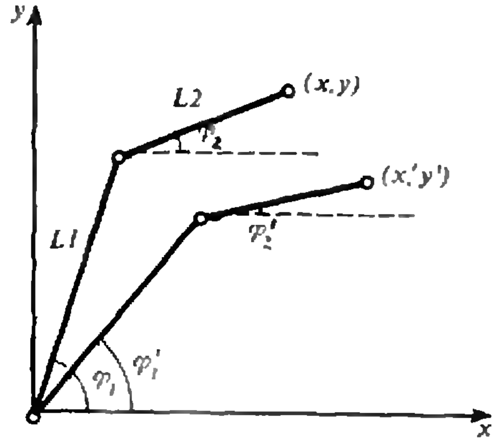


Рис. 16.

аφ_1, φ_1' и φ_2, φ_2' — углы, образуемые в соответствующих позициях звеньями L1 и L2 с осью *OX* (рис. 1) и определяемые с помощью теоремы косинусов.

Для правильного выполнения задания а) достаточно указать только две точки и время перемещения сверла из одной из этих точек в другую. Выполнение задания б) основано на полном переборе глубины *N* с учетом четырех вариантов перемещения сверла из одной точки в другую. Перебор можно упорядочить, построив таблицу размером $(2N+1)\times\times(2N+1)$, элементы которой определяют время перемещения сверла из *i*-й точки в *j*-ю (включая начальную и с учетом возможных вариантов положения звеньев робота для каждой точки). Если такая таблица построена, то исходная задача сводится к задаче коммивояжера. Эффективность перебора можно повысить прекращением поиска, если время работы робота превысит наименьшее из уже рассмотренных времен.

Выполнение задания в) отличается от предыдущего: последовательности точек формируются до тех пор, пока время работы робота не превысит заданной величины *T*. Из полученных последовательностей выбирается та, которая содержит максимальное количество точек. В случае, если в определенной области сосредоточено большое количество точек, то лучше будет в эту область сразу и перейти.

Правильность решения данной задачи оценивалась с помощью следующих тестов:

1) 1, 1, 1, 1, 1, 100, 1, 0;
2) 1, 1, 1, 1, 1, —5, 1, 1, 1, 1;
3) 1, 1, 1, 1, 0, 100, 1, 1, 2, 0;
4) 2, 1, 1, 1, 0, 100, 1, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 4;
5) 2, 1, 0, 1, 0, 19, 5, 4, 1, 0, 3, 0, 2, 1, 2, —1;
6) 4, 1, 1, 10, 0, 100, 5, 2, 4, 1, 4, —1;
7) 4, 1, 10, 1, 0, 100, 5, 2, 4, 1, 4, —1;
8) 3, 2, 1, 10, 0, 20, 1, 15, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 4, —1, 2, —1, 3, —1, 4, 2, 3, —2, 3, 1, —2, 1, —3.

Правильно работающая программа, выполняя задание б), должна дать при пропускании тестов следующие результаты:

3) 0→1, Tmin=0;
5) 0→2→3→1→4 или 0→2→4→1→3, Tmin==25,0;
6) 0→1→2 или 0→2→1, Tmin=10,5;
7) 0→1→2 или 0→2→1, Tmin=11,6.

При выполнении задания в) должны получаться такие результаты: 3) 1; 4) 3; 5) 2; 6) 2; 7) 2; 8) 13.

II тур. Выполнение задания а) основано на следующем утверждении. Пусть какой-либо текст при заданном множестве кодовых слов *A* дешифруется неоднозначно. Тогда при двух различных способах дешифровки (рис. 2) кодовые слова в первой и во второй дешифрованных записях могут пересекаться следующим образом:

а) кодовое слово в одной дешифрованной записи совпадает с начальной частью кодового слова в другой, например $A_{k1}=H_{i1}$;

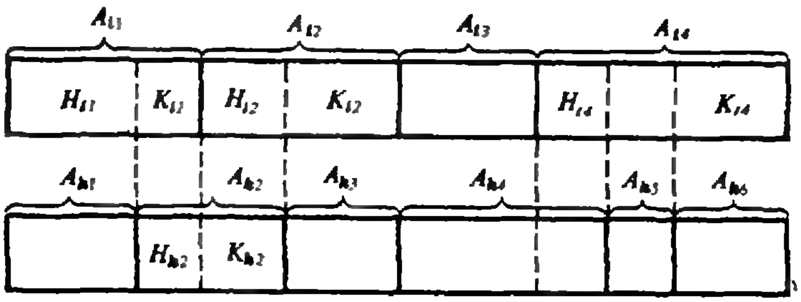
б) конечная часть кодового слова в одной дешифрованной записи совпадает с начальной частью кодового слова в другой дешифрованной записи, например $K_{i1}=H_{k2}$ или $K_{k2}==H_{i2}$;

в) конечная часть кодового слова в одной дешифрованной записи совпадает с одним или несколькими кодовыми словами в другой, например $k_{i2}=A_{k3}$ или $K_{i4}=A_{k5}A_{k6}$.

Если последовательно отбрасывать в обеих дешифрованных записях совпадающие подстроки кодовых слов, то для рассматриваемого случая всегда найдется оставшаяся конечная часть кодового слова в одной записи, совпадающая с кодовым словом в другой записи.

Поэтому алгоритм решения задания а) будет заключаться в следующем. Сначала путем сравнения всех кодовых слов между собой с учетом возможных способов пересечения определяем множество получающихся при этом различных конечных частей. Например, если *A*={C, CB, CBB, CBBB, CBBBB}, то это множество будет включать элементы: B, BB, BBB, BBBB. Затем последовательно проверяем, являются ли кодовые слова началом или концом элементов множества, полученного на предыдущем этапе. Если являются, то, удаляя общие части, опять

Рис. 17.



формируем новое множество конечных частей и т. д. Данный процесс заканчивается, если хотя бы одна конечная часть в полученном множестве совпадает с каким-либо кодовым словом, что говорит о неоднозначности дешифровки, либо если новых конечных частей получить не удается. Этот процесс конечный, так как с каждым шагом количество элементов вновь формируемого множества конечных частей всегда уменьшается.

Для выполнения задания б) в случае, если текст дешифруется неоднозначно, достаточно на каждом шаге удалять из множества A кодовые слова в следующей последовательности: сначала по одному, затем по два и т. д. Процесс заканчивается, если в результате удаления соответствующих кодовых слов удается определить, что неоднозначной дешифровки не существует.

Выполнение задания в) (процесс дешифровки) осуществляется перебором с возвратом путем последовательного сравнения символов дешифруемого текста с кодовыми словами. При совпадении начальной части текста с каким-либо кодовым словом формируется новая запись удалением этой части из первоначального текста и т. д. Процесс заканчивается, если весь текст удалось дешифровать, в противном случае дешифровка повторяется, но изменяется последовательность сравнения кодовых слов с начальными частями записей, формируемых на каждом этапе.

Правильность решения данной задачи также оценивалась с помощью тестов. Чтобы читатели могли оценить работоспособность своей программы, приведем только один из них:

$$A=\{AB,\ BA,\ BBA,\ BABB\}.$$

Для этого множества кодовых слов дешифровка неоднозначна. Чтобы дешифровка была однозначной, необходимо из этого множества удалить любое одно кодовое слово. Исходный текст BABBABA дешифруется следующим образом: BA BBA BA. Исходный текст BABBABBA дешифруется неоднозначно: BA BBA BBA или BABB AB BA.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Самому старшему в семье мужчине сейчас 91 год, в детстве его звали Тимошей.

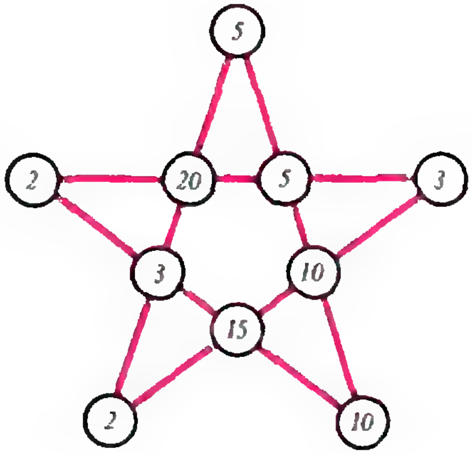


Рис. 19.

2. Единственное число, равное утроенной сумме своих цифр,— 27.

3. **Ответ:** 6 дней. Чтобы показать, что семи дней не может быть, нанесем на прямой точки, соответствующие рассматриваемым дням, и соединим стрелочками те дни, про которые известно, что в один из этих дней (там стрелочка начинается) Мюнхаузен убил меньше уток, чем в другой (там стрелочка заканчивается). Получим то, что изображено на рисунке 18. Поскольку цепочка стрелочек замкнулась, то предположение о том, что Мюнхаузен мог говорить свою фразу 7 дней, привело к противоречию. Если рассмотреть лишь шесть дней, откинув на рисунке красные стрелочки, то легко построить пример результатов охоты Мюнхаузена, удовлетворяющий условиям задачи: 31 июля убита одна утка, 2 августа — две, 4 августа — 3 и т. д., наконец 5 августа — восемь, а во все дни, предшествующие 30 июля, Мюнхаузен убивал, скажем, по 1991 утке.

4. Одна из возможных расстановок изображена на рисунке 19.

5. У треугольников AMC и BNA (рис. 20) равные площади, кроме того, угол CAM равен углу ABN и $CA=AB$. Отсюда легко вывести равенство указанных треугольников. Нетрудно видеть, что один из них повернут относительно другого на 60°, следовательно, угол CPN между проведенными лучами равен 60°.

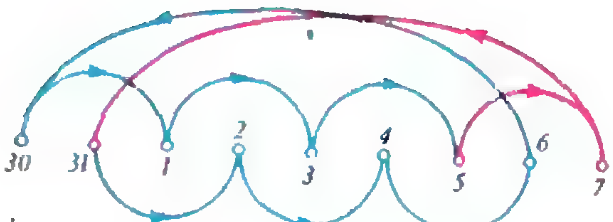


Рис. 18.

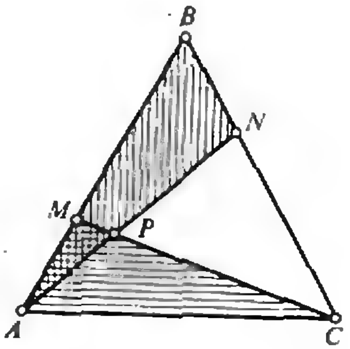


Рис. 20.

Вопросы и задачи

1. За длительное время температуры полотенца и батареи выравнялись. Однако на ощупь ткань будет казаться менее горячей из-за меньшей теплопроводности.
2. Температура в комнате повысится. Количество выделяемой в единицу времени теплоты будет равно мощности, потребляемой холодильником.
3. Вода внутри макарон не кипит, так как ее температура равна температуре воды в кастрюле и поэтому нет подвода тепла от более нагретого тела.
4. Выждать пять минут, затем бросить сахар. Количество теплоты, отдаваемое нагретым телом окружающей среде за одно и то же время, пропорционально разности температур тела и среды.
5. Вначале уровень керосина понизится за счет теплового расширения колбы. Когда же прогреется и керосин, его уровень повысится за счет того, что температурный коэффициент расширения у керосина больше, чем у стекла.
6. Да.
7. Можно предварительно охладить термометр в холодильнике и стряхнуть. Или же нужно подержать термометр под мышкой в течение долгого времени, извлечь его и сразу же стряхнуть. Термометр покажет температуру тела.
8. Нет, поскольку ртуть замерзает уже при температуре около —38,9 °С.
9. Нужно завернуть оба термометра вместе, чтобы предотвратить потерю тепла в окружающее пространство. Более нагретым был тот термометр, показания которого будут уменьшаться.
10. Термометр будет нагреваться до тех пор, пока количества поглощаемого и излучаемого им тепла не сравняются. Если термометр находится на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля, он покажет примерно «земную» температуру.
11. Выше, иначе вокруг нас не было бы воды в жидком состоянии.
12. Нет. См. ответ к задаче 3.
13. Во втором случае часть межмолекулярных связей кристаллической решетки уже разрушена при измельчении кристалла. Поэтому для растворения порошка требуется меньше энергии, и температура воды после растворения во втором сосуде будет более высокой.
14. Эталон силы света, использующий тепловое излучение, должен иметь стабильную температуру, что достигается только в процессе кристаллизации металла.
15. Прохладным вечером горячий дым и газы лучше поднимаются вверх, чем днем, когда достаточно тепло.
16. Вначале подливали более холодную воду, затем — более горячую, чем вода в сосуде.

Микроопыт

Железо, обладая хорошей теплопроводностью, отводит тепло от бумаги, поэтому ее температура не достигает той, при которой бумага может загореться.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин,
В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.08.91. Подписано к печати 22.10.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.
Тираж 87 468 экз. Заказ 1372. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственной ассоциации предприятий, объединений и организаций полиграфической промышленности
«АСПОЛ»
142300, г. Чехов Московской обл

Шахматная страничка

ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО СКАЗОЧНЫМ ШАХМАТАМ

Шахматная игра создавалась много веков, правила ее неоднократно менялись. Известно немало одних только национальных разновидностей шахмат. Самой древней игрой считается чатуранга, пришедшая из Индии и затем превратившаяся в шатрандж у арабов и шатранг у персов. До сих пор играют в японские шахматы (шоги), китайские (цюнь ки), корейские (тьянкеун), армянские (тама), монгольские (шатар) и т. д.

Необычные, сказочные шахматные игры отличаются от настоящих шахмат необычной доской, необычными фигурами или необычными правилами игры. Разумеется, возможно присутствие сразу двух или даже всех трех «необычностей».

Самый простой способ получить новую шахматную игру — увеличить размеры доски. Придумано множество математических и занимательных игр и задач на прямоугольных или квадратных досках и даже на бесконечной доске.

В реальных шахматных играх рекорд принадлежит доске 16×12. Такие максишахматы предложил в свое время чемпион мира Х. Р. Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат. Игра ведется удвоенным комплектом фигур, причем начальный ход пешки возможен сразу на четыре поля. Для победы достаточно заматовать любого из королей противника. Матч Капабланки с венгерским гроссмейстером Мароци в максишахматы, состоявшийся в 1929 году, закончился победой автора игры со счетом 3:1. Партии продолжались более ста ходов и тянулись часов по десять. Изобретение Капабланки распространения не получило — перспектива «ничейной смерти» оказалась преувеличенной.

Упомянем еще доску 12×12 для игры в *великие шахматы*, колыбелью которых была Индия. Каждый игрок имел по 12 пешек и фигур с экзотическими названиями — крокодил, жираф, лев, единорог.

Известный завоеватель Тамерлан, страстный любитель шахмат, тоже считал недостаточными размеры обычной доски. Для *образцовых шахмат* его личной системы была изготовлена специальная доска 11×10 — одиннадцать видов фигур (генерал, верблюд, рыцарь и т. д.) располагались на ней в три ряда.

Много игр придумали шахматные композиторы-сказочники. (Часть этих игр когда-то описывалась на страницах «Кванта», мы приведем соответствующие ссылки.)

В *шахматах на параллельных досках* (1985, № 8) игра ведется одновременно на двух досках, расположенных параллельно одна над другой. На каждой доске ходы обычные, но фигуры могут перемещаться в пространстве с одной доски на другую.

Геометрическими или топологическими преобразованиями стандартной доски нетрудно соорудить доски самой фантастической формы. Можно играть на цилиндрической доске (1989, № 9, 10), тороидальной, конусоидальной и даже на листе Мебиуса.

В *проективные шахматы* играют на проективной доске (1974, № 3). Правила игры основаны на свойствах прямых линий в проективной геометрии. В частности, любое семейство параллельных прямых пересекается в «бесконечно удаленной» точке.

Существует огромное множество сказочных фигур. Напомним лишь о некоторых играх с участием таких фигур: *цирце*, *решетчатая доска*, *франкфуртские шахматы*, *магические* (1989, № 9, 10).

В игре *до первого шаха* выигрывает тот, кто первым объявляет шах. В игре *шахматы без шахов* объявлять шах запрещено — первый же из них должен быть одновременно и матом. Напротив, в игре *шахматы с шахами* шах обязателен — если он возможен, то его необходимо объявить (любым способом). В *двухходовых шахматах* каждый ход белых и черных состоит из двух обычных (после первого «полухода» король может находиться под шахом). В *шахматных поддавках* победителем становится тот, кто первым отдаст противнику все свои фигуры (включая короля) или запатует их (1982, № 9). А *буря над шахматной доской* еще не описывалась в литературе на русском языке. Эта игра, которую придумал француз Пьер Клакон, сочетает в себе элементы шахмат и карт. Двое партнеров в ходе партии пользуются еще специальными картами, каждая из которых дает некое предписание, изменяющее нормальное течение поединка. В колоде 72 карты, а на руках у партнеров постоянно находится по пять. Вот какие указания могут в них содержаться.

«Сделайте ход, после чего поменяйте местами слона и коня противника.»

«Если три угла доски заняты, то в четвертый угол поставьте любую свою фигуру,— выполнение этого указания заменяет обычный ход.»

«Сделайте ход, после чего одного из ваших коней превратите в верблюда (коня 3×1).»

«Сделайте ход, после чего поменяйте местами своего короля и короля противника — при условии, что они не попадают под шах.»

Среди карт есть повторяющиеся, а также отменяющие действия соперника.

Тот, чья очередь ходить, выбирает любую из карт и раскрывает ее. Цель игры — заматовать неприятельского короля, но достижение ее может произойти самым неожиданным образом. У игрока может найтись карта, после предъявления которой король противника моментально окажется в плену. Колоду карт можно пополнить за счет своей собственной фантазии. Во Франции игра пользуется немалой популярностью.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

КУБ ДЕНИСА

Читатель А. Цукарь из Новосибирска прислал описание головоломки, которую он назвал «куб Дениса». Она состоит из 64 частично непрозрачных кубиков, из которых требуется сложить полностью непрозрачный куб 4×4×4. В головоломке используются кубики 8 различных окрасок (все они показаны в верхней части рисунка). Каждый тип окраски повторяется в 8 кубиках.

Попробуйте решить следующие задачи этой головоломки:

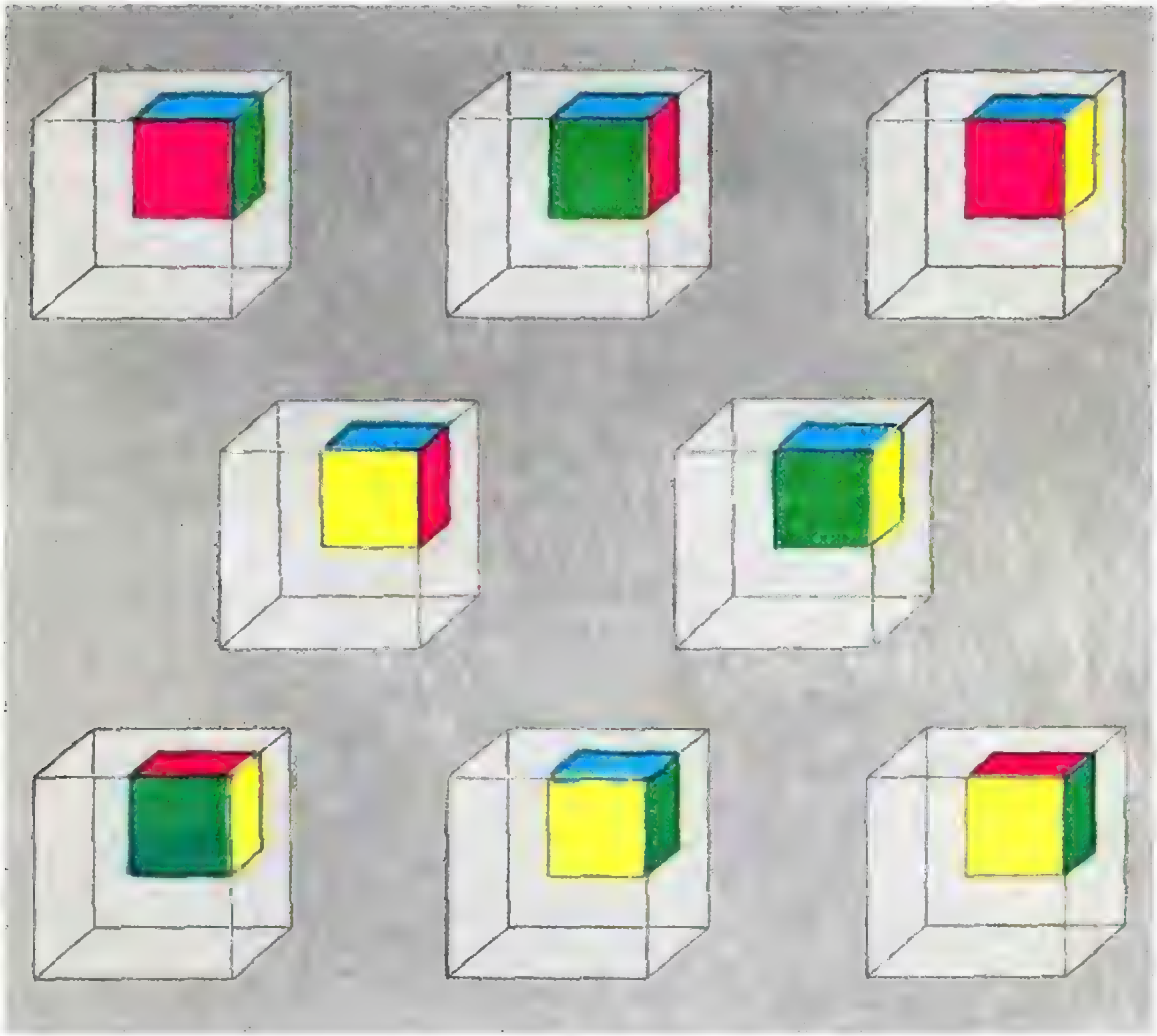
1. Сложите куб, непрозрачный со стороны любой грани.

2. Соберите куб так, чтобы со стороны любой грани всех четырех цветов было поровну.

3. Соберите непрозрачный куб, глядя на который со стороны одной грани, можно увидеть в любом столбце из 4-х кубиков все 4 цвета.

4. Докажите, что при выбранных 8 типах раскраски в 4 цвета невозможно составить куб, все грани которого были бы одноцветными.

Изготовить самому 64 кубика довольно затруднительно, но если кубики и цвета пронумеровать, то можно решать все задачи на листе бумаги. Еще интереснее — написать программу и строить куб на экране дисплея. И наконец, попробуйте сформулировать и решить аналогичные задачи для 4-мерного куба. Того, кто справится с этим, ждет специальный приз журнала «Квант».



НОМЕР
12

Квант

12 1991

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Академии наук СССР,
Президиум
Академии педагогических
наук СССР
и трудовой коллектив
редакции журнала «Квант»*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *М. Файнгольд.* Сверхсветовая тень и взрывающиеся квазары
8 *А. Кремер.* Сожжем что-нибудь?
14 *И. Яглом.* Системы счисления

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1316—М1320, Ф1323—Ф1327
24 Решения задач М1253, М1258, М1261, Ф1303—Ф1307

«Квант» для младших школьников

34 Задачи
35 *В. Мадер.* Диаграммы Эйлера — Венна
39 Конкурс «Математика 6—8»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

42 Два решения одной задачи

Практикум абитуриента

45 *Б. Гуревич, Р. Малков.* Как обмануть интеграл
49 *Б. Корсунский.* Решу задачу. Возможны варианты

Игры и головоломки

51 *А. Савин.* Двенадцать долларов, ним и шоколадка

Фантастика

54 *Г. Слезар.* День экзамена

Олимпиады

58 XXXII Международная математическая олимпиада
59 XXII Международная физическая олимпиада
63 III Международная олимпиада по информатике

Информация

66 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
69 Задачи заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ

72 **Ответы, указания, решения**

76 **Напечатано в 1991 году**

79 **Анкета 12—91**

«Квант» улыбается *(71)*

Реклама *(7)*

Смесь *(33)*

Наша обложка

1 *Кажущаяся скорость удаления облака от ядра квазара 3С 273 больше скорости света. Как возникает этот парадокс, рассказано в статье на с. 2. (Снимки сделаны в Калифорнийском технологическом институте. Расстояния указаны в световых годах.)*
2 *Надеемся, что наш журнал постепенно оттачивает ваш ум, как точильщик на картине К. Малевича (1878—1935) — лезвие.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Игра «Пирамида».*

© «Квант», 1991

СВЕРХСВЕТОВАЯ ТЕНЬ И ВЗРЫВАЮЩИЕСЯ КВАЗАРЫ

Кандидат физико-математических наук
М. ФАЙНГОЛЬД

Начнем с рассмотрения чисто житейской (и даже несколько скучной) ситуации: идет дождь. Поскольку математическое описание любой ситуации связано с идеализацией, наш дождь несколько отличается от реального дождя: он состоит из бесконечно малых капелек, сплошь заполняющих пространство и падающих отвесно с постоянной скоростью $\vec{u}$ на горизонтальную плоскость α. Это унылое однообразие нарушается единственной приметой — непроницаемой для воды частицей S («зонтиком»), под которой в сплошной водяной пелене образуется непрерывная цепочка мелких пузырьков. Размеры зонтика, а тем самым и размеры образующихся пузырьков также будем считать пренебрежимо малыми. Поскольку внутри пузырьков нет воды, будем называть их сухими дырками. А непрерывную цепочку сухих дырок, тянущуюся от зонтика, назовем сухой нитью.

Пусть зонтик S сначала висит неподвижно на некоторой высоте над плоскостью α. Тогда положение сухой нити q определяется только направлением дождя — нить будет параллельна дождевым струям. В нашем случае она будет отвесна, и, следовательно, прямо под S на плоскости α появится защищенная от дождя площадка S'. С геометрической точки зрения, S' можно рассматривать как проекцию S на α. С точки зрения житейской, S' — единственное убежище, где находящийся на α микроскопический путник мог бы укрыться от дождя (рис. 1).

Предположим теперь, что зонтик S

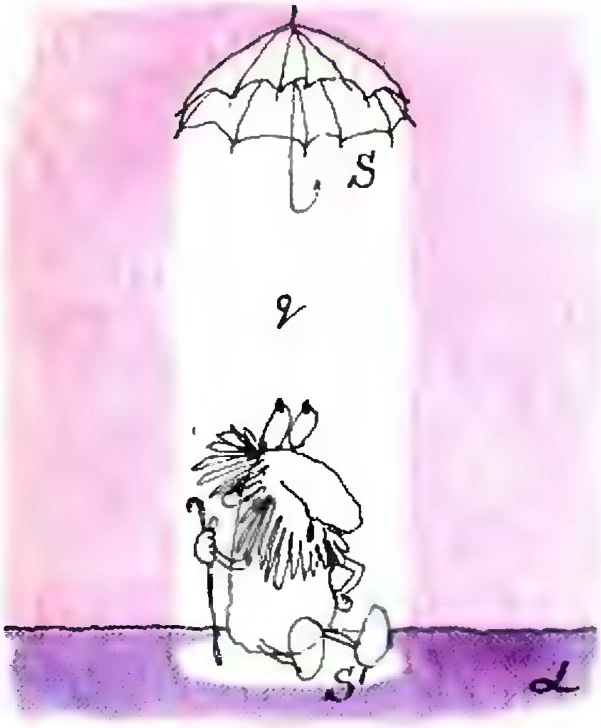


Рис. 1.

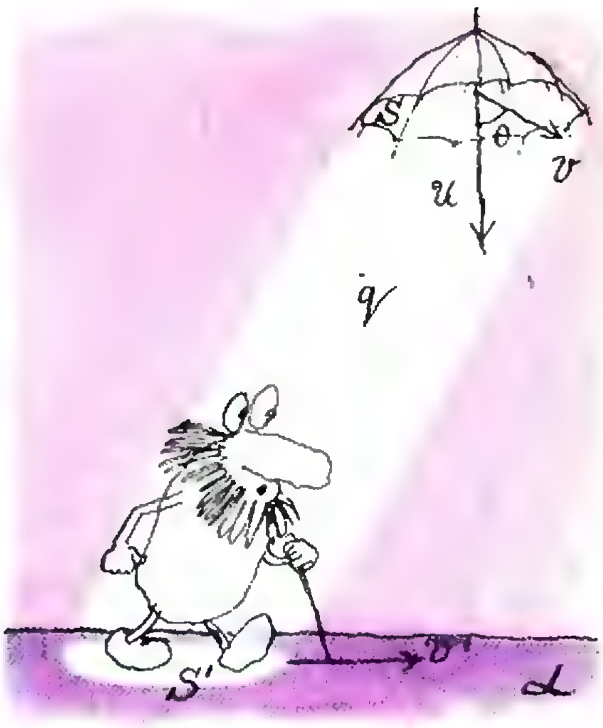


Рис. 2.

начинает двигаться с постоянной скоростью $\vec{v}$ под углом θ к отвесной линии. Это вызывает соответствующее перемещение сухой нити q и точки S'. Поэтому нашему путнику, чтобы остаться сухим, приходится двигаться вместе с S' (рис. 2). С какой скоростью должен двигаться путник?

Напрашивается «очевидный» ответ: поскольку при $v=0$ точка S' совпадает с проекцией зонтика на α, то при $v\neq 0$ она должна перемещаться со скоростью, равной проекции $\vec{v}$ на α, т. е. $v'=v\sin\theta$. Следовательно, скорость v' не может превосходить v. Далее, хотя S' будет отставать от геометрической проекции S (из-за конечной скорости «проецирующего» дождя), она, конечно, будет всегда двигаться в ту же сторону. Наконец, поскольку скорость зонтика меньше скорости света c, то и v' всегда меньше c.

Все утверждения в этом ответе неверны. В них не учтено, что при наличии у скорости $\vec{v}$ вертикальной составляющей, равной $v_{\parallel}=v\cos\theta$, интервал времени между образованием пузырька и его падением на плоскость меняется с течением времени (т. е. различен для разных пузырьков), а это приводит к довольно неожиданным следствиям. Для их выяснения решим задачу строго.

Прежде всего следует дать четкое определение скорости v'. Это можно сделать, используя введенное выше понятие сухих дырок. Дырки непрерывно «сыпятся» от зонтика и вместе с дождем падают со скоростью u. Рассмотрим два положения зонтика S в моменты времени t_1 и t_2. В каждый из этих моментов от S отделяется сухая дырка и устремляется вертикально вниз. Обозначим момент падения первой из них на плоскость α через t'_1, а второй — через t'_2. Пусть расстояние между точками падения этих дырок равно $\Delta x'$. Скоростью перемещения точки S' будет величина

$$v'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \qquad (1)$$

где

$$\Delta t'=t'_2-t'_1.$$

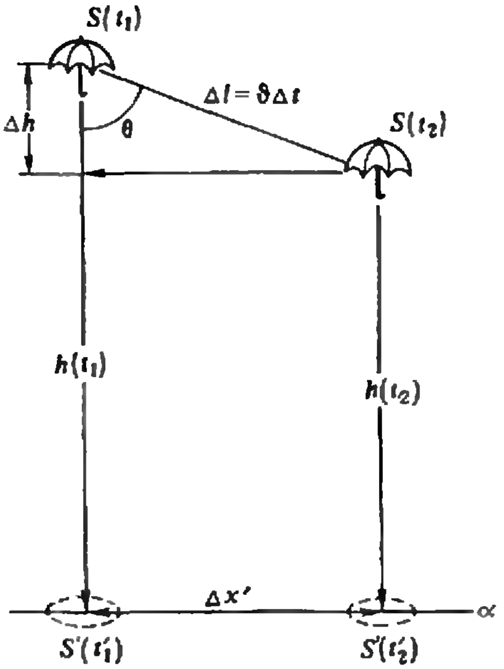


Рис. 3. Изображенные здесь одновременно четыре события $S(t_1)$, $S(t_2)$, $S'(t'_1)$ и $S'(t'_2)$ на самом деле происходят в разное время.

Найдем, как зависит величина v' от u, v и θ (рис. 3). Расстояние между положениями зонтика в моменты t_1 и t_2 равно $\Delta l=v\Delta t=v(t_2-t_1)$, поэтому

$$\Delta x'=\Delta l\sin\theta=v\,\Delta t\sin\theta. \qquad (2)$$

Соответствующая разность высот в эти моменты равна $\Delta h=\Delta l\cos\theta=v\Delta t\cos\theta$. Промежуток времени $\Delta t'$ между моментами падения дырок на

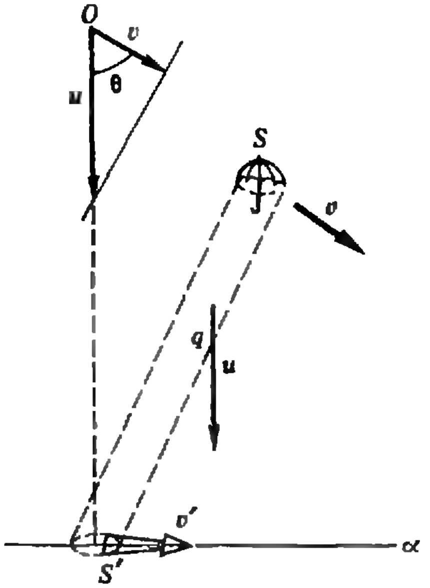


Рис. 4.

плоскость α отличается от промежутка Δt между моментами их испускания на величину $\Delta h/u = \Delta t_{12}$:

$$\Delta t' = \Delta t - \Delta t_{12} = \Delta t\left(1 - \frac{v}{u}\cos\theta\right). \qquad (3)$$

Формула (3) совпадает с известным выражением для классического эффекта Доплера, согласно которому период $\Delta t'$ между последовательными сигналами от движущегося источника меняется на $v_\parallel/u$ своей величины Δt в случае неподвижного источника. Здесь $v_\parallel = v\cos\theta$ — продольная (т. е. параллельная лучу зрения) составляющая скорости источника, u — скорость сигнала. Роль сигнала в нашем случае играют сухие дырки, источником которых служит частица S. Из-за явной зависимости $\Delta t'$ от продольного движения источника соответствующий эффект называют продольным эффектом Доплера.

Подставляя теперь выражения (2) и (3) в формулу (1), находим

$$v' = \frac{v\sin\theta}{1 - \frac{v}{u}\cos\theta}. \qquad (4)$$

Тот же результат можно получить с помощью понятия о сухой нити, замечая, что S' возникает при пересечении нити с плоскостью α. Нить сносится дождем со скоростью $\vec{u}$, а источник, из которого она «вытягивается», движется со скоростью $\vec{v}$. В итоге нить, падая, остается параллельной вектору $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, и задача сводится к нахождению скорости точки ее пересечения с плоскостью α (рис. 4). Эта задача решается достаточно просто, и мы предлагаем читателю убедиться, что ее решение приводит к формуле (4).

А теперь посмотрим, что говорит эта формула.

Во-первых, видно, что если знаменатель достаточно мал, то величина v' может оказаться сколь угодно большой, и, в частности, превзойти скорость света. Этот вывод не противоречит законам природы, так как относится к «объекту», который не является одним физическим телом. Действительно, два разных положения точки S' на плоскости α обусловлены падением на α двух *разных* сухих дырок; а на промежуток времени между такими событиями в природе нет никаких ограничений. Так что может оказаться, что нашему путнику, чтобы остаться сухим, надо мчаться во весь дух, даже если зонтик S еле движется, а при $v' > c$ путник, каким бы он ни был резвым, вообще не удержится на точке S': сверхсветовая скорость не может быть достигнута материальным телом.

Во-вторых, если $1 - \frac{v}{u}\cos\theta < 0$, то точка S' будет двигаться против геометрической проекции зонтика. Например, при смещении зонтика к востоку, путнику, чтобы избежать насморка, придется бежать на запад!

Оба эти результата становятся совершенно наглядными, если воспользоваться представлением о сухой нити q, падающей на плоскость α (см. рис. 4). Мы уже знаем, что возникающая при этом точка пересечения нити с плоскостью может двигаться сколь угодно быстро. В частности, когда $v_\parallel = v\cos\theta = u$, нить q параллельна плоскости α и падает на нее одновременно всеми своими точками (формула (3) при этом дает $\Delta t' = 0$). Это значит, что точка S' прочерчивает свою траекторию на плоскости α мгновенно, т. е. $v' \to \infty$ (рис. 5). Обратное

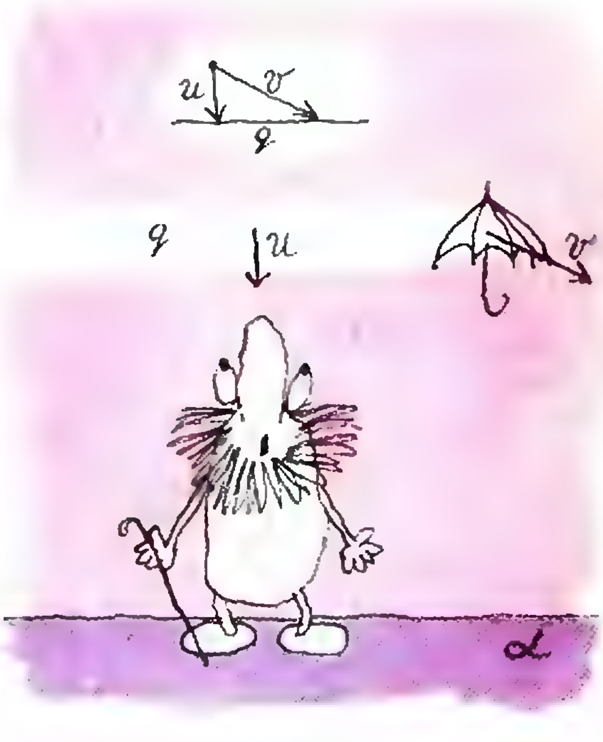


Рис. 5.

движение точки S' возникает при $v_{|} > u$; геометрически это означает, что зонтик S падает *быстрее* дождя, обгоняя дождевые капли, так что создаваемая им сухая нить остается выше S (рис. 6, *а*). При этом из формулы (3) следует $\Delta t' < 0$, т. е. та из двух дырок, которая была испущена раньше другой, падает на плоскость α позже. Легко видеть, что в этом случае точка S' на плоскости α впервые возникает в момент падения самого́ зонтика S и удаляется от места падения в ту сторону, откуда летел зонтик (рис. 6, *б*).

В условиях нашей задачи допустимы видоизменения. Например, можно заменить дождь отвесно падающими лучами света. Тогда в формуле (4) скорость u заменится на c, и формула для v' примет вид

$$v' = \frac{v \sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}. \qquad (5)$$

При этом сухая дырка превратится в темную дырку, а сухая прямая — в темную прямую (тень от зонтика). Знаменатель в выражении (5) всегда положителен, так как $v < c$, следовательно, тень S' (лучевая проекция зонтика) может двигаться лишь в ту же сторону, что его геометрическая проекция. Однако скорость этого движения тоже может быть сверхсветовой, если правая часть выражения (5) больше c, т. е. если

$$\frac{\beta \sin\theta}{1 - \beta\cos\theta} > 1, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}. \qquad (6)$$

Нетрудно определить область значений v и θ, при которых имеет место неравенство (6). Эта область показана на рисунке 7 (окрашенный сегмент). Если направление и величина скорости зонтика таковы, что точка v, θ оказывается *внутри сегмента, то тень* зонтика движется со сверхсветовой скоростью. Соответствующее явление может быть названо сверхсветовой тенью. Как видно из рисунка 7, в условиях данной задачи такая тень может появиться при движении зонтика со скоростью, превышающей $c/\sqrt{2}$.

Математическая формулировка задачи не изменится, если «поменять знаки» в физических условиях: падающий световой поток заменить тьмой, а отбрасываемый частицей S наклонный столб тени (прямая q) — световым лучом, который состоит из

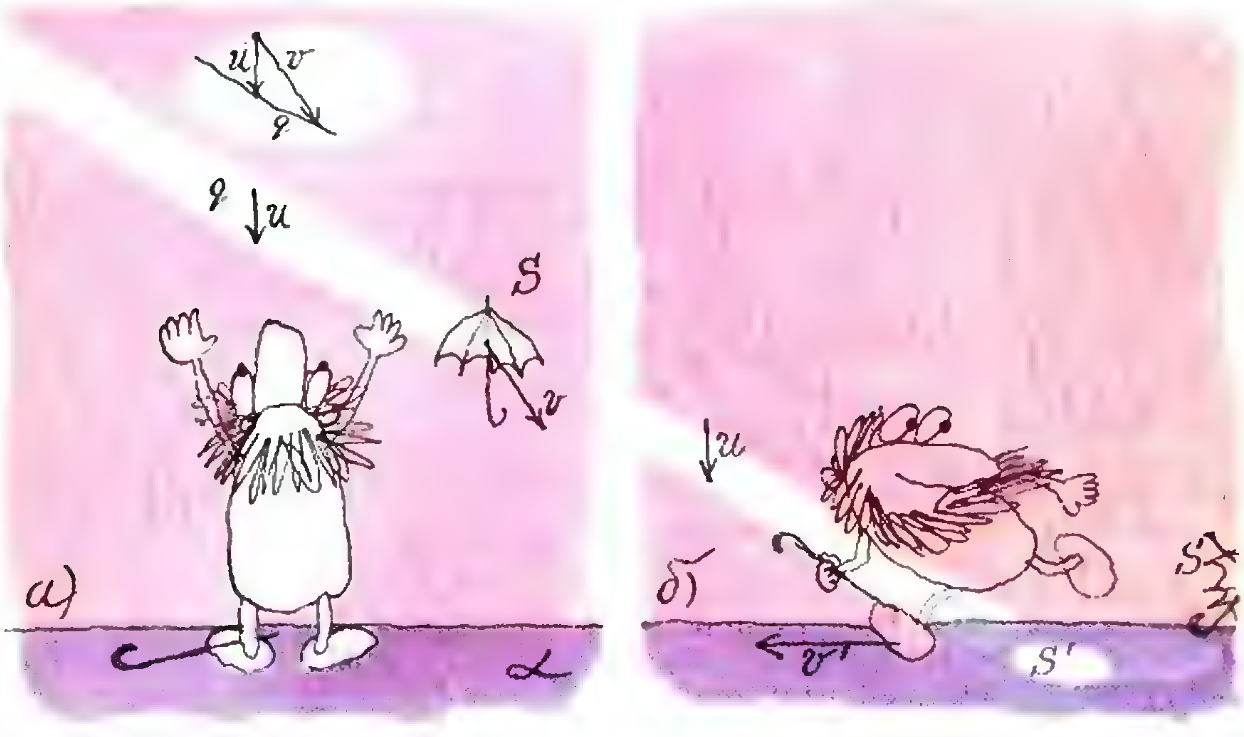


Рис. 6. а) до падения зонтика на плоскость α; б) после падения.

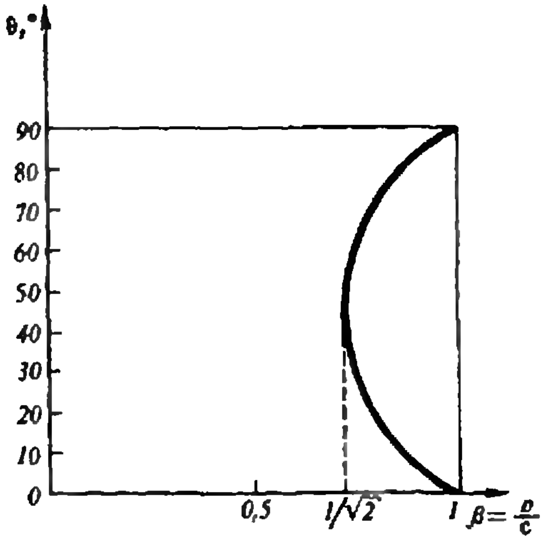


Рис. 7. Закрашенная область соответствует величинам и направлениям скорости объекта, при которых его оптическая проекция движется быстрее света, т. е. образуется сверхсветовая тень.

световых частиц — фотонов, падающих из источника S только в одном направлении — вертикально вниз в системе координат, где плоскость α неподвижна (представление о фотонах как о точечных частицах неверно, но в данной задаче это не приводит к ошибкам). Луч q — это мгновенное положение всех фотонов, испускаемых источником S вертикально вниз в разные моменты времени. Этот луч освещает на плоскости α точечное пятно S'. Пятно S' становится изображением соответствующего положения источника S, которое он занимал в момент испускания света, попавшего в S'. При этом наша задача из пустячной математической безделушки превращается в модель наблюдения грандиозного астрофизического процесса.

Представим себе, что произошел взрыв далекого космического объекта и во все стороны от взрыва разлетаются сгустки горячей светящейся плазмы. Один из сгустков (S) движется к нам со скоростью v под углом θ к лучу зрения, проведенному к взорвавшемуся объекту. Тогда изображение сгустка на плоскости α, спроецированное лучом q, движется вдоль плоскости со скоростью v', описываемой формулой (5). Но, согласно этой формуле, при значениях v и θ, удовлетворяющих неравенству (6), скорость v' будет больше c. И если судить об эффекте только по его видимому результату, мы придем к неверному выводу о сверхсветовой скорости самого сгустка. Этот «наблюдательный» эффект получил название релятивистского пушечного ядра. Например, если релятивистское пушечное ядро движется почти прямо к наблюдателю, то наблюдателю кажется, что оно движется в плоскости, перпендикулярной лучу зрения (ее называют картинной плоскостью), со сверхсветовой скоростью.*)

Можно привести простой пример, наглядно поясняющий причину такого эффекта. Пусть релятивистский плазменный сгусток движется к Земле со скоростью, равной 99 % световой, но не прямо на нас, а немного в сторону, так что за 300 лет он переместится в картинной плоскости на 25 световых лет от места взрыва. Но при этом вдоль луча зрения он приблизится к нам на $300 \cdot 0{,}99 \approx 297$ световых лет. Поэтому излучение из нового положения сгустка придет к нам не через 300 лет после первого наблюдения, а через $300-297=3$ года. Следовательно, земному наблюдателю покажется, что сгусток сместился в картинной плоскости на 25 световых лет всего за 3 года, т. е. двигался со скоростью порядка восьми световых! Но эта скорость действительно кажущаяся, так как при ее вычислении использован интервал времени $\Delta t'$ между поступлением сигналов к наблюдателю, который (благодаря приближению источника) может быть во много раз меньше интервала времени Δt между испусканием этих сигналов (продольный эффект Доплера).

---

*) Конечно, описанная схема дает весьма упрощенную (и не совсем адекватную) картину реального астрономического наблюдения. Реальный источник излучает *во всех* направлениях, что и позволяет наблюдать различные его положения. Из-за чрезвычайной удаленности источника его изображение на фотопластинках смещается на доли миллиметра в год даже в рассматриваемых здесь условиях. Скорость соответствующего движения в картинной плоскости α, которую следует представить находящийся в области движения самого источника, вычисляется по смещению изображения на фотопластинке с учетом расстояния до источника и может превосходить величину c.

Таким образом, мы приходим к несколько парадоксальному выводу, что кажущаяся сверхсветовая *поперечная* скорость по сути есть проявление *продольного* эффекта Доплера. Возможность такого необычного проявления была предсказана еще в 1966 году английским астрономом Мартином Рисом, однако в течение длительного времени это предсказание не вызывало особого интереса.

Но вот в начале 1971 года появилось сообщение сотрудника Массачусетского технологического института Ирвина Шапиро, поразившее астрономов, как удар грома. Шапиро наблюдал радиоизлучение от квазара 3 С 279 для измерения эффекта общей теории относительности — отклонения радиоволн в гравитационном поле Солнца. При этом он использовал высокосовершенное устройство — радиоинтерферометр сверхвысокого разрешения, позволявший различать отдельные детали квазара.

Из наблюдений Шапиро, к тому моменту беспрецедентных по своей точности, следовало, что отдельные компоненты квазара 3 С 279 разлетаются со скоростью, примерно в 10 раз большей скорости света!

К сегодняшнему дню подобное «сверхсветовое» расширение наблюдается уже по крайней мере у нескольких квазаров (см. фотографию на обложке журнала).

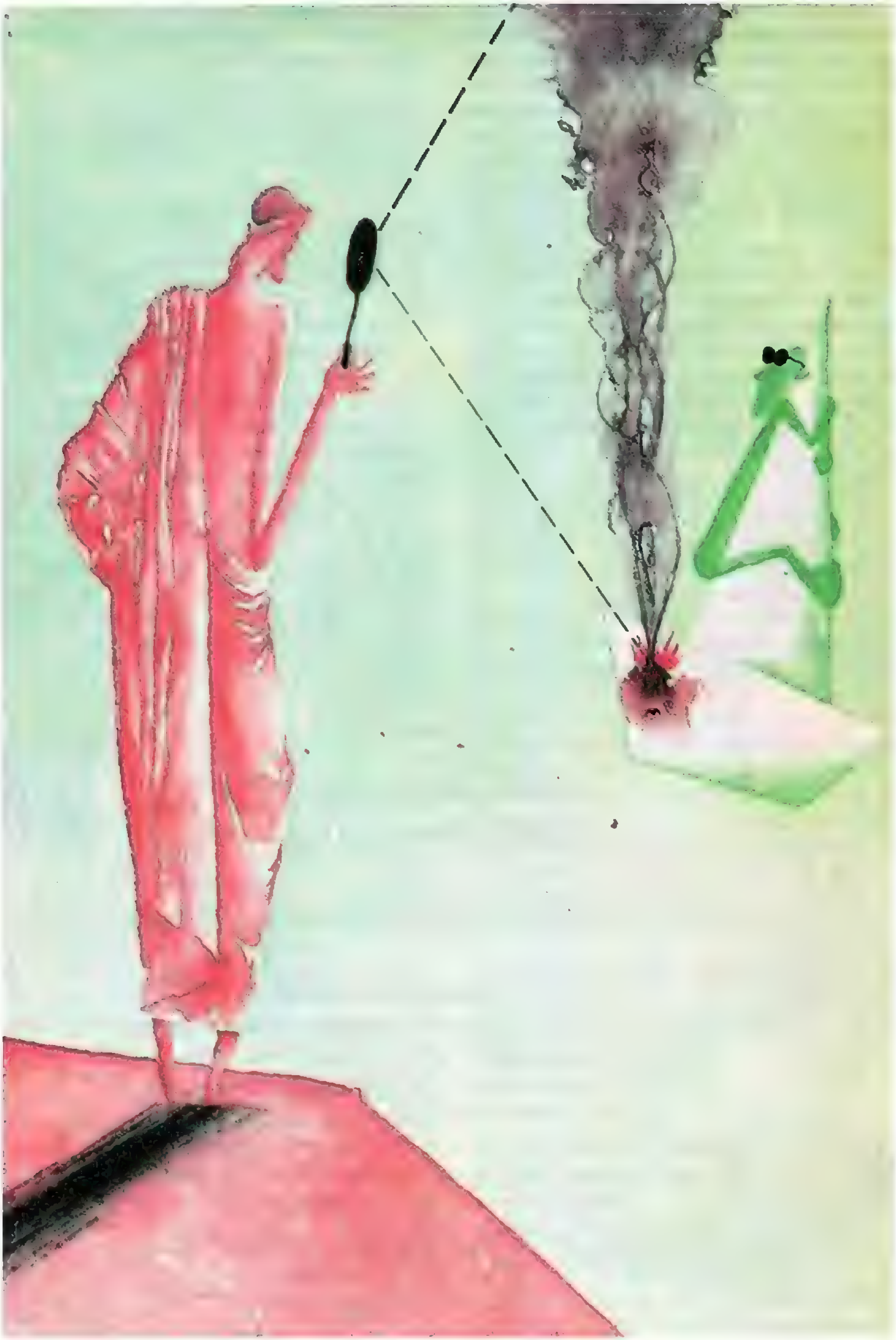
Разумеется, подавляющее большинство физиков и астрономов убеждены, что здесь перед нами вовсе не реальное сверхсветовое движение тел, а скорее всего — лишь проявление эффекта релятивистского пушечного ядра. Но удивительно, что такое пушечное ядро на самом деле реализуется в космических масштабах! Ведь одно дело, когда речь идет о релятивистских скоростях отдельных элементарных частиц, и совсем другое — наблюдать такие скорости у сгустков вещества с массой, возможно в миллион раз большей массы Солнца! Какие силы смогли разогнать до такой скорости гигантскую массу вещества? Не исключено, что с этого вопроса начинается путь к новым неожиданным открытиям.

Всесоюзная фирма
«АКАДЕМКНИГА»

Компьютерный салон-магазин «Дана»

Всегда в продаже за рубли:
дискеты, ленты для принтеров, бумага для телефакса,
порошки, картриджи, компьютеры, телефаксы,
ксероксы с гарантийным обслуживанием, плоттеры
и др. оргтехника, запасные части, программное обеспечение,
журналы и книги по ВТ и программному обеспечению.
Мы принимаем товар для последующей реализации
от организаций и частных лиц.

Адрес магазина: 117312, Москва, ул. Вавилова, д. 55/7,
«Академкнига», МП «Дана», телефон: 124-96-96.
Проезд: ст. метро «Академическая».



СОЖЖЕМ ЧТО-НИБУДЬ?

Кандидат технических наук
А. КРЕМЕР

Однажды мне попала в руки любопытная книга под названием «О возможном и невозможном в оптике». Ее автор, крупный специалист в области оптических расчетов профессор Г. Слюсарев задумал книгу как своеобразное предупреждение тем горе-изобретателям, которые, не разобравшись в фундаментальных научных принципах, пытаются облагодетельствовать человечество с помощью неосуществимых технических приспособлений.

Центральное место в книге по праву занимало ниспровержение «тонких как игла» световых пучков и световых сжигателей на расстоянии. Оба эти проекта насчитывают многовековую историю — начиная с легенды об Архимеде, который сжег солнечным зайчиком неприятельский флот, и кончая знаменитым гиперболоидом инженера Гарина. Вот заключение этой главы в книге: «Автору хотелось бы надеяться, что ему удалось убедить читателя в невозможности в ближайшие годы решить задачу о сжигании далеких предметов с помощью оптических систем. Методы расчета, изложенные выше, настолько общи, что сомневаться в них можно, сомневаясь в основных принципах природы».

Пикантность ситуации (что меня и привлекло) заключалась в том, что книга увидела свет в 1960 году, т. е. именно в тот момент, когда в лабораториях физиков появились те самые источники тонких как игла световых пучков и сжигатели на расстоянии — лазеры!

Я вспоминаю, как один школьный учитель физики, искренне полагая, что раздел программы «Энергетика в СССР» неотделим от журналистских штампов, заставлял учеников заучивать «названия» видов топлива: нефть — черное золото, газ — голубой уголь и т. д. В этом же ряду и «лазеры — чудо XX века». Для непосвященных, действительно, лазеры — это осуществленная идея инженера Гарина, и, следовательно, одним фактом своего существования они повергают в прах доводы уважаемого профессора и «заставляют сомневаться в основных принципах природы». С другой стороны, классическая геометрическая оптика и фотометрия преспокойно существуют и не думают погибать под ударами лазерной физики. Так что здесь не все так просто, и начать придется с азов, тем более что фотометрия полностью изгнана со страниц школьных учебников.

В оптике существует понятие точечного источника. Это такая же абстракция, как и точка в геометрии. В природе, однако, существуют излучатели, дающие хорошее приближение к этой абстракции. Точечный источник, находящийся на конечном расстоянии от наблюдателя,— это возбужденный атом, а протяженный источник, находящийся на бесконечном расстоянии от наблюдателя,— это звезда. Рассмотрим площадку, на которую падает свет от звезды (рис. 1). Энергия, протекающая через эту площадку в единицу времени (мощность электромагнитной волны), называется световым потоком. Силой света источника называется отношение светового потока к телесному углу*), под которым видна площадка:

$$I=\frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \qquad (1)$$

Идеальный точечный источник характерен тем, что $I=\text{const}$ и не зависит от

---

*) Телесный угол — это пространственный аналог простого угла на плоскости. Угол (в радианах, рад) измеряют отношением длины дуги, отсекаемой им от произвольной окружности (с центром в вершине угла), к радиусу этой окружности. Телесный угол (в стерадианах, ср) измеряют отношением площади поверхности, отсекаемой конусом от произвольной сферы (с центром в вершине конуса), к квадрату радиуса этой сферы: $\Omega=S/R^2$.

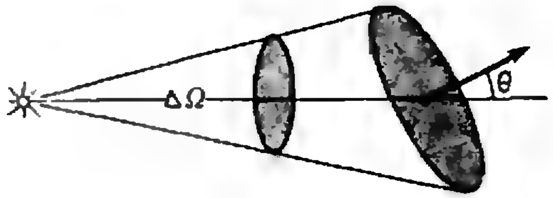


Рис. 1.

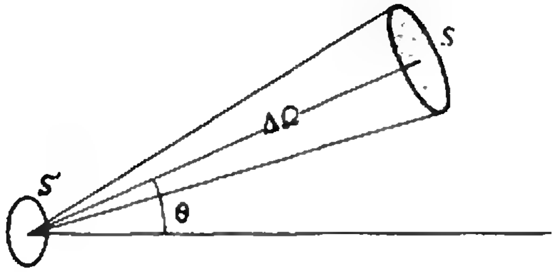


Рис. 2.

направления. Тогда, кроме (1), можно написать

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \qquad (2)$$

где Φ — полный световой поток, посылаемый источником по всем направлениям, а 4π — полный телесный угол.

На небосклоне есть одна звезда, которую к точечным источникам никак не отнесешь. Это — Солнце. Оно имеет вполне заметный угловой размер — $\approx 0{,}5^\circ$. Большинство источников света, окружающих нас, также относятся к протяженным. Протяженный источник можно рассматривать как совокупность бесконечного множества точечных источников. В таком случае, говоря о Солнце, заменим его для простоты на «гантельку»-диаметр, на концах которого находятся две светящиеся точки-звезды. Световой поток на поверхности Земли от двух звезд приблизительно вдвое больше, чем от одной. Если эту гантельку повернуть вдоль луча зрения, то одна звезда загородит другую, и световой поток не увеличится. Таким образом, световой поток от светящейся площадки зависит от ориентации этой площадки относительно луча зрения, и мы даже смогли уловить характер этой зависимости: световой поток тем больше, чем более перпендикулярно к лучу зрения развернута площадка. Кроме того, световой поток, очевидно, пропорционален площади светящейся поверхности S' и телесному углу, под которым видна приемная площадка из светящейся (рис. 2):

$$\Delta\Phi = B\cos\theta \cdot S'\,\Delta\Omega. \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности B — это еще одна важная фотометрическая величина, называемая яркостью. Для данного случая величину

$$I = BS'\cos\theta \qquad (4)$$

естественно назвать силой света. Заметим сразу, что, хотя понятие силы света применимо и к точечному, и к протяженному источнику, понятие яркости к точечному источнику неприменимо: у последнего нет ни размера, ни ориентации. Яркость измеряется, как правило, в специальных единицах — стильбах (сб). Величины яркостей некоторых источников приведены в таблице:

Источник света	Яркость, сб
полная Луна	0,25
пламя свечи	0,5
люминесцентная лампа	0,6
лампа накаливания	600—1300
Солнце в зените	$1{,}6\cdot 10^5$
искра разряда в газе	$\approx 10^7$

Вы уже заметили, наверное, одну странность в этой таблице: из опыта мы знаем, что люминесцентная лампа дает практически столько же света, сколько и лампа накаливания, но яркость ее оказывается на три порядка ниже. Однако никакой ошибки здесь нет: люминесцентная лампа на самом деле весьма тусклый источник, просто у нее очень большая излучающая площадь!

Если светящаяся поверхность состоит из одинаковых идеальных точечных источников света, то оказывается, что $B = \text{const}$ и не зависит от направления. Такие источники называются ламбертовскими. Хорошими примерами ламбертовского источника являются Солнце и идеально рассеивающая поверхность. Зависимость силы света от направления для такого источника (согласно (4)) изображена на рисунке 3.

Для дальнейшего нам понадобится еще одна фотометрическая величина — освещенность, характеризующая воздействие излучения на приемную площадку:

$$E=\frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \qquad (5)$$

Посмотрим теперь, что происходит со световой энергией при преобразовании светового пучка оптической системой. В качестве примера последней мы возьмем просто линзу. Все наши выводы целиком будут приложимы и к сферическим зеркалам. Пусть источник яркостью B и площадью S', расположенный на расстоянии a перед собирающей линзой площадью Q, отображается в площадку S (рис. 4). Имеем для светового потока, падающего на линзу:

$$\Phi=BS'\Omega=BS'\frac{Q}{a^2}. \qquad (6)$$

Этот же поток падает на изображение. Поэтому освещенность изображения

$$E=\frac{\Phi}{S}=\frac{BS'Q}{a^2S}. \qquad (7)$$

Однако, по формуле для увеличения линзы $S'/S=a^2/b^2$, где b — расстояние от изображения до линзы. Следовательно,

$$E=\frac{BQ}{b^2}. \qquad (8)$$

Этой формулой, полученной нами вслед за французским инженером Манженом (1825—1885), мы закончим теоретическое введение. Перейдем теперь к настоящему делу.

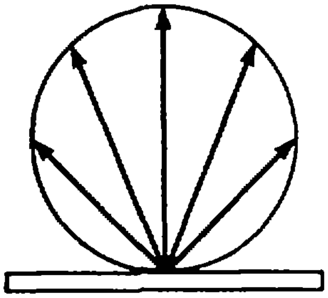


Рис. 3.

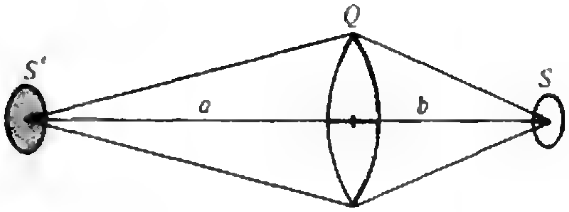


Рис. 4.

Попробуем что-нибудь сжечь, например деревяшку. Любой из вас наверняка это делал в детстве с помощью Солнца и линзы. Поскольку Солнце далеко, то его изображение получается в фокальной плоскости линзы. Из формулы (8) получаем

$$E=B_{\odot}\frac{\pi D^2}{4F^2}, \qquad (9)$$

где D — диаметр линзы, F — ее фокусное расстояние, а $B_{\odot}$ — яркость Солнца. Или

$$E=0{,}8B_{\odot}K^2, \qquad (10)$$

где $K=D/F$ — относительное отверстие линзы. Опыт показывает, что линза с относительным отверстием 1:10 способна поджечь деревяшку. Следовательно, для загорания дерева необходимо обеспечить освещенность не менее чем

$$E'=10^{-2}B_{\odot}. \qquad (11)$$

Для того чтобы сжечь что-то более существенное, надо увеличивать относительное отверстие линзы. Однако — это палка о двух концах. При увеличении K начинают сказываться аберрации (искажения) линзы, изображение расплывается и освещенность может не увеличиваться или даже уменьшаться. Однако в сложных фокусирующих системах можно добиться хорошего качества изображения при больших K, и при этом концентрация солнечной энергии получается такой, что плавятся даже металлы. Подобная гелиопечь была создана у нас в Средней Азии.

Но! Все это происходит «под носом» у оптической системы, а нас, как мы договорились, интересует сжигание на расстоянии. Ну, хотя бы в один километр. Пусть диаметр сжигателялинзы или -зеркала будет 2 метра (куда уж больше?!). Тогда из (8) и (11) следует, что яркость источника, который должен стоять в нашем сжигателе, составляет

$$B=10^4 B_{\odot}.$$

Есть лишь один источник, который «ярче тысячи солнц»,— это ядерный взрыв. Но этот источник, пожалуй, слишком экзотичен, к тому же он и так сжигает все вокруг без всякой оптики. Никакие ухищрения, типа многокомпонентной оптической системы или зеркала, состоящего из многих маленьких, сфокусированных в одну точку, не позволяют обойти формулу (8), и мы приходим к печальному заключению, сформулированному в цитате из книги «О возможном и невозможном в оптике» в начале статьи.

А как же лазеры? Как им удается обойти формулу (8)? Ответ кроется в устройстве лазеров. Схематически лазер можно представить себе как два зеркала, из которых одно глухое, а другое полупрозрачное. Между зеркалами расположена активная среда (газ или твердое тело), энергетические состояния атомов которой отвечают особым «лазерным» условиям. В активной среде с помощью внешнего воздействия (свет, электрический разряд, химические реакции) возбуждается излучение. В результате взаимодействия возбуждаемого излучения с активной средой и зеркалами из лазера вырывается тот самый узкий как игла пучок излучения, который при соответствующих характеристиках может сжечь на значительном расстоянии что угодно.

Почему же он таким получается? Мы уже говорили, что любой протяженный источник света представляет собой совокупность светящихся точек, под которыми можно подразумевать атомы и группы атомов. В обычном источнике все эти элементарные излучатели испускают фотоны вразнобой, не обращая внимания друг на друга. В лазере, наоборот, все атомы излучают согласованно, синхронно, или, выражаясь по-научному, когерентно. Все фотоны здесь имеют одинаковую частоту и, что самое главное, одинаковую фазу. Можно считать, что все атомы активной среды лазера действуют как один атом, вобравший в себя энергию всех своих составляющих. Обычный источник можно уподобить ракете со многими двигателями, которые направлены наобум, вкривь и вкось. Такая ракета тратит бо́льшую часть своих сил впустую. У лазера-ракеты все двигатели направлены в одну сторону, чем и обеспечиваются его необыкновенные свойства. Волновые фронты электромагнитной волны, исходящей от обычного источника, рваные и хаотически меняющиеся. Волновые фронты лазерного луча регулярные и четко сформированные.

Какой же они имеют вид? Это самый важный и принципиальный момент. Можно подумать, что они представляют собой плоскости и, следовательно, световые лучи (перпендикуляры к волновым фронтам) — идеальные параллельные прямые, которые, не расходясь, распространяются до бесконечности. В действительности, однако, параллельных световых лучей не бывает. Идеально плоский волновой фронт должен был бы иметь бесконечные поперечные размеры. Стоит нам только ограничить размер плоской волны, как она тут же становится расходящейся из-за дифракции на этом размере. Волновой фронт лазерного пучка, конечно же, ограничен поперечными размерами активной среды. Если он в каком-то месте между зеркалами и плоский (что, кстати, часто имеет место), то дальше он уже будет пред-

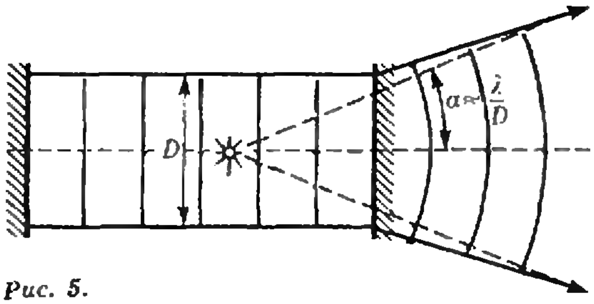


Рис. 5.

ставлять собой участок сферы. Но точно такой же фронт имеет точечный источник, расположенный где-то внутри лазера (рис. 5): это тот самый воображаемый сверхмощный атом, которому лазер эквивалентен. Мы уже обсуждали выше проблемы, связанные с реальными прототипами точечных источников. Если он очень маленький (атом), то его можно расположить на конечном расстоянии от наблюдателя. Если же он большой, то его приходится уносить на бесконечность (звезда). И в том и другом случае до наблюдателя доходит мизерное количество энергии. В новом точечном источнике — лазере удалось совместить несовместимое: конечное расстояние до наблюдателя и большую энергию.

Вот и ответ на загадку лазера. Формула (8) к нему просто не применима, поскольку, как мы уже говорили, понятие яркости на точечные источники не распространяется.

Посмотрим теперь, на что практически способен лазер. Общий принцип дифракции гласит, что угол, на который отклоняются дифрагировавшие на каком-то препятствии лучи, имеет порядок величины $\alpha = \lambda/D$, где D — характерный размер препятствия, а λ — длина волны. Такой приблизительно и будет расходимость лазерного пучка, коль скоро она обусловлена дифракцией. Грубо можно считать, что на расстоянии L диаметр лазерного пучка будет равен

$$d = D + L\,\frac{\lambda}{D}. \qquad (12)$$

Возьмем лазер с диаметром пучка 1 см и длиной волны 1,06 мкм. (Мы рассматриваем для определенности твердотельный лазер с кристаллом алюмоиттриевого граната в качестве активной среды.) На расстоянии в 1 км диаметр пучка, согласно (12), возрастает в 10 раз, однако остается еще весьма малым: $d' \approx 10$ см. Подставим теперь под этот пучок все ту же деревяшку и оценим мощность лазера W, необходимую для того, чтобы ее сжечь. Имеем, согласно (5) и (11),

$$E' = \frac{W}{\pi (d'/2)^2};\ W = 8\cdot 10^{-5} B_{\odot}. \qquad (13)$$

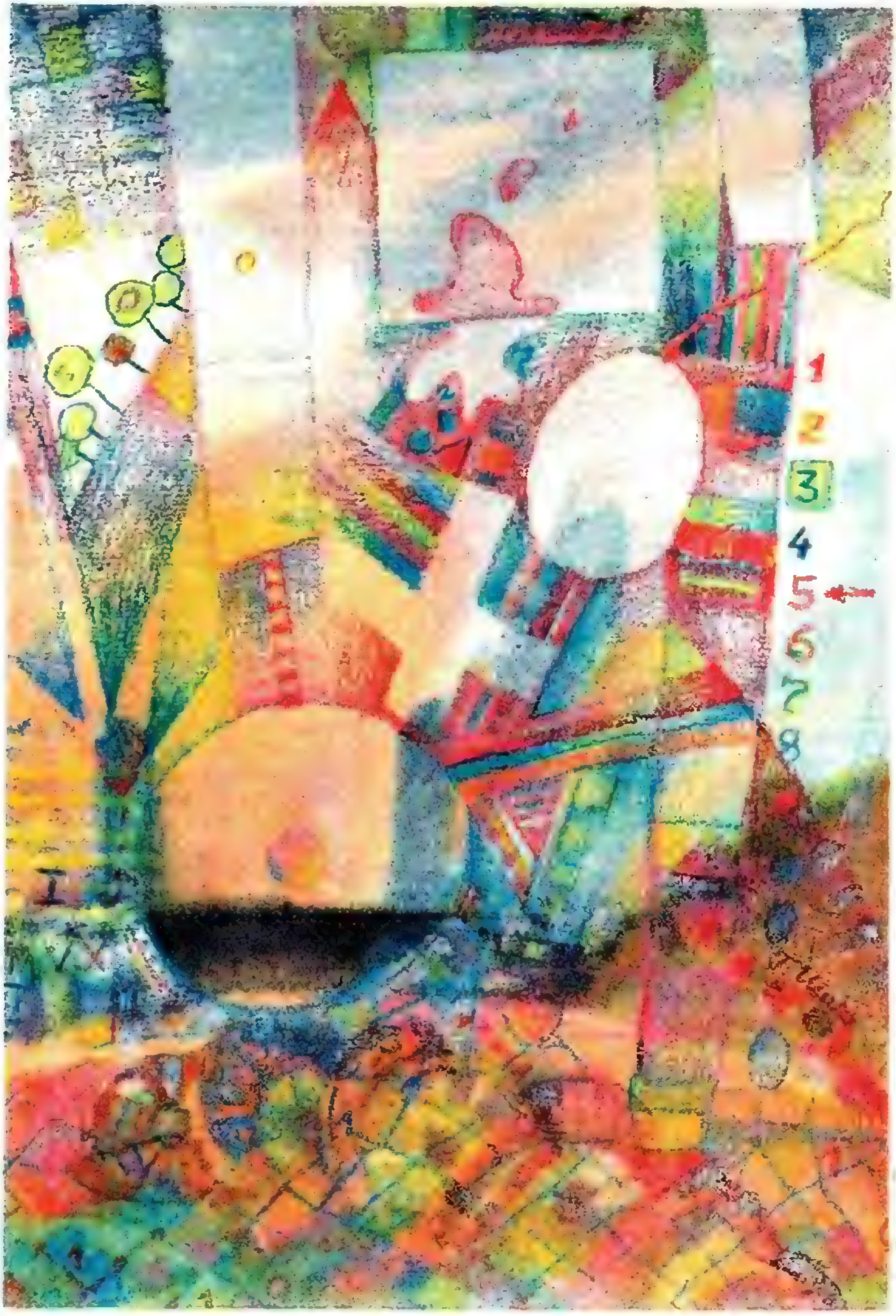
Мощность лазера принято выражать в энергетических единицах, а яркость Солнца, приведенная в нашей таблице, дана в световых единицах. Связь между световыми и энергетическими величинами не столь однозначна, как, скажем, связь между калориями и джоулями: она зависит от спектра источника. В частности, для Солнца

$$B_{\odot} = 2\cdot 10^{7}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{ср}}.$$

Таким образом, из (13) окончательно получаем

$$W = 1{,}6\ \text{кВт}.$$

Такая мощность вполне доступна для лазера-сжигателя. Такие же (и даже гораздо бóльшие) мощности доступны и обычным источникам света (прожекторам), однако сжигателя, как мы видели, из них не получается.


1
2
3
4
5
6
7
8

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

Ключевые числа

Первые девять натуральных чисел мы обозначаем специальными знаками

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

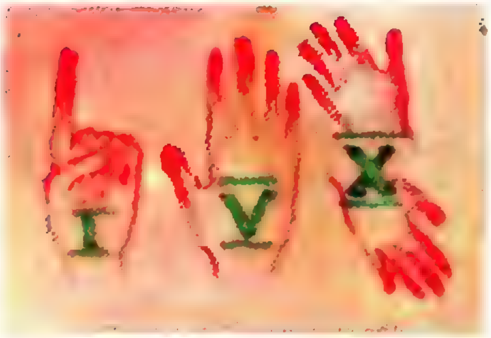
Поступать таким же образом со всеми встречающимися на практике числами было бы неудобно. Даже если бы наши потребности ограничивались счетом в пределах тысячи, надо было бы запомнить тысячу специальных знаков. Естественно, что уже давно люди стали выбирать тот или иной ряд «ключевых» чисел и только их обозначать специальными знаками. Такова, например, римская система счисления (нумерация), основанная на ключевых числах

$$1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.$$

Эти числа в римской системе счисления обозначают буквами

I («и»), V («ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де»), и M («эм»).

Такие обозначения частично произошли от рисунков, изображавших некогда соответствующие числительные (I — палец, V — пятерня с расставленными пальцами, X — две пятерни), а частично являются сокращениями латинских слов (centum — сто, demimille — пятьсот, mille — тысяча).



Так как римская система нумерации нужна нам только для примера, мы рассмотрим ее в более древнем, упрощенном варианте, когда число «четыре» писалось в виде IIII, а не в виде IV. Число 3477 в этой староримской системе записывается так:

$$\mathrm{MMMCCCCLXXVII}=3\cdot1000+4\cdot100+50+2\cdot10+5+2.$$

Аналогично поступает кассир, имеющий денежные купюры достоинством в 100 рублей, 50 рублей, 25 рублей, 10 рублей, 5 рублей, 3 рубля и 1 рубль. Для кассира ключевыми являются числа

$$100, 50, 25, 10, 5, 3 \text{ и } 1.$$

Желая выплатить, скажем, 499 рублей, он выдает сначала столько сотенных бумажек, сколько возможно, чтобы не выдать лишнего:

$$499=4\cdot100+99$$

Затем он выдает столько купюр по 50 рублей, сколько возможно, чтобы выдать не более оставшихся к выплате 99 рублей:

$$499=4\cdot100+1\cdot50+49,$$

и т. д. Иногда у него может получиться остаток меньше, чем следующее ключевое число. Так будет в нашем примере после выдачи двух десятирублевок:

$$499=4\cdot100+1\cdot50+1\cdot25+2\cdot10+4.$$

Следующее ключевое число равно 5, однако так как $4<5$, то пятирублевок выдавать не придется. Но для полноты картины можно считать, что было выдано 0 пятирублевок, и вклю-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1970 год.

чить в сумму слагаемое $0 \cdot 5$. Вся процедура выдачи 499 рублей запишется так:

$$499=4 \cdot 100+1 \cdot 50+1 \cdot 25+ +2 \cdot 10+0 \cdot 5+1 \cdot 3+1 \cdot 1.$$

Попробуем теперь обобщить сказанное, взяв в качестве последовательности ключевых чисел («базиса») любую последовательность возрастающих натуральных чисел:

$$q_0=1<q_1<q_2<\ldots<q_n<\ldots \qquad (1)$$

Опишем, как получить запись произвольного числа N *в системе счисления с базисом (1).*

В последовательности (1) ключевых чисел находим самое большое число q_n, не превосходящее N. Делим N на q_n и получаем (неполное) частное a_n и остаток r_{n-1}:

$$N=a_nq_n+r_{n-1}, \text{ где } 0\leqslant r_{n-1}<q_n.$$

Первый остаток r_{n-1} делим на следующее ключевое число q_{n-1}. Получаем

$$r_{n-1}=a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2},$$

где

$$0\leqslant r_{n-2}<q_{n-1},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+r_{n-2}.$$

(Заметьте, что мы не исключаем здесь и тот случай, когда $r_{n-1}=0$,— в этом случае все последующие частные и остатки будут равны нулю!) Теперь новый остаток r_{n-2} делим на q_{n-2}, мы получаем

$$r_{n-2}=a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

где

$$0\leqslant r_{n-3}<q_{n-2},$$

или

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+a_{n-2}q_{n-2}+r_{n-3},$$

и т. д.

В конце концов, разделив предпоследний остаток r_1 на q_1, получаем

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+r_0,$$

где

$$0\leqslant r_0<q_1.$$

(Так как $q_0=1$, то делить на него «последний остаток» r_0 излишне: ясно, что $r_0=a_0q_0=a_0$.)

Практически подобное многократное деление обычно записывают слитно. Как это делается, мы покажем на уже разобранном примере записи суммы в 499 рублей в «системе кассира»:

$$\begin{array}{r|l} 499 & \underline{100} \\ \underline{400} & 4 \\ 99 & \underline{50} \\ \underline{50} & 1 \\ 49 & \underline{25} \\ \underline{25} & 1 \\ 24 & \underline{10} \\ \underline{20} & 2 \\ 4 & \underline{5} \\ \underline{0} & 0 \\ 4 & \underline{3} \\ \underline{3} & 1 \\ 1 & \underline{1} \\ \underline{1} & 1 \\ 0 & \end{array}$$

. е. $499=4\cdot100+1\cdot50+$
$+1\cdot25+2\cdot10+0\cdot5+$
$+1\cdot3+1\cdot1.$

(Здесь все частные a_n, a_{n-1} и т. д. набраны красными цифрами, а само число N и остатки r_{n-1}, r_{n-2} и т. д.— синими.)

Позиционные системы счисления

Вероятно, вы уже догадались, что в случае базиса

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=10^2,\ \ldots,\ q_n=10^n,\ \ldots$$

мы будем иметь дело с общеупотребительной *десятичной* системой счисления. Но вместе того чтобы писать, скажем,

$$4\cdot10^5+0\cdot10^4+3\cdot10^3+0\cdot10^2+ +1\cdot10+7,$$

мы пишем просто 403017.

Рассеянный или чересчур пунктуальный кассир мог бы приготовить для записи своих выдач ведомость, где число выданных купюр разного достоинства заносилось бы в отдельные столбцы. В такой ведомости выдача 499 рублей выглядела бы так:

	100	50	25	10	5	3	1
499	4	1	1	2	0	1	1

Можно сказать, что в «системе счисления кассира» число 499 записывается в виде

$$4112011.$$

Системы счисления, родственные разобранным в последних двух примерах (т. е. десятичной системе счисления и «системе кассира»), называются *позиционными* (о значении этого выражения мы еще скажем ниже). Вместо громоздкой записи

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в позиционной системе счисления с базисом (1) удобно пользоваться более компактной записью из $n+1$ «цифры»:

$$a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0.$$

При этом предполагается, что «цифры» a_k получены тем способом (алгоритмом), который был описан выше.

Из этого описания ясно, что в заданном базисе каждое натуральное число N записывается единственным образом. Далее, так как «старшая цифра» a_n получается как частное от деления на q_n числа N, которое по условию меньше q_{n+1} (ибо иначе мы начали бы с деления N на q_{n+1}, а не на q_n!), то $a_n<q_{n+1}/q_n$. Поэтому, если частное q_{n+1}/q_n заключено между целыми числами A и $A-1$:

$$A-1<\frac{q_{n+1}}{q_n}\leqslant A,$$

«цифра» a_n не превосходит $A-1$, т. е. она может принимать A значений:

$$a_n=0,\ \text{или}\ 1,\ \text{или}\ 2,\ \ldots,\ \text{или}\ A-1.$$

(Впрочем для «старшей» цифры числа значение $a_n=0$ также можно исключить.)

Аналогично цифра a_{n-1} получается в процессе деления «первого» остатка r_{n-1} на q_{n-1}. Но так как

$$r_{n-1}<q_n,$$

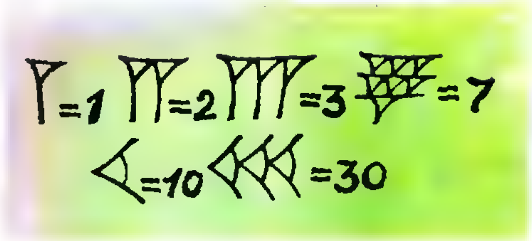
то

$$a_{n-1}<\frac{q_n}{q_{n-1}}.$$

Это рассуждение можно распространить и на все другие цифры. В частности, так как последняя цифра a_0 просто совпадает с «последним» остатком r_0, полученным при делении на q_1, то a_0 может принимать q_1 значений:

$$a_0=0,\ \text{или}\ 1,\ \text{или}\ 2,\ \ldots,\ \text{или}\ q_1-1.$$

До позиционной системы счисления люди дошли не сразу. Одним из затруднений долго было отсутствие числа «нуль» (и специального знака для этого числа). Впервые знак нуля появился в рамках *вавилонской шестидесятеричной* системы счисления. В вавилонских текстах, написанных характерной «клинописью» (см. рисунок), числа от 1 до 59 записывались по *десятичной* системе.

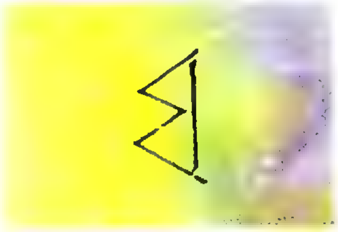


Но основной для вавилонской математики была шестидесятеричная система счисления с базисом

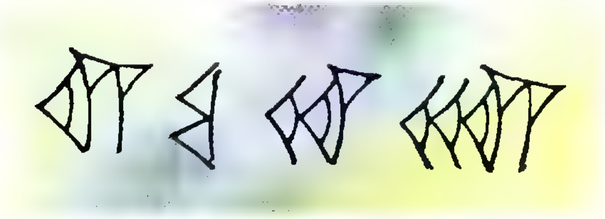
$$1,\ 60,\ 60^2,\ 60^3,\ \ldots,\ 60^n,\ \ldots$$

До мысли иметь специальный знак нуля математики, пользовавшиеся клинописью, дошли довольно поздно (впрочем, заведомо не позднее третьего века до нашей эры).

Знак нуля выглядел так:



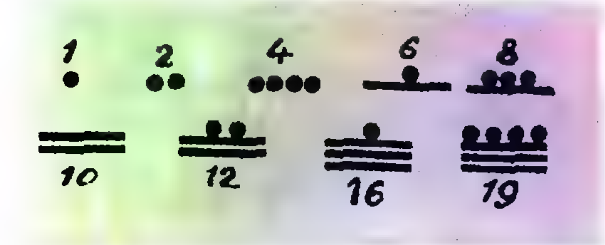
Вы поймете после этих разъяснений, что запись



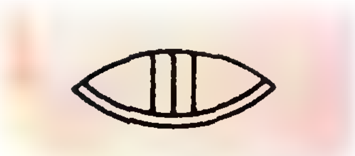
означает число

$$2593292 = 12 \cdot 60^3 + 0 \cdot 60^2 + 21 \cdot 60 + 32.$$

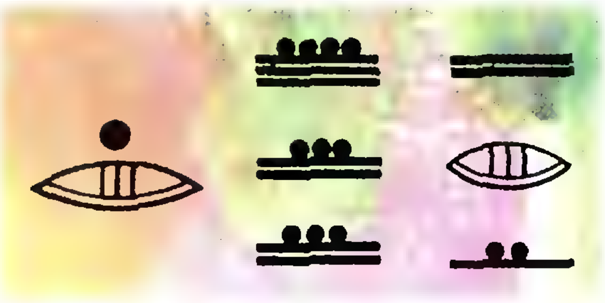
Очень близка к вавилонской система счисления, принятая в древней цивилизации индейцев майя, обитавших на территории Центральной Америки. Создание этой системы счисления относится к началу нашей эры. Если вавилонская система счисления имела комбинированный десятично-шестидесятеричный характер, то система майя была пятерично-двадцатеричной. Первые 19 чисел записывались комбинированием черточки, обозначавшей пятерку, и точки (единицы):



Но основную роль играла искаженная двадцатеричная система счисления. При записи числа «цифры» подписывались одна под другой, причем старшей являлась верхняя цифра. Прилагательное «искаженная» означает вот что: третье — после 1 и 20 — ключевое число в системе майя равнялось не $20 \times 20 = 20^2$, а $18 \cdot 20 = 360$; далее шли $18 \cdot 20^2$, $18 \cdot 20^3$, $18 \cdot 20^4$. Существовало и специальное обозначение для нуля, напоминающее полузакрытый глаз:



Вот несколько примеров записи чисел в системе майя:



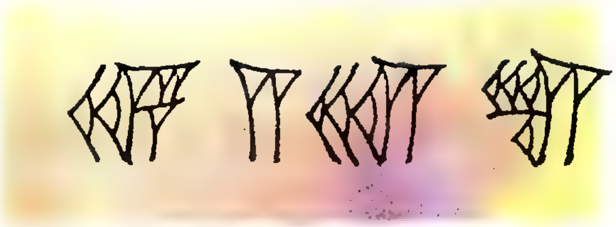
$(1 \cdot 20 + 0 = 20, \quad 19 \cdot 360 + 13 \cdot 20 + 13 = 7113, \; 10 \cdot 360 + 7 = 3607)$.

Основное отличие записи чисел в вавилонской системе счисления и в системе майя от римской нумерации как раз и заключается в «позиционном» принципе этих систем: в то время как у римлян буква I всегда означает единицу, а V — пятерку, независимо от того, где эти буквы стоят, у древних вавилонян и у индейцев майя значение «цифры» существенно зависит от занимаемого ею места, или «позиции». Именно поэтому такие системы записи чисел (к числу которых принадлежит и общераспространенная «десятичная система», созданная в Индии в VIII—IX вв. или немного раньше) называют *позиционными*.

Упражнения

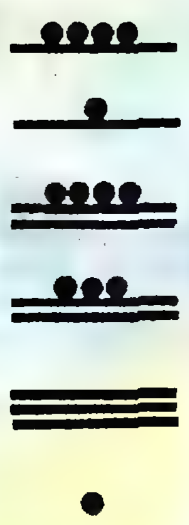
1. Запишите в «полной системе кассира» (где «ключевыми» являются следующие числа: 10 000, 5000, 2500, 1000, 500, 300, 100, 50, 20, 15, 10, 5, 3, 2 и 1, отвечающие выраженным в копейках ценностям всех существующих бумажных денег и всех монет) сумму в 233 руб. 87 коп. Запишите операцию перевода 23 387 коп. в «систему кассира» с помощью «непрерывного деления» (см. с. 16).

2. Прочтите записанное по вавилонской системе число



3. Прочтите записанное по системе майя

число



(Это самое большое число, обнаруженное в памятниках культуры майя.)

Системы счисления с заданным основанием

Так называются системы счисления с базисом

$$q_0=d^0=1,\ q_1=d^1=d,\ q_2=d^2,\ q_3=d^3,\ q_4=d^4,\ldots \qquad (2)$$

где d — любое целое число, большее единицы. Это число называется *основанием* системы счисления.

К числу таких систем принадлежит обычная десятичная система счисления с основанием $d=10$, вавилонская шестидесятеричная ($d=60$) и получившая широкое применение в последнее время в связи с нуждами вычислительной техники двоичная система счисления ($d=2$). В случае произвольного основания d говорят о «d-ичной» системе счисления.

В d-ичной системе счисления запись

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$$

имеет следующий смысл:

$$N=a_nd^n+a_{n-1}d^{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2d^2+a_1d+a_0.$$

Ясно, что каждая цифра в записи числа по d-ичной системе счисления может принимать лишь d значений: 0, или 1, или 2, или 3, ..., или $d-1$. В частности, если $d=10$ и, следовательно, базис системы счисления имеет вид

$$q_0=1,\ q_1=10,\ q_2=100,\ q_3=1000,\ldots$$

мы приходим к общепринятой *десятичной* системе счисления (счет единицами, затем десятками, затем сотнями, тысячами, десятками тысяч и т. д.); в ней все цифры принимают значения, не превосходящие 9.

Самой простой из всех d-ичных систем счисления является, очевидно, *двоичная* система счисления с базисом

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,\ q_3=8,\ q_4=16,\ldots$$

Эта система счисления знает всего две цифры 0 и 1. Вот запись первых 15 натуральных чисел в этой системе:

1=1	6=110	11=1011
2=10	7=111	12=1100
3=11	8=1000	13=1101
4=100	9=1001	14=1110
5=101	10=1010	15=1111.

При использовании этой системы счисления все расчеты становятся довольно длинными, но чрезвычайно простыми. Если бы мы всегда пользовались именно этой системой счисления, то школьникам пришлось бы запоминать лишь следующую «таблицу умножения»:

$$0\cdot0=0,\ 0\cdot1=1\cdot0=0,\ 1\cdot1=1$$

(и «таблицу сложения», сводящуюся к равенству $1+1=10$,— ведь число «10» — это обычная двойка!). Двоичная система счисления находит многочисленные применения в науке и технике; в частности, она лежит в основе устройства современных электронных счетных машин*).

Упражнения

4. Число $N=123\,456$, записанное в обычной (десятичной) системе счисления, перепишите:

а) в 7-ричной системе счисления;

б) в 12-ричной системе счисления (а этой системе счисления для записи чисел используются 12 цифр, например такие: 0, 1, 2, ..., 9, $x=10$, $y=11$);

---

*) Двоичной системе счисления и ее применению уделено много места в рассчитанной на учащихся средней школы книжке С. В. Фомина «Система счисления» (М., Наука, 1968), в ряде пунктов соприкасающейся с содержанием настоящей статьи.

в) в двоичной системе счисления.

5. Запишите в десятичной системе счисления числа, записанные в двоичной системе:

$$P=100\,100,\quad Q=101\,010\,101.$$

6. Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в троичной системе счисления.

Системы счисления с другими базисами

Системы счисления с базисами, не образующими геометрической прогрессии 1, d, d^2, d^3, ..., не имеют столь же широких применений. Но при решении некоторых математических задач они оказываются полезными. Рассмотрим несколько примеров таких систем счисления.

1° Система майя. Выше мы уже говорили о системе счисления майя, базис которой имел вид

$$q_0=1,\ q_1=20,\ q_2=18q_1\,(=18\cdot 20),$$
$$q_3=20q_2\,(=18\cdot 20^2),$$
$$q_4=20q_3\,(=18\cdot 20^3),\ldots$$

Эта система счисления во всем подобна двадцатеричной, отличаясь от нее лишь в одном отношении: в ней вторая с конца цифра в записи $N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$ произвольного числа (которую мы привычно располагаем горизонтально, а не сверху вниз, как майя)

$$a_1<\frac{q_2}{q_1}=\frac{18\cdot 20}{20}=18,$$

в то время как все другие цифры могут принимать 20 значений: 0, 1, 2, ..., 19.

Аналогично будет обстоять дело в системе счисления с базисом, в котором q_{n+1} делится на q_n без остатка для всех $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$:

$$q_0=1,\ q_1=d_0,\ q_2=d_1q_1\,(=d_1d_0)$$
$$q_3=d_2q_2,\ q_4=d_3q_3,\ \ldots,\qquad (3)$$

где $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ — какие угодно целые положительные числа, большие 1, различные или одинаковые. В такой системе счисления в записи числа

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»$$

первая с конца цифра a_0 может принимать d_0 значений 0, 1, 2, ..., d_0-1, следующая цифра a_1 может принимать d_1 значений от 0 до d_1-1, цифра a_2 может принимать значения от 0 до d_2-1 и т. д.

При этом в системе счисления с базисом (3), как и в d-ичной системе счисления (в которую наша система обращается в случае $d_0=d_1=$ $=d_2=\ldots=d$), имеет смысл любая запись

$$N=«a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0»,$$

где $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — натуральные числа такие, что $a_0<d_0$, $a_1<d_1$, $a_2<d_2$ и т. д. В самом деле, легко проверить, что при обращении числа

$$N=a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+\ldots$$
$$\ldots+a_2q_2+a_1q_1+a_0$$

в нашу систему счисления по методу «непрерывного деления» (см. выше с. 16) получаются цифры

$$a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \ldots,\ a_1,\ a_0.$$

То, что такое благополучное положение не является общим законом, мы покажем на примере одной очень простой «системы счисления».

2° «Четная» система счисления. Примем за базис системы счисления все четные числа (и число $q_0=1$):

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=4,\ q_3=6,$$
$$q_4=8,\ q_5=10,\ q_6=12,\ \ldots$$

Так как здесь

$$\frac{q_1}{q_0}=q_1=2$$

и

$$\frac{q_{n+1}}{q_n}=\frac{2(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}<2$$

при всех $n>1$,

то эта система счисления, подобно двоичной, знает всего две «цифры»: 0 и 1. Условимся обозначать числа, записанные в этой «четной» системе счисления красным цветом. Тогда, очевидно,

$$2=10,\ 3=11,\ 4=100,\ 5=101,$$
$$6=1000,\ 7=1001,\ 8=10000,$$
$$9=10001\ \text{и т. д.}$$

И вообще, все числа изображаются либо единицей с тем или иным количеством нулей в конце (четные числа), либо двумя единицами в начале и в конце числа, разделенными известным числом нулей (нечетные числа).

Таким образом, в «четной» системе счисления запись каждого числа имеет вид

$$«a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»,$$

где каждая из цифр a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 может принимать только одно из двух значений: 0 или 1. Однако подавляющее большинство последовательностей нулей и единиц не выражает никаких чисел в «четной» системе счисления, поскольку в ней единица может стоять лишь на первом месте и — иногда — на последнем месте.

И наконец, еще один пример.

3° «Система продавца». Стандартный набор гирь для чашечных весов в магазине обычно включает гири:

10 г, 20 г (2), 50 г, 100 г, 200 г (2), 500 г, 1 кг, 2 кг, (2) и 5 кг.

Продавец пользуется набором гирь, как кассир ассигнациями, имеющимися в кассе. А именно, отвешивая товар, он прежде всего кладет на весы самую тяжелую из не перевешивающих товар гирь, далее он кладет старшую из оставшихся гирь и т. д. Так, например, взвешивая кусок мяса весом в 3 кг 460 г, он использует ряд гирь, показанных на рисунке.

Обобщая эту хорошо известную всем торговым служащим и всем хозяйкам систему «представлений чисел (весов) с помощью заданной системы гирь», мы приходим к системе счисления с базисом

1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,

в которой 3 кг 460 г запишется так 11020101000.

В этой системе счисления в записи

$$N = «a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0»$$

последняя цифра a_0 может равняться лишь 0 или 1 (ибо $q_1 = 2$); предпоследняя цифра a_1 может принимать значения 0, 1 или 2 (так как $2 < q_2/q_1 < 3$), третья от конца цифра a_2 снова может принимать лишь значения 0 и 1 (ибо $q_3/q_2 = 2$); цифра a_3 также может принимать лишь значения 0 и 1, а вот цифра a_4 снова может принимать значения 0, 1 и 2 (ибо $2 < q_5/q_4 < 3$). И вообще, в этой системе счисления все цифры

$$a_1,\ a_4,\ a_7,\ a_{10}, \ldots,\ a_{3k+1}$$

могут принимать значения 0, 1 и 2, а все остальные цифры — лишь значение 0 и 1. (Поэтому продавцу в магазине достаточно иметь две двухкилограммовые гири и только по одной гире в 1 кг и в 5 кг.)

Упражнения

7. Запишите числа X, Y и Z в десятичной системе, если

а) в «четной» системе счисления $X = 1\,000\,000\,001$;

б) в «системе продавца» $Y = 121\,121$;

в) в «системе продавца» $Z = 20\,120$.

8. Опишите всевозможные последовательности цифр

$$a_n,\ a_{n-1}, \ldots,\ a_2,\ a_1,\ a_0,$$

которые могут быть прочитаны как запись некоторого числа в «системе продавца».

9. В некоторой системе счисления с базисом (1) два числа записываются так: $N = 10\,211\,004$, $M = 10\,210\,437$. Можно ли по этим данным узнать, какое число больше?

10. Система гирь, о которой говорили в конце статьи, удобнее при взвешивании на чашечных весах, чем десятичная система, но не является самой экономной в смысле количества гирь. Чтобы убедиться в этом, решите следующие задачи:

а) Какое наименьшее число гирь необходимо, чтобы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 30 на чашечных весах, если гири можно класть только на одну чашку весов? (Вы можете подбирать такие веса гирь, какие хотите.)

б) Тот же вопрос, если разрешается класть гири на обе чашки весов.

в) Какое наименьшее число гирь необходимо в том и другом случае, чтобы взвесить любой груз (в целое число граммов) от 1 г до 1000 г?

11. Докажите, что в троичной системе счисления (т. е. в системе с базисом (2), где $q=3$) любое число N можно представить в виде $N=A-B$, где A, B и $A+B$ записываются только нулями и единицами, причем такое представление для каждого числа единственно. Например:

$$2=10-1,\ 21=101-10,\ 1001=1001-0$$

(все числа записаны в троичной системе).

12. Докажите, что условие «q_{n+1} делится на q_n при всех $n=0, 1, 2, 3, \dots$» является необходимым для того, чтобы в системе счисления с базисом (1) имела смысл любая запись

$$N=«a_na_{n-1}\dots a_1a_0»,$$

где

$$a_0<\frac{q_1}{q_0},\ a_1<\frac{q_2}{q_1},\ a_2<\frac{q_3}{q_2}\ \text{и т. д.}$$

13. Каким условиям должны удовлетворять числа базисной последовательности q_1, q_2, q_3, ..., чтобы в записи чисел встречались только две цифры 0 и 1? Какое еще условие на эти числа q_1, q_2, q_3, ... нужно наложить, чтобы при этом никакие две единицы не шли подряд?

14. Последовательность чисел

$$q_0=1,\ q_1=2,\ q_2=3,$$
$$q_3=5,\ q_4=8,\ q_5=13,\ \dots,$$

где

$$q_{n+1}=q_n+q_{n-1},$$

называется последовательностью Фибоначчи. Докажите, что «Фибоначчиева» система счисления удовлетворяет всем условиям предыдущей задачи. Найдите в этой системе сумму чисел:

а) $\underbrace{100\dots00}_{k}+\underbrace{100\dots00}_{l}$;

б) $\underbrace{10101\dots01}_{2m+1}+1$;

б) $\underbrace{10101\dots01}_{2m+1}+\underbrace{100\dots00}_{2m+1}$.

15. Можно ли разбить все натуральные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... на две такие возрастающие последовательности a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, ..., что $b_k-a_k=k$ для любого $k=1, 2, 3, \dots$?

После некоторых размышлений вы, конечно, догадаетесь, как выбрать такие последовательности (это можно сделать единственным образом)

a	b	[illegible]	[illegible]	b	a	b	[illegible]	[illegible]	b	[illegible]	[illegible]	b	a	b	…
[illegible]	2	[illegible]	[illegible]	5	6	7	[illegible]	[illegible]	10	11	[illegible]	13	[illegible]	15	…

Но уловить закономерность в образовании пар (a_k, b_k) не так-то просто. Как узнать, например, к какой из двух последовательностей — a_k или b_k — относится 100, какому номеру оно соответствует, какое число будет с ним в паре (не выписывая все предыдущие a_k и b_k)?

Оказывается, чтобы сформулировать эту закономерность, нужно записать эти последовательности не в десятичной, а в фибоначчиевой системе счисления. Попробуйте ее обнаружить и доказать.

Нам пишут

Дружба — 91

В Польше, в городе Легница, с 10 по 15 июня 1991 года проходил Международный математический турнир школьников «Дружба — 91». В нем участвовали команды из нескольких городов Польши, а также команды из г. Стара Загора (Болгария), г. Алма-Ата (Казахстан) и г. Ереван (Армения).

Соревнования турнира проходили в два дня. Учащимся 9—10 классов предлагалось по 3 задачи в день, школьники 5—8 классов в первый день соревновались в личном первенстве, а во второй — в командном.

Победители соревнований были награждены дипломами, призами и медалями. Одну из золотых медалей получил Арзик Петросян из Еревана. Командное первенство выиграли школьники из г. Стара Загора. Соревнования прошли очень интересно. Для их участников были организованы увлекательные экскурсии по городам Польши.

Вот некоторые из задач, предлагавшихся на соревнованиях.

1. Решите в целых числах уравнения:

а) $\dfrac{m^2+n^2}{3}=1991$,

б) $\dfrac{m^2+n^2+1}{3}=1991$.

2. В треугольнике ABC стороны AC и BC равны. Покажите, что если точка M — середина отрезка AB, а точка T — произвольная точка внутри отрезка BC, то окружности, вписанные в треугольники ATC, ATM и MTB, касаются одной прямой.

3. Докажите неравенство для любых действительных чисел a и b:

$$(a+b)^4\leqslant 8(a^4+b^4).$$

Азамат Сарсембаев и
Алмас Рымов,
ученики 11 класса РФМШ,
г. Алма-Ата

Задачник „Кванта"

Задачи

M1316 — M1320, Ф1323 — Ф1327

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1316» или «Ф1323». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1317 — M1320 предлагались в этом году на Международной математической олимпиаде.

M1316. Докажите, что арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифры c, состоит

а) при $c \neq 0$ не более чем из 72 чисел,

б) при $c = 0$ не более чем из 80 чисел.

Достигаются ли эти оценки?

С. Тарасов

M1317. Докажите для любого треугольника ABC неравенство

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC.

А. Скопенков

M1318. Дан связный граф с n ребрами. Докажите, что его ребра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух ребер, числа стоящие на этих ребрах не имеют общего делителя большего 1. (Граф — это система точек, некоторые пары которых соединены ребрами. Граф называется связным, если по его ребрам можно из любой вершины пройти в любую другую.)

M1319. Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов MAB, MBC, MCA меньше или равен 30 градусов.

M1320. Для произвольного заданного числа $\alpha > 1$ постройте бесконечную ограниченную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такую, что при любых m, n $(m \neq n)$ выполняется неравенство

$$|\alpha_m - x_n| |m - n|^\alpha \geqslant 1.$$

Ф1323. Тело немного сместили из положения неустойчивого равновесия, и оно поехало. При этом скорость удаления от начальной точки возрастает по закону $v(x) = A\sqrt{x}$, где x — расстояние до начальной точки, A — постоянный коэффициент. Через какое время тело окажется на расстоянии L?

З. Рафаилов

Задачник „Кванта"

Ф1324. В кастрюлю-скороварку налили немного воды, закрыли герметично и поставили на огонь. К тому моменту, когда вся вода испарилась, температура кастрюли оказалась 115 °С, а давление внутри — 3 атмосферы. Какую часть объема вначале занимала вода? Начальная температура 20 °С.

А. Шеронов

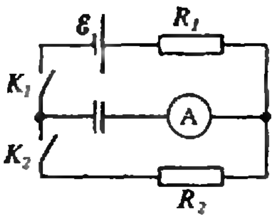


Рис. 1.

Ф1325. В схеме, изображенной на рисунке 1, ключи K_1 и K_2 в начальный момент разомкнуты. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 ток через амперметр составляет $I=2$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Каким станет ток через амперметр сразу после этого? ЭДС батареи $\mathscr{E}=100$В, сопротивления резисторов $R_1=50$ МОм, $R_2=100$ МОм. Конденсатор, батарею, амперметр считайте идеальными.

В. Можаев

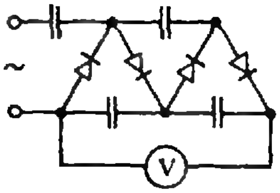


Рис. 2.

Ф1326. Радиолюбителям хорошо известна схема, приведенная на рисунке 2. Считая диоды и конденсаторы идеальными, определите показания высокоомного вольтметра при напряжении сети 220 В. Для чего может понадобиться такая схема?

А. Сашин

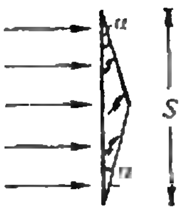


Рис. 3.

Ф1327. При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 3) пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Расстояние между вершинами бипризмы $S=4$ см, показатель преломления материала бипризмы $n=1,4$, преломляющий угол $\alpha=0,001$ рад.

В. Дерябкин

Решения задач

М1253, М1258, М1261, Ф1303 — Ф1307

В этом номере мы вернемся к задачам, пропущенным при публикации решений, в формулировках которых были необходимы поправки (за что мы еще раз приносим извинения читателям), и потому срок присылки решений продлевался.

М1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников — «карта» из нескольких «стран». (Каждые два многоугольника имеют или общую сторону, или общую вершину, или вообще не имеют общих точек.) Будем говорить, что

а) Докажем, что карта, показанная на рисунке 1, не реализуема в пространстве. (Эта карта — правильный треугольник ABC, разбитый на 7 треугольников симметричным образом, так что карта переходит в себя при повороте на 120°; здесь важно, что каждая из стран карты, кроме центральной, лежит в одной половине треугольника ABC.) Предположим, что соответствующая выпуклая шапочка существует (рисунок 2 — ее вид сверху, плоскость треугольника ABC горизонтальна). Поскольку точка K лежит ниже плоскости грани ALB, луч AK проходит ниже луча BL. Анало-

такая карта реализуема в пространстве, если она является проекцией «выпуклой шапочки», т. е. если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — многоугольник M, а проекции остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (и, быть может, стороны многоугольника M).

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники,

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

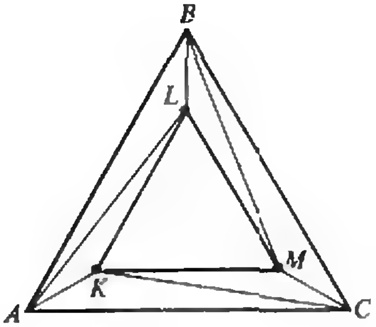


Рис. 1.

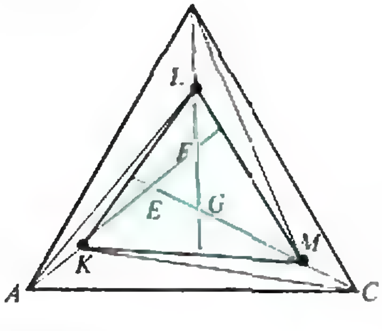


Рис. 2.

гично, луч BL проходит ниже луча CM, а луч CM — ниже луча CL — тем самым, двигаясь по отрезкам EF, FG, GE этих лучей, и переходя в точках E, F, G вниз с одного на другой, мы смогли бы пройти по замкнутому пути и при этом все время опускаться! — Противоречие. Перейдем теперь сразу к пункту в), очевидно, включающему б). Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат, в которой данная плоскость задается уравнением $z=0$.

Разместим вершины многогранной шапочки H, проекцией которой служит данная карта, на поверхности $z=h-x^2-y^2$ (она называется параболоидом вращения); h — достаточно большое число, выбранное так, что вся карта лежит внутри круга, по которому поверхность пересекает плоскость $z=0$.

Отметим для каждой вершины $(x;\ y)$ карты точку $(x;\ y;\ z)$ поверхности, в которую попадает перпендикуляр к плоскости Oxy, восставленный в этой вершине. Легко проверить, что все точки поверхности, соответствующие вершинам одной страны, лежат в одной плоскости. В самом деле, точки поверхности, проецирующиеся в точки окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

как видно из равенств

$$h-z=x^2+y^2=2ax+2by+r^2-a^2-b^2, \qquad (1)$$

лежат в плоскости

$$z=-2ax-2by+h-r^2+a^2+b^2 \qquad (2)$$

(соответствующая кривая на поверхности — эллипс).

Остается доказать выпуклость этой шапочки H. Можно сначала убедиться, что в условиях задачи в) грани шапочки H, соседние с данной, лежат ниже плоскости этой грани, и пользуясь этим доказать выпуклость H в целом...

Мы будем рассуждать несколько иначе. Заметим, что все точки $(x;\ y;\ z)$ поверхности параболоида, лежащие выше плоскости (2), проецируются в точки $(x;\ y)$ внутренности круга $(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant r^2$. Таким образом, достаточно доказать, что в круге, описанном около произвольной страны карты, нет других вершин карты — это будет означать, что все вершины шапочки H лежат не выше плоскости соответствующей грани.

резаемый некоторой стороной PQ страны (розовый сегмент на рисунке 3), покрывается описанным кругом C_1 соседней с ней (по стороне PQ) страны,— если только эта сторона не лежит на краю карты. В самом деле, дуга красного сегмента по условию меньше 180°, а голубая дуга круга C_1 — больше 180°. Таким образом, красный сегмент покрыт этой гранью, а ее вершины лежат на голубой дуге вне сегмента C — и быть может еще сегментами круга C_1 (примыкающими к точкам P и Q). К ним, в свою очередь, применимо то же рассуждение (на рисунке 3 нужно рассмотреть грань, лежащую по другую сторону от хорды PR и ее описанный круг C_2) — очевидно, в этом рассуждении участвуют лишь несколько граней с вершинами P и Q, так что оно закончится через несколько шагов. Таким образом, в описанном круге каждой страны карты нет других ее вершин.

С. Оревков

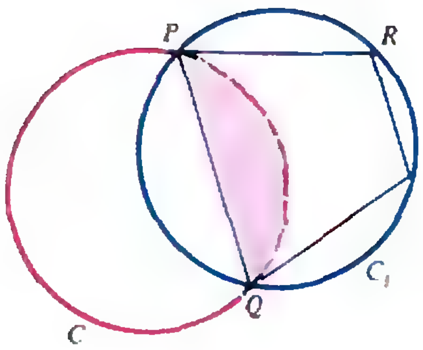


Рис. 3.

М1258. *С $n>3$ числами, расставленными по окружности, разрешается проделывать следующую операцию: заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x+y$, $-y$, $z+y$ (именно в таком порядке).*

а) Можно ли с помощью таких операций получить из набора 20 чисел 1, 2, 3, ...9, 10, −1, −2, −3, ..., −9, −10 набор 10, 9, ..., 3, 2, 1, −10, −9, ...−3, −2, −1?

б) Докажите, что для любого набора из n чисел на окружности, сумма которых положительна, можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

Будем считать, что числа a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n занумерованы по циклу:

$$a_{n+1}=a_1,\quad a_{n+2}=a_2,\ldots$$

Заметим, что указанное в условии преобразование при повторении (на том же месте) возвращает нас к исходной последовательности. Это наводит на мысль, что за ним скрыта какая-то перестановка двух чисел — мы увидим сейчас, что дело обстоит именно так.

Рассмотрим последовательность B частичных сумм:

$$b_1=c+a_1,$$
$$b_2=c+a_1+a_2,$$
$$b_3=c+a_1+a_2+a_3,$$
$$b_3=c+a_1+a_2+a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n=c+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n,$$
$$b_{n+1=c+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}+a_n+a_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и посмотрим, как эти числа изменятся при указанной замене. (Здесь c — произвольно выбранная константа, которая не играет роли: две последовательности, отличающиеся выбором c, мы не различаем — для нас важны лишь разности $b_k-b_{k-1}=a_k$.) Если $x=a_{k-1}$, $y=a_k$, $z=a_{k+1}$ меняются на $x+y$, $-y$, $z+y$, то $b_{k-2}=d$, $b_{k-1}=d+x$, $b_k=d+x+y$, $b_{k+1}=d+x+y+z$ (где d — некоторая константа) меняются на

$$d,\ d+x+y,\ d+x,\ d+x+y+z.$$

Мы видим, что при этом b_k и b_{k-1} просто меняются местами, а остальные b_i не изменяются. Рассмотрим два случая.

1) Сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ равна 0 (как в случае а)). Здесь числа b_k периодически повторяются: $b_{n+1}=b_1$, $b_{n+2}=b_2$ и, продолжая последовательность B частичных сумм, мы получим, что $b_{i+n}=b_i$ при любом целом i. Тем самым, мы можем считать, что числа b_k написаны по окружности и указанные в условии пре-

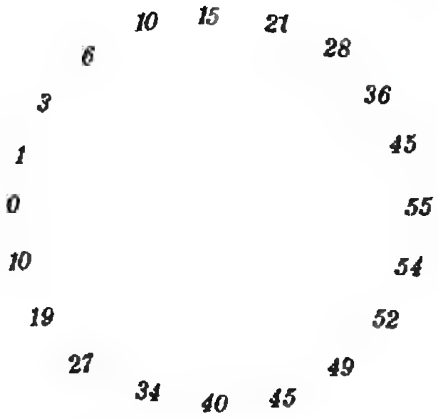


Рис. 1.

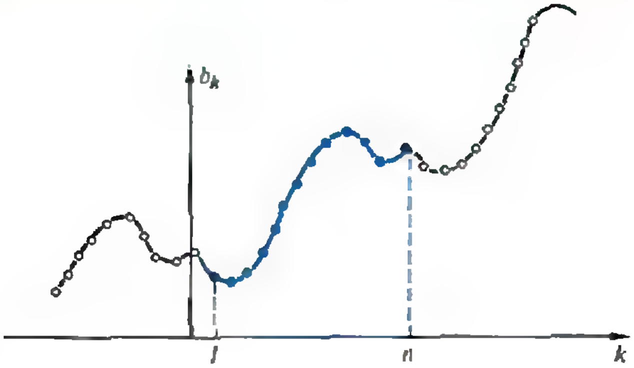


Рис. 2.

образования — просто перестановки двух соседних чисел b_k и b_{k+1}.

Легко проверить, что для расстановок, указанных в пункте а), наборы частичных сумм $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отличаются лишь порядком — и тот и другой состоит из 0 и сумм нескольких чисел подряд в последовательности 1, 2, ..., 10 (на рисунке 1, где они выписаны по кругу, каждое число должно поменяться местами с симметричным относительно горизонтального диаметра). Поскольку любая перестановка может быть очевидно осуществлена заменами соседних чисел, ответ в пункте а) положителен.

2) Сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n=s$ положительна. Теперь $b_{n+1}=c+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n+a_{n+1}=b_1+s$ — тем самым придется считать, что при обходе по циклу к частичной сумме b_i добавляется s: $b_{i+n}=b_i+s$ при любом целом i. Этим условием последовательность b_i, заданная при $1 \leqslant i \leqslant n$, определяется при всех целых i — положительных и отрицательных (типичный график такой последовательности $B=(b_i)$ изображен на рисунке 2). Удобно представить себе, что ось, на которой отмечаются значения индекса i, наматывается на окружность длины n; при этом каждой точке K окружности, $1 \leqslant k \leqslant n$, соответствует не одно число b_k, а целая прогрессия с нулевым членом b_k и разностью s.

Теперь при замене $x=a_{k-1}$, $y=a_k$, $z=a_{k+1}$ на $x+y$, $-y$, $z+y$, числа b_k и b_{k-1} по-прежнему просто меняются местами, причем мы считаем, что это происходит одновременно со всеми членами прогрессии — то есть для всех k, дающих тот же остаток при делении на n.

Докажем существование и единственность такого расположения b_k, при котором набор разностей $b_k-b_{k-1}=$ $=a_k$ будет неотрицательным — для чего необходимо и достаточно, чтобы последовательность $B=(b_k)$ стала неубывающей.

Сразу ясно, что результирующая последовательность определяется единственным образом: для каждого b_k можно указать место, куда оно должно в конце концов попасть — это место определяется количеством тех b_i, с которыми b_k должно поменяться местами, т. е. соотношением

$$(\text{число сдвигов вправо}) - (\text{число сдвигов влево}) =$$
$$= (\text{число } b_i<b_k \text{ таких, что } i>k) -$$
$$- (\text{число } b_i>b_k \text{ таких, что } i<k).$$

Укажем способ прийти к нужной монотонной последовательности B.

Будем переставлять такие пары b_k и b_{k-1}, в которых $b_k<b_{k-1}$ (пока это возможно). При этом общее «количество убываний»

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\text{число } b_i<b_k \text{ таких, что } i>k)+(\text{число } b_i>b_k \text{ таких, что } i<k).$$

на каждом шаге уменьшается. Это количество — целое неотрицательное число. Таким образом, через конечное число таких шагов последовательность B уже нельзя будет улучшить, так что последовательность B, получившаяся в результате, будет монотонной.

О. Ижболдин, Н. Васильев, Д. Фомин

М1261. *На плоскости расположено 1991 красных, черных и желтых точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары точек разного цвета соединены отрезками, причем из каждой точки выходит одинаковое число отрезков. Докажите, что найдется красная точка, которая соединена и с черной, и с желтой точкой.*

Допустим, что каждая красная точка соединена только с желтыми, или только с черными. Перекрасим ее в первом случае в черный цвет, во втором — в желтый. После этого у нас останутся лишь точки двух цветов, причем из каждой выходит одно и то же число k отрезков к точкам противоположного цвета. Но тогда количество желтых и черных точек должно быть одинаковым (в k раз меньше числа отрезков), а их общее число 1991 нечетно. Получили противоречие.

С. Генкин

Ф1303. *На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом $R=10$ м. В центре окружности находится заяц, а волк, как вы, наверное, уже догадались,— на окружности. Заяц начинает двигаться по прямой с постоянной скоростью $v_0=2$ м/с, как показано на рисунке 1. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До*

Пусть заяц в некоторый момент находится в точке A (рис. 2). Тогда волк должен быть в точке B — вершине равнобедренного треугольника OAB. Скорость волка $\vec{V}$ в каждый момент времени направлена по касательной к окружности. Так как смещение волка вдоль оси OX все время равно половине смещения зайца, проекция скорости волка на эту ось постоянна и равна $v_0/2$. Это означает, что вектор ускорения волка a не имеет составляющей по оси OX, т. е. направлен вдоль высоты треугольника OAB. Из простых геометрических соображений получаем

$$V\cos\alpha=v_0/2 \Rightarrow V=v_0/(2\cos\alpha),$$
$$a_n=V^2/R=a\cos\alpha, \Rightarrow$$
$$a=V^2/(R\cos\alpha)=v_0^2/(4R\cos^3\alpha)$$

какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения о лед $\mu=0{,}05$. Волк двигается строго по окружности, не подпрыгивая.

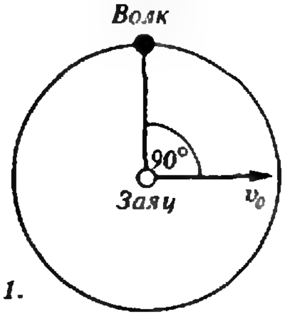


Рис. 1.

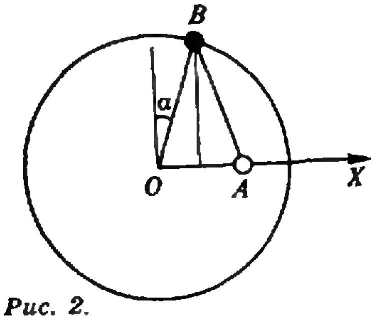


Рис. 2.

(здесь $a_ц$ — центростремительное ускорение волка).

Но ускорение волка

$$a=\frac{F_{тр}}{M}\leqslant\frac{F_{тр\,\max}}{M}=\frac{\mu Mg}{M}=\mu g.$$

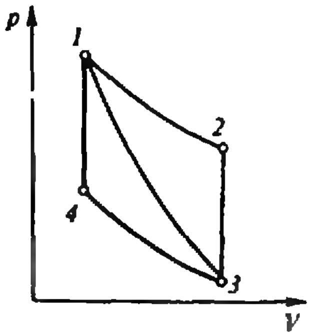
Значит, максимальный угол α_0 можно найти из равенства

$$\frac{v_0^2}{4R\cos^3\alpha}=\mu g\Rightarrow\cos\alpha_0=\sqrt[3]{\frac{v_0^2}{4R\mu g}}\approx0{,}59\Rightarrow\alpha_0\approx54^\circ.$$

Примечание. В опубликованном условии этой задачи есть неточность: вместо слов «начинает двигаться» должно быть «двигается». Если заяц «начинает двигаться», то волк должен мгновенно набрать скорость $v_0/2$, а его ускорение ограничивается величиной $\mu g=0{,}5$ м/с^2. Участники олимпиады решали эту задачу в более корректном варианте.

А. Зильберман

Ф1304. *КПД тепловой машины в цикле 1—2—3—1 (см. рисунок), состоящем из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1, равен η_1. В цикле 1—3—4—1, состоящем из адиабаты 1—3, изотермы 3—4 и изохоры 4—1, КПД равен η_2. Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 1—2—3—4—1? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.*



В цикле *1—2—3—1* тепло потребляется на участке *1—2* и отдается на участке *2—3*. Поэтому

$$\eta_1=\frac{Q_{12}-Q_{23}}{Q_{12}},$$

где Q_{23} — количество теплоты, отданное газом на участке *2—3*.

В цикле *1—3—4—1* тепло потребляется на участке *4—1* и отдается на участке *3—4*. Аналогично предыдущему равенству,

$$\eta_2=\frac{Q_{41}-Q_{34}}{Q_{41}}.$$

Легко видеть, что Q_{23} отдаваемое равно Q_{41} потребляемому — и в том, и в другом случае все количество теплоты соответствует изменению внутренней энергии, а перепады температур одинаковы: $T_2-T_3=T_1-T_4$. Итак,

$$Q_{23}=Q_{41}=Q.$$

Теперь можно записать выражение для КПД «большого» цикла:

$$\eta=\frac{A}{Q_{потр}}=\frac{A_{12}-A_{34}}{Q_{12}+Q_{41}}=\frac{Q_{12}-Q_{34}}{Q_{12}+Q_{41}}.$$

Количества теплоты Q_{12} и Q_{34} просто выражаются через Q:

$$Q_{12} = \frac{Q_{23}}{1-\eta_1} = \frac{Q}{1-\eta_1},$$

$$Q_{34} = Q_{41}(1-\eta_2) = Q(1-\eta_2).$$

Окончательно получаем

$$\eta = \frac{Q/(1-\eta_1) - Q(1-\eta_2)}{Q/(1-\eta_1)+Q} = \frac{\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2}{2-\eta_1}.$$

А. Шеронов

Ф1305. *В схеме на рисунке 1 напряжение батарейки $U_0 = 10$ В, емкость конденсатора $C = 1$ мкФ, сопротивление гальванометра $R = 1$ кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до 1000 мкФ? При такой частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.*

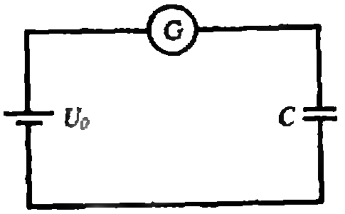


Рис. 1.

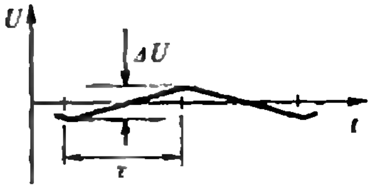


Рис. 2.

При заданных значениях R и C за время $\tau = 0{,}1$ с конденсатор каждый раз успевает практически полностью перезарядиться — его заряд в конце каждого интервала равен по модулю

$$q = CU_0.$$

Это значит, что за время τ по гальванометру протекает заряд

$$q_G = q - (-q) = 2q = 2CU_0,$$

и средний ток через гальванометр (именно его и показывает магнитоэлектрический прибор) оказывается равным

$$I_{\text{ср}} = \frac{q_G}{\tau} = \frac{2CU_0}{\tau} = 2\cdot10^{-4}\,\text{А}.$$

При большой величине емкости конденсатора $C' = 1000$ мкФ процесс выглядит по-другому — за время τ напряжение U на конденсаторе изменяется, но только очень незначительно:

$$\Delta U \approx \frac{I\tau}{C'} = \frac{U_0\tau}{C'R} = 1\,\text{В} \ll U_0.$$

Ясно, что напряжение на конденсаторе колеблется около нуля и изменяется практически по линейному закону (рис. 2). Следовательно, средний ток в этом случае равен

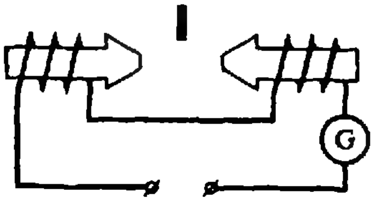
$$I'_{\text{ср}} = I = \frac{U_0}{R} = 10^{-2}\,\text{А},$$

а отношение токов —

$$\frac{I'_{\text{ср}}}{I_{\text{ср}}} = \frac{10^{-2}\,\text{А}}{2\cdot10^{-4}\,\text{А}} = 50.$$

З. Рафаилов

Ф1306. *Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита практически без ускорения (см. рисунок). В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью v при токе в обмотке $I_1=0{,}41$ А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в обмотке $I_2=1{,}39$ А. При каком токе диск из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого металла сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе $I_3=0{,}29$ А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из прилагаемой таблицы.*



Таблица

Материал	ρ, Ом · мм²/м при 20 °C	α, град⁻¹ при 20 °C	Плотность, г/см³	Температура плавления, °C
Алюминий	0,032	0,038	2,6—2,8	660
Бронза	0,12	0,004	7,4—8,8	1000
Вольфрам	0,055	0,0051	19,0	3387
Золото	0,024	0,0039	19,3	1063
Кобальт	0,097	0,0033	8,8	1490
Латунь	0,06—0,09	0,001—0,007	8,4—8,7	900
Медь	0,017	0,0043	8,6—9,0	1083
Молибден	0,048	0,0050	10,2	2622
Никель	0,11	0,0027	8,8	1452
Олово	0,11	0,0044	7,3	232
Платина	0,09	0,0038	21,4	1773
Свинец	0,21	0,0042	11,3	327
Серебро	0,016	0,0040	10,5	961
Сталь	0,199	0,0016—0,0042	7,5—7,9	1500
Хром	0,027	0,0042	6,7	1700
Цинк	0,060	0,0039	6,8—7,1	419

Тормозящая сила, приводящая к падению диска без ускорения, возникает при взаимодействии индукционных токов Фуко в диске с токами в обмотке электромагнита. При одинаковых размерах всех дисков можно считать, что эта сила

$$F\sim I_{\text{инд}}I_{\text{обм}}\sim\frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{\rho}I_{\text{обм}}.$$

Пренебрегая искажениями полного поля за счет токов Фуко, для ЭДС индукции можно записать

$$\mathcal{E}_{\text{инд}}\sim\frac{\Delta B}{\Delta h}v\sim I_{\text{обм}}v,$$

где $\Delta B/\Delta h$ — скорость изменения индукции магнитного поля с высотой.

Итак,

$$F\sim\frac{I_{\text{обм}}v}{\rho}I_{\text{обм}}=\frac{I^2_{\text{обм}}v}{\rho}.$$

Для установившегося движения справедливо равенство

$$F-mg=0.$$

Отсюда, введя плотность материала d, получаем соотношение

$$\frac{I^2_{\text{обм}}v}{\rho d}=\text{const}$$

(если для всех материалов использовать одинаковые единицы измерения одинаковых величин, то о размерностях можно не беспокоиться). Данные задачи позволяют проверить справедливость этого соотношения:

для серебряного диска $\dfrac{I^2_{\text{обм}}v}{\rho d}=1{,}006,$

$$\text{для платинового диска } \frac{I^2_{\text{обм}} v}{\rho d} = 1{,}003,$$

т. е. при точности данных из таблицы совпадение вполне удовлетворительное (напомним, что все диски двигаются с одинаковыми скоростями).

Таким образом, находим, что диск из цинка будет падать со скоростью v при токе в обмотке

$$I_{\text{обм}} = 0{,}64 - 0{,}65 \text{ А}.$$

Опять же с помощью таблицы определяем, что четвертый диск сделан из алюминия — только для него значение выражения $I^2_{\text{обм}}/(\rho d)$ лежит в пределах 0,9—1,011.

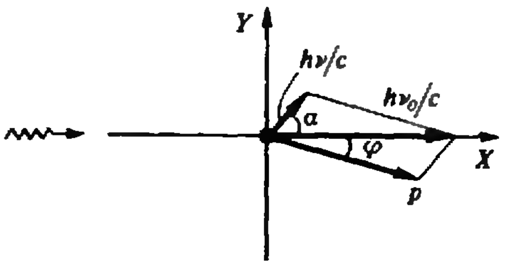
С. Козел

Ф1307. *Квант электромагнитного излучения испытывает рассеяние на покоящемся электроне (так называемый Комптон-эффект). При этом рассеянный квант изменяет частоту, а электрон получает импульс отдачи p. Определите, под какими углами по отношению к направлению падающего излучения может двигаться электрон с данным импульсом. Считайте, что скорость электрона существенно меньше, чем скорость света.*

Запишем для системы «квант — электрон» выражения закона сохранения энергии:

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{p^2}{2m}, \qquad (1)$$

где ν_0 — частота кванта до рассеяния, ν — частота после рассеяния, m — масса электрона, и импульса, точнее — его проекций на оси координат X и Y (см. рисунок):



$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\alpha + p\cos\varphi, \qquad (2)$$

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\alpha - p\sin\varphi, \qquad (3)$$

где c — скорость света.

Исключим из уравнений (2) и (3) угол α. Для этого возведем их в квадрат:

$$\left(\frac{h\nu_0}{c} - p\cos\varphi\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\cos\alpha\right)^2,$$

$$(p\sin\varphi)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\sin\alpha\right)^2$$

и сложим:

$$(h\nu_0)^2 - 2pch\nu_0\cos\varphi + (pc)^2 = (h\nu)^2. \qquad (4)$$

Возведем левую и правую части уравнения (1) в квадрат:

$$(h\nu_0)^2 = (h\nu)^2 + 2h\nu\frac{p^2}{2m} + \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2. \qquad (5)$$

Из уравнений (4) и (5) с учетом равенства $h\nu_0 = h\nu + p^2/(2m)$ получаем

$$h\nu = \frac{(p^2/(2m))^2 - 2pc(p^2/(2m))\cos\varphi + (pc)^2}{2(pc\cos\varphi - p^2/(2m))}.$$

Поскольку $h\nu$ всегда больше нуля, находим окончательно

$$pc\cos\varphi - \frac{p^2}{2m} > 0 \Rightarrow \cos\varphi > \frac{p}{2mc}.$$

Ю. Самарский

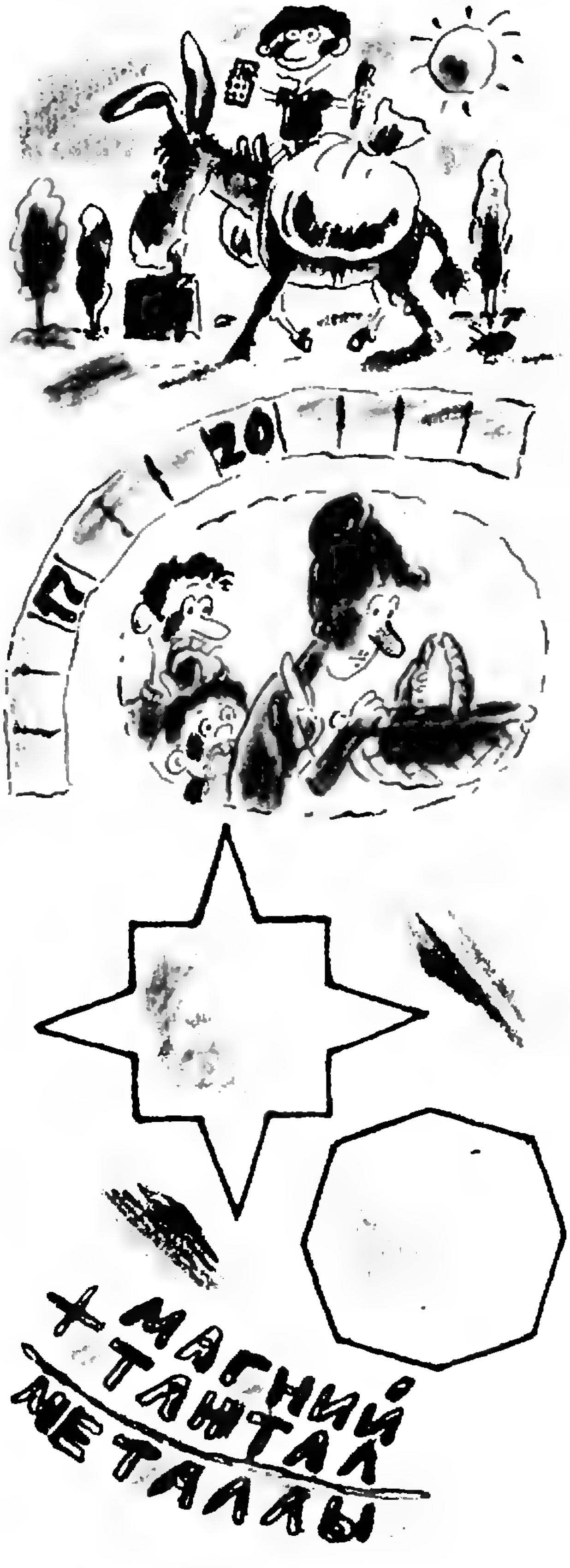
Логическая задача,
с которой мы хотим вас познакомить,
взята из книги Д. Бизама и Я. Герцега
«Многоцветная логика»
(М.: Мир, 1978).

Статью о логических задачах
читайте в одном из первых номеров
нашего журнала в 1992 году.

Странник в пустыне

Странник шел из Багдада в Бухару. За одинм селением путь раздваивался: одна дорога вела в Бухару, а другая — в пустыню. По какой из дорог ему нужно идти, знали лишь местные жители. Но о них шла молва, что одни из них всегда говорят только правду, а другие — только ложь, причем и те и другие славятся своей неразговорчивостью и на все вопросы отвечают лишь «да» и «нет». И все-таки странник сумел узнать, какая из двух дорог ведет в Бухару. Для этого ему понадобилось задать лишь один вопрос первому встречному жителю селения. Что это за вопрос?

„Квант" для младших школьников



Задачи

1. Акшин возвращался в кишлак из города с покупками для одноклассников. Он истратил ровно 500 рублей и купил при этом ровно 100 предметов: портфели, авторучки и микрокалькуляторы. Сколько было куплено авторучек, если авторучка стоит 1 рубль, портфель — 10 рублей, а микрокалькулятор — 50 рублей?

2. Расставьте числа в пустых клетках таблицы так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была одна и та же, а сумма всех чисел равнялась 200.

3. Соседка принесла для хозяйки и двух ее сыновей корзину яблок. Когда пришел из школы младший сын, он взял $^1/_3$ яблок, одно яблоко вернул в корзину для матери и пошел на занятия кружка. Потом вернулся из школы старший сын. Не зная о поступке брата, он также взял $^1/_3$ оставшихся яблок, а одно яблоко положил в корзину для матери и отправился на тренировку. Когда хозяйка вернулась домой с работы, то она не смогла разделить яблоки в корзине на три равные части, причем их было меньше десяти. Сколько яблок первоначально было в корзине?

4. Разрежьте одну из фигур на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить вторую фигуру.

5. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.

Эти задачи нам предложили ученик 11 класса из Баку А. Керимов, Н. Антонович, С. Ляшенко, восьмиклассник из Москвы С. Костин и С. Баженов.

ДИАГРАММЫ ЭЙЛЕРА — ВЕННА

Кандидат педагогических наук
В. МАДЕР

Свой рассказ я начну с конкретной задачи.

Задача. В молодежном лагере в воскресенье должны были состояться соревнования по легкой атлетике. Накануне этого события неожиданно пришло письмо из другого лагеря:

«Здравствуйте, дорогие ребята! Мы хотим принять участие в ваших соревнованиях. Наша команда состоит из волейболистов, бегунов, прыгунов и метателей. Все бегуны являются прыгунами, а все прыгуны являются или метателями, или бегунами. Но среди тех метателей, которые являются еще и прыгунами, нет бегунов. Метателей у нас в два раза меньше, чем прыгунов, и на два меньше, чем бегунов. Бегуны составляют третью часть всей команды, а волейболистов в два раза больше, чем тех ребят, которые являются одновременно и прыгунами и метателями.

Мы приедем в субботу вечером. Приготовьте, пожалуйста, ночлег для всей нашей команды.— Ваши друзья.»

Известие о прибытии гостей было встречено с восторгом. Затруднение возникло только с их размещением на ночлег. Нужно было знать число ожидаемых гостей, но именно об этом в письме ничего не было сказано. Тем не менее выяснить это все же удалось. Сколько гостей должно было приехать?

Решение. Рассмотрим рисунок 1. В нем большой круг изображает множество всех гостей. Круги *Б*, *П*, *М* изображают соответственно множества бегунов, прыгунов и метателей. Нетрудно понять и смысл отдельных частей этих кругов. Так, например, общая часть двух кругов *Б* и *П* изображает множество тех ребят, которые являются и бегунами, и прыгунами. Среди гостей были еще и волейболисты, но (как следует из письма) ни один из волейболистов не был ни бегуном, ни прыгуном, ни метателем. Значит, вся область вне кругов *Б*, *П*, *М* приходится на долю волейболистов. Поэтому эта область обозначена буквой *В*.

Известно, что все бегуны были прыгунами. Это значит, что вся область *Б* должна находиться внутри *П*. Чтобы это условие было выполнено, надо заштриховать ту часть *Б*, которая выходит за пределы *П*,— отмечая этим, что заштрихованная часть является пустым множеством (что этой части нет).

Известно также, что все прыгуны являются или метателями, или бегунами. Значит, круг *П* целиком должен находиться внутри области, состоящей из *Б* и *М*. Поэтому ту часть *П*, которая выходит за пределы этой области, следует заштриховать.

Известно еще, что среди тех метателей, которые были еще и прыгунами, нет бегунов. Значит, из общей части кругов *М* и *П* надо исключить ту частичку, которая находится внутри *Б*,— ее тоже надо заштриховать.

В незаштрихованных ячейках запишем буквы x, y, z, t, которые будут обозначать число ребят, занимающихся соответствующими видами спорта.

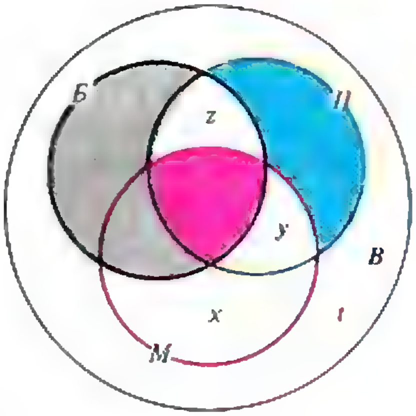


Рис. 1.

Число метателей в два раза меньше числа прыгунов. Значит, $2(x+y)=y+z$. Число метателей на два меньше числа бегунов. Значит, $x+y+2=z$. Бегуны составляют $^1/_3$ всей команды. Поэтому $3z=x+y+z+t$. Число волейболистов в два раза больше числа ребят, которые одновременно являются прыгунами и метателями. Значит, $t=2y$.

Получилась система четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Решив эту систему, найдем: $x=2$, $y=6$, $z=10$, $t=12$. Итак, число всех гостей равно $2+6+10+12=30$.

Ответ: на соревнования должна была приехать команда из 30 человек.

При решении приведенной задачи рисунок 1 играл существенную роль. В нем была удачно использована идея изображения множеств с помощью кругов. Эта идея полезна и при решении целого ряда других задач. Леонард Эйлер, например, широко пользовался такими рисунками, и в его честь этот метод был назван «методом кругов Эйлера». Этим методом математики пользовались и до Эйлера. Им пользовался, например, выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с такими кругами. Но, как уже говорилось, достаточно основательно развил этот метод только швейцарский математик Леонард Эйлер (1707—1783). Он долгие годы работал в Петербургской Академии наук. К этому времени относятся его знаменитые «Письма к немецкой принцессе», написанные в период с 1761 по 1768 годы. В некоторых из этих писем Эйлер как раз и рассказывает о своем методе. После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781—1848), только, в отличие от Эйлера, он рисовал не круглые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шрёдер (1841—1902) в книге «Алгебра логики». Но особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843—1923), подробно изложившего их в книге «Символическая логика», изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы называют иногда «диаграммами Венна».

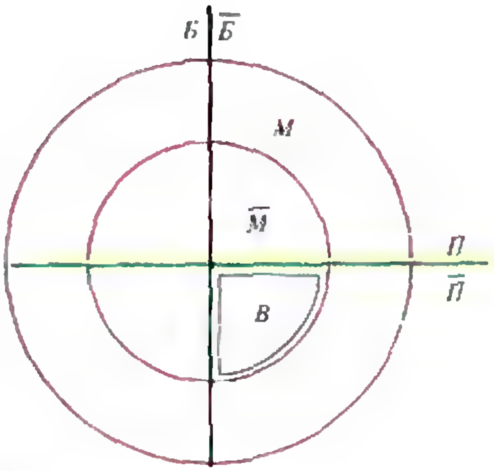


Рис. 2.

Диаграммы могут быть построены по-разному. Так, например, при решении рассмотренной задачи можно было бы вместо рисунка 1 проиллюстрировать условия этой же задачи с помощью рисунка 2. Здесь область *Б* (расположенная слева от вертикальной черты) обозначает бегунов; а область $\overline{Б}$ (справа от вертикальной черты) обозначает множество небегунов. Точно так же, выше горизонтальной черты расположено множество *П* прыгунов, а ниже черты — множество $\overline{П}$ непрыгунов. Маленький круг $\overline{М}$ обозначает множество неметателей, а кольцеобразная область *М* обозначает метателей. Ячейка *В* является пересечением (общей частью) множеств $\overline{Б}$, $\overline{П}$, $\overline{М}$. По условию известно, что те ребята, которые не были ни бегунами, ни прыгунами, ни метателями, были волейболистами. Именно поэтому эту ячейку мы и обозначили буквой *В*.

Упражнение. Попробуйте решить рассмотренную нами задачу с помощью рисунка 2.

Рассмотренная задача сводится к решению четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Но иногда встречаются и такие задачи, когда число уравнений меньше числа неизвестных. Получается неопределенная система уравнений, которая, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений. Тем не менее, если учесть некоторые дополнительные условия, то оказывается, что и в этом случае задача может иметь одно единственное решение. Задачу такого типа мы сейчас и рассмотрим.

Задача. При школе был приусадебный участок с теплицей. В субботу группа ребят работала на этом участке. Они ремонтировали теплицу и поливали огурцы, помидоры и капусту. По окончании работы потребовались сведения о числе работавших, но мнения ребят разошлись и узнать ничего не удалось.

Было установлено только следующее. Ребята, ремонтировавшие теплицу, не занимались поливкой, а ребята, поливавшие овощи, не участвовали в ремонте теплицы. Никто из ребят не поливал одновременно огурцы и капусту. Некоторые ребята поливали помидоры и огурцы, некоторые поливали помидоры и капусту, но не было таких ребят, которые поливали бы только помидоры. Огурцы поливало 7 человек, а помидоры — 4. Число ребят, ремонтировавших теплицу, было на 2 меньше числа ребят, поливавших только огурцы. Удвоенное число ребят, поливавших только капусту, было на 1 больше утроенного числа тех ребят, которые поливали только огурцы.

Этих сведений оказалось достаточно, чтобы установить число работавших. Сколько же ребят было в субботу на приусадебном участке?

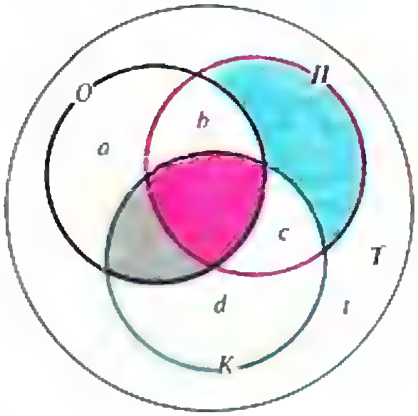


Рис. 3.

Решение. Нарисуем соответствующую диаграмму Эйлера — Венна (рис. 3). Круги *О*, *П*, *К* изображают множества ребят, поливавших соответственно огурцы, помидоры и капусту. Теплицу ремонтировали те и только те ребята, которые не были заняты на поливке овощей. Значит, область, расположенная вне кругов *О*, *П*, *К*, изображает множество ребят, ремонтировавших теплицу. Эта область обозначена буквой *Т*.

Никто из ребят не поливал одновременно огурцы и капусту. Поэтому общую часть кругов *О* и *К* надо заштриховать. Никто из ребят не поливал только помидоры. Значит, ту часть круга *П*, которая находится вне кругов *О* и *К*, тоже нужно заштриховать. Численные значения незаштрихованных ячеек обозначим буквами a, b, c, d, t. Буква a, например, обозначает число ребят, поливавших только огурцы; буква b обозначает число ребят, поливавших и огурцы, и помидоры. Смысл остальных букв тоже ясен из рисунка. Теперь, по известным данным, можно записать уравнения:

$$\begin{cases} a+b=7, \\ b+c=4, \\ a=t+2, \\ 2d=3a+1. \end{cases}$$

Получилась неопределенная система четырех уравнений с пятью неизвестными. Чтобы решить эту систему, примем a за параметр, которому мы сами можем приписать какое-нибудь конкретное значение. Тогда останется четыре неизвестных. Решив систему относительно этих неизвестных, мы получим следующие соотношения:

$$b=7-a,\ c=a-3,\ d=(3a+1)/2,$$
$$t=a-2.$$

Теперь, казалось бы, придав параметру a какое-нибудь произвольное значение, мы сможем вычислить и соответствующие значения неизвестных b, c, d, t. А так как выбор значения параметра a как будто совершенно произволен, то мы получим бесконечное множество решений. На самом же деле это не так. Дело в том, что неизвестные должны быть целыми неотрицательными числами. А это значит, что должны выполняться следующие дополнительные условия: $7-a\geqslant 0$, $a-3\geqslant 0$, $3a+1\geqslant 0$, $a-2\geqslant 0$, $(3a+1)/2$ — целое число. Последнее условие означает, что $3a+1$ должно быть четным числом, а это возможно только тогда, когда a — нечетное число.

Решив систему приведенных выше неравенств, получим

$$3\leqslant a\leqslant 7;\ a \text{ — нечетное число.}$$

Значит, для параметра a получилось три значения: 3, 5, 7. Но при $a=3$ получим $c=0$, а при $a=7$ получим $b=0$, что невозможно, так как c и b обозначают число ребят, поливавших кроме помидор еще капусту или огурцы, а по условию эти множества не могут быть пустыми. Следовательно, для параметра a остается одно-единственное значение $a=5$. Остальные неизвестные примут тогда следующие значения:

$$b=2,\ c=2,\ d=8,\ t=3.$$

Таким образом, общее число ребят, работавших на участке, равно

$$5+2+2+8+3=20.$$

Ответ: на участке в субботу работало 20 ребят.

Упражнение. Постройте для данной задачи диаграмму Эйлера — Венна, аналогичную той, которая изображена на рисунке 2.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующие задачи.

1. Мальчик рассказал своим друзьям, что бабушка прислала ему посылку с яблоками и грушами. Некоторые из этих плодов были большими, остальные — маленькими. По цвету плоды тоже различались: часто плодов была желтого цвета, остальные — зеленого. Среди плодов не было ни маленьких груш, ни маленьких зеленых яблок. Яблок было 25, а груш — 17. Больших плодов было 32. Желтых плодов было 28. Зеленых яблок было на 2 больше, чем зеленых груш. Самыми вкусными оказались большие желтые яблоки. Ребята заинтересовались: сколько же было таких яблок? Но мальчик им этого не сказал. И тогда они сами вычислили число этих яблок. Какой у них получился ответ?

2. Комплексная бригада строителей состояла из каменщиков, печников, штукатуров и разнорабочих (т. е. подсобных рабочих без квалификации). Все печники были каменщиками, а среди тех каменщиков, которые были еще и печниками, не было ни одного, который не был бы еще и штукатуром. Все каменщики, которые были еще и штукатурами, владели к тому же еще и специальностью печника. Были и такие штукатуры, которые никакими другими специальностями не владели. Кроме того, оказалось, что

1) рабочих, владевших только одной специальностью, было столько же, сколько было разнорабочих;

2) сумма удвоенного числа тех рабочих, которые были только штукатурами, и утроенного числа тех рабочих, которые были только каменщиками, равна 15;

3) число рабочих, владевших только специальностью каменщика, было в 5 раз меньше суммы числа 9 и утроенного числа тех рабочих, которые владели всеми тремя специальностями.

Сколько рабочих было в этой бригаде?

3. Каждый член туристической секции принял участие хотя бы в одном из запланированных походов, а таких походов было три: к озеру, к водопаду и в горы. Из ребят, побывавших у озера, никто не пошел в поход к водопаду. Поэтому к водопаду пошли только 8 человек. Все ребята, отправившиеся в горы, приняли участие по крайней мере еще в одном походе. Число ребят, побывавших и на озере, и в горах, в сумме с числом ребят, побывавших только на водопаде, было на 1 больше числа тех ребят, которые были только на озере. Сумма утроенного числа ребят, побывавших только на озере, и удовенного числа ребят, побывавших и на озере, и в горах, оказалась равной 19.

Сколько ребят было в этой туристической секции?

4. Две девочки — Лена и Валя — принесли по букету цветов из гвоздик и роз. Некоторые цветы были белые, остальные — ярко-красные. Среди цветов, принесенных Леной, не было белых роз, а среди цветов, принесенных Валей, не было красных роз. Ни Лена, ни Валя не принесли белых гвоздик. Кроме того, выяснилось следующее:

1) Валя принесла столько же цветов, сколько Лена;

2) сумма удвоенного числа всех белых роз и утроенного числа всех красных роз равна 18;

3) пятикратное число роз, принесенных Леной, было больше удвоенного числа красных гвоздик, принесенных ею же, ровно на 10.

Сколько и каких цветов принесла каждая из девочек?

5. Во время похода ребята устроили привал на берегу реки. Некоторые из них сразу же отправились в лес собирать грибы и ягоды. Остальные загорали на поляне, купались в реке или рыбачили. Все ребята, купавшиеся в реке, при этом и загорали на поляне, но среди загоравших были и такие, которые в воду не полезли. Рыбаки же устроились в тени и не загорали. Всего загорало 7 человек. Сумма удвоенного числа рыбаков и пятикратного числа тех ребят, которые загорали, но не купались, была равна 18. В лес ушло столько же ребят, сколько было рыбаков.

Сколько ребят участвовало в этом походе?

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 марта 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

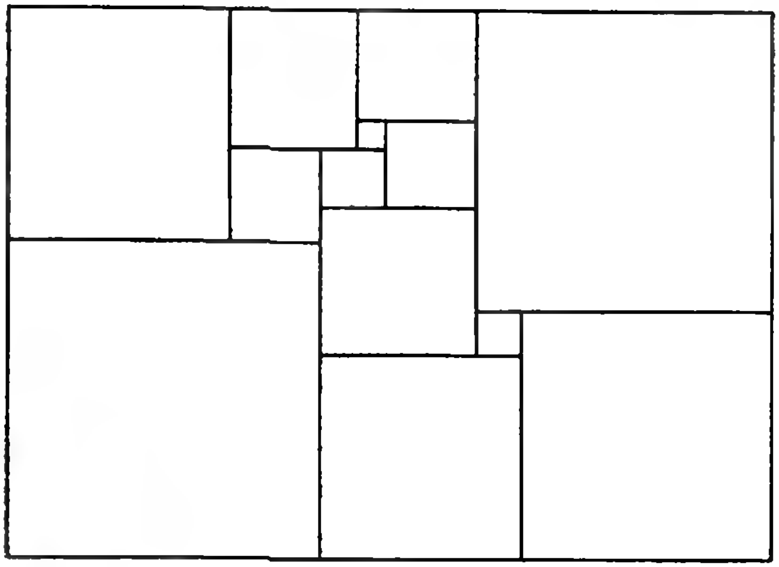
Задачи

10. 50 гангстеров стреляют одновременно. Каждый стреляет в ближайшего к нему гангстера (или в одного из ближайших, если несколько человек находятся на одинаковом расстоянии от него) и убивает его наповал. Найдите наименьшее возможное количество убитых. (Гангстеры — различные точки плоскости.)

Н. Васильев

11. Найдите наименьшие значения для сторон прямоугольника, если стороны всех квадратов, на которые он разбит, являются целыми числами.

С. Афтенюк



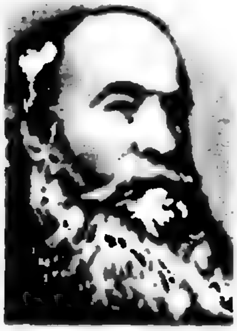
12. Замените буквы цифрами так, чтобы соотношение оказалось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):

ХРУСТ · ГРОХОТ=
=РРРРРРРРРР

В. Кибирев

X
ХРУСТ
ГРОХОТ
РРРРРРРРРР

Калейдоскоп „Кванта"

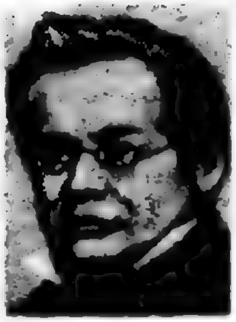


...во всех случаях, когда электрический ток получался с помощью магнитоэлектрической машины, количество теплоты, развиваемой током, находилось в постоянном отношении к силе, необходимой для вращения этой машины...

Дж. Джоуль

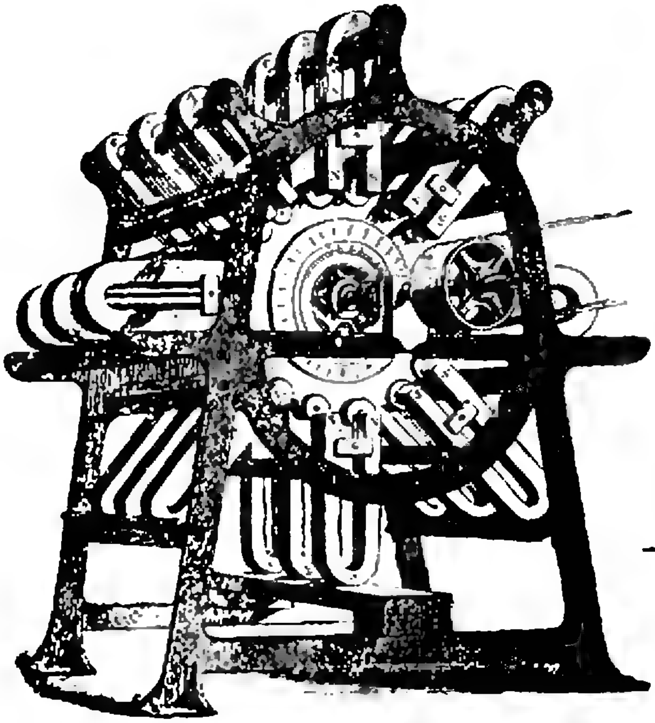
1. Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально сопротивлению проволоки.
2. Нагревание проволоки гальваническим током пропорционально квадрату служащего для нагревания тока.

Э. Х. Ленц



А так ли хорошо знаком вам

закон Джоуля — Ленца?

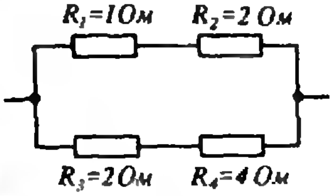


Этот закон о выделении тепла в проводнике при прохождении электрического тока — пример независимого открытия двумя учеными, открытия «с двойным гражданством», нередкого в истории науки. Побуждало же ученых стремление найти связи и количественные соотношения между «силами различной природы», приводящими к выделению тепла. И хотя закон Джоуля — Ленца не носит столь обобщающего характера, как фундаментальный закон сохранения энергии, сфера его применения не уменьшается до сих пор. Без него не обойтись при расчете электрических цепей и электронных схем, проектировании и эксплуатации осветительных и электронагревательных приборов. Предоставляем вам возможность убедиться в этом самим в очередном выпуске «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. В цепь включены параллельно медная и железная проволоки равной длины и сечения. В какой из них выделится большее количество теплоты за одно и то же время?

2. Две электрические лампы мощностью 25 и 200 Вт включены последовательно в электрическую цепь. Какая из ламп будет гореть ярче?



3. В каком из резисторов, показанных на схеме, выделяется наибольшее количество теплоты?

4. Почему электрические лампы чаще перегорают в момент замыкания цепи и очень редко — в момент размыкания?

5. Как изменится теплоотдача электроплитки, если укоротить ее спираль?

6. Как переделать электроплитку, рассчитанную на напряжение 220В, на 110 В, при этом не меняя и не укорачивая спираль?

7. По стальной проволоке пропускают ток такой силы, что она слегка накаляется. Почему при охлаждении одной части проволоки (например, водой) другая ее часть накаляется сильнее? Напряжение на концах проволоки поддерживается неизменным.

8. Половину спирали от электроплитки растянули, и спираль включили в сеть. Будут ли отличаться показания вольтметра,

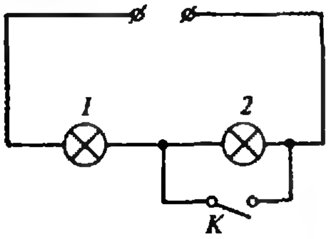
измеряющего напряжение на растянутой части спирали, от показаний на нерастянутой части?

9. Почему при включении в сеть электроутюга накал ламп в квартире сразу же заметно падает, но вскоре возрастает, достигая примерно прежнего уровня?

10. На что расходуется электроэнергия, потребляемая домашним холодильником?

11. Два потребителя подключаются к электрической батарее: один раз последовательно, другой — параллельно. В каком случае КПД будет больше?

12. На схеме изображена цепь, состоящая из лампы *1* мощностью 40 Вт, ключа *К* и лампочки *2* от карманного фонаря. Цепь включили в городскую сеть при замкнутом ключе *К*, затем ключ разомкнули — лампы горели нормально. Когда же в другой раз включение произошло при разомкнутом ключе, лампочка *2* сразу перегорела. Почему?



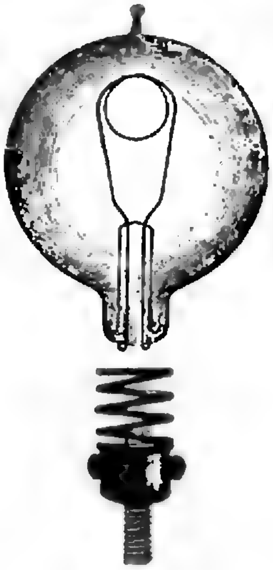
13. Для постепенного увеличения силы тока в электродвигателе при его пуске последовательно с ним включают кусок полупроводника. Почему именно полупроводника?

14. К середине проволоки, натянутой между двумя опорами, подвешивается груз. Отчего при подключении концов проволоки к источнику напряжения груз начинает колебаться?

15. Как будет изменяться накал лампы, если в соленоид, подключенный последовательно с лампой к источнику постоянного тока, медленно вводить железный сердечник?

Микроопыт

Найдите сопротивление электрического утюга в рабочем режиме, если сведения о его мощности отсутствуют, с помощью электросчетчика и транзисторного радиоприемника.



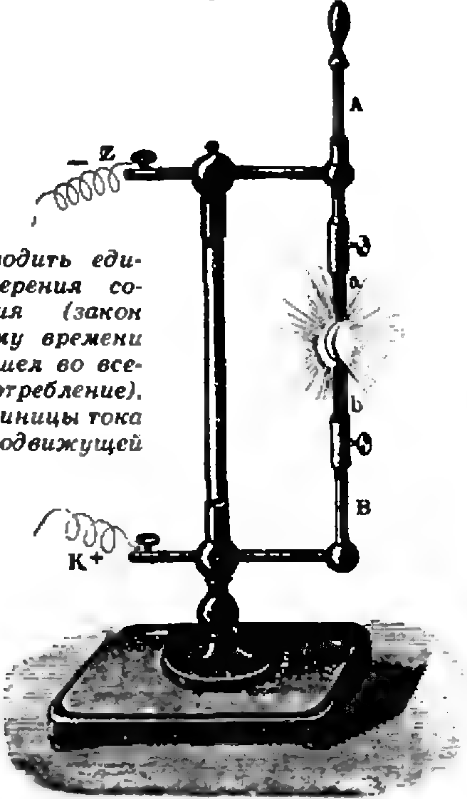
Любопытно, что...

...до открытия закона, принесшего ему мировую известность, Джоуль занимался определением эффективности электрических машин. «Я не сомневаюсь,— утверждал он,— что электромагнетизм в конце концов заменит собою пар для приведения в движение машин». Однако очень скоро он пришел к пессимистическому выводу о превосходстве паровых машин над электрическими.

...Ленцу, точность и обстоятельность опытов которого обеспечили признание нового закона, пришлось самому вводить единицу измерения сопротивления (закон Ома к тому времени еще не вошел во всеобщее употребление), а также единицы тока и электродвижущей силы.

...энергия, «расходуемая» всеми молниями за год, по оценке, сделанной на основе закона Джоуля — Ленца, более чем втрое превышает мировую годичную выработку электроэнергии.

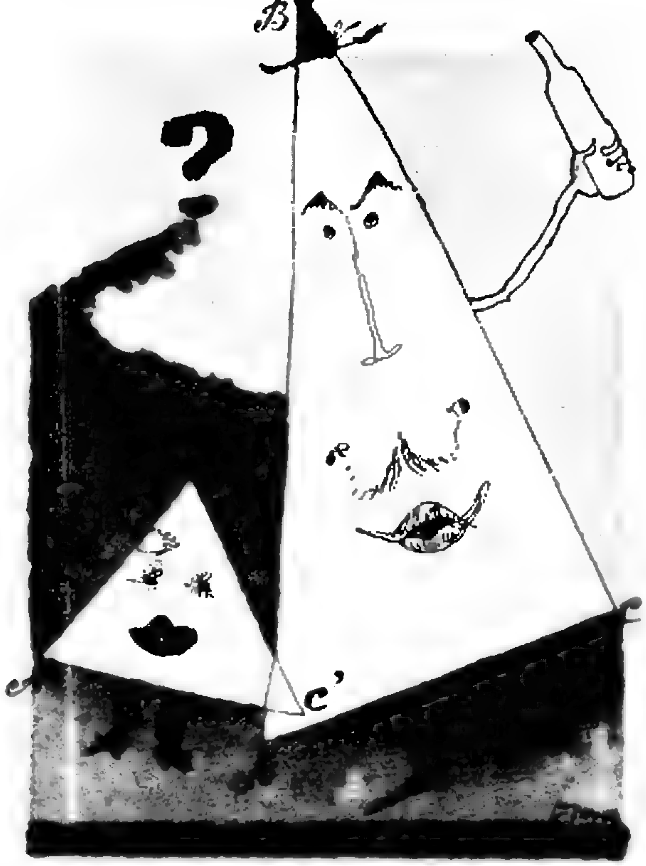
...хотя токи в микросхемах очень слабые, при большой плотности деталей весьма ощутимым становится тепловыделение, резко снижающее качество электронных устройств: начинаются процессы диффузии, размываются границы между деталями, возрастает фоновый шум. Эти причины сильно мешают миниатюризации электронных изделий.



Что читать в «Кванте» о законе Джоуля — Ленца

(публикации последних лет)

1. «Вечная электрическая лампочка?» — 1989, № 8, с. 2;
2. «Мощность в цепи постоянного тока» — 1989, № 8, с. 67;
3. «Электрические машины постоянного тока» — 1990, № 1, с. 63;
4. «Калейдоскоп «Кванта» — 1990, № 12, с. 40.



[redacted]

Математика 9—11

Публикуемая ниже заметка предназначена десяти- и одиннадцатиклассникам, но будет полезна и учащимся девятых классов.

Два решения одной задачи

Довольно часто бывает, что при решении геометрических задач получаются два ответа (как правило, это связано с наличием двух корней у квадратного уравнения). Естественно возникает вопрос: оба ли решения удовлетворяют всем условиям задачи?

Проиллюстрируем сказанное совсем простым примером.

Задача 1. *Найдите сторону AB треугольника ABC, если $AC=6$, $BC=4$, $\angle BAC=30°$.*

Решение. Пусть $AB=x$. Записав теорему косинусов для треугольника ABC, получим после преобразований квадратное уравнение относительно x:

$$x^2-6\sqrt{3}\,x+20=0,$$

откуда $x=3\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$.

При этом нас устраивают оба корня уравнения, так как в существовании двух треугольников, удовлетворяющих условию задачи, легко убедиться, выполнив соответствующее построение (рис. 1).

Следующая задача несколько сложнее.

Задача 2. *В треугольник с периметром 20 вписана окружность. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, заключенный между сторонами треугольника, равен 2,4. Найдите основание треугольника.*

Решение. Пусть EF — отрезок касательной к вписанной окружности, параллельный основанию AC треугольника ABC (рис. 2). Из подобия треугольников BAC и BEF следует, что их полупериметры p и p' относятся как соответствующие стороны, т. е.

$$\frac{p'}{p}=\frac{EF}{AC}. \qquad (*)$$

В то же время $p'=BG=p-AC$.

Пусть $AC=x$. Из равенства (*) получаем:

$$\frac{10-x}{10}=\frac{12}{5x} \qquad (**)$$

откуда $x=4$ и $x=6$.

Снова два ответа!

Здесь не удается объяснить появление двух ответов столь же просто, как мы сделали это, решая задачу 1. Поэтому попробуем применить другой метод.

Положим $EF=y$. Из соотношения (**) получаем:

$$y=\frac{1}{10}x(10-x).$$

В правой части этого равенства стоит квадратичная функция, график которой показан на рисунке 3. Эта функция принимает положительные значения при $x\in(0;\ 10)$, имеет максимум, равный 2,5, при $x=5$. Всякое значение из интервала (0; 2,5) функция принимает дважды — в точках, симметричных относительно точки $x=5$.

Мы видим, таким образом, что при $y=2{,}4$ существуют два значения x, дающие решение поставленной задачи.

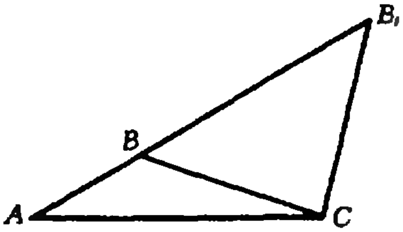


Рис. 1.

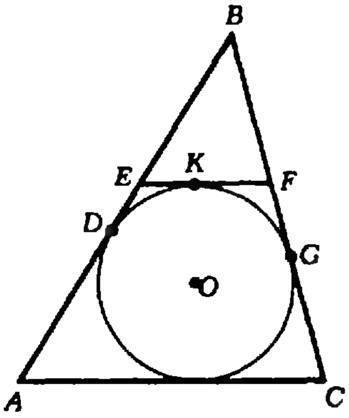


Рис. 2.

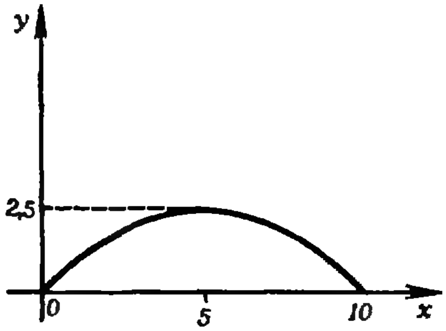


Рис. 3.

Кстати, это нехитрое исследование показывает, что при любом данном $y\in(0;\ 2{,}5)$ существуют два решения задачи, при $y=2{,}5$ — одно, а при $y>2{,}5$ — ни одного решения. Все это мы можем проделать и в общем виде, считая, что периметр треугольника равен $2p$, а отрезок EF равен a. В результате получим условия на a и p, при которых задача имеет два, одно или ни одного решения.

Упражнение 1. Проделайте это самостоятельно.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 3. *Диагональ d равнобочной трапеции равна 10, а площадь $S=48$. Найдите высоту h этой трапеции.*

Решение. Проведем в нашей трапеции высоту BE. Пусть $AD=a$, $BC=b$ (рис. 4). Тогда $S=\frac{a+b}{2}h$, $BE=(a+b)/2$ (убедитесь в этом самостоятельно), и $d^2=h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Обозначим $(a+b)/2$ через k. Выписанные ранее соотношения дают систему уравнений:

$$\begin{cases} hk=S, \\ h^2+k^2=d^2, \end{cases}$$

решая которую, получаем два значения h:

$$h_{1,2}=\sqrt{\frac{d^2\pm\sqrt{d^4-4S^2}}{2}}.$$

(В нашей задаче $h_1=6$, $h_2=8$.) При этом сразу усматривается необходимое условие разрешимости задачи: $d\geqslant\sqrt{2S}$.

Выразим теперь d^2 через h:

$$d^2=\frac{S^2}{h^2}+h^2.$$

Функция в правой части этого равенства возрастает при $h>\sqrt{S}$, убывает при $h<\sqrt{S}$ и достигает своего минимума, равного $2S$, при $h\angle\sqrt{S}$.

При этом каждое свое значение, большее $2S$, эта функция принимает дважды. Поэтому при $d>\sqrt{2S}$ существует две трапеции, удовлетворяющие условию, при $d=\sqrt{2S}$ — одна и при $d<\sqrt{2S}$ — ни одной.

Теперь рассмотрим две стереометрические задачи.

Задача 4. *Около шара описан конус. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости основа-*

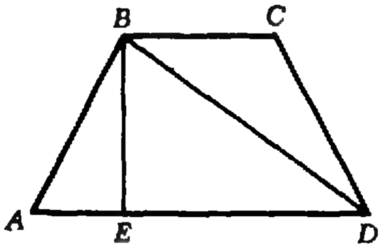


Рис. 4.

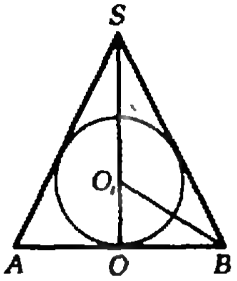


Рис. 5.

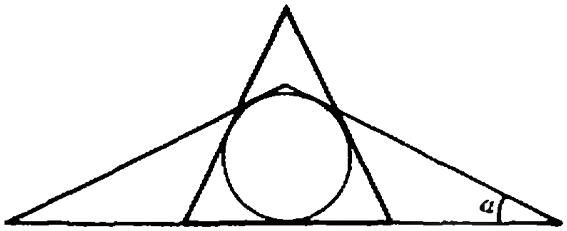


Рис. 6.

ния, если отношение объемов конуса и шара равно 3,6.

Решение. Осевым сечением рассматриваемой в задаче комбинации фигур является равнобедренный треугольник с вписанной в него окружностью (рис. 5), радиус которой равен радиусу шара.

Положив $OO_1=r$, $\angle SBA=\alpha$ $(0<\alpha<\pi/2)$, находим что $BO=r\operatorname{ctg}\alpha/2$, $SO=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и объем конуса $V_к=\frac{\pi r^3}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Записав отношение объемов конуса и шара, получим уравнение относительно α:

$$\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha=3{,}6.$$

Для его решения удобно выполнить подстановку $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, приводящую к уравнению

$$7{,}2t^4-7{,}2t^2+1=0,$$

откуда $t_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $t_2=\frac{\sqrt{30}}{6}$. В итоге получаем два значения искомого угла: $\alpha_1=2\operatorname{arctg}\sqrt{6}/6$ и $\alpha_2=2\operatorname{arctg}\sqrt{30}/6$.

Теперь объясним, чем это вызвано. Сначала «на пальцах». Около шара можно описать бесконечное множество конусов. Если конус «узкий и очень высокий» или «очень широкий, но невысокий» (рис. 6), отношение объемов конуса и шара очень велико. Интуитивно ясно, что при некотором значении угла α это отношение минимально. Путь это минимальное значение равно k_0. Тогда при $k>k_0$ будут существовать два конуса — «узкий и высокий» и «широкий и невысокий», для которых отношение объемов будет равно k.

Теперь проведем точное исследование. Мы видели, что

$$k=\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha.$$

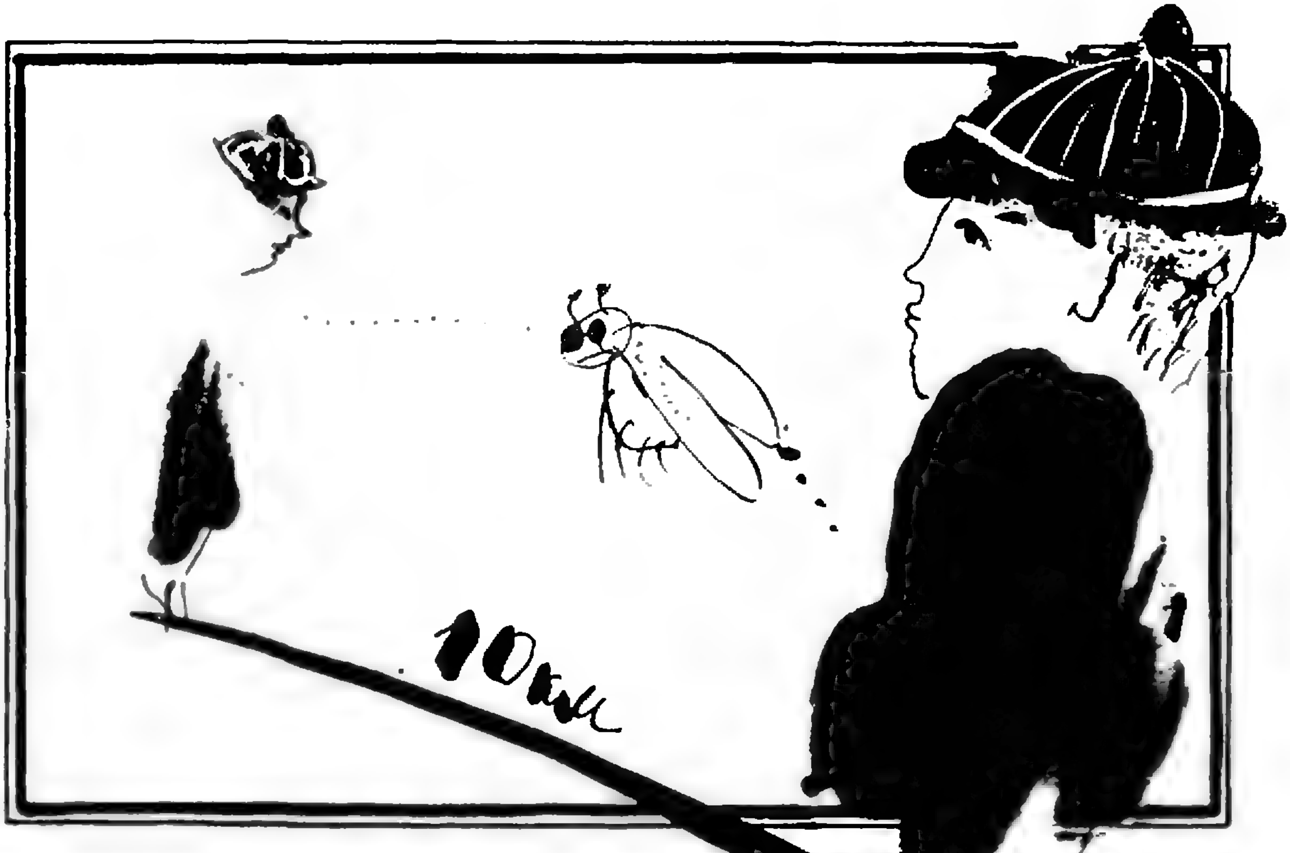
Вводя новую переменную $x=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, получим $k=\frac{1}{2x(1-x)}$ при $0<x<1$. В знаменателе — квадратичная функция от x. Поэтому функция k убывает от $+\infty$ до 2 при $0<x<1/2$ и неограниченно возрастает при $1/2<x<1$. Мы видим, что при $k>2$ существуют два значения x, при которых наша функция равна k. А это и значит, что при всяком $k>2$ (в частности, при $k=3{,}6$) существуют два конуса, удовлетворяющие условию.

Разумеется, разобранные задачи представляют простейшие случаи, которые могут возникнуть при решении геометрических задач, так сказать, «верхушку айсберга». Иногда при получении нескольких ответов приходится проводить гораздо более скрупулезное исследование, в ходе которого порой отбрасываются посторонние решения. Нам лишь хотелось показать, каким образом чисто геометрические задачи можно сводить к задачам об исследовании некоторых функций. В заключение предлагаем вам решить самостоятельно следующие задачи.

Упражнения

2. Через точку P диаметра окружности радиусом R проведена хорда AB, образующая с диаметром угол в 60°. Найдите BP, если $AP=a$ (рассмотрите все возможные случаи).
3. Отношение радиуса шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, к стороне основания равно 3/4. Найдите угол между боковой гранью и площадью основания.
4. Отношение радиуса шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, к стороне основания равно k. При каких значениях k задача имеет решение? Сколько будет решений в зависимости от k?

И. Габович



Практикум абитуриента

Как обмануть интеграл

Б. ГУРЕВИЧ, Р. МАЛКОВ

На олимпиадах, а иногда и на вступительных экзаменах по физике встречаются задачи, которые, казалось бы, невозможно решить, не выходя за рамки школьной математики. Но часто ключ к решению содержится в самой постановке задачи, а результат громоздких вычислений «спрятан» в исходных данных, что существенно упрощает ситуацию. Вот пример.

Задача 1. *По прямой дороге навстречу друг другу идут два туриста со скоростью 5 км/ч каждый. Когда расстояние между ними было 10 км, с плеча одного туриста взлетела муха и полетела вперед со скоростью 20 км/ч. Встретив второго, она повернула и полетела назад с той же скоростью. Так она летала между туристами до их встречи. Какой путь она пролетела?*

На первый взгляд, здесь надо последовательно складывать длины прямолинейных отрезков траектории мухи. Но задачу можно решить и не умея суммировать ряды, если заметить, что муха летала 1 ч (время до встречи туристов) со скоростью 20 км/ч, так что ее путь составляет 20 км.

Уже на примере этой простой и хорошо известной задачи видно, что не всегда необходимо детально описывать процесс. А теперь рассмотрим несколько более сложных задач.

Задача 2. *Лодку массой m, стоящую в спокойной воде, толкнули со скоростью v_0. Какой путь пройдет она до того, как остановится, если сила сопротивления движению пропорциональна скорости: $F = -\alpha v$?*

В любой момент движения ускорение лодки, согласно второму закону Ньютона, равно

$$a = -\frac{\alpha}{m}v,$$

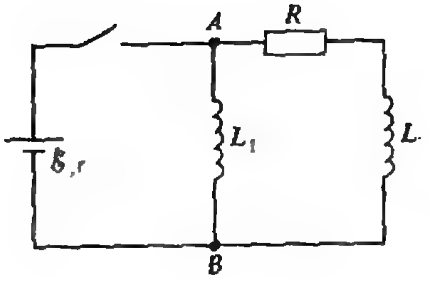


Рис. 1.

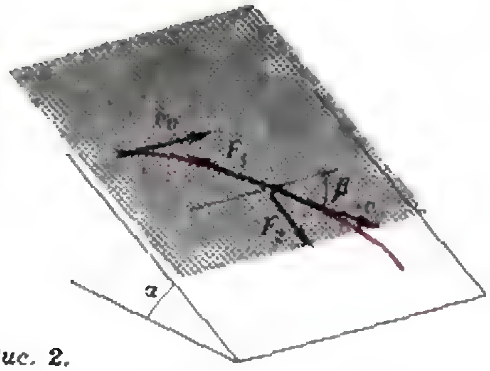


Рис. 2.

где v — скорость лодки в этот момент. Это пример движения с переменным ускорением (чем меньше скорость, тем медленнее она уменьшается), при котором в случае идеального выполнения условий задачи лодка будет двигаться бесконечно долго (хотя и очень медленно в конце). Из этого, правда, не следует, что тормозной путь будет бесконечным. Как же его найти?

Умножим обе части предыдущего уравнения на небольшой промежуток времени Δt, за который изменениями v и a можно пренебречь:

$$a\Delta t = -\frac{\alpha}{m} v\Delta t.$$

Теперь заметим, что $a\Delta t$ — это приращение скорости Δv за время Δt, а $v\Delta t$ — приращение пути Δl за это же время. Так как момент времени был выбран совершенно произвольно, можно сделать вывод, что для того, чтобы скорость изменилась на Δv, лодка должна пройти путь

$$\Delta l = -\frac{m}{\alpha}\Delta v$$

(минус в выражении объясняется тем, что Δv отрицательно). Из условия ясно, что за достаточно большое время скорость лодки уменьшается от начального значения v_0 практически до нуля. Тогда весь пройденный путь равен

$$l = \frac{m}{\alpha} v_0.$$

Абсолютно аналогично решается следующая — электрическая — задача.

Задача 3. *Какой заряд пройдет через резистор в схеме, изображенной на рисунке 1, после замыкания ключа, если до замыкания тока в катушках не было? Все параметры схемы известны.*

Пусть спустя некоторое время после замыкания ключа ток, текущий от точки A к точке B через катушку индуктивностью L_1, равен I_1, а через катушку индуктивностью L_2 — I_2. Тогда для любого момента времени, в соответствии с законом Ома, можно записать

$$L_1\Delta I_1 = L_2\Delta I_2 + RI_2\Delta t,$$

где ΔI_1 и ΔI_2 приращения токов, $I_2\Delta t$ — приращение искомого заряда q за малый промежуток времени Δt. Отсюда получаем

$$\Delta q = \frac{1}{R}(L_1\Delta I_1 - L_2\Delta I_2).$$

Сразу после замыкания ключа оба тока были равны нулю, а в установившемся режиме

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{r},\ I_2 = 0.$$

В результате суммирования всех приращений заряда находим

$$q = \frac{L_1\mathscr{E}}{Rr}.$$

Более подробное обоснование корректности наших рассуждений будет проведено при решении следующей задачи.

Задача 4. *На наклонной плоскости с углом наклона α лежит шайба (рис. 2). Ей щелчком сообщают вдоль плоскости горизонтальную скорость v_0. Через какое время шайба остановится, если коэффициент трения о плоскость равен μ, причем $\mu > \operatorname{tg}\alpha$?*

Прежде всего, заметим, что с течением времени скорость шайбы меняется как по модулю, так и по направлению. В плоскости движения на шайбу действуют две силы: сила трения $\vec{F}_1$, направленная противоположно скорости и равная

$$F_1 = \mu m g \cos\alpha,$$

и составляющая $\vec{F}_2$ силы тяжести, перпендикулярная начальной скорости и равная

$$F_2 = m g \sin\alpha.$$

Пусть в некоторый момент времени скорость равна v и направлена под углом β к начальной. Из второго закона Ньютона следует, что за малый промежуток времени Δt скорость шайбы изменится на величину

$$\Delta v = \frac{1}{m}(-F_1 + F_2 \sin\beta)\,\Delta t. \qquad (*)$$

При этом изменение ее проекции на направление силы $\vec{F}_2$ будет равно

$$\Delta(v \sin\beta) = \frac{1}{m}(-F_1 \sin\beta + F_2)\,\Delta t. \qquad (**)$$

Два последних равенства (*) и (**) представляют собой довольно сложные дифференциальные уравнения, решив которые, можно в принципе получить искомое время движения шайбы. Но это далеко выходит за рамки школьной математики. Поэтому сделаем по-другому.

Заметим, что через определенное время как скорость v, так и ее проекция $v \sin\beta$ станут равными нулю. Это обстоятельство, очевидное из условия задачи, можно использовать для обхода сложностей решения уравнений. Математически оно выражается так:

$$\Sigma \Delta v = -v_0 \text{ и } \Sigma \Delta(v \sin\beta) = 0.$$

Здесь и далее знаком Σ будем обозначать сумму значений величины, стоящей под этим знаком, за все малые промежутки времени, на которые разбит процесс. В частности, искомое время движения шайбы до остановки равно

$$t = \Sigma \Delta t.$$

Разделим обе части уравнений (*) и (**) на F_2 и F_1 соответственно и сложим получившиеся равенства. Мы получим

$$\frac{1}{F_2}\Delta v + \frac{1}{F_1}\Delta(v \sin\beta) = \frac{1}{m}\left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_1}{F_2}\right)\Delta t,$$

или

$$\Delta t = m\left(\frac{F_1}{F_2^2 - F_1^2}\Delta v + \frac{F_2}{F_2^2 - F_1^2}\Delta(v \sin\beta)\right).$$

Подставив сюда значения для F_1 и F_2 и просуммировав обе части равенства, найдем искомое время:

$$t = \frac{v_0}{g}\,\frac{\mu\cos\alpha}{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

Теперь, наконец, можно сформулировать основную идею решения. Она состоит в том, что выводится уравнение, в левой части которого стоит мгновенное приращение искомой величины в произвольный момент процесса, а в правой — линейная комбинация приращений величин, начальные и конечные значения которых известны или выражаются через искомую величину. Суммирование всех значений правой и левой частей этого уравнения за все малые промежутки времени, на которые разбит процесс, и даст алгебраическое уравнение относительно искомой величины. Для удобства назовем этот способ методом выборки сумм. Особенность его заключается в том, что в некоторых случаях удобнее сводить исходную систему не к уравнению с одной переменной, а к уравнению со многими переменными, но подобранными определенным образом.

Возможности применения метода выборки сумм не всегда одинаковы. Так, в задачах 2 и 3 приращение искомой величины, выраженное через приращения величин с известными пределами изменений, получается непосредственно из исходной системы. В задаче 4 для выделения искомого приращения требуется ряд алгебраических преобразований. Но уже в следующей задаче одними алгебраическими преобразованиями не обойтись.

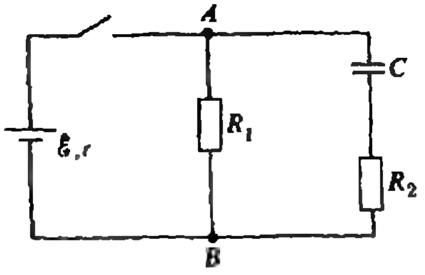


Рис. 3.

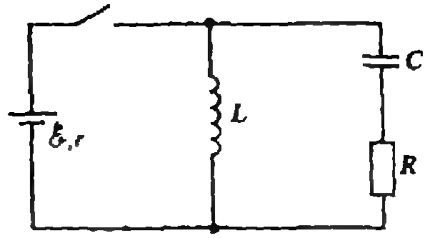


Рис. 4.

Задача 5. *В схеме, приведенной на рисунке 3, сначала ключ разомкнут и заряда на конденсаторе нет. Найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе сопротивлением R_2 после замыкания ключа. Все параметры схемы известны.*

Пусть в некоторый момент времени после замыкания ключа от точки A к точке B через первый резистор течет ток I_1, через второй — I_2, а заряд конденсатора равен q. За малый промежуток времени Δt приращение искомой величины составит

$$\Delta Q = I_2^2 R_2 \Delta t,$$

а увеличение заряда конденсатора —

$$\Delta q = I_2 \Delta t.$$

Следовательно,

$$\Delta Q = I_2 R_2 \Delta q.$$

В последнем уравнении нет линейной комбинации приращений величин, начальные и конечные значения которых известны, так как коэффициент перед Δq — величина переменная. Но из условия задачи легко найти пределы изменения токов, поэтому попытаемся выразить ΔQ через их мгновенные приращения ΔI_1 и ΔI_2. Сделаем это с помощью закона Ома:

$$\mathscr{E} - r(I_1 + I_2) = R_1 I_1,$$

$$R_1 I_1 = \frac{q}{C} + R_2 I_2,$$

или

$$-r(\Delta I_1 + \Delta I_2) = R_1 \Delta I_1,$$
$$R_1 \Delta I_1 = \frac{\Delta q}{C} + R_2 \Delta I_2.$$

Выразив отсюда Δq через ΔI_2, получаем

$$\Delta Q = -\frac{R_2 C}{2}\left(R_2 + \frac{R_1 r}{R_1 + r}\right) \Delta (I_2^2).$$

Ток через второй резистор сразу после замыкания ключа равен

$$I_2 = \frac{\mathscr{E} R_1}{R_1 r + R_2 r + R_1 R_2},$$

а конечное его значение равно нулю. Поэтому суммирование выражения для ΔQ дает искомое количество теплоты:

$$Q = \frac{\mathscr{E}^2 R_1 R_2 C}{2(R_1 + r)(R_1 r + R_2 r + R_1 R_2)}.$$

Полученный результат может быть при желании обобщен для произвольного начального заряда конденсатора.

Как видно из приведенных выше примеров, предлагаемый метод в ряде случаев позволяет значительно упростить математические вычисления и исключить необходимость решения дифференциальных уравнений. Впрочем, авторы, сами в недавнем прошлом абитуриенты, искренне надеятся, что у членов приемных комиссий не хватит коварства включать подобные задачи в программу вступительных экзаменов. Но — кто знает?

Упражнения

1. В условиях задачи 4 найдите путь, пройденный шайбой.

2. В скрещенных однородных электростатическом (с напряженностью $\vec{E}$) и магнитном (с индукцией $\vec{B}$) полях ($\vec{E} \perp \vec{B}$) удерживается в покое частица с массой m и зарядом q. В некоторый момент времени частицу отпускают. Найдите расстояние между линией установившегося движения и начальным положением частицы, если на нее действует сила вязкого трения $\vec{F} = -\beta\vec{v}$.

3. В условиях задачи 3 найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе после замыкания ключа.

4. В схеме, изображенной на рисунке 4, сначала ключ разомкнут, тока через катушку нет и конденсатор не заряжен. Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа? Все параметры схемы известны.

Решу задачу. Возможны варианты

Б. КОРСУНСКИЙ

Как известно, среди физических задач есть такие, которые имеют не единственный ответ. Иногда их легко узнать в лицо по условию, в котором встречаются фразы типа «В каких случаях...?», «Рассмотрите оба варианта» и т. п. Но подчас и невинная с виду задача может содержать подвох, связанный с неоднозначностью решения. Часто, узнав правильный ответ, школьник после недолгих раздумий находит свою ошибку. А если ответ узнать негде? Если это контрольная? Или, пуще того, экзамен в институт, где обычно экзаменаторы наводящих вопросов не задают?

Попробуем научиться узнавать в лицо те задачи, где «варианты» замаскированы. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Задача 1. *Тело располагается на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту* α. *Коэффициент трения между телом и плоскостью* μ. *Найдите ускорение тела.*

Здесь почти каждый способен довольно быстро (и в этом вам поможет рисунок 1) получить ответ, который учителя и абитуриенты давно знают наизусть:

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$

И все же... Давайте проверим ответ при таких, скажем, числах: $\alpha=30°$, $\mu=0{,}8$. Получается, что тело само собой едет... вверх! Где же ошибка?

Перечитаем условие. Оказывается, тело *располагается* на наклонной плоскости, а не скользит по ней. Так откуда же следует, что $a\neq 0$? После этой подсказки уточнить решение несложно: надо вначале найти сотношение между μ и α, при котором тело начнет двигаться. Легко убедиться, что оно выглядит так:

$$\mu\leqslant \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда правильный ответ будет такой:

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha),\ \text{если}\ \mu\leqslant \operatorname{tg}\alpha,$$

$$a=0,\ \text{если}\ \mu>\operatorname{tg}\alpha.$$

Мораль. Будьте внимательны с силой трения. Помните, что соотношение $F_{тр}=\mu N$ заведомо верно только для случая скольжения, ну а если тело покоится, это, вообще говоря, не так. Поэтому любая задача с участием сил трения, если в ее условии отсутствуют прямые указания на характер движения тела, требует предварительного — пусть *небольшого — исследования.* Провести его совсем нетрудно. Напишите: «Предположим, что тело движется...» и честно проверьте это предположение. Дальше уже ошибиться практически невозможно.

Задача 2. *В откачанном кубическом сосуде с ребром* $l=0{,}2$ *м находится* $m=36$ *г воды при нормальных условиях. Каким будет давление в сосуде, если его нагреть до температуры* $T=373$ *К? Универсальная газовая постоянная* $R=8{,}3$ *Дж/(моль·К).*

Заметим, что последняя фраза часто сбивает с толку даже людей с довольно крепкими нервами, в результате чего быстро появляется следующее решение.

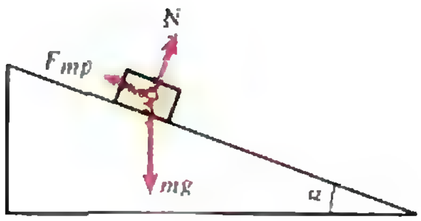


Рис. 1.

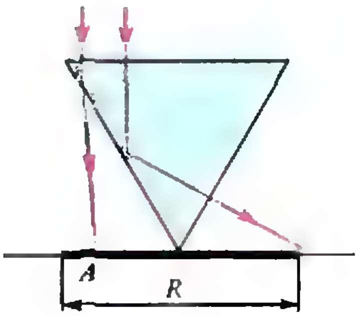


Рис. 2.

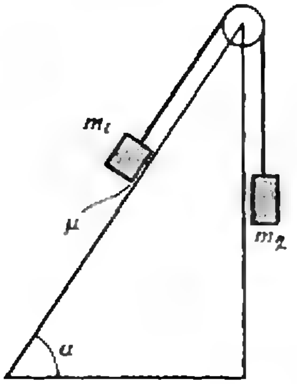


Рис. 3.

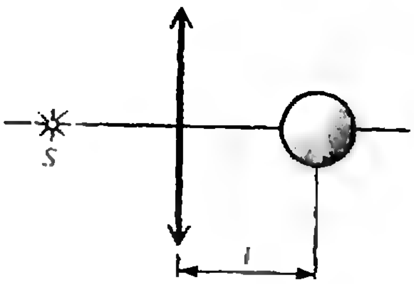


Рис. 4.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона $pV=\frac{m}{M}RT$, где $V=l^3$, получаем

$$p=\frac{m}{M}\frac{RT}{l^3}=9\cdot10^6\ \text{Па}.$$

И следует столь же быстрый приговор: НЕВЕРНО!

Догадались, где ошибка? Ну конечно, испаряется не вся вода, а лишь столько, чтобы над оставшейся водой образовался насыщенный пар. И еще — температура 373 К, равная 100 °С, это та единственная температура, для которой давление насыщенного водяного пара надо помнить наизусть. При 373 К водяной пар не может создать давление, большее 10^5 Па. Именно такое давление и установится в сосуде. Разумеется, при этом испарится лишь небольшая часть воды.

Заметим, что эта задача может стать многовариантной, если сформулировать ее в общем виде, как и первую.

Таким образом, водяной пар, маскируясь под идеальный газ, тоже может «подставить ножку». Вот почему во всех задачах, связанных с испарением, конденсацией воды и другими фазовыми переходами, решение полезно начинать с фразы-выручалочки: «Предположим, что процесс прошел полностью» (какой процесс, ясно из условия задачи).

Задача 3. *На горизонтальной плоскости зачернен круг радиусом R. В центре круга стоит вертикально, опираясь вершиной на его центр, стеклянный конус с радиусом основания R, углом раствора 60° и показателем преломления n. На круг смотрят с большого расстояния вдоль оси конуса. Каков видимый радиус круга?*

Эта задача, как и некоторые другие задачи на геометрическую оптику, допускает варианты решения. Причина в том, что изображение любой точки создается бесконечным числом лучей, и поэтому характер изображения объекта конечных размеров существенно зависит от взаимного расположения крайних лучей.

Отличие этой задачи от предыдущих в том, что здесь присутствует опасность «потерять» один из двух одинаково естественных ответов. Чтобы их найти, воспользуемся принципом обращения лучей.

Пустим мысленно луч вертикально вниз у самого края основания конуса (рис. 2). Очевидно, луч после преломления на боковой поверхности будет отклоняться к центру круга, поэтому видимый радиус круга будет равен $R'=R$, и даже «с запасом» (точки, находящиеся дальше от центра, чем A, изображения не дают). Все бы хорошо, но мы забыли про полное внутреннее отражение. Действительно, если $n>2/\sqrt{3}$, то крайний луч не пройдет сквозь боковую поверхность. Да и все остальные лучи тоже. Значит, круг будет виден в виде точки? Что-то не верится. И правильно — ведь луч может и отразиться от боковой поверхности, пройдя насквозь «со второй попытки». Причем «вторая попытка»

(Окончание см. на с. 53)

Игры и головоломки

Двенадцать долларов, ним и шоколадка

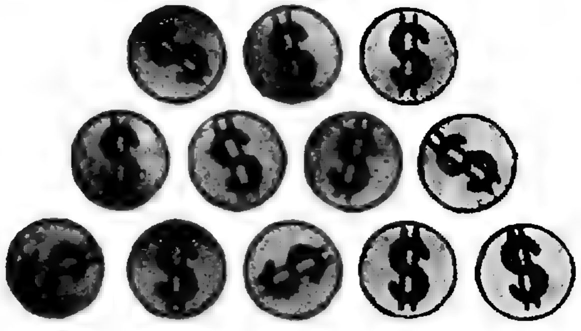
Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Не столь уж давно в салунах американского Среднего Запада можно было наблюдать любопытную игру. Начиналась она так. Бармен подзывал к себе подвыпившего ковбоя, выкладывал на стойку семь монет по одному доллару в две кучки — три и четыре доллара — и предлагал парню их выиграть: «Ставишь пять монет — получаешь двенадцать». Ковбой, отсчитав пять монет, клал их на стойку. Получалась третья кучка монет. Игра заключалась в том, что игроки по очереди берут монеты из этих кучек. Разрешается брать за один раз любое количество монет, но лишь из одной кучки. Забравший последнюю монету забирал и все остальные.

К стойке немедленно стекались завсегдатаи, наперебой подсказывавшие ковбою, из какой кучки и сколько монет, по их мнению, следует брать. Подобную картину вы можете наблюдать у нас при игре в три наперстка. Только если «наперсточники» — это шулера и их козырь — ловкость рук, то в игре «двенадцать долларов» выигрывает тот, кто лучше умеет считать.

Представим себе ход мыслей ковбоя, которому предстояло сделать первый ход: «Возьму-ка я целиком одну кучку. Останется две — играть будет полегче. А какую взять? Возьму маленькую, чтобы оставалось еще много монет».

Вот он берет кучку из трех монет. Остаются две кучки — в 4 и 5 монет. В ответ бармен берет одну монету из большей кучки. Получаются две одинаковые кучки монет. Ковбой берет монету из одной кучки — бармен одну из другой. Ковбой берет две монеты из одной кучки — бармен тоже две монеты из другой кучки. В кучках остается по одной монете. У ковбоя единственная возможность — взять одну монету. Другую — последнюю — берет бармен и высыпает в конторку все остальные монеты.



«Сыграем еще!» — разгорячившись, требует ковбой, выкладывая еще пять долларов.

«К вашим услугам»,— отвечает бармен, снова выстраивая из своих семи долларов две кучки — в 3 и 4 доллара.

«Не торопись, подумай»,— говорит ковбою его внутренний голос. «Хорошо,— отвечает ему ковбой,— в прошлый раз я проиграл, взяв маленькую кучку. А если я возьму другую? Не годится — бармен снова уравняет монеты в двух оставшихся кучках. Возьму-ка я одну монету из большой кучки. Нет! Бармен опять устроит две равные кучки, взяв маленькую кучку. А если взять две монеты? Тогда бармен возьмет среднюю кучку и снова будет две кучки с равным количеством монет. Возьму-ка я тогда из нее три монеты. Теперь он уже не сможет сделать свой финт!» Уверенным движением ковбой берет из большой кучки три монеты и с усмешкой смотрит на бармена.

Тот берет из средней кучки три монеты, и на стойке остаются кучки в 1, 2 и 3 монеты. И тут ковбой начинает понимать, что он проиграл, так как при любом его ходе бармен в ответ всегда сможет образовать две кучки с равным числом монет. Понурив голову, под смех окружающих ковбой возвращается на свое место. И невдомек парню, что еще тысячу лет назад китайские мудрецы научились играть в эту игру.

Кто же выигрывает: начинающий или его партнер? А как следует играть, чтобы выиграть? Оказывается, выигрывает тот, кто ходит первым. Для этого он должен взять из маленькой кучки две монеты. Любой другой ход проигрывает. Итак, образовалось три кучки — в 1, 4 и 5 монет. Теперь, как бы ни сыграл второй игрок, начинающий своим вторым ходом может либо образовать две кучки с равным количеством монет, либо образовать три кучки в 1, 2 и 3 монеты. А здесь второму игроку уже можно сдаваться.

Итак, мы научились играть в «ним» — так назвал эту игру профессор Гарвардского университета Чарлз Л. Бутон. Ну а если мы расположим в кучках не 3, 4 и 5 монет, а, скажем, 3, 4 и 6 монет, то кто выиграет на этот раз: начинающий или тот, кто делает ход вторым? Ведь мы уже получили, что если в кучках 1, 2 и 3 монеты или 1, 4 и 5 монет, то выигрывает тот, кто ходит вторым. А если мы увеличим число кучек? На все эти вопросы Ч. Бутон ответил в своей работе, появившейся на свет в 1901 году.

Оказалось, что здесь очень удобно записывать числа не в десятичной системе счисления, которой мы обычно пользуемся, а в двоичной, так полюбившейся за простоту создателям первых ЭВМ.

Напомним, что если в десятичной системе всякое натуральное число представляется в виде $N=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_110^1+a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа от 0 до 9, то в двоичной системе счисления оно представляется в виде $N=b_m2^m+$ $+b_{m-1}2^{m-1}+\ldots+b_12^1+b_0$. Например, $1991=1\cdot10^3+9\cdot10^2+9\cdot10^1+1\cdot10^0=$ $=1\cdot2^{10}+1\cdot2^9+1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+$ $+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\times$ $\times2^5=11111000111_2$. Индекс 2 указывает на то, что это число записано в двоичной системе счисления.

Поскольку иметь неограниченное количество однодолларовых монет довольно затруднительно, мы в дальнейшем будем оперировать вместо монет камешками. Ч. Бутон обнаружил удивительную закономерность: запишем друг под другом в столбик числа, выражающие количество камешков в каждой из кучек в двоичной системе счисления. Если в каждом разряде будет стоять четное число единиц (такой набор чисел мы будем называть правильным), то в этом случае при правильной игре выигрывает тот, кто ходит вторым. В противном случае выигрывает начинающий.

Убедиться в справедливости этого совсем нетрудно. Запишем несколько чисел в двоичной системе одно под другим, например,

$$\begin{array}{r}1010101\\111001\\11001\\101\end{array}$$

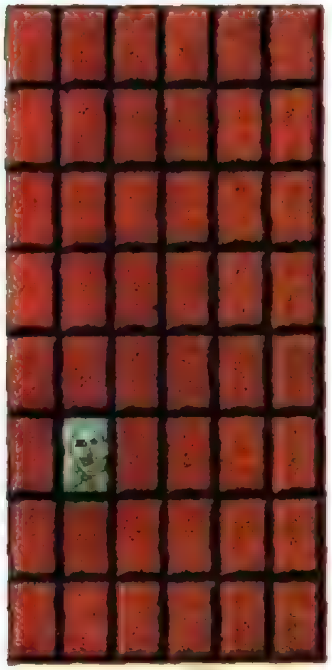
Попробуем приписать к ним еще одно число так, чтобы в каждом двоичном разряде сумма была четна, т. е. полученная система стала правильной. Как легко видеть, это можно сделать единственным образом: ставим в разряде этого числа 1, если там сумма была нечетна, и 0, если эта сумма четна. В данном случае следует приписать число 1110000. Поэтому, если у нас был правильный набор чисел, то при замене одного (ровно одного!) числа другим, набор перестанет быть правильным. Наоборот, если набор чисел не является правильным, то нетрудно заменить одно из чисел меньшим так, чтобы полученный набор уже был правильным.

Осталось заметить, что набор из нулей является правильным, а набор, не являющийся правильным, содержит хотя бы одно ненулевое число.

Подведем итоги. Если первоначальный набор чисел, указывающий состав кучки камней, является правильным, то выигрывает игрок, берущий камни вторым, а если этот набор не является правильным, то выигрывает начинающий. Первым и каждым последующим ходом он берет такое количество камней из одной кучки, чтобы оставался правильный набор. Так как количество камней все время убывает, а его партнер оставляет ему всегда хотя бы один камень, то начинающий выигрывает.

Игра «ним» неоднократно описывалась как в книгах по занимательной математике, так и в учебниках по программированию. Поэтому «на закуску» угостим вас «шоколадкой» — новой модификацией этой игры. Думаем, что ее с интересом встретят и те, кто уже давно знаком с игрой «ним».

Чтобы сыграть в эту игру, раздобудьте шоколадку (если это не удастся, то нарисуйте ее на листе бумаги, как это сделал наш художник) и отметьте одну из ее долек. Игра состоит в том, что двое игроков



по очереди разламывают ее по какой-нибудь прямой, делящей шоколадку на дольки, и съедают ту половинку, которая не содержит отмеченной дольки. (Если шоколадка нарисована, то соответствующую половинку заштриховывают.) Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т. е. ему остается лишь одна отмеченная долька.

На первый взгляд связи между играми «ним» и «шоколадка» не видно. Присмотримся повнимательнее к шоколадке, изображенной на рисунке. Она состоит из $6\times8=48$ долек. Ее делят 5 вертикальных и 7 горизонтальных прямых, причем одна вертикальная прямая проходит левее отмеченной дольки, 4 — правее ее, 5 горизонтальных прямых проходят выше отмеченной дольки и 2 ниже.

Разложим теперь четыре кучки камней: в первой 1 камень, во второй — 4, в третьей — 5 и в четвертой — 2. Попросим игроков после каждого хода в игре с шоколадкой брать камни из кучек, причем если, скажем, отломили сверху полоску в 8 дольки, то берем из третьей кучки 8 камня, если отломили справа полоску в одну дольку, то берем из второй кучки 1 камень

и т. д. Заметим, что тогда, играя в «шоколадку», игроки будут играть и в «ним», при этом выигравший в «шоколадку» выигрывает и в «ним». Но в «ним» мы играть уже научились, и естественно нам поменять порядок ходов: сначала сделать ход в игре «ним», а потом соответствующим образом разломить шоколадку.

Итак, игра в «шоколадку» есть просто игра в «ним» на четырех кучках камней. И, как говорят, вопрос исчерпан.

Но вопросы тут же посыпались как из рога изобилия. Вот два наиболее интересных из них.

1. При каких размерах шоколадки начинающий проигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

2. При каких размерах шоколадки начинающий выигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

Решу задачу. Возможны варианты

(Начало см. на с. 49)

всегда будет удачной, так как угол падения равен нулю. Нетрудно видеть, что крайним лучом в этом случае будет тот, который попадет в край круга. При этом видимый радиус круга $R'=R/2$.

Окончательный ответ:

$$R'=R \text{ при } n<2/\sqrt{3}\,,$$
$$R'=R/2 \text{ при } n>2/\sqrt{3}\,.$$

Итак, как вы заметили, во всех случаях для устранения недоразумений нам пришлось внимательно анализировать условия задач. Впрочем, это полезно всегда.

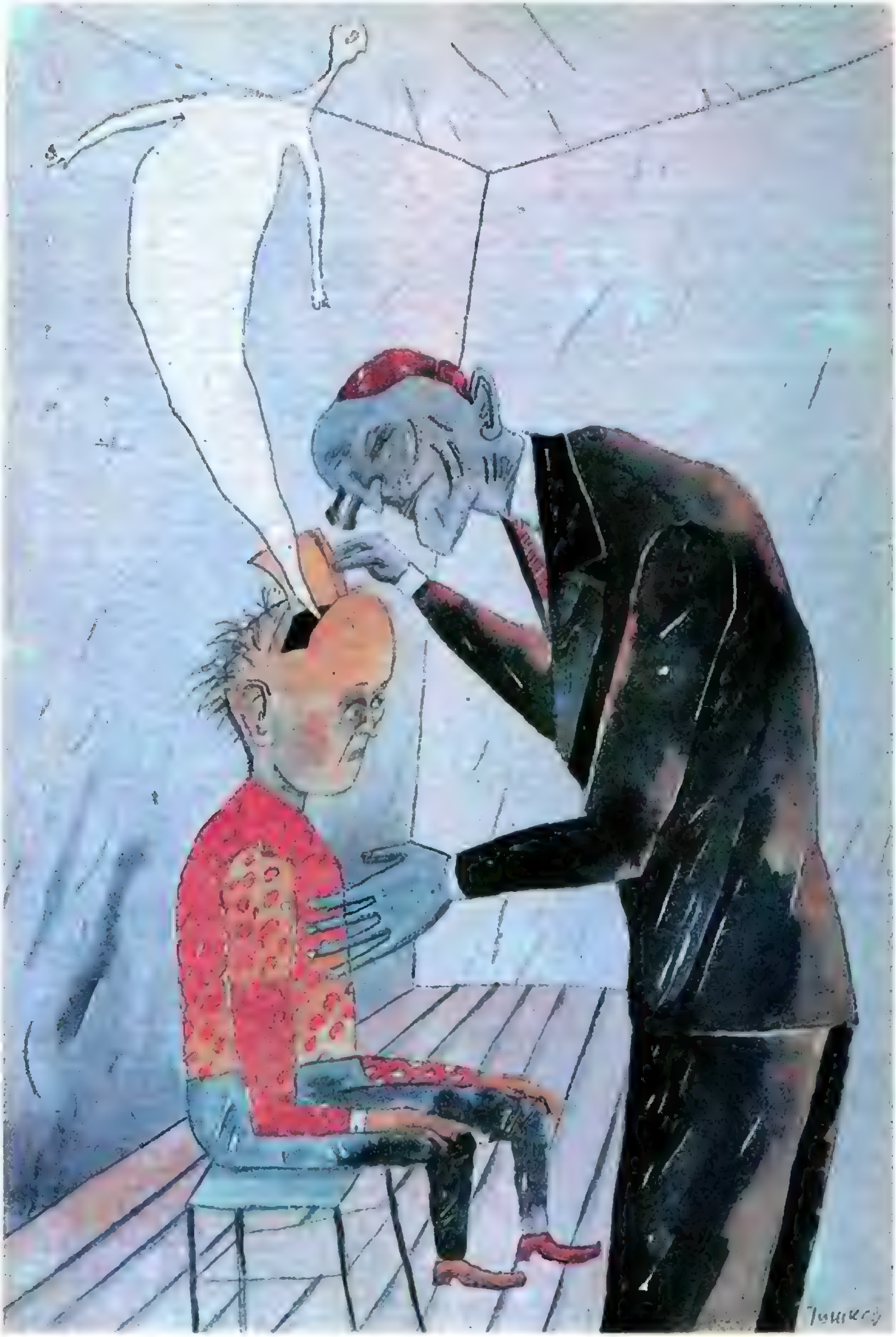
И в заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Найдите ускорение грузов в системе, изображенной на рисунке 3 (см. с. 50). Величины α, m_1, m_2 и коэффициент трения μ даны.

2. В идеальный термос поместили воду со льдом. Температуры воды и льда равны соответственно t_1 и t_2 ($t_2<0$), массы m_1 и m_2, удельные теплоемкости c_1 и c_2. Удельная теплота плавления льда λ. Найдите установившуюся температуру в термосе.

3. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R, центр которого находится на главной оптической оси линзы на расстоянии l от нее (рис. 4 на с. 50). Найдите расстояние от линзы до точечного источника S, расположенного на оси линзы, при котором изображение источника совпадает с самим источником.



54

ДЕНЬ ЭКЗАМЕНА

(фантастический рассказ)

Г. СЛЕЗАР

В семье Джорданов никогда не заговаривали об экзамене до того самого дня, когда их сыну Дики исполнилось двенадцать лет. Именно в день его рождения миссис Джордан впервые упомянула об экзамене в присутствии сына, и ее тревожный тон вызвал раздражение отца семейства.

— Забудь об этом! — резко сказал он жене.— Дики выдержит этот экзамен.

Они сидели за завтраком, и мальчик с любопытством поднял голову от тарелки. Дики был подростком с настороженным взглядом, прямыми светлыми волосами и быстрыми нервными движениями. Он не разобрался, чем была вызвана неожиданная размолвка, но точно знал, что сегодня день его рождения, и ему прежде всего хотелось согласия в доме. Где-то там, в небольшом чулане, лежали перевязанные лентами пакеты с подарками, которые только того и ждали, чтобы их распаковали, а в крохотной кухне в подвешенной на стене печи с автоматическим управлением в этот момент готовилось что-то сладкое. Ему хотелось, чтобы день рождения был счастливым, а потому влага в глазах матери и хмурый отцовский взгляд не соответствовали настроению трепетного ожидания, с которым он приветствовал утро.

— О каком экзамене вы говорите? — спросил он.

Мать опустила глаза.

— Это просто проверка умственных способностей, которую правительство устраивает детям, достигшим двенадцатилетнего возраста. Тебе такая проверка предстоит на будущей неделе. Но из-за нее не следует беспокоиться.

— Ты хочешь сказать, что это вроде экзамена в школе?

— Что-то вроде этого,— подтвердил отец, вставая из-за стола.— Отправляйся лучше читать свои комиксы, Дики.

Мальчик медленно побрел в ту часть гостиной, которая еще с младенчества считалась «его» уголком. Он взял со стеллажа комикс, лежавший сверху, но, видимо, разноцветные залихватские картинки не увлекли его. Тогда он поплелся к окну и принялся уныло вглядываться в непроницаемую завесу тумана.

— Почему дождь идет именно сегодня? — спросил он.— Разве он не мог бы пойти завтра?

Отец, развалившийся в кресле, раздраженно зашелестел страницами правительственной газеты.

— Идет,— значит, нужно, вот и все. После дождя хорошо растет трава.

— Почему, отец?

— Потому что растет, вот и все.

Дики наморщил лоб.

— Между прочим, отчего она зеленая, трава?

— Никто не знает,— отрезал отец, но тут же пожалел о своей резкости.

После полудня они отмечали день рождения Дики. Сияющая мать вручила сыну пестрые свертки, и даже отец изобразил на лице улыбку и потрепал сына по голове. Дики поцеловал мать и с серьезным видом обменялся рукопожатием с отцом.

Потом был принесен торт с дюжиной свечей, и на этом празднество завершилось.

Час спустя Дики сидел у окна и наблюдал за тем, как лучи солнца безуспешно пытались пробиться сквозь облака.

— Отец,— спросил он,— до солнца далеко?

Рассказ перепечатывается из сборника «Последнее новшество» (М.: Профиздат, 1991).

— Пять тысяч миль,— отвечал отец.

За завтраком Дики снова заметил влагу в глазах матери. Он не ассоциировал ее слезы с предстоящим ему экзаменом, пока отец вдруг не заговорил на эту тему.

— Послушай, Дики,— начал он, как-то уж слишком сурово нахмурившись,— тебе сегодня предстоит одно дело.

— Знаю, папа. Надеюсь...

— В общем-то беспокоиться не о чем. Каждый день эту проверку проходят тысячи детей. Правительство хочет знать, какие у тебя способности, Дики. Только и всего.

— В школе я получаю хорошие отметки,— как-то неуверенно сказал Дики.

— Здесь — другое дело. Это особая проверка. Понимаешь, тебе дадут выпить жидкость, а потом ты пойдешь в комнату, где установлена специальная машина...

— А что это за жидкость? — спросил Дики.

— Да так, ерунда. На вкус вроде мятной лепешки. Они хотят быть уверенными, что ты говоришь правду. Не то чтобы правительство сомневалось в твоей честности, но прием жидкости гарантирует такую уверенность.

На лице Дики отразились замешательство и страх. Он взглянул на мать, но та успела изобразить на своем лице нечто отдаленно напоминающее улыбку.

— Все будет хорошо,— заверила она сына.

— Конечно! — подхватил отец.— Ты славный мальчик, Дики, проверку ты пройдешь. А потом мы вернемся домой и отпразднуем это событие. Хорошо?

— Да,— согласился Дики.

Они вступили в здание Правительственной Службы Просвещения за пятнадцать минут до назначенного часа. Ступая по мраморным плитам, пересекли огромный вестибюль с колоннами, миновали арку и вошли в автоматический лифт, который поднял их на четвертый этаж.

Там, напротив комнаты номер четыреста четыре, за полированным столом сидел молодой человек в мундире без знаков различия. В руках у него был блокнот со списком назначенных на этот час; молодой человек проверил Джорданов по списку на букву «Д» и после этого позволил им войти.

Комната номер четыреста четыре напоминала помещение суда: она была унылая, холодная и казенная, ряды металлических столов перемежались в ней рядами длинных скамей. Там уже ждали своей очереди несколько отцов с сыновьями; черноволосая женщина с тонкими губами раздавала анкеты.

Мистер Джордан заполнил анкету и вернул ее женщине. Потом сказал, обращаясь к Дики:

— Теперь уже недолго ждать. Когда тебя выкликнут по имени, ступай прямо в ту дверь, что в конце комнаты.

Без пяти минут одиннадцать выкликнули фамилию Джордан.

— Удачи тебе, сынок,— молвил отец, не глядя на Дики.— Я зайду за тобой, когда проверка закончится.

Дики подошел к двери и повернул круглую ручку. В комнате, где он очутился, был полумрак, так что мальчик едва мог различить лицо чиновника в сером мундире, который ответил на его приветствие.

— Садитесь,— ласково сказал чиновник. Он указал на высокий стул, находившийся рядом с его столом.— Тебя зовут Ричард Джордан?

— Да, сэр.

— Твой классификационный номер 600-115. Выпей вот это, Ричард.

Он взял со стола пластмассовый стакан и подал его мальчику. Жидкость в стакане была похожа на обезжиренное молоко и по вкусу лишь отдаленно напоминала обещанную мятную лепешку. Дики выпил содержимое до дна и вернул чиновнику пустой стакан.

Мальчиком овладела неодолимая сонливость; тем временем чиновник сосредоточенно писал что-то на листе бумаги. Затем он взглянул на часы и поднялся; лицо его оказалось на одном уровне с лицом Дики. Чиновник извлек из нагрудного кармана какой-то предмет, походивший на авторучку, и посветил в глаза мальчику.

— Прекрасно,— сказал он.— Идемка со мной, Ричард.

Он отвел Дики в угол комнаты, где напротив вычислительной машины стояло одно-единственное деревянное кресло с подлокотниками. На левом подлокотнике был укреплен микрофон, и, когда мальчик опустился в кресло, микрофон оказался как раз на уровне его рта.

— Теперь расслабься, Ричард. Тебе будут заданы разные вопросы, и ты хорошенько их обдумай. Потом отвечай в микрофон. Обо всем остальном позаботится машина.

— Хорошо, сэр.

— Теперь я оставлю тебя одного. Когда почувствуешь, что можешь начать, скажи в микрофон одно слово — готов.

— Слушаю, сэр.

Чиновник сжал его плечо и вышел. Дики произнес:

— Готов.

В машине загорелся свет, послышалось жужжание механизма. Затем голос произнес:

— Дополни предлагаемый ряд цифр: один, четыре, семь, десять.

Супруги Джордан сидели в гостиной, не произнося ни слова: они боялись строить какие-либо предположения.

Телефон зазвонил около четырех часов пополудни. Женщина потянулась за трубкой, однако муж ее оказался проворнее.

— Мистер Джордан?

Трубка искажала голос, тон говорившего был резким, официальным.

— Да, слушаю.

— Говорят из Правительственной Службы Просвещения. Ваш сын Ричард М. Джордан, классификационный номер 600-115, завершил прохождение правительственного экзамена. Мы вынуждены с прискорбием известить вас, что его интеллектуальное развитие превзошло установленный правительством уровень, предусмотренный статьей 84, раздел 5 «Нового кодекса»...

В противоположном углу комнаты послышался сдавленный крик женщины, которая еще ничего не знала, но обо всем догадалась по выражению лица своего мужа.

— Вы можете сообщить по телефону,— продолжал бубнить голос в трубке,— желаете ли вы, чтобы тело его было погребено правительством, или вы предпочитаете захоронить его в отдельной могиле. В случае если похоронами занимается правительство, их стоимость составляет десять долларов.

Перевод с английского
А. Мельникова

Дорогие читатели!

Напоминаем вам, что журнал «Квант»
распространяется только по подписке.
Подписка принимается без ограничений во всех агентствах «Союзпечати»,
на почтамтах и в отделениях связи.
Подписаться на наш журнал можно начиная с любого номера,
но оформить подписку нужно до первого числа предподписного месяца.

Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465,
цена одного номера 1 р. 10 к.

Олимпиады

XXXII Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
А. ФОМИН

Основу эмблемы XXXII Международной математической олимпиады составляет государственный флаг Швеции и третье поколение кривой Кох, названной так в честь шведской женщины-математика, ее открывшей. Построение кривой Кох в данном случае начинается с равностороннего треугольника, который называется *затравкой*. Затравка — это нулевое поколение кривой Кох. Теперь каждую из его сторон разделим на три равные части и к каждому из средних отрезков приложим во внешнюю сторону по правильному треугольнику. Получится невыпуклый двенадцатиугольник — это первое поколение кривой Кох. С каждой его стороной поступим так же; получим второе поколение. Кривая, изображенная на эмблеме олимпиады,— это третье поколение кривой. Процесс этот может быть продолжен и дальше; «предельная» кривая называется *фрактальной кривой Кох*.

На олимпиаде, осененной этой красивой кривой, нашу страну представляли шестеро школьников: *Малинникова Евгения* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Перлин Александр* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Амбайнис Андрис* (Даугавпилс, с. ш. 12), *Темкин Михаил* (Москва, с. ш. 57), *Жуховицкий Всеволод* (С.-Петербург, с. ш. 239), *Некрашевич Владимир* (Киевская обл., с. Крутые Горбы). Все члены команды были хорошо подготовлены и находились в прекрасной спортивной форме: команда завоевала четыре золотые и две серебряные медали (см. таблицу) — прекрасный результат! Более того, команда в этом году установила своеобразный рекорд: набрала наибольшее (в процентном отношении) количество баллов за всю историю участия СССР в международных математических олимпиадах.

В неофициальном командном первенстве получились следующие результаты (каждая задача оценивалась в 7 баллов, в каждом из двух туров предлагалось по три задачи): СССР — 241, Китай — 231, Румыния — 225, Германия — 222, США — 212, Венгрия — 209, Болгария — 192, Вьетнам — 191, Япония — 180, Чехо-

Таблица

Участник	Задачи						Общее число очков	Медаль
	1	2	3	4	5	6		
Малинникова Евгения	7	7	7	7	7	7	42	золото
Перлин Александр	7	7	7	7	7	7	42	золото
Жуховицкий Всеволод	6	7	3	7	7	7	37	серебро
Темкин Михаил	7	7	7	7	7	7	42	золото
Некрашевич Владимир	6	7	3	7	6	7	36	серебро
Амбайнис Андрис	7	7	7	7	7	7	42	золото
	Итого:						241	

Словакия — 176, Франция — 175, Польша — 161, Югославия — 160, Канада — 154, Англия — 142, Швеция — 130 баллов и т. д.

Следующая, XXXIII, Международная математическая олимпиада состоится в июле 1992 года в Москве. Совсем непросто будет организовать и провести олимпиаду, в которой предстоит участвовать командам более чем из 60 стран. Поэтому мы обращаемся ко всем организациям и частным лицам, которые могли бы оказать помощь в этом благородном деле: мы будем рады получить ваши предложения! Присылайте их в редакцию с пометкой «ММО».

Задачи

1. (СССР) Дан треугольник ABC. Пусть A', B', C' — точки пересечения биссектрис углов CAB, ABC, BCA со сторонами BC, CA, AB соответственно и I — центр вписанной окружности. Докажите, что

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leqslant\frac{8}{27}.$$

2. (Румыния) Пусть n — целое число, $n>6$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — это все натуральные числа, которые меньше n и взаимно просты с n. Докажите, что если

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_k-a_{k-1}>0,$$

то n — или простое число, или натуральная степень числа 2.

3. (Китай) Пусть $S=\{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что любое n-элементное подмножество множества S содержит 5 попарно взаимно простых чисел.

4. (США) Дан связный граф G с k ребрами. Докажите, что можно занумеровать ребра всеми числами $1, 2, \ldots, k$ так, что для каждой вершины графа, которая соединена ребрами не менее чем с двумя другими вершинами, набор чисел, которыми помечены эти ребра, не имеет общего делителя, большего 1.

(Граф G состоит из множества точек, называемых его *вершинами*, вместе с множеством *ребер*, соединяющих некоторые пары различных вершин. Каждая пара различных вершин u, v принадлежит не более чем одному ребру. Граф G называется *связным*, если для каждой пары вершин $\{x, y\}$ существует некоторая последовательность вершин $x=v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m=y$ такая, что каждые v_i, v_{i+1} $(0\leqslant i<m)$ соединены ребром G.)

5. (Франция) Пусть P — внутренняя точка треугольника ABC. Докажите, что хотя бы один из углов PAB, PBC, PCA не больше 30°.

6. (Нидерланды) Бесконечная последовательность действительных чисел $x_0, x_1, x_2, \ldots$ называется ограниченной, если существует постоянная C такая, что $|x_i|\leqslant C$ для каждого $i\geqslant 0$.

Дано действительное число $a>1$. Постройте ограниченную бесконечную последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ такую, что неравенство

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\geqslant 1$$

выполнено для каждой пары различных чисел i и j.

XXII Международная физическая олимпиада

А. ЗИЛЬБЕРМАН,
доктор физико-математических наук
С. КОЗЕЛ

В этом году международная олимпиада впервые проходила в столице республики Куба — Гаване. В ней приняли участие команды из 32 стран.

Команду нашей страны представляли:

Сергей Башинский — выпускник с. ш. 27 г. Стерлитамака,

Сергей Добровольский — выпускник с. ш. 13 г. Днепропетровска,

Александр Ляпин — выпускник с. ш. 9 г. Нальчика,

Винцас Тамошюнас — выпускник с. ш. 45 г. Вильнюса,

Тимур Шутенко — теперь одиннадцатиклассник с. ш. 41 г. Мариуполя.

Кандидатами в команду были еще двое — *Сергей Джосюк* из г. Винницы и *Игорь Полищук* из г. Москвы. Однако поехать на олимпиаду могли только пятеро. Окончательный отбор был проведен на специально устроенной олимпиаде, где требования были максимально приближены к требованиям МФО.

Как и в прошлые годы, задачи олимпиады были составлены хозяевами олимпиады и обсуждены Международной комиссией, состоящей из представителей стран-участниц.

Приведем условия задач теоретического тура.

Задача 1

На рисунке 1 показан однородный шар радиусом R. Вначале центр масс шара находился в состоянии покоя, а сам шар вращался вокруг горизонтальной оси, проходящей че-

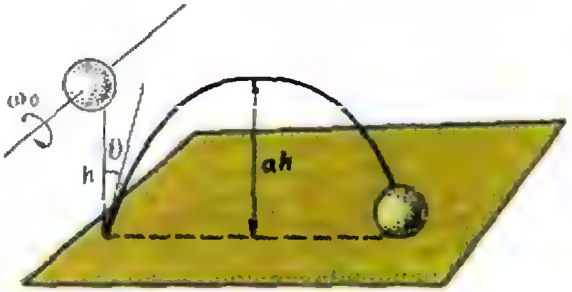


Рис. 1.

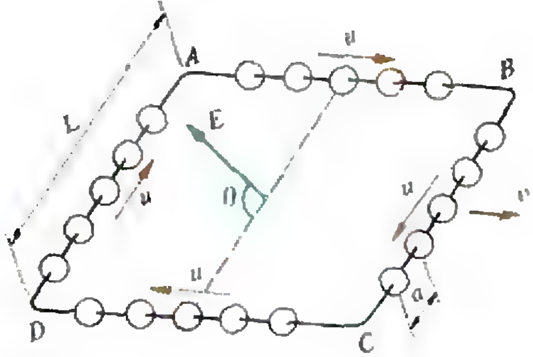


Рис. 2.

рез его центр, с угловой скоростью ω_0. Самая низкая точка шара находилась на высоте h над полом. После отпускания шар падает под влиянием силы тяжести на пол, ударяется, затем подскакивает до известной высоты αh. Вещества, из которых состоят пол и шар, таковы, что можно не учитывать деформаций, претерпеваемых этими телами во время столкновения. Коэффициент трения скольжения между шаром и полом μ, масса шара m. Считайте, что шар находится в вакууме и время столкновения очень мало (но не равно нулю). Используйте формулу $I=2/5mR^2$ для момента инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

1) Предполагая, что есть проскальзывание между шаром и полом в течение всего времени удара, найдите а) тангенс угла отскока θ; б) горизонтальное смещение центра шара между первым и вторым ударами о пол; в) минимальное значение ω_0 для этого случая.

2) Ответьте на вопросы пунктов а) и б), предполагая, что проскальзывание прекращается до истечения времени удара.

3) Постройте графики зависимости $\operatorname{tg}\theta$ от ω_0 для случаев 1) и 2).

Задача 2

По непроводящему витку в форме квадрата со стороной L с закругленными углами движется большое количество заряженных шаров малых размеров (рис. 2). Скорость каждого шара u, заряд q, расстояние между шарами a. Шары, как бусинки, надеты на стержни, составляющие виток, сторона L намного больше расстояния a. Непроводящие стержни, составляющие виток, заряжены с однородной плотностью заряда, которая компенсирует общий заряд всех шаров. Все это верно в системе отсчета, связанной с витком.

Рассмотрим случай, когда виток движется со скоростью $\vec{v}$ параллельно стороне AB в области, где существует однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной скорости витка. Во время движения виток находится в плоскости, которая образует угол θ с направлением поля. Учитывая релятивистские явления, определите следующие величины в системе отсчета неподвижного наблюдателя, относительно которого виток движется со скоростью v:

1) расстояния между шарами на каждой из сторон витка;

2) результирующий заряд (стержни + шары) на каждой из сторон витка;

3) величину моментов электрических сил, стремящихся вращать виток вместе с шарами;

4) энергию взаимодействия витка и шаров с электрическим полем.

Примечания. Электрический заряд не зависит от системы отсчета, в которой измеряется. На рисунке показаны только относительные направления векторов. Излучением можно пренебречь.

Задача 3

Для детального изучения свойств отдельных атомов необходимо получить эти атомы в состоянии почти покоя в небольшой части пространства в течение определенного времени. В этих целях недавно стали использовать метод, получивший название метода охлаждения атомов с помощью лазера. Рассмотрим его основы.

Атомы ^{23}Na, возникающие при испарении натрия при температуре $T=10^3$ К, с помощью коллиматора формируются в узкий пучок и направляются в вакуумную камеру (рис. 3). По всему поперечному сечению пучок атомов освещается встречным пучком света мощного лазера. Частота лазера выбирается такой, чтобы произошло резонансное поглощение фотона атомами, скорость которых равна $\vec{v}_0$ и которые находятся в основном состоянии. Поглощая свет, атом переходит на первый возбужденный уровень с энергией E и шириной Γ (рис. 4), а его скорость меняется на некоторую величину $\Delta v_1=v_1-v_0$. Затем в результате спонтанной эмиссии атом излучает свет и возвращается в основное состояние, скорость его при этом изменяется на величину $\Delta v'=v'_1-v_1$ и отклоняется на угол φ от первоначального направления (рис. 5).

Этот порядок актов поглощения и излучения повторяется многократно до тех пор, пока скорость атомов не изменится на величину Δv и резонансное поглощение света частоты ν станет невозможным. В дальнейшем необходимо изменить частоту лазера, чтобы поддерживать резонансное поглощение на новой скорости и продолжать тормозить атомы, пока некоторые из них не снизят свою скорость до достаточно малой величины.

Для начального изучения явления можно не принимать во внимание никакие другие процессы взаимодействия атомов, исключая поглощение и спонтанную эмиссию света. Будем считать, что интенсивность излучения лазера настолько велика, что атом в основном состоянии сразу поглощает фотон.

Считая, что $E=3{,}36\cdot10^{-19}$ Дж, $\Gamma=7{,}0\times\times10^{-27}$ Дж, скорость света $c=3{,}0\cdot10^{8}$ м/с, масса протона $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с, постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, ответьте на следующие вопросы:

1) Какой должна быть частота ν лазерного излучения для того, чтобы обеспечить резонансное поглощение света атомами, энергия которых равна средней кинетической энергии атомов в области до прохождения коллиматора? На какую величину Δv_1 изменится скорость такого атома после первого поглощения фотона?

2) В каком интервале скоростей Δv_0 находятся атомы, которые могут поглотить фотон с частотой, вычисленной в пункте 1)?

3) На какой максимальный угол φ может рассеяться атом после однократного испускания фотона?

4) При каком максимальном уменьшении скорости Δv еще может поглотиться фотон той же частоты ν?

5) Оцените число актов поглощения — излучения, после которых атом, двигавшийся вдоль оси пучка, затормозится от v_0 практически до нулевой скорости.

6) Оцените длительность процесса излучения — поглощения фотона атомом. Какое расстояние пролетит атом за это время?

Нужно сказать, что подбор задач теоретического тура оказался вполне удовлетворительным, хотя задачи могли бы быть и несколько более сложными. Первая задача, относящаяся к теории вращательного движения твердого тела, достаточно традиционная. Она несколько выходит за рамки нашей школьной программы, но у тех, кто знаком с физикой в объеме факультативного курса, не должна вызывать особых трудностей.

Более сложной представляется вторая задача, относящаяся к теории относительности. Довольно замысловатое условие этой задачи можно сформулировать проще: по описанному в условии контуру течет электрический ток, а в системе отсчета, связанной с этим контуром, кроме электрического поля существует и магнитное. Впрочем, на олимпиаде решать задачу пришлось именно в первоначальном варианте. Формально она не выходит за рамки нашей школьной программы.

Третья задача связана с интересным физическим явлением — охлаждением светом (в журнале «Квант» № 5 за 1990 год этому явлению посвящена статья И. Воробьева). Решение этой задачи также вполне доступно нашим читателям. Справедливости ради заметим, что авторский вариант задачи Международная комиссия несколько упростила, сняв еще один вопрос — он относился к вероятности покинуть пучок для атома, пролетевшего определенное расстояние, и требовал довольно сложных рассуждений и расчетов. Такая возможность предусмотрена уставом МФО, в случае если это предлагается квалифицированным большинством (для тех, кто еще не освоился в достаточной степени с терминологическими тонкостями демократических процедур, заметим, что термин «квалифицированное большинство» относится не к качеству состава жюри, а к его количеству). Как бы то ни было, задача оказалась не очень сложной и довольно интересной.

Наши ребята неплохо справились с задачами теоретического тура, хотя были и досадные потери. Тем читателям, кто, прочитав условия задач, решил, что в них нет ровно ничего сложного и справиться с ними можно в два счета, хотелось бы напомнить, что есть большая разница между решением задач в домашних условиях и

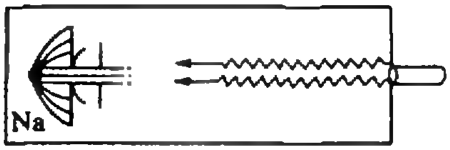


Рис. 3.

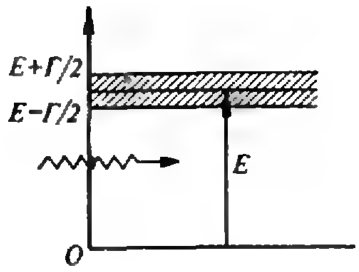


Рис. 4.

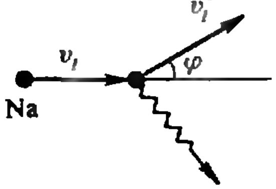


Рис. 5.

на олимпиадах. Особенно в дальних странах, где утром, днем и вечером очень жарко, а ближайший кондиционер воздуха находится в отеле, в котором живут руководители команд, еда порой хотя и вкусна, но непривычна, соперники из команды *N* прекрасно выглядят и сложные расчеты производят без единой ошибки, а размах крыльев местного таракана достигает — по слухам — полуметра. И хотя наша команда состояла из неоднократных победителей Всесоюзных физических олимпиад, прошедших нелегкий отбор и серьезно позанимавшихся в течение трех недель перед поездкой (впрочем, отдохнуть ребята тоже успели), даже они порой ошибались, причем иногда в довольно простых ситуациях.

Экспериментальный тур в этом году включал только одну задачу (по правилам МФО может быть или одна задача, или две). Задача эта была несложной — «черный ящик» для измерений на постоянном токе, однако требовала множества измерений и тщательного анализа полученных результатов. Мы не будем рассказывать об этой задаче подробно, скажем только, что в «ящике» были резистор (сопротивлением около 0,5 кОм), кремниевый диод и конденсатор большой емкости (примерно 150 мкФ), а для измерений были выданы два авометра, пара резисторов различных номиналов и источник постоянного тока с потенциометром на выходе.

Такая задача у наших участников не должна была вызвать серьезных затруднений (во всяком случае, при подготовке к МФО с очень похожими задачами ребята справлялись легко), однако не всё оказалось таким уж простым. У хозяев олимпиады не нашлось в достатке приборов и приспособлений не всех сразу, и эксперимент был организован в две смены (ничего особенно плохого в этом нет, иногда нам приходилось делать то же самое на Всесоюзных олимпиадах). В соответствии с алфавитом, наша команда попала во вторую смену, и ребятам предложили отправиться до обеда на экскурсию. Одному из наших «повезло» — с утра у него была температура за 38° (по шкале Цельсия), и он не поехал на экскурсию на вполне законных основаниях. Еще двое отказались ехать наотрез и предпочли, в нарушение правил, просто отдохнуть перед туром. А вот двое наших участников не смогли отказать организаторам и несколько часов провели в Ботаническом саду — они и «пролетели» на экспериментальном туре, получив в результате только бронзовые медали.

В результате трое из нашей команды получили золотые медали. Это Тимур Шутенко — у него абсолютно лучший результат в теоретическом туре и в сумме, Сергей Башинский и Александр Ляпин. Двое получили бронзовые медали — Сергей Добровольский (ему не хватило 1/4 балла до «серебра») и Винцас Тамошюнас.

Блестяще выступили в этом году ребята из Китая — все пятеро получили золотые медали. Они и стали первыми в неофициальном командном зачете, взяв реванш за прошлый год, когда наша команда обошла китайскую. (Справедливости ради стоит сказать, что китайцы обошли нас довольно сильно.) Вторыми оказались наши участники, сильно обогнав остальные команды.

Известно, что экономическое положение республики Куба сейчас не блестящее, однако олимпиада была проведена очень хорошо. Чрезвычайно добросовестно отнеслись хозяева олимпиады к составлению задач, на высоком уровне была проведена проверка работ. Все было организовано четко, в том числе и культурная программа для участников олимпиады и членов Международного жюри. Специально хочется отметить очень доброжелательную атмосферу, царившую на олимпиаде. Даже довольно оживленные дискуссии проходили в обстановке взаимного понимания и стремления к согласию.

Следующая, XXIII Международная физическая олимпиада будет проходить в Финляндии. Пожелаем же успехов ее участникам!

III Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

В этом году III Международная олимпиада по информатике (МОИ) проходила в Греции с 19 по 24 мая. Несмотря на необычно ранние сроки проведения олимпиады, представители 22 стран Европы, Азии, Африки и Латинской Америки собрались в небольшом городке Анависсос на берегу Эгейского моря недалеко от Афин, чтобы определить сильнейших школьников в области информатики. Представители еще двух стран — Ирана и Южной Кореи — присутствовали в качестве наблюдателей.

В олимпиаде принимало участие 74 школьника, из них 5 — вне конкурса. В команду СССР по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам участия в зимних и весенних сборах вошли: Сергей Герштейн — выпускник лицея при УГУ г. Екатеринбурга, Антон Суханов — выпускник с. ш. 470 г. Санкт-Петербурга, Денис Уваров — выпускник с. ш. 11 г. Новокузнецка.

Поскольку организаторы рассчитывали на участие в олимпиаде значительно большего количества стран, причем для этого были все основания (число стран-участниц во II МОИ по сравнению с I МОИ увеличилось с 13 до 24), численный состав всех команд был уменьшен с 4 до 3 человек. Руководители команды В. Кирюхин и А. Денисенко после тщательного анализа уровня подготовки всех кандидатов в сборную СССР, включая Дениса Кима (с. ш. 10 г. Темиртау), Валерия Лепехина (с. ш. 132 г. Волгограда) и Валерия Хаменя (с. ш. 30 г. Гродно), остановили свой выбор именно на трех вышеназванных ребятах.

Греция — родина олимпиадного движения. Проведение любого соревнования здесь проходит в лучших традициях, заложенных еще в древности. III МОИ также не была исключением. Организационный комитет олимпиады во главе с его президентом Х. Килласом, а также все службы во главе с президентом III МОИ проректором Афинского университета профессором Г. Филокипроу сделали все возможное, чтобы победители были определены в честной борьбе и каждый из участников увез с собой как можно больше впечатлений о неповторимой красоте этой удивительной страны.

Как и в прошлом году, III МОИ проходила в два тура. Оба тура предполагали использование персональных компьютеров. В распоряжение участников соревнования предоставлялись персональные компьютеры IBM PC/XT и одна из следующих интегрированных сред программирования: TURBO PASCAL Ver. 5.5, QUICK BASIC Ver. 4, GWBASIC, MICROSOFT C Ver. 5, TURBO C++, LCN LOGO Ver. 2.0, IBM LOGO, LOGOWRITER, FORTRAN 77 Ver. 4+. Большинство ребят писали свои программы в рамках системы TURBO PASCAL Ver. 5.5.

Научным комитетом олимпиады на рассмотрение международного жюри было представлено к первому туру 4 задачи, ко второму — 3. Перед каждым туром голосованием выбиралась одна задача. Приведем их (обе эти задачи были предложены представителями Греции).

Задача I тура

Пронумеровать позиции в матрице (таблице) размером 5×5 следующим образом. Если номер i ($1\leqslant i<25$) соответствует в матрице позиции с координатами (x, y), то номер $i+1$ может соответствовать позиции с координатами (z, w), вычисляемыми по одному из следующих правил:

1) $(z, w)=(x\pm 3, y)$;
2) $(z, w)=(x, y\pm 3)$;
3) $(z, w)=(x\pm 2, y\pm 2)$.

Требуется:

А) написать программу, которая последовательно нумерует позиции матрицы 5×5 при заданных координатах позиции, в которой проставлен номер 1 (результаты должны быть выведены в виде заполненной матрицы);

В) вычислить число всех возможных расстановок номеров для всех начальных позиций, расположенных в правом верхнем треугольнике матрицы, включая ее главную диагональ.

Пример. Если в качестве начальной позиции в матрице выбрана позиция с координатами (2, 2), то на данном шаге координаты позиции с номером 2 в соответствии с представленными правилами могут быть: (2, 5), (5, 2) или (4, 4).

Задача II тура

S-терм — это последовательность символов S и скобок, определяемая рекурсивно следующим образом:

символ S есть S-терм;

если M и N — S-термы, то выражение (MN) есть также S-терм.

Пример S-терма: ((((SS)(SS))S)(SS)).

Правые скобки не несут информации и могут опускаться. В этом случае вышеприведенный S-терм выглядит так: ((((SS)(SS))S)(SS.

1. Напишите процедуру «gensterm» для порождения S-термов. Она должна для заданного n заполнять n текстовых файлов (n=длина=число символов 'S'), каждый из которых содержит все S-термы длины 1, 2,..., n соответственно. Внутри файла S-термы разделяются символом ';'. В конце каждого файла должен стоять символ '.' (точка).

Напишите программу, которая по заданному целому n ($n \leqslant 10$) выполняет описанную выше процедуру и выдает на дисплей все сгенерированные S-термы.

Рассмотрим исчисление S-термов. Единственное алгебраическое правило (S-правило), которое может быть использовано, состоит в следующем: любой подтерм S-терма, имеющий вид (((SA)B)C), где A, B и C — также S-термы, может быть переписан как ((AC)(BC)), т. е.

Context1(((SA)B)C)Context2→
→Context1((AC)(BC))Context2.

Применение этого правила к S-терму называется *редукцией* S-терма. Возможны разные способы (стратегии) выбора подтермов для применения S-правила. Последовательное применение S-правила к S-терму до тех пор, пока это возможно, называется *нормализацией*.

Пример цепочки редукции S-терма:

((((SS)(SS))S)(SS))→(((SS)((SS)((SS)S))(SS))→
→((S(SS))(((SS)S)(SS)))→
→((S(SS))((S(SS))(S(SS)))).

2. Предложите эффективную структуру данных для представления S-термов, облегчающую применение S-правила. Напишите две процедуры: «readterm» и «printterm». Первая из них преобразует S-термы в Вашу структуру данных из формы, порождаемой процедурой «gensterm»; вторая преобразует S-термы из Вашей структуры в форму, порождаемую процедурой «gensterm». Ваша программа должна демонстрировать эти преобразования.

3. Напишите процедуру «reduce», выполняющую один шаг редукции в соответствии с S-правилом над заданным подтермом S-терма в Вашем представлении. Программа должна продемонстрировать это.

4. Напишите процедуру «normalize», которая в заданном S-терме должна последовательно выбирать подтермы и применять S-правило до тех пор, пока дальнейшие редукции станут невозможными, либо число шагов достигнет некоторого максимума, например 30. Ваша программа должна продемонстрировать это.

5. Объедините все процедуры в одну программу, которая:

а) запрашивает у пользователя длину n;

б) порождает с помощью процедуры «gensterm» все S-термы заданной длины;

в) преобразует эти S-термы в Ваше представление;

г) нормализует их (если это возможно);

д) выводит в качестве результата нормализованные S-термы;

е) выводит последовательно число шагов редукции, совершенных над каждым S-термом, либо сообщение «not normalized», если нормализация требует более 30 шагов.

ж) выводит число ненормализованных термов и общее число всех S-термов заданной длины n.

Решение задачи каждого тура оценивалось исходя из 100 баллов. Международное жюри перед началом каждого тура утверждало критерии оценки выбранных задач, в процессе проверки они четко соблюдались. Ни одна неточность даже в отображении результатов не прощалась и жестко наказывалась.

По задаче I тура начислялось: за п. А — 50 баллов, за п. В — 25, за вывод — 15, премия жюри — 10; по задаче II тура: за п. 1 — 20 баллов, за п. 2 — 25, за п. 3 — 15, за п. 4 — 20, за п. 5 — 10, премия жюри — 10. Всю эту информацию участники олимпиады получали вместе с условием задачи.

Задача I тура для всех участников оказалась несложной. Достаточно сказать, что 44 школьника получили более 90 баллов за решение этой задачи, хотя только двое набрали максимально возможные 100 баллов. В этой большой группе были и все три участника сборной СССР, однако небольшие неточности в представлении итоговых результатов не позволили им набрать 100 баллов, как членам команд Чехо-Словакии и Таиланда. Лучший из наших ребят в этом туре Сергей Герштейн получил 99 баллов.

Задача II тура оказалась крепким орешком для всех. Фактически результаты решения этой задачи сыграли решающую роль в окончательном распределении мест. На этот раз только четыре участника (представители Чехо-Словакии, Китая, Венгрии и Югославии) получили более 80 баллов, именно они и заняли верхние строчки в итоговой таблице. Результаты наших ребят: Д. Уваров — 51 балл, А. Суханов — 39 баллов, С. Герштейн — 37 баллов.

По итогам двух дней соревнований все советские школьники получили по серебряной медали. Обидно, что лучшему из них — Д. Уварову чуть-чуть не хватило, чтобы получить золотую медаль. В общем зачете он оказался восьмым, а только семь первых участников получили золотые медали.

На этой олимпиаде как всегда очень сильно выступили китайские школьники. В их копилке оказались две золотые и одна серебряная медали. Немного уступили им представители Чехо-Словакии, удачное выступление которых явилось для всех неожиданностью. Более того, их участник Игорь Мали стал абсолютным победителем III МОИ, получив в награду за это персональный компьютер IBM PC. Сборная СССР в командном зачете на сей раз оказалась на пятом месте, пропустив вперед еще команды Венгрии и Югославии. Победители предыдущих олимпиад команда Болгарии и традиционно сильная команда теперь уже объединенной Германии заняли соответственно 9 и 8 места.

В целом сборная СССР выступила на этой олимпиаде вполне достойно, и результаты отражают состояние дел в области школьной информатики в нашей стране. Как показал анализ работ, алгоритмическая подготовка всех советских школьников не уступает победителям, а может быть даже превосходит. Однако их техническая подготовка не соответствует тем повышенным требованиям, которые позволяют побеждать на олимпиадах по информатике. Сказывается «компьютерный голод», который даже для наших талантливых ребят мы не можем устранить — участники практически всех команд дома имели свободный доступ к персональным компьютерам, а для наших школьников это остается проблемой. К тому же сказывается наша давняя болезнь, связанная со стремлением выделить в информатике теоретическую часть и практическую, причем с акцентом на первую. Показателем этого являются проводимые на всех уровнях олимпиады по информатике, где алгоритмическая сторона решения задач оценивается порой даже выше, чем реализация алгоритма на компьютере, причем мотивируется это тем, что олимпиады проводятся по информатике, а не по скорости машинописи.

Нельзя не сказать еще об одном факте, который отметили организаторы данной олимпиады. Среди победителей все чаще оказываются достаточно молодые участники. Теперь уже 15-летним возрастом победителей никого не удивишь. К сожалению, даже для олимпиады по информатике всесоюзного уровня участие школьников 7—9 классов является редкостью. Несомненно, что от более раннего привлечения школьников к информатике зависит многое, и нам, чтобы не потерять ведущие позиции, необходимо обратить на это более пристальное внимание. В противном случае отставание неизбежно.

Помимо сборной СССР на III МОИ была представлена самостоятельной командой Белоруссия как член ООН и ЮНЕСКО. Результаты выступления белорусских школьников: Владимир Свидерский — 125 баллов (бронзовая медаль), Владимир Белый — 96 баллов, Владимир Кабак — 87 баллов.

На закрытии МОИ представитель Германии от имени своего правительства пригласил присутствующих на олимпиаду по информатике 1992 года в Бонн.

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

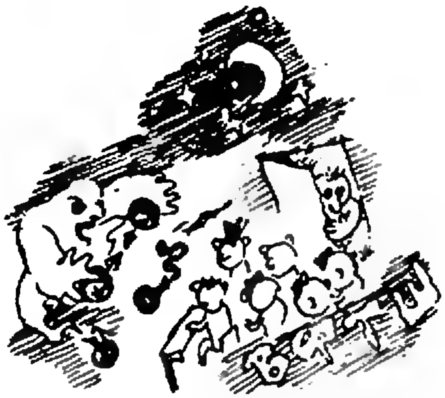
ЗФТШ — 25 лет

Вы — читатели «Кванта». Значит, знаете все лучшие вузы страны и среди них — Московский Физтех. Но туда принимают лишь самых, самых, самых. А внутренне вы уверены, что можете там учиться, и очень этого хотите, и готовы приложить все усилия для достижения желанной цели.

Каждый разрешает эту проблему по-своему: спецкласс, лицей, репититор. Но если таких возможностей нет (или спецкласс, репититор кажутся качественно недостаточными), информация о ЗФТШ будет для вас особенно полезной.

Заочная физико-техническая школа — это учитель и помощник. Строгий учитель и надежный помощник, если ваше самое большое желание — поступить в один из самых престижных и лучших вузов страны, готовящий специалистов в области электроники, космонавтики, лазерной техники, математического моделирования, биофизики.

Скажем сразу, ЗФТШ — не для любого мечтающего школьника. Она для энергичного, одаренного, трудолюбивого и целеустремленного. Именно для такого учащегося и существует ЗФТШ и всегда готова ему помочь. Помочь в том, чтобы достичь уровня абитуриента первоклассного вуза и прежде всего Физтеха, при котором эта школа родилась и работает уже 25 лет.



Вуз с углубленным изучением математики и физики, тем более работающий и обучающий по своей уникальной системе, не может принять любого выпускника средней школы. Для обучения в таком вузе нужен высокий уровень знаний, умений, навыков. За 3 года активной учебы в ЗФТШ такой уровень может быть достигнут. Школа углубляет и расширяет физико-математические знания своих учащихся, приучает к самостоятельной и тщательной работе, готовит их к сдаче вступительных экзаменов и дальнейшему обучению в высшей школе.

Программа и методика ЗФТШ шлифовались многие годы, прекрасно зарекомендовали и оправдали себя. За годы работы ЗФТШ через нее прошли 44 000 школьников, 7 000 из них стали физтехами, и сейчас каждый второй студент МФТИ — выпускник ЗФТШ.

ЗФТШ — это уже целая история. Даже, можно сказать,— философия. Если вы будете студентами, вам это станет ясно. Недаром один выпускник ЗФТШ сказал (уже будучи студентом), что МФТИ — это одна большая ЗФТШ.

Т. Пиголкина,
методист-консультант по математике ЗФТШ,
Т. Чугунова, директор ЗФТШ

Факультативы
и
кружки

Новый набор в ЗФТШ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на *территории РСФСР, в 9, 10 и 11* классы на 1992/93 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучения в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1992/93 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка или факультатива следует выслать *до 25 мая 1992 года* по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив». (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ высылать не надо.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах в ряде московских школ, набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону: 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу выполните на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку на-

	Образец
1. Область (край или АССР)	Тульская область
2. Фамилия, имя, отчество	Алешин Николай Васильевич
3. Класс, в котором Вы учитесь	девятый
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)	№ 6, ул. Центральная 5, г. Алексин, телефон: 2-73-64, обычная
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя	
по физике	Тоткал Нина Семеновна
по математике	Тарасова Ирина Анатольевна
6. Место работы и должность родителей	
отец	МКЩЗ, штамповщик
мать	Алексинский химкомбинат, цех № 2, аппаратчица
7. Подробный домашний адрес	301340, г. Алексин Тульской обл., ул. Горная, д. 6-а, кв. 74, тел. 2-60-93
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

№ п/п													
Ф.													
М.													

клейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу (см. с. 67).

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание.

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1992 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1992 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Мурманской, Новгородской, Петербургской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 2—8 — для девятых классов, 7—13 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. (Номера классов указаны для текущего, 1991/92 учебного года.)

Вступительное задание

Физика

1. Велосипедист едет по пересеченной местности. Когда дорога идет в гору, его скорость составляет 5 км/ч, с горы — 20 км/ч. Какова его средняя скорость, если общий путь, пройденный при подъеме, такой же, как и при спуске?

2. Три грузовика возят песок из пункта A в пункт B. Из пункта A они отправляются с интервалом в 1 ч. Скорость груженого автомобиля $v=30$ км/ч. Разгрузившись в B, они сразу же отправляются обратно со скоростью $u=50$ км/ч. На обратном пути первый грузовик встречает вышедшие после него машины. Через какое время после встречи с третьим грузовиком первый грузовик вернется в пункт A? Расстояние между A и B равно 100 км.

3. Двигательная установка ракеты состоит из пяти двигателей: основного, развивающего мощность P_1, и четырех вспомогательных, развивающих мощность P_2 каждый. Во время испытаний первые t секунд работает только основной двигатель, а затем на такое же время включаются еще и вспомогательные двигатели. Известно, что все двигатели имеют одно и то же значение КПД. Определите КПД двигателя, если известно, что за время испытаний израсходовано топливо массой M с теплотворной способностью q.

4. Деревянный кубик плавает в воде так, что в воду погружено 90 % его объема. Какая часть объема будет погружена в воду, если поверх воды налить слой масла с плотностью $\rho=0,8$ г/см^3, полностью закрывающий кубик?

5. Сколько медных деталей, нагретых до 100 °С и имеющих массу $m=1$ кг каждая, можно охладить до температуры 30 °С в сосуде, содержащем $V=100$ л воды при температуре 15 °С? Удельная теплоемкость меди $c_м=376$ Дж/(кг · К), воды $c_в=4,2$ кДж/(кг · К). Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

6. В сосуде находится лед. Для нагревания сосуда вместе со льдом от 270 К до 272 К требуется количество теплоты Q. Для дальнейшего нагревания от 272 К до 274 К требуется количество теплоты в 20 раз большее, чем Q. Определите массу льда в сосуде до нагревания. Потерями тепла пренебречь. Теплоемкость сосуда $C=600$ Дж/К.

7. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление R увеличить в три раза? Сопротивление вольтметра равно r, а внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

8. Какую площадь поперечного сечения должна иметь свинцовая проволока предохранителя, чтобы при прохождении через него тока $I=1$ А «перегорание» происходило через $\tau=1$ с? Начальная температура проволоки $t_0=20$ °С, температура плавления свинца $t=327$ °С, длина проволоки $L=2$ см, удельное сопротивление свинца $\rho=1,6\cdot10^{-6}$ Ом · м, его удельная теплоемкость $c=125$ Дж/(кг · К) и плотность $d=11,3$ г/см^3. Потерями тепла в окружающее пространство пренебречь.

9. Пуля массой m, летящая горизонтально, попадает в деревянный брусок массой M, подвешенный на нити длиной L, и застре-

вает в нем. Какова была скорость пули перед попаданием в брусок, если известно, что максимальный угол отклонения нити от вертикали равен α?

10. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, лежит брусок. Если бруску сообщить скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, то до полной остановки он пройдет расстояние L_1. Если же бруску сообщить такую же по величине скорость, но направленную вниз вдоль наклонной плоскости, то он пройдет до полной остановки расстояние L_2. Определите коэффициент трения бруска с поверхностью наклонной плоскости, если известно, что $L_2/L_1=3$.

11. Моль идеального одноатомного газа, первоначально находившийся при нормальных условиях, переводят в состояние с вдвое бо́льшим давлением. Процесс перевода слагается из двух участков — изобары и изохоры. Газу во время процесса подведено количество теплоты Q. Найдите конечную температуру газа.

12. В вертикально расположенном цилиндре под поршнем массой $M=1$ кг находится влажный воздух с относительной влажностью $\varphi=100\,\%$. Цилиндр отклоняют от вертикали на угол $\alpha=30°$. Определите влажность воздуха в новом положении. Температура поддерживается постоянной и равной $t=100\,°\mathrm{C}$. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, сечение поршня $S=10^{-3}$ м^2.

13. Два последовательно соединенных конденсатора с емкостями $C_1=C$ и $C_2=2C$ подключают к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$. Параллельно конденсатору C_1 подключают конденсатор с неизвестной емкостью C_3. Разность потенциалов на конденсаторе C_2 увеличилась при этом в два раза. Определите емкость конденсатора C_3.

Математика

1. В десятичной записи некоторого числа 1996 цифр: 1992 тройки и цифры 1, 9, 9, 2 выписаны в произвольном порядке. Докажите, что это число не может быть полным квадратом.

2. Докажите, что из всех треугольников с данным основанием и данной высотой, опущенной на это основание, равнобедренный имеет наименьший периметр.

3. Найдите все такие натуральные числа k, что уравнение

$$x^2-kx+k=0$$

имеет целые корни.

4. Решите неравенство

$$\left|\frac{1+x}{1-x}\right|<1.$$

5. Составьте из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 два трехзначных числа так, чтобы их произведение было наибольшим (каждая цифра должна быть использована один раз).

6. Найдите все значения параметра a, при которых каждое решение неравенства $1\leqslant x\leqslant 2$ является решением неравенства $x^2-ax+1<0$.

7. На координатной плоскости задан равнобедренный треугольник, координаты вершин которого — целые числа, а одна из сторон равна $2\sqrt{2}$. Докажите, что площадь этого треугольника выражается целым числом.

8. При каких значениях параметров a и b многочлен

$$x^4+24x^3+ax^2+1992x+b$$

будет квадратом многочлена второй степени?

9. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD ($\angle C=90°$). Найдите $\operatorname{tg} A$, если длины отрезков AD, AC и BC образуют геометрическую прогрессию.

10. Бильярд имеет форму правильного треугольника со стороной a. Точечный шар, выпущенный из вершины, после трех отражений от бортов попал в другую вершину. Найдите длину пути шара.

11. Модели многогранников делают из плоских разверток. Найдите все развертки куба и изобразите их на рисунке. Можно ли какими-то одинаковыми развертками замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий?

12. Окружность и парабола пересекаются в четырех точках. Докажите, что центр тяжести этих точек лежит на оси параболы.

Задачи заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ

Специализированные учебно-научные центры МГУ и НГУ, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах, проводят заочные вступительные экзамены по математике и физике для учащихся 9-х и 10-х классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой.

Успешно выдержавшие заочный экзамен по решению приемной комиссии будут в апреле — мае приглашены в областные центры СССР на устный экзамен.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради. На первой странице укажите свои данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Домашний адрес (подробно), индекс
3. Подробное название школы и класс

Работы отправляйте простыми бандеролями (в работу вложите почтовый конверт с вашим домашним адресом). Если вы проживаете в Европейской части РСФСР или в Белоруссии, высылайте вашу работу по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 11, ФМШ МГУ, приемная комиссия, заочный экзамен. Если же вы живете на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет. Срок отправки работ — не позднее 14 февраля 1992 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут. Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

9 класс

1. Найдите все числа x и y, для которых

$$5x^2+2y^2-6xy+10x-6y+5=0.$$

2. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем из полученной разности вычеркнули одну цифру. Какая цифра была вычеркнута, если сумма оставшихся цифр равна 1991?

3. Какая из дробей больше:

$$\frac{a+b}{b+d} \text{ или } \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right),$$

если $a/b<c/d$ и $b<d$?

4. Окружность с центром в середине стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC и CD. Найдите длину стороны AD, если $AB=a$, $CD=b$.

5. Три груза, массой $m=1$ кг каждый, связаны через систему невесомых блоков невесомыми и нерастяжимыми нитями (рис. 1). Определите силу, действующую со стороны системы на потолок. Трением пренебречь.

6. Подводный аппарат массой m имеет вид цилиндра с площадью основания S, составленного из двух полых половинок. Аппарат находится в положении устойчивого равновесия на глубине H, равной расстоянию от поверхности воды до средней линии цилиндра. Найдите силу, действующую на одну половинку цилиндра со стороны другой половинки.

7. Найдите вес тела массой m на экваторе. Радиус Земли на экваторе $R=6350$ км.

8. Два спортсмена перебрасывают мяч. Мяч, брошенный под углом к горизонту, находится в полете $\tau=2$ с. На какую максимальную высоту поднимается мяч?

10 класс

1. Ученик, решая квадратное уравнение, допустил ошибку при переписывании, переставив между собой старший коэффициент и свободный член уравнения. При этом оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй корень, равный числу -3, нет. Найдите корни исходного уравнения.

2. Найдите все числа x и y, для которых $y^4+4y^2x-11y^2+4xy-8y+8x^2-40x+52=0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 30°, H — точка пересечения высот, A_1 — центр окружности, вписанной в треугольник HBC, C_1 — центр окружности, вписанной в треугольник HBA. Найдите угол между прямыми AA_1 и CC_1.

4. Какая из дробей больше:

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \text{ или } \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}\right)$$

если $a_1/b_1<a_2/b_2<a_3/b_3$ и $b_1<b_2<b_3$?

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка пересечения биссектрис углов ABC и BCD лежит на стороне AD. Найдите длину стороны AD, если известно, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность и $AB=a$, $CD=b$.

6. Два груза, массой $m=1$ кг каждый, соединены через систему невесомых блоков невесомыми и нерастяжимыми нитями (рис. 2). Определите силу, действующую со стороны системы на потолок.

7. Найдите заряд, который протечет через ключ после его замыкания (рис. 3). Напряжение источника, сопротивления резисторов и емкости конденсаторов известны.

8. Протон массой m движется в однородных электрическом и магнитном полях. Векторы напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$ направлены вдоль оси Z. В момент времени $\tau=0$ протон находился в начале координат, его начальная скорость была направлена вдоль оси X. Найдите координаты точек пересечения траектории протона с осью Z.

9. Пробирка длиной l, содержащая воздух с относительной влажностью $\varphi=100\,\%$, полностью погружена в воду. На каком уровне установится поверхность воды в пробирке? Температура в начальном и конечном состояниях одинакова. Давление насыщенных паров $p_н<p_{атм}$.

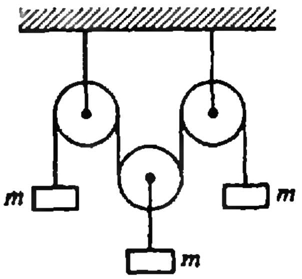


Рис. 1.

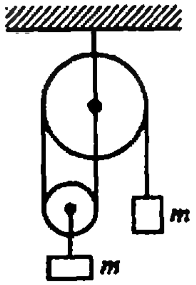


Рис. 2.

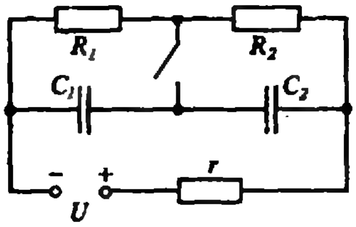


Рис. 3.

В ночь перед Рождеством

В ночь перед Рождеством, сами знаете, непременно происходят чудеса. То Дед Мороз принесет подарки, а то черт украдет луну.

А то еще некоторые гадают и очень интересные вещи про себя узнают. Вот Светлана (помните, у Жуковского?) башмачок за ворота кидала. А Татьяна (это уже у Пушкина) спрашивала имя у первого встречного. «Смотрит он — и отвечает: «Агафон». Помните? Кто ставит свечи перед зеркалом... Кто воск капает... Да мало ли способов выведать у потусторонних сил свое будущее?

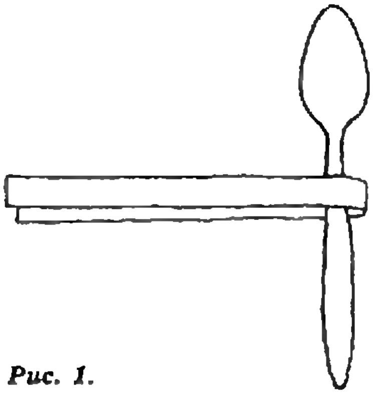


Рис. 1.

Так и в нынешнее время: собираются вечером у елки, устраивают обстановку потаинственнее — и начинают священнодействовать. У каждого любителя гадания свой метод. Например, одна моя хорошая знакомая*) предпочитает вызывать духов.

Делается это очень просто. Никаких особых приспособлений не требуется. Достаточно найти в хозяйстве четыре чайные ложки и лист бумаги.

Не спрашивайте, почему ложки именно чайные, какого качества должна быть бумага и какие заклинания положено произносить. Признаться, меня интересовала только техническая сторона дела.

Технология же вызова духов такова. Вы берете в одну руку ложку, в другую — сложенную пополам узкую длинную полосочку бумаги (см. рис. 1). Теперь продеваете в бумажную петельку ручку ложки и, держа бумажку за сложенные вместе концы, плотно наматываете ее на ложку (рис. 2). Готово? Кладите ложку на стол. Теперь повторяем ту же операцию с остальными ложечками. Надо расположить их крестом. Зачем — не могу вам сказать. Возможно, тогда духи-христиане охотнее явятся на ваш зов.

Ну вот, ложки разложены. Можете спрашивать: «Николай Васильевич Гоголь, здесь ли Вы?» (Вы понимаете, Гоголя я называю для примера. Но и в самом деле, хотелось бы знать — он сам видел черта с луной под мышкой или поверил свидетельству Солохи?) Теперь разматываем бумажки, взявшись за оба конца полоски одной рукой. Если почтенный дух пришел и готов беседовать, происходит чудо: хотя бы одна из ложечек... вынимается из бумажной петельки, будто вы ее и не продевали!

Дальше можно спрашивать о чем угодно. Заматываете ваши ложки снова, задаете незримо присутствующему авторитету вопрос, разворачиваете бумажки. Случилось вышеописанное чудо — «да», не случилось — «нет».

Сильнейшее впечатление это гадание произвело на моего соседа. Он не верит в духов — уж такой законченный материалист. К тому же Лев Толстой обещал ему генеральские погоны в ближайшем будущем (а он даже не майор).

Но если не веришь в потусторонние силы, приходится искать научное объяснение. Мой сосед наутро после гадания принялся ставить эксперименты. Оказалось, что шариковая ручка, ключ от квартиры, ржавый гвоздь ничем не хуже чайных ложек — бумажка довольно часто снимается и с этих предметов. Он даже установил, что «маленькое чудо» происходит приблизительно в одном случае из четырех. Это значит, что при гадании по всем правилам положительный ответ получается достаточно часто (ложек четыре, и нужно, чтобы полоска снялась хотя бы с одной).

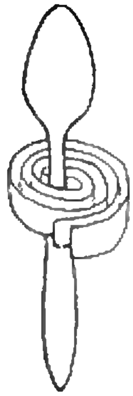


Рис. 2.

Но объяснения найти не удавалось.

И тут пришел математик. Он один раз повторил опыт, засмеялся и растолковал, в чем тут дело.

В самом деле, в чем?

(В конце номера есть ответ.)

А. Котова

---

*) А также дяди школьника из Ростова Олега Ярошенко, предложившего тему этой заметки.

Ответы, указания, решения

емы счисления

1. 201011011100010.
2. $((24\cdot60+2)60+32)60+42=5\,193\,162$.
3. $9(18\cdot20^4)+6(18\cdot20^3)+14(18\cdot20^2)+$
$+13(18\cdot20)+15\cdot20+1=12\,489\,781$.
4. а) 722634; б) 7180; в) 11110001001000000.
5. Полезно заготовить таблицу степеней 2:

n	2^n
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

n	2^n
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

Ответ: $P=32+4=36$, $Q=256+64+16+$
$+4+1=341$.

6.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

7. а) $X=19$; б) запись Y не означает никакого числа (см. упражнение 8); в) $Z=49$.

8. Любая последовательность «$a_na_{n-1}\dots a_0$», в которой $a_{3k}\leqslant1$, $a_{3k+1}\leqslant2$, $a_{3k+2}\leqslant1$ при всех k и после двойки нигде не стоит единица (проверьте, что это условие необходимо и достаточно для того, чтобы неравенство $a_{k+1}>a_kq_k+$ $+a_{k-1}q_{k-1}+\dots+a_0q_0$ выполнялось при всех k).

9. Да. Первое больше.

10. в) Если гири класть на одну чашку весов, то наименьшее необходимое число гирь — 10. Можно взять, например, такие гири: 1, 2, 4, 8, ..., $512=2^9$. Девяти гирь (любого веса) заведомо недостаточно, поскольку из них можно выбрать всего $2^9-1=511$ разных комбинаций, состоящих из одной или нескольких гирь; даже если все эти комбинации дают разные веса, то все равно мы не получим все веса от 1 до 1000.

Если гири класть на обе чашки весов, то наименьшее необходимое число гирь — 7. (Например, годятся такие: 1, 3, 9, 27, ..., $729=3^6$; см. упражнение 11.) Шести гирь недостаточно, поскольку отображений множества из 6 элементов во множество из трех элементов {левая чашка; правая чашка; коробка с гирями} всего $3^6=729$, а различных чисел $P_л-P_п$, где $P_л$ и $P_п$ — вес гирь на левой и правой чашке весов, должно получаться не менее 2001 (от -1000 до $+1000$).

13. $2q_n\leqslant q_{n+1}$; $q_{n-1}+q_n\leqslant q_{n+1}$.

14. а) $\underbrace{10\dots0}_{k-l-1}\,\underbrace{10\dots0}_{l}$, если $k-l\geqslant2$;

$\underbrace{10\dots0}_{k+1}$, если $k-l=1$; $100\underbrace{10\dots0}_{l-2}$, если $k=l\geqslant2$;

и $10+10=101$; $1+1=10$;

б) $\underbrace{100\dots0}_{2m+1}$; например, $10101+1=100000$;

в) $\underbrace{1010\dots10}_{2m+2}$; например, $10101+10000=101010$.

15. Рассматривая таблицу, где числа записаны в фибоначчиевой системе счисления, нетрудно заметить, что a_k — последовательность всех натуральных чисел, оканчивающихся в этой системе цифрой 1 или четным число нулей, b_k — последовательность всех чисел, оканчивающихся нечетным числом нулей (при этом b_k получается из a_k приписыванием одного нуля в конце). Продолжите нашу таблицу, убедитесь, что такая закономерность сохраняется, и докажите это строго. Теперь легко ответить на вопрос о числе 100 (сто): поскольку в системе с базисом 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... $100=89+8+3=1000010100$, то 100 принадлежит последовательности a_k, соответствующее b_k равно $10000101000=144+13+$ $+5=162$, $k=b_k-a_k=100010100=55+5+$ $+2=62$, т. е. $100=a_{62}$.

нт» для младших школьников

1. Обозначим количество купленных авторучек через x, портфелей через y и микрокалькуляторов — через z. Из условий задачи составляем систему уравнений: $x+y+z=100$, $x+10y+$ $+50z=500$. Отсюда $9y=400-49z$. Число z неотрицательно, но меньше девяти. Единственное значение z в этом диапазоне, при котором $400-49z$ делится на 9, равно 1. При этом $y=39$, и $x=60$.

2. Из условия следует, что числа в клетках, отстоящих друг от друга на две клетки, равны между собой. Отсюда, обозначив через x число в первой клетке, получим следующее заполнение таблицы:

17	20	x	17	20	x	17	20	x	17	20	x

Так как сумма всех 12 чисел равна 200, то $4x+148=200$, отсюда $x=13$.

3. Так как первоначальное число яблок делится на 3, то обозначим его через $3k$. Старший сын оставил $2k+1$ яблоко. Это число тоже должно делиться на 3: $2k+1=3p$. Он оставил

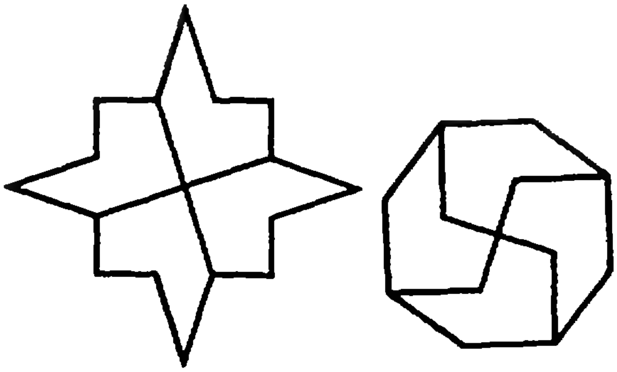


Рис. 1.

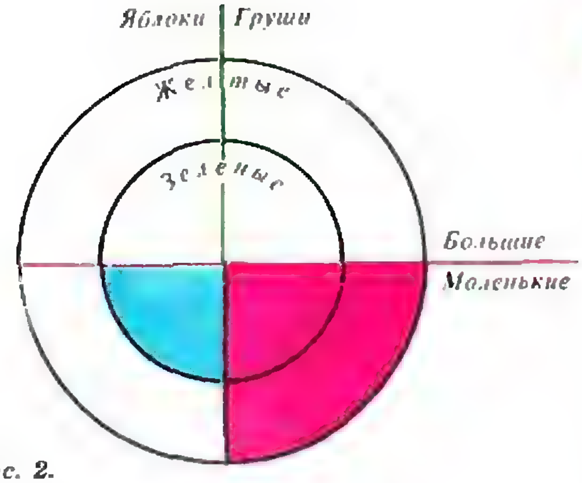


Рис. 2.

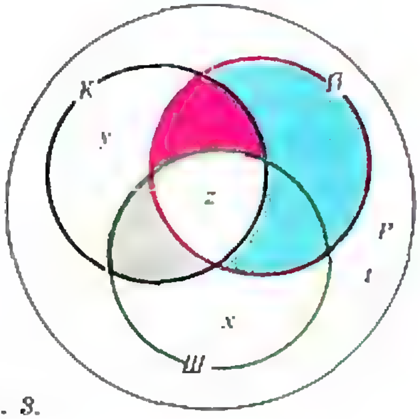


Рис. 3.

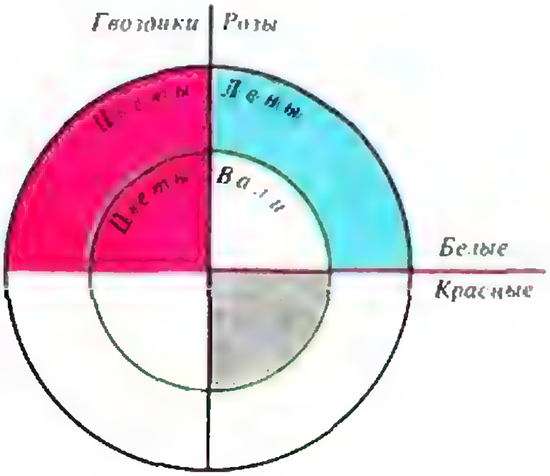


Рис. 4.

$n=2p+1$ яблоко. Выражая p через k, получим: $n=(4k+5)/3$. Это число будет целым при $k=3s+1$. Отсюда $n=4s+3$. Тогда $n=3$ при $s=0$, $n=7$ при $s=1$, $n>10$ при $s>1$. Но по условию n не делится на 3, следовательно, $n=7$, $s=1$, $k=3$. Итак, первоначально в корзине было $3\cdot4=12$ яблок.

4. См. рис. 1.

5. $145826+948947=1094773$.

Диаграммы Эйлера — Венна

1. Больших желтых яблок было 7. Соответствующая диаграмма Эйлера — Венна изображена на рисунке 2.

2. Бригада строителей состояла из 14 человек. Условия задачи приводят к рисунку 3. Составив систему уравнений и приняв неизвестное y за параметр, получим

$$x=(15-3y)/2,\ z=(5y-9)/3,\ t=(15-y)/2.$$

Дополнительные условия сводятся к следующим требованиям: $x\neq0$, $\frac{9}{5}<y\leqslant5$, y — нечетное число. Отсюда $y=3$.

3. В туристической секции было 15 ребят.

4. Лена принесла 5 красных гвоздик и 4 красные розы, а Валя принесла 6 красных гвоздик и 3 белые розы. Соответствующая диаграмма Эйлера — Венна изображена на рисунке 4. Составив систему уравнений и приняв неизвестное t за параметр, получим

$$x=(5t-10)/2,\ z=(18-3t)/2,\ y=5t-14.$$

Дополнительные условия сводятся к следующим требованиям: $\frac{14}{5}<t\leqslant6$, t — четное число; среди цветов были белые цветы, значит, $z\neq0$. Отсюда $t=4$.

5. В походе участвоввло 15 ребят.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. В медной.

2. Более мощная лампа имеет меньшее сопротивление, а сила тока, протекающего через лампы, одинакова. Следовательно, менее мощная лампа будет гореть ярче.

3. В резисторе сопротивлением R_2.

4. В момент замыкания ток в цепи будет наибольшим из-за того, что сопротивление холодного металла меньше, чем раскаленного.

5. Теплоотдача увеличится в соответствии с законом Джоуля — Ленца.

6. См. рис. 5.

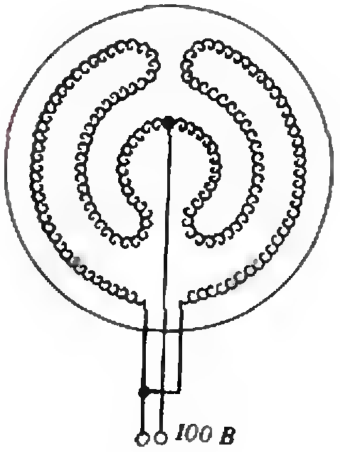


Рис. 5.

7. Сопротивление охлажденной части проволоки становится меньше сопротивления неохлажденной части, общий ток в цепи возрастает, и на неохлажденной части проволоки выделяется больше тепла.

8. Так как теплоотдача растянутой части спирали больше, чем нерастянутой, ее температура будет меньше. Тогда по причинам, указанным в ответе к предыдущей задаче, показания вольтметра, подключенного к нерастянутой части спирали, будут выше.

9. Мощность, потребляемая утюгом в первый момент после включения, во много раз больше номинальной, так как сопротивление холодной спирали мало́. Поэтому велико падение напряжения на подводящих проводах. По мере нагревания спирали потребляемая утюгом мощность падает, приближаясь к номинальной.

10. На нагревание комнаты.

11. В первом случае.

12. В первом случае ток через лампочку *2* начинает идти после того, как нить лампы *1* накалилась и ее сопротивление стало значительным. Во втором случае ток через лампочку 2 начинает идти сразу, т. е. когда нить лампы *1* еще не нагрелась и ее сопротивление мало́.

13. При нагревании полупроводника током его электрическое сопротивление уменьшается.

14. После подключения к источнику проволока начинает нагреваться, ее длина и сопротивление увеличиваются. Вследствие этого уменьшается ток, и вместе с ним — и количество выделившегося тепла. В результате длина проволоки уменьшается. И т. д.

15. Во время введения сердечника в соленоиде возникает ЭДС индукции, вызывающая падение тока в цепи. Следовательно, накал лампы будет уменьшаться.

Микроопыт

Необходимо настроить приемник на программу «Маяк» и с помощью счетчика найти количество электроэнергии, израсходованной утюгом за промежуток между двумя позывными «Маяка», т. е. за полчаса. Затем можно рассчитать мощность утюга и, зная напряжение в сети, определить сопротивление утюга.

[redacted] обмануть интеграл

1. $l=\dfrac{v_0^2}{4\mu g}\,\dfrac{\sin^2\alpha-2\mu^2\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(\sin^2\alpha-\mu^2\cos^2\alpha)}.$

2. $d=Eq^2Bm\,(\beta^2+(Bq)^2)^{-3/2}.$

3. $Q=\dfrac{(L_1/2)(\mathscr{E}/r)^2}{1+R/r+L_2/L_1}.$

4. $Q=\dfrac{\mathscr{E}^2RLC}{2\,(R+r)(L+rRC)}.$

[redacted] у задачу. Возможны варианты

1. $a=g\,\dfrac{m_2-m_1\,(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}$, если $m_2/m_1>\sin\alpha+\mu\cos\alpha$;

$a=g\,\dfrac{m_1\,(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-m_2}{m_1+m_2}$, если $m_2/m_1<\sin\alpha-\mu\cos\alpha$;

$a=0$, если $\sin\alpha-\mu\cos\alpha\leqslant m_2/m_1\leqslant\sin\alpha+\mu\cos\alpha$.

2. $t=\dfrac{c_1m_1t_1-(c_2t_2+\lambda)m_2}{c_1\,(m_1+m_2)}$,

если $\dfrac{m_2}{m_1}<\dfrac{c_1t_1}{c_2t_2+\lambda}$;

$t=\dfrac{c_2m_2t_2-(c_1t_1+\lambda)\,m_1}{c_2\,(m_1+m_2)}$, если $\dfrac{m_2}{m_1}>\dfrac{c_1t_1+\lambda}{c_2t_2}$;

$t=0$, если $\dfrac{c_1t_1}{c_2t_2+\lambda}\leqslant\dfrac{m_2}{m_1}\leqslant\dfrac{c_1t_1+\lambda}{c_2t_2}$.

3. $d_1=\dfrac{(l-R)\,F}{l-R-F}$ и $d_2=\dfrac{lF}{l-F}$, если $l>R+F$;

$d=\dfrac{lF}{l-F}$, если $F<l<R+F$; решения нет, если $l<F$.

[redacted] II Международная математическая олимпиада

Решения задач 1, 4, 5, 6, вошедших в «Задачник «Кванта» (задачи М1317 — М1320), будут опубликованы позже.

2. Мы имеем $a_1=1$ и $a_2=p$, где p должно быть наименьшим простым числом, которое не делит число n: $a_k=n-1$ и $r=p-1$ — разность прогрессии.

1) Если n — нечетное число, то $a_2=2$, $r=1$, и прогрессия имеет вид 1, 2, ..., $n-1$. Отсюда следует, что n является простым числом.

2) Если n — четное число, то $p\geqslant 3$.

а) Если $p=3$, то $r=2$ и прогрессия имеет вид 1, 3, 5, ..., $n-1$. Отсюда очевидно, что n является степенью двойки: $n=2^m$.

б) Если $p>3$, то n делится на 3. Мы имеем $a_k=a_1+r(k-1)$, откуда $n-1=1+(p-1)(k-1)$. Следовательно, $(p-1)$ делит $(n-2)$. Возьмем произвольный простой делитель q числа $(p-1)$. Тогда q делит $(n-2)$. Так как $q<p$, то q делит n. Общий простой делитель чисел n и $n-2$ может быть только двойкой, поэтому $p-1=2^i$ и $p=2^i+1$. Из простоты числа p следует четность числа i. Далее, $a_3=a_1+2r=1+2(p-1)=2p-1=2^{i+1}+1\equiv 0 \pmod 3$.

Это означает, что 3 делит a_3 и 3 делит n, что противоречит взаимной простоте чисел a_3 и n. Невозможность случая б) завершает доказательство.

3. Пусть A_p — множество чисел из S, делящихся на p, т. е. $A_p=S\cap pN$, и $A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$.

Легко видеть, что $|A_2|=140$, $|A_3|=93$, $|A_5|=56$, $|A_7|=40$. Аналогично, $|A_6|=|A_2\cap A_3|=46$, $|A_{10}|=|A_2\cap A_5|=28$, $|A_{14}|=|A_2\cap A_7|=20$, $|A_{15}|=|A_3\cap A_5|=18$, $|A_{21}|=|A_3\cap A_7|=13$, $|A_{35}|=|A_5\cap A_7|=8$, $|A_2\cap A_3\cap A_5|=9$, $|A_2\cap A_3\cap A_7|=6$, $|A_2\cap A_5\cap A_7|=4$, $|A_3\cap A_5\cap A_7|=2$, $|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|=1$. По формуле включений — исключений $|A|=|A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7|=140+93+56+40-46-28-20-18-13-8+9+6+4+2-1=216$.

По принципу Дирихле среди любых пяти чисел множества A найдутся два числа, которые попадают в одно множество A_p ($p=$

BeatriceGloria_personal library

$= 2, 3, 5, 7$). Эти два числа не могут быть взаимно просты. Следовательно, $n > 216$.

Множество A содержит четыре простых числа $\{2, 3, 5, 7\}$ и 212 составных. Из чисел множества S, не лежащих в A, составными являются ровно восемь: 11^2, 11×13, 11×17, 11×19, 11×23, 13^2, 13×17, 13×19.

Таким образом, множество S содержит в точности 220 составных чисел и 60 несоставных (единица и 59 простых).

Пусть T — произвольное множество чисел, удовлетворяющих условиям: $T \subset S$, $|T| = 217$. Докажем, что в T обязательно найдется 5 попарно взаимно простых чисел. Предположим, что это не так. Тогда T содержит максимум четыре несоставных числа (единица и простые), иначе из них можно было бы составить искомую пятерку. Тогда множество T содержит минимум $217 - 4 = 213$ составных чисел, а множество $S \setminus T$ — максимум $220 - 213 = 7$ составных чисел. Следовательно, множество T обязано содержать целиком хотя бы одну из восьми перечисленных ниже пятерок, в каждой из которых все числа попарно взаимно просты:

$$\begin{gathered}
\{2\times 23,\ 3\times 19,\ 5\times 17,\ 7\times 13,\ 11\times 11\},\\
\{2\times 29,\ 3\times 23,\ 5\times 19,\ 7\times 17,\ 11\times 13\},\\
\{2\times 31,\ 3\times 29,\ 5\times 23,\ 7\times 19,\ 11\times 17\},\\
\{2\times 37,\ 3\times 31,\ 5\times 29,\ 7\times 23,\ 11\times 19\},\\
\{2\times 41,\ 3\times 37,\ 5\times 31,\ 7\times 29,\ 11\times 23\},\\
\{2\times 43,\ 3\times 41,\ 5\times 37,\ 7\times 31,\ 13\times 17\},\\
\{2\times 47,\ 3\times 43,\ 5\times 41,\ 7\times 37,\ 13\times 19\},\\
\{2^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ 13^2\}.
\end{gathered}$$

Международная олимпиада по информатике

I тур. В основе решения задачи лежит перебор с возвратом. На каждом шаге путем последовательного использования представленных правил определяется возможность размещения следующего номера в незанятых позициях матрицы. Процесс заканчивается, если удается матрицу заполнить полностью или ни одно из имеющихся правил не может быть использовано для заполнения таблицы. В последнем случае изменяется последовательность выбора правил и процесс повторяется. Если при выполнении задания А) достаточно определить только один способ нумерации таблицы для заданной стартовой позиции, то в задании В) требуется определить все возможные варианты.

Проверка задания А) осуществлялась путем визуального контроля результатов заполнения матрицы. Правильные ответы для задания В) следующие (приведена стартовая точка и количество вариантов): (1, 1) — 552; (1, 2) — 548; (1, 3) — 552; (1, 4) — 548; (1, 5) — 552; (2, 2) — 412; (2, 3) — 400; (2, 4) — 412; (2, 5) — 548; (3, 3) — 352; (3, 4) — 400; (3, 5) — 552; (4, 4) — 412; (4, 5) — 548; (5, 5) — 552.

II тур. При выполнении задания 1 следует обратить внимание на правило формирования S-термов. В частности, в соответствии с определением последовательность SSS не является S-термом. Для $n = 1$ число возможных термов равно 1, для $n = 2$ — 1, для $n = 3$ — 2, для $n = 4$ — 5, для $n = 5$ — 14, для $n = 8$ — 429, для $n = 10$ — 4862.

В качестве структуры данных для внутреннего представления S-термов (см. задание 2) может быть использован либо связанный список, либо двоичное дерево. Например, для S-терма (((S(SS))((SS)S))((SS)(SS))) линейный список может иметь вид

$$\to 3 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0 \to 2 \to 0 \to 1 \to 0 \to \mathrm{nil}.$$

При выполнении задания 4 необходимо четко уяснить понятие «ненормализованный» S-терм. В частности, если к исходному S-терму нельзя применить процедуру редукции, то такой S-терм не считается «ненормализованным». Если задан S-терм вида ((((SS)(SS))S)(SS)), то в результате использования процедуры нормализации получится последовательность S-термов

$$\begin{gathered}
(((SS)((SS)S))(SS)) \to ((S(SS))(((SS)S))SS))) \to\\
\to ((S(SS))((S(SS))(S(SS)))).
\end{gathered}$$

В то же время нормализация S-терма ((((SS)S)((SS)S))((SS)S)) после 30 шагов не закончится, поэтому такой S-терм будет считаться «ненормализованным».

Для проверки правильности выполнения задания 5 можно воспользоваться следующей таблицей:

n	Число S-термов	Число «ненормализованных» S-термов
1	1	0
2	1	0
3	2	0
4	5	0
5	14	0
6	42	0
7	132	2
8	429	41
9	1430	276

Ночь перед Рождеством

Вы, конечно, попробовали поставить эксперимент? Тогда вы увидели, что как только вы отпускаете пальцы, бумажка начинает разма-

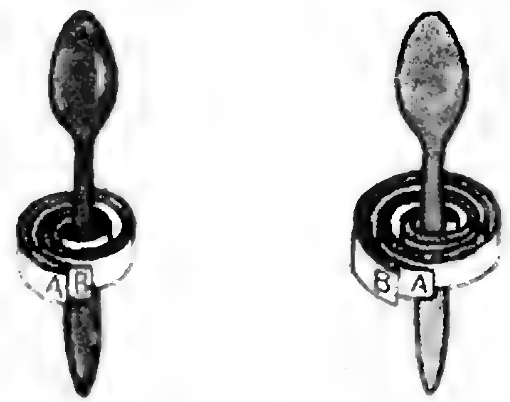


Рис. 6.

тываться и делает несколько оборотов вокруг ложки. Вот тут и «зарыта собака». Посмотрите на рисунок 6. Когда бумажка намотана на ложку, одна из половинок полоски — снаружи (*A*), другая — внутри (*B*). При разматывании эти слои могут поменяться местами, и слой *A* окажется под слоем *B*. Видите? Ложка оказалась вне петли! Это трудно заметить глазом, если вы обернули бумажку раз семь. Но теперь «маленькое чудо» неизбежно. Будете еще беспокоить души предков по всяким пустякам?

[redacted]т для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Первое число — 147, второе — 111.

2. Рассмотрим грань, на которой написано число 35. Если на противоположной ей грани стоит нечетное число, то на двух других невидимых гранях стоят разные четные простые числа. Но существует единственное простое четное число — 2, следовательно, оно и стоит против числа 35. Тогда сумма чисел на противоположных гранях равна 37, и на гранях, противоположных граням с числами 14 и 18, стоят числа 23 и 19.

3. Играло 8 шахматистов.

4. Зашифровано слово ФУФАЙКА.

5. Отрежем от пятиугольника треугольники *ABC* и *CDE* (рис. 7) и сложим из них новый треугольник (рис. 8). Очевидно, что полученный треугольник равен оставшемуся треугольнику *ACE*. Нетрудно заметить, что площадь каждого из этих треугольников равна 0,5, следовательно, площадь пятиугольника равна 1.

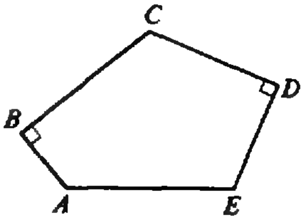


Рис. 7.

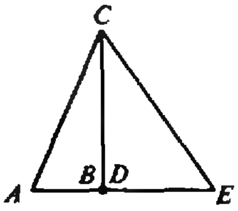


Рис. 8.

Напечатано в 1991 году

	№	с.
К нашим читателям	1	2

Статьи по математике

Акулич И. Странный император и странный полководец	2	22
Андреев Е. Невписываемые многогранники	2	10
Арнольд В. Меандры	3	11
Болтянский В. Загадка «аксиомы параллельных»	4	8
Депман И. Совершенные числа	5	13
Из любительских задач А. Д. Сахарова	5	11
Кокорев И., Курляндчик Л. Большой торт на маленьких тарелочках	7	13
Курляндчик Л., Файбусович А. История одного неравенства	4	14
Матов В., Пекарь Е. Освещение пространства, конусы и выпуклые множества	8	14
Овсиенко В. Сколько на Земле кривых?	1	10
Овсиенко В. Анализ и неравенства	3	15
Панов А. Движение по поверхности и удар	11	2
Рейтман М. Динамическое программирование	10	2
Савин А. Перпетуум-мобиле и математика	6	17
Соловьев Ю. Огюстен Луи Коши и математическая индукция	3	13
Стюарт Я. Сказка о рождественской теореме Ферма	9	12
Тихомиров В. Что такое размерность?	6	2
Тихомиров В. Теорема Ферма — Эйлера о двух квадратах	10	9
Чванов В. «Нет линии прямей кольца...»	7	18
Яглом И. Системы счисления	12	14

Статьи по физике

Васильев А. ЭМАП — новое направление в радиоспектроскопии твердых тел	8	2
Винокур Р. О водяном звере и акустическом резонансе	7	8
Володин А. Осязающие микроскопы	4	2
Гинзбург В. Что сегодня в физике и астрофизике особенно важно и интересно?	7	2
Гурьяшкин Л., Стасенко А. История одного падения	2	2
Духовнер А., Решетов А., Решетов Л. Об интерференции, дельфинах и летучих мышах	5	18
Ефашкин Г. Электреты — диэлектрические аналоги магнитов	6	10
— • —	7	4
Зуев В. Триггерный эффект в человеческом организме	10	20
Кремер А. Сожжем что-нибудь?	12	8

Лалаянц И., Милованова А. Физика против мошенников 8 7
Мандельштам Л. Почему физика нужна инженеру? 2 16
Мигдал А. Вычисления без вычислений 3 2
Митрофанов А. Полеты в струе и наяву 9 2
Носов Ю. Голографическая память 10 13
Сахаров А. Существует ли элементарная длина? 5 2
Сурдин В., Ламзин С. Формула рождения звезд 11 10
Фабрикант В. Моя первая научная неудача 4 20
Файнгольд М. Сверхсветовая тень и взрывающиеся квазары 12 2
Шур А. Спутниковое телевидение 1 3

Из истории науки

Философская беседа — украшение обеда 10 66

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 5 23
Задачи М1261 — М1320, Ф1268—Ф1327 1—12
Решения задач М1236 — М1290, Ф1248—Ф1307 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 1, 4, 7, 10

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—12
Акулич И. Литературно-художественные задачи 10 37
Депман И., Виленкин Н. Числовые фокусы 2 36
Волков А. Арифметика Леонтия Магницкого 7 42
—»— Как появилась метрическая система мер 8 33
Игнатьев Е. О шифрах 4 36
Коржуев А. Физика, Незнайка и другие 9 30
Крыжановский Л. Загадка лейденской банки 11 28
Мадер В. Диаграммы Эйлера — Венна 12 35
Панцулая А. Огни святого Эльма у вас дома 7 36
Тихомирова С. Задачи про свет и цвет 1 31
Уокер Дж. Движение в час пик 3 32
—»— Как кипит вода? 5 34
—»— 6 33
Слово об учителе Волкове 7 42

* * *

Победители конкурса «Математика 6—8» 10 42
Конкурс «Математика 6—8» 1—5, 9—12

Качественные задачи по физике

«Велосипедная» задача 1 45
Как дерево спасает от дождя? 7 45
О «велосипедной» задаче 7 45

Калейдоскоп «Кванта»

(Материалы этого раздела подготовили *Савин А.*— по математике и *Леонович А.*— по физике)

Длина 1 40
Работа 2 •
Многочлены 3 •
Квант 4 •
Равносторонний треугольник 5 •
Количество движения 6 •
Площадь 7 •
Момент 8 •
Сфера и шар 9 •
Температура 10 •
Лист Мёбиуса 11 •
Закон Джоуля — Ленца 12 •

Р — значит ракета

Бурдаков В. Озон, вулканы и... ракеты 8 50
Николаев В. 25 из 30 4 56
Сурдин В. Межзвездным перелетам помогают... звезды 9 52
Туров В. Бросайся вниз, если хочешь взлететь повыше 3 56
Феоктистов К. Ближайшие задачи в космосе 2 46
Итоги конкурса «KQ—91» 7 67
«Космическая стипендия» • •
«Вместе к Марсу!»: национальный этап 8 54

Есть идея?!

Мех дыбом 2 52

Школа в «Кванте»

Физика 9—11:

Гроза и грозоотвод 1 35
За пределы таблицы 1 38
О двух мерах взаимодействия 3 37
О ледниках, скороварках и теореме Карно 3 39
О чем рассказал спектр атома водорода 3 44
Работа сил трения 5 37
Сила Ампера в однородном магнитном поле 5 39
«Недостающие» элементы 5 43
Идеальный газ — универсальная физическая модель 9 33
Гармонические колебания — обычные и удивительные 9 36
Пока вода испаряется... 11 31
Как излучать радиоволны? 11 33
Избранные школьные задачи по физике 1,3, 5, 9, 11

Математика 9—11:

Неожиданность обратной задачи 2 38
Уравнение касательной к графику функции 2 42
Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения 4 42
Деление с остатком и сравнения по модулю 6 36
Комплексные числа 7 47
Два решения одной задачи 12 42

Лаборатория «Кванта»

Амстиславский Я. Интерференция света... на письменном столе 4 45
Бубнов В. «Грибы» под лампочкой и... война в заливе 10 44
Кочубей И. Вслед за Бойлем и Ломоносовым... 4 48
Майер В., Динерштейн В. Летающая тарелка 7 55
Чокин Д. Слинки — шагающая пружинка 6 42
Из старых опытов 8 35

Математический кружок

Алексеев Р., Курляндчик Л. Сумма минимумов и минимум суммы 3 49
Васильев Н. Геометрические вероятности 1 47
Залгаллер В. Индикатриса ширин и ее применение 11 38
Понарин Я. Гармонический четырехугольник 10 48
Шарыгин И. Чертеж в стереометрических задачах 5 47
Шарыгин И. Откуда берутся задачи? 8 42
—•— 9 42

Математические сюрпризы

Конвей Дж. Один старый факт и несколько новых 7 64

Информатика и программирование

Тарасенко Б. Алгоритмика простоты: 50 томов в кармане 6 58
Числовые атомы 7 70
Электронный плакат 8 74
Компьютерная считалочка 9 50
Простые близнецы 10 63
В сто раз быстрее 11 50

Практикум абитуриента

Александров Д. Векторные уравнения в кинематике 2 59
Волков В. Задачи на построение в тонких линзах 10 53
Горнштейн П., Полонский В., Якир М. Необходимые условия и задачи с параметрами 11 44
Гуревич Б., Малков Р. Как обмануть интеграл 12 45
Корсунский Б. Решу задачу. Возможны варианты 12 49
Можаев В. Энергия электрического поля 8 58
Орач Б. Теорема Менелая 3 52
Уроев В., Шабунин М. Об углах и окружностях 1 54
Черноуцан А. Изменение механической энергии 4 49
Шеронов А. Работа и изменение энергии идеального газа 6 45
Ярский А. От уравнения — к системе 5 62

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт 1 71
Московский институт электронного машиностроения 1 72
Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина 1 74
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 65
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 3 59
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе 3 61
Московский инженерно-физический институт 3 63
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 65
Московский институт стали и сплавов 3 66
Ленинградский государственный университет 4 64
Ленинградский государственный технический университет 4 64
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 66
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 66
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана 5 65
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 5 66
Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина 5 68
Московский институт электронной техники 5 70
Московский энергетический институт 5 72
Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1990 году 6 64

Вузы мира

Финальный экзамен по физике в США 4 69

Олимпиады

XIV Московская экономико-математическая олимпиада 8 77
Задачи заключительного тура LIV Московской математической олимпиады 9 70
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1991 года 9 71
Испанская математическая олимпиада 1990 года 9 73
XVII Всероссийская олимпиада школьников 10 57
V Иберо-американская математическая олимпиада 10 62
XXV Всесоюзная олимпиада по математике 11 55
XXV Всесоюзная олимпиада по физике 11 59
IV Всесоюзная олимпиада по информатике 11 65
XXXII Международная математическая олимпиада 12 58
XXII Международная физическая олимпиада 12 59
III Международная олимпиада по информатике 12 63
Рецензии, библиография 2 72

Информация

Малый мехмат 1 58

Всесоюзная заочная многопредметная школа 1 59
«Дружба — 90» 1 62
ФМШ при МГУ и НГУ 1 63
Участникам Научно-технической конференции в МФТИ 1 64
Конкурс «KQ—91» 1 65
Заочная физическая школа при МГУ 4 61
Юные математики встречаются на Кубани 4 62
II Фестиваль юных математиков в Краснодаре 4 63
Москва — Сеул 5 58
ЗИФМШ объявляет прием 5 59
Заочная школа при НГУ 7 74
Зимняя школа в Нижнем Тагиле 7 76
Всесоюзная статистическая ассоциация 7 77
Экономико-математическая школа при МГУ 8 31
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 48
Новое в электронике 9 60
Заочная аэрокосмическая школа 11 17
Заочная биолого-математическая олимпиада 11 68
Конференция в Обнинске 11 70
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 66
Задачи заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ 12 69

Игры и головоломки

Реверси 1 66
Числовые фризы 3 69
Коммутативная головоломка Эрне Рубика 6 60
Числовой тест 7 68
Игра шакур 8 70
 Аховы тесты 9 68
Ташкентская линейка 10 68
Ханойская башня 11 52
Двенадцать долларов, ним и шоколадка 12 51

Фантастика

Бир Г. Музыка, звучащая в крови 5 52
— » — 6 50
— » — 7 60
Пирс Дж. Д. Инвариантный 10 70
Пол Ф. Я — это другое дело 2 54
Слезар Г. День экзамена 12 54
Ташнет Л. Практичное изобретение 8 64
Шоу Боб. Свет былого 9 62

«Квант» улыбается

Забавные высказывания 1 9
Можно ли построить правильный $2^{16}(2^{16}+1)$-угольник? 3 58
ЭВМ «УКСУС» 4 55
Полуправда о полупроводниках 6 76
Мой анекдотарий 7 46
Пространство 7 73
Доказательство по индукции — » —
Паули в раю — » —
Фразы — » —
Прямая речь (физико-математическая) 8 21
Дома на воде 8 56
Программа, предотвращающая сбои ЭВМ 8 76
«Гениальные» изречения учащихся 9 11
— » — 9 59
В ночь перед Рождеством 12 71

Нам пишут 2, 5, 7, 10, 12

Реклама 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 12

Смесь 6, 8, 12

Шахматная страничка 3-я

Охота на мустанга 1 с. обл.
Шахматно-демократическая задача 2 »

АНКЕТА 12 — 91

Благодарим всех читателей, приславших свои ответы на вопросы анкеты и пожелания. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале — его содержании и оформлении.

Мы продолжаем публикацию нашей анкеты (для новых читателей: она появляется в журнале раз в три месяца).

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12 — 91».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________________

____

3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились? ____________________

____

____

Новости микромира 3 •
«Мефисто» в ударе 4 •
Сила и бессилие компьютера 5 •
Единственные расстановки 6 •
Рекорды, рекорды... 7 •
Макси-рекорды 8 •
Эволюция одного рекорда 9 •
Во время матча 10 •
Путеводитель по сказочным шахматам ♛ 11 •
Гроссмейстеры против «Дип сот» 12 •

Наша анкета 3, 6, 9, 12
Мы спрашиваем — нам отвечают 5 61

Вы использовали при подготовке к уроку? ________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ________

5. Какая обложка из номеров 10—12 Вам больше всего понравилась? ________

6. Ваши вопросы и пожелания: ________

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винокова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, Е. Коршунова, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Д. Крымов, Н. Кузьмина, Т. Локтикова,
С. Лухин, Э. Назаров, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 24.09.91. Подписано к печати 11.11.91.
Формат 70×100/16. Бумага офс.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,41.
Тираж 87 452 экз. Заказ 1541. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственной ассоциации предприятий, объединений и организаций полиграфической промышленности «АСПОЛ»
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ГРОССМЕЙСТЕРЫ ПРОТИВ «ДИП СОТ»

Успехи «Дип сот», уникальной американской программы, повергли в уныние многих шахматистов. Уже чуть ли не всерьез обсуждаются сроки поединка, в котором в единоборстве равных сразятся два чемпиона — «Дип сот» и Г. Каспаров. Даже сам шахматный король не исключает такого матча в скором времени.

Однако для подтверждения своих амбиций машине требовалось удачно выступить в полноценном круговом турнире с участием видных гроссмейстеров. И вот такая возможность предоставилась: весной этого года в Ганновере состоялся турнир, где семь немецких гроссмейстеров решили сразиться друг с другом, а заодно и проверить своего электронного коллегу из США (общение с «Дип сот» происходило, как обычно, по компьютерной сети связи). В борьбу с «великолепной семеркой» вступила новая версия программы «Дип сот», отличающаяся огромным быстродействием — она просматривала 10 миллионов позиций в секунду вместо 720 тысяч в первой версии (разработчики, кстати, мечтают о миллиарде).

Увы, первая попытка не удалась — в Ганновере «Дип сот» потерпела фиаско, чем немало огорчила своих поклонников. Робот набрал 2,5 очка из семи и занял предпоследнее место. Это гроссмейстерское состязание благодаря участию в нем компьютера вызвало в Германии немалый ажиотаж. Все издания подробно рассказали о турнире, привели партии «Дип сот».

В первом туре человек набросился на машину с такой энергией, будто хотел растерзать ее. Наверное, встречаясь с подобным себе, Г. Грюнберг не позволил бы такие вольности. «Дип сот» легко разобралась в тактических осложнениях и взяла верх.

Г. Грюнберг — «Дип сот»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. Kf3 a6. Позволяет белым получить сильную инициативу за пешку. **4. e4 b5 5. a4 Cb7 6. ab ab 7. Л:a8 C:a8 8. Kc3 e6 9. Ce2 c6 10. 0—0 Kd7 11. e5 Ke7 12. Cg5 Фb8 13. Ke4 Kd5 14. Фc2 h6 15. Ch4 c5 16. Лa1 cd 17. K:d4 Kb4.** Ферзь белых под боем, и скромное 18. **Фb1** сохраняло за ними лучшие шансы. Пешка e5 неуязвима, а пешка b5, наоборот, рано или поздно падет, вместе с ней рухнет и построение черных. Так, на 18...Cd5 следует простое 19. Kc3, и черные на грани поражения (19...Ф:e5 20. K:d5! Ф:d5 21. Cf3) — король застрял в центре, фигуры отстали в развитии. Человек же пускается в авантюру...

18. Л:a8? Ф:a8 19. K:b5. Угроза мата или шаха на c7 выглядит более чем серьезно, но она отражается, а качество потеряно безвозвратно. **19... K:e5!** Сыграно без предрассудков: ферзь белых пока тоже под боем и промежуточный удар конем решает дело.

20. Фd1 Kd5! 21. Kec3 Kpd7! Удивительный ход: король идет в центр, ликвидируя все опасности. **22. Cg3 Kd3!** Одной пешкой можно и поступиться. **23. b3 K:c3 24. K:c3 Фa5 25. C:d3 cd 26. Ф:d3+ Kpe8.** У черных выигранная позиция, и хотя человек сдаваться не любит, пришлось спустя 20 ходов это сделать.

После этой победы «Дип сот» вместе со своими создателями пребывала в состоянии эйфории. Казалось, что за первой победой последует вторая и т. д. Однако во втором туре после тонкого позиционного лавирования, когда обе стороны построили неприступную крепость, последовало соглашение на ничью. Кстати, роботу в этой партии против гроссмейстера К. Бишоффа трудно было предъявить какие-либо претензии. А вот в третьем туре с машиной произошел конфуз — на пятом ходу она произвела размен пешек, который вряд ли пришел бы в голову квалифицированному шахматисту...

Э. Лоброн — «Дип сот»
Дебют Рети

1. Kf3 d5 2. g3 c6 3. Cg2 Cg4 4. c4 e6 5. b3 dc? 6. bc. Итак, в результате размена на c4 черные отдали центр и уступили линию «b». Зачем?! Наверное, компьютер сначала планировал здесь 6...C:f3 7. C:f3 Фd4, выигрывая пешку. Однако, продвинувшись на ход вперед, он убедился, что в этом случае после 8. Фb3! ладью забирать невыгодно — 8...Ф:a1 9. Ф:b7 и т. д. В результате размен потерял какой-либо смысл. Гроссмейстер убедительно доказал, что подобные уступки не остаются безнаказанными.

6...Kd7 7. Cb2 Фb6 8. Фc2 Kgf6 9. 0—0 Cd6 10. d3 0—0 11. Kbd2 e5 12. Лab1 Фa6. Заняв это поле, ферзь обрек себя на жалкое существование. **13. h3 Ce6 14. Kg5 Cf5 15. Cc3 Kc5 16. e4 Cg6 17. f4 ef 18. gf Ka4 19. Ca1 Kd7 20. e5.** Пешечная масса белых готова прийти в движение, впрочем решает прямая атака на короля.

20...Cc5+ 21. Kph2 Ce3 22. Kge4 C:d2 23. K:d2 Cd5 24. Ce4 C:e4 25. K:e4 Kac5 26. Kd6 b6 27. Лg1 g6 28. f5 Kb7 29. Ke4 Фa3 30. Фd2 Kbc5 31. Фh6 Ф:a2+ 32. Лg2. Черные сдались.

В четвертом туре в немного скучноватой игре «Дип сот» одолела гроссмейстера У. Бенша и поправила свои турнирные дела. Болельщики опять воодушевились: 2,5 очка из четырех — неплохой результат, можно побороться за высокое место. Однако в дальнейшем машина не выдержала напряжения и проиграла все три оставшиеся партии. В пятом туре победу над «Дип сот» одержал самый титулованный гроссмейстер в турнире В. Унцикер, в шестом машина проиграла будущему победителю М. Вальсу, а в последнем туре безропотно сгорела против гроссмейстера Р. Тишбирека. Короче говоря, в конце турнира робот совсем расклеился... Создатели программы, анализируя после Ганновера новую версию, обнаружили в своем детище некоторые «болезни роста». Ну что же, «Дип сот» еще слишком молода, подождем до следующего подобного турнира. Пусть покажет себя.

Е. Гик

70 коп.

Индекс 70465

Наш постоянный читатель и автор И. Акулич прислал нам игру «Пирамида», купленную им в магазине, и задачу, связанную с этой игрой. Автором игры является В. Дмитриев, а предлагаемое новогоднее оформление принадлежит редакционному художнику. Попробуйте поиграть в эту игру, а потом решить задачу И. Акулича.

Правила игры

Игра состоит из игрового поля и 12 фишек 2-х цветов, по 6 каждого цвета. Играют вдвоем.

Фишки расставляют на клетках первого ряда игрового поля. Один играющий слева, другой — справа.

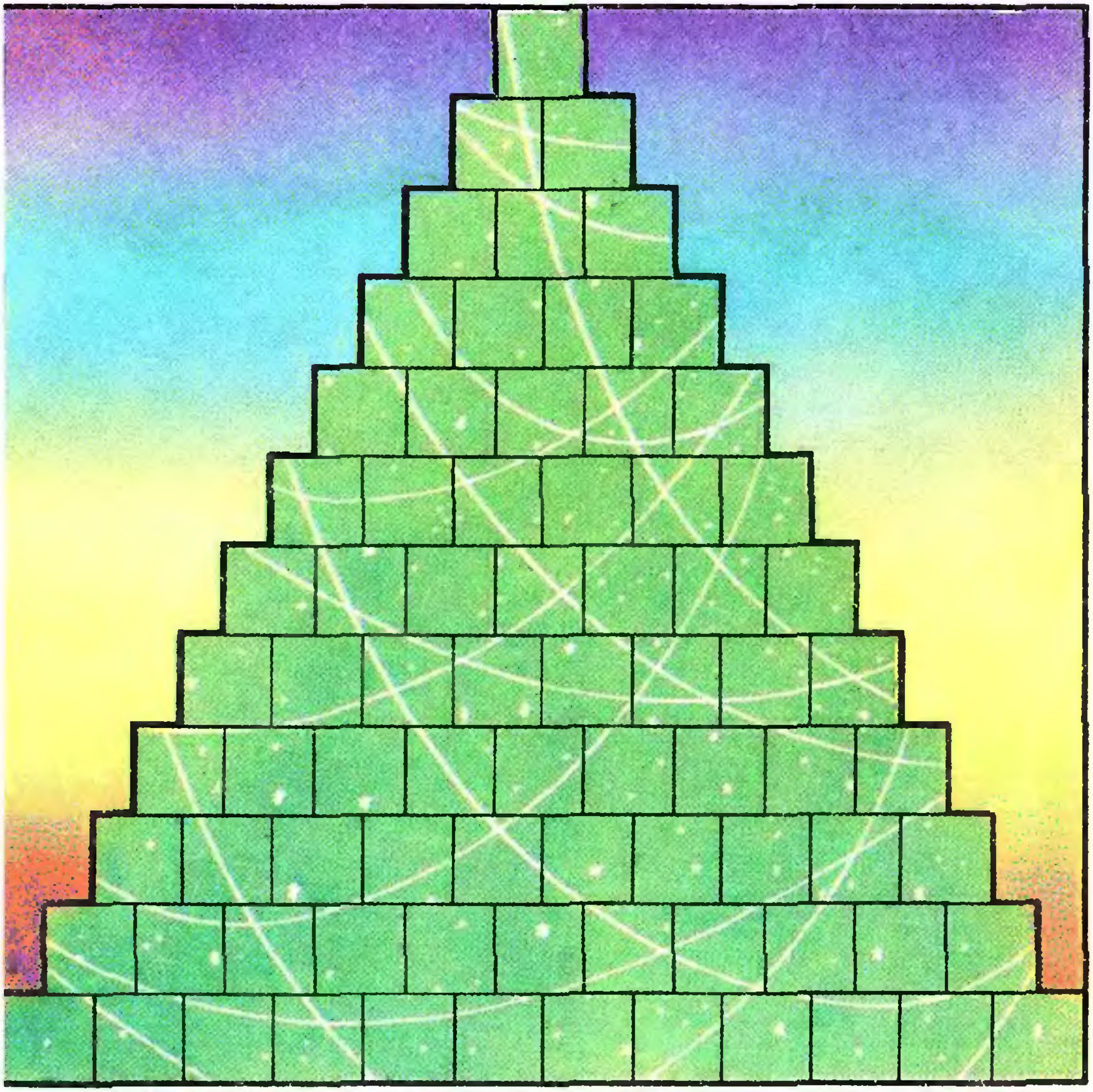
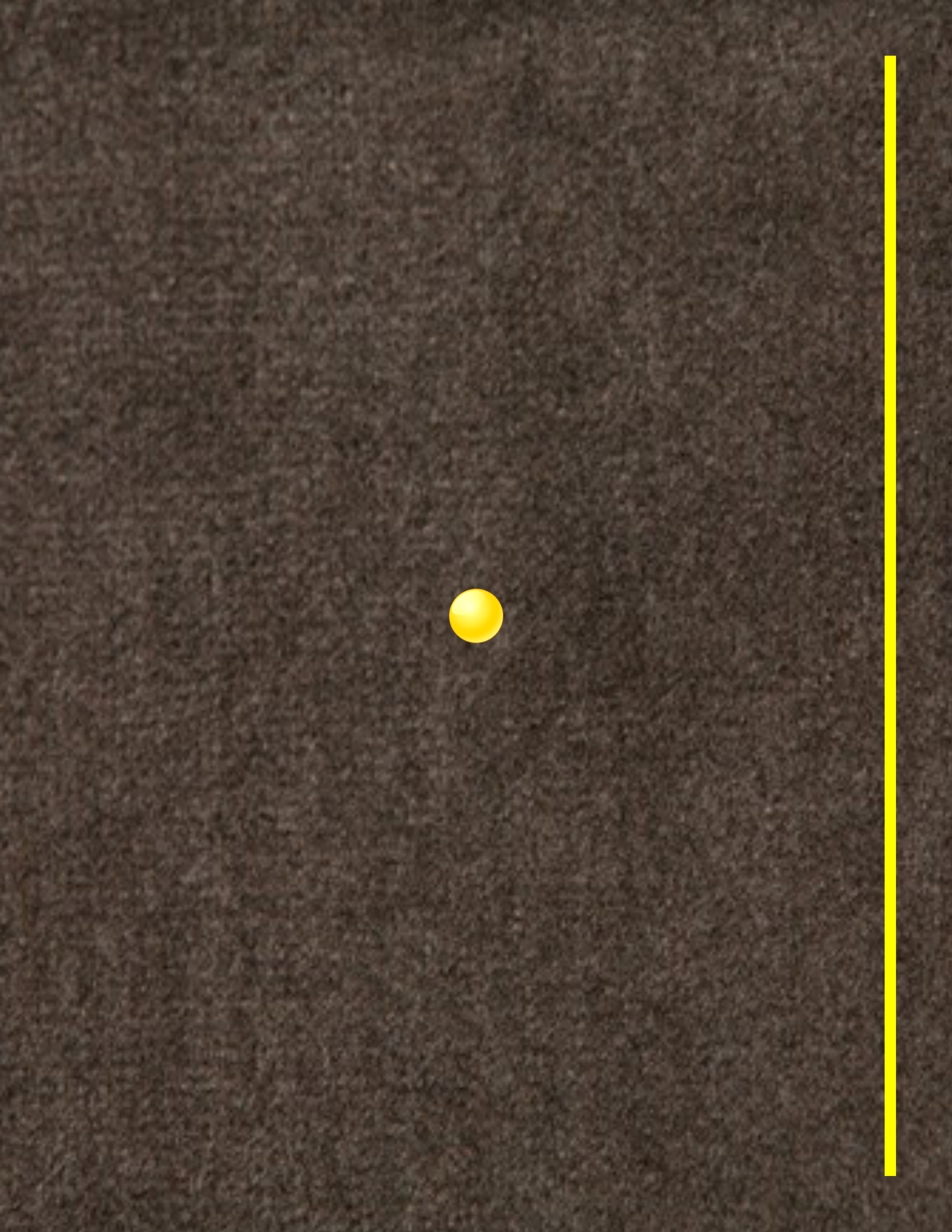
Ходят поочередно. Играющий имеет право выполнить один ход (вертикальный или горизонтальный и дополнительные продвижения).

Вертикальный ход. *Его имеет право выполнить только фишка нижнего ряда. При этом она перемещается на одну из двух соседних клеток следующего ряда.*

Горизонтальный ход. *Фишка может перемещаться по своему ряду на любое количество свободных клеток.*

Дополнительное продвижение. *В процессе игры три фишки могут занять положение треугольником (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее продвинуть на клетки следующего ряда. Побеждает тот, кто первым достигнет вершины пирамиды.*

Задача: Кто победит, если оба партнера будут играть наилучшим образом?

Решение читайте в следующем номере.